УДК 539.3
М. Сухорольський[1], докт. фіз.-мат. наук; Т. Рибак[2], докт. техн. наук; А. Бабій[2]
[1]*Національний університет "Львівська політехніка"*
[2]*Тернопільський державний технічний університет імені Івана Пулюя*

ВЗАЄМОДІЯ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ З ОПОРАМИ ЗМІННОЇ ТОВЩИНИ

В даній роботі розглядається проблема взаємодії циліндричної оболонки з пружними опорами змінної товщини. Знайдено закон зміни товщини опори за відомим законом розподілу контактного тиску.

Аналіз розв'язків контактних задачах [1,2,3] про взаємодію тонкостінних тіл з пружними та жорсткими тілами показує, що в межах теорій оболонок не можуть бути сформульовані умови реальної взаємодії тіл і, зокрема, умови контакту у пригараничних зонах областей контакту (ширина яких співмірна з товщиною тіл). У роботах [4,5,6] досліджуються умови коректності постановки граничних задач теорії оболонок. Розглядаються задачі про локальне поверхневе навантаження оболонки зусиллями, довільно розподіленими в області, діаметр якої співмірний з товщиною оболонки. Показано, що тільки середні значення напружень, віднесені до області, діаметр якої співмірний з товщиною оболонки, є реальними.

У даній роботі, спираючись на дослідження формулювань контактних задач теорії оболонок, розглядається задача вибору товщини пружних опор циліндричної оболонки за умов часткового постулювання закону розподілу контактних напружень. Побудова числових розв'язків задач ґрунтується на послідовнісному підході до побудови узагальнених розв'язків крайових задач теорії оболонок методом Фур'є.

1. Математична модель оболонки. Розглядаємо трансверсально-ізотропну циліндричну оболонку, що знаходиться під дією поверхневого навантаження. Оболонка віднесена до ортогональної системи координат $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, де $\alpha_1, \alpha_2 = R\varphi$ - осьова і тангенціальна координати в серединній поверхні *S*; α_3 - нормальна до серединної поверхні координата; $2h$ - товщина оболонки.

Напружено-деформований стан оболонки визначаємо рівняннями теорії пологих оболонок типу Тимошенка [2,7]:

рівняння рівноваги

$$\frac{\partial N_{i1}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial N_{i2}}{\partial \alpha_2} = -2\sigma_i^-, \quad \frac{\partial M_{i1}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial M_{i2}}{\partial \alpha_2} - Q_i = -2h\sigma_i^+,$$
$$\frac{\partial Q_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial \alpha_2} - \left(k_1 N_{22} + k_2 N_{22}\right) = -2\sigma_3^- \quad (i = 1, 2); \tag{1}$$

рівняннями фізичного закону (в розгорнутому вигляді)

$$N_{ii} = B\left(\frac{\partial u_i}{\partial \alpha_i} + \nu \frac{\partial u_j}{\partial \alpha_j} + \left(k_i + \nu k_j\right) w\right), \; N_{12} = N_{21} = \frac{B(1-\nu)}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2}\right),$$

$$M_{ii} = D\left(\frac{\partial \gamma_i}{\partial \alpha_i} + \nu \frac{\partial \gamma_j}{\partial \alpha_j}\right), \ M_{12} = M_{21} = \frac{D(1-\nu)}{2}\left(\frac{\partial \gamma_2}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial \gamma_1}{\partial \alpha_2}\right), \tag{2}$$

$$Q_i = \Lambda'\left(\gamma_i + \frac{\partial w}{\partial \alpha_i}\right), \ (i, j = 1, 2, \ i \neq j),$$

де $B = \dfrac{2hE}{1-\nu^2}$; $D = \dfrac{2h^3 E}{3(1-\nu^2)}$; $\Lambda = \dfrac{5hG'}{3}$; $2\sigma_i^{\pm} = \sigma_{i3}^{+} \pm \sigma_{i3}^{-}$ $(i = 1,2,3)$; $\sigma_{i3}^{\pm} = \sigma_{i3}(\alpha_1, \alpha_2, \pm h)$ - задані на лицевих поверхнях напруження; $k_1 = 0, k_2 = 1/R$ - головні кривини серединної поверхні; E, G', ν - пружні характеристики матеріалу.

Напруження і переміщення визначаються за такими формулами:

$$\sigma_{ij} = \frac{N_{ij}}{2h} + \frac{3M_{ij}}{2h^3}\alpha_3, \ \sigma_{3i} = \frac{3Q_i}{4h}\left(1 - \frac{\alpha_3^2}{h^2}\right) + \frac{\sigma_i^{+}}{2}\left(\frac{3\alpha_3^2}{h^2} - 1\right) + \sigma_i^{-}\frac{\alpha_3}{h},$$

$$\sigma_{33} = \sigma_3^{+} + \sigma_3^{-}\frac{\alpha_3}{h}, \ (i, j = 1, 2, \ i \neq j), \tag{3}$$

$$U_i = u_i(\alpha_1, \alpha_2) + \gamma_i(\alpha_1, \alpha_2)\alpha_3, \quad U_3 = w(\alpha_1, \alpha_2).$$

Граничні умови формулюються відносно приведених до серединної поверхні величин u_i, w, γ_i, $N_i = N_{i1}n_1 + N_{i2}n_2$, $Q_n = Q_1 n_1 + Q_2 n_2$, $M_i = M_{i1}n_1 + M_{i2}n_2$, $(i = 1,2)$, де $\{n_1, n_2, 0\}$ - одиничний вектор, нормальний до границі серединної поверхні.

Розглядаючи рівняння (1), (2) для випадку відсутності тангенціальних компонент зовнішнього поверхневого навантаження $(\sigma_1^{\pm} = 0, \sigma_2^{\pm} = 0)$, зведемо їх за аналогією з [2] до системи двох ключових рівнянь. Ввівши функцію $\phi = \phi(\alpha_1, \alpha_2)$, за формулами

$$N_{11} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial \alpha_2^2}, \quad N_{22} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial \alpha_1^2}, \quad N_{12} = N_{21} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2},$$

і виключивши з системи рівнянь (1), (2) переміщення u_1, u_2, сили та моменти, одержимо

$$D\Delta\left(\frac{\partial \gamma_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial \alpha_2}\right) - k_2\frac{\partial^2 \phi}{\partial \alpha_1^2} = -2\sigma_3^{-}, \ \Delta\Delta\phi - B(1-\nu^2)k_2\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1^2} = 0, \tag{4}$$

$$\left(\Delta - \frac{\Lambda'}{D}\right)\left(\frac{\partial \gamma_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial \alpha_2}\right) - \frac{\Lambda'}{D}\Delta w = 0, \ \left(\Delta - \frac{2\Lambda'}{D(1-\nu^2)}\right)\left(\frac{\partial \gamma_1}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial \gamma_2}{\partial \alpha_1}\right) = 0,$$

де $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2}$.

Тангенціальні переміщення і кути повороту серединної поверхні визначаємо з рівнянь

$$\frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} = \frac{1}{B(1-\nu^2)}\left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2} - \nu\frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2}\right)\phi - k_1 w,$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} = \frac{1}{B(1-\nu^2)}\left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} - \nu\frac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2}\right)\phi - k_2 w,$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1} = -\frac{2}{B(1-\nu)}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2},$$

$$\frac{\partial\gamma_1}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial\gamma_2}{\partial\alpha_2}=-\Delta w-\frac{2\sigma_3^-}{\Lambda'},$$

$$\Delta\left(\frac{\partial\gamma_1}{\partial\alpha_2}-\frac{\partial\gamma_2}{\partial\alpha_1}\right)-\frac{2\Lambda'}{D\left(1-\nu^2\right)}\left(\frac{\partial\gamma_1}{\partial\alpha_2}-\frac{\partial\gamma_2}{\partial\alpha_1}\right)=0.$$

Для визначення прогину оболонки одержимо з перших трьох рівнянь системи (4) таке рівняння:

$$\Delta\Delta\Delta\Delta w-\frac{k_2^2B\left(1-\nu^2\right)}{\Lambda'}\left(\Delta-\frac{\Lambda'}{D}\right)\frac{\partial^4 w}{\partial\alpha_1^4}=-\frac{2}{\Lambda'}\left(\Delta-\frac{\Lambda'}{D}\right)\Delta\Delta\sigma_3^-. \qquad (5)$$

2. Постановка задачі. Розглянемо замкнену циліндричну оболонку, що взаємодіє з двома симетричними пружними опорами змінної товщини $h_0=h_0(\alpha_2)$. Довжина і радіус оболонки відповідно l_1 і R, її краї шарнірно обперті. Оболонка навантажена заданими нормальними напруженнями σ_{33}^- і взаємодіє з опорами вздовж смуг

$$D_1=\left\{(\alpha_1,\alpha_2):\left|\alpha_1-\alpha_1^0\right|<b;\left|\alpha_2-\alpha_2^0\right|<s\right\},$$

$$D_2=\left\{(\alpha_1,\alpha_2):\left|\alpha_1-\left(l_1-\alpha_1^0\right)\right|<b;\left|\alpha_2-\alpha_2^0\right|<s\right\},$$

де $2b, 2s$ - ширина і довжина опор. В області контакту наявні тільки нормальні напруження σ_{33}^+ і відсутні дотичні напруження,

$$\sigma_{13}^{\pm}=0,\quad \sigma_{23}^{\pm}=0,\ \sigma_{33}^-=p_0(\alpha_1,\alpha_2),$$

$$\sigma_{33}^+=\begin{cases} q\left(\alpha_1-\alpha_1^0,\alpha_2\right), & (\alpha_1,\alpha_2)\in D_1,\\ q\left(\alpha_1-\left(l_1-\alpha_1^0\right),\alpha_2\right), & (\alpha_1,\alpha_2)\in D_2,\\ 0, & (\alpha_1,\alpha_2)\notin D_1\cup D_2.\end{cases} \qquad (6)$$

Задаємо закон розподілу контактних напружень

$$q(\alpha_1,\alpha_2)=\frac{Q_0a_2}{4bsh(a_2s)}ch(a_2\alpha_2),\quad |\alpha_1|\le b,\ |\alpha_2|\le s, \qquad (7)$$

де Q_0 - рівнодійна контактного тиску на одній опорі; a_2 - задана величина, що визначає розподіл контактного тиску за тангенціальною координатою.

Напружено-деформований стан оболонки описується рівняннями (1)–(5). Шарнірному обпиранню країв оболонки відповідають такі граничні умови:

$$w(\alpha_1,\alpha_2)\big|_{\alpha_1=0}=0,\quad w(\alpha_1,\alpha_2)\big|_{\alpha_1=l_1}=0,$$

$$N_{11}(\alpha_1,\alpha_2)\big|_{\alpha_1=0}=0,\quad N_{11}(\alpha_1,\alpha_2)\big|_{\alpha_1=l_1}=0, \qquad (8)$$

$$M_{11}(\alpha_1,\alpha_2)\big|_{\alpha_1=0}=0,\quad M_{11}(\alpha_1,\alpha_2)\big|_{\alpha_1=l_1}=0.$$

В областях контакту задаємо рівність нормальних переміщень оболонки і опор вздовж серединних ліній L_1, L_2 областей контакту

$$w\left(\alpha_1^0,\alpha_2\right)=w_1(\alpha_2),\quad \left(\alpha_1^0,\alpha_2\right)\in L_1, \qquad (9)$$

$$w\left(\alpha_1^0,\alpha_2\right)=w_2\left(\alpha_2\right), \quad \left(\alpha_1^0,\alpha_2\right)\in L_2,$$

де $w_i = w_i\left(\alpha_2\right)$ - нормальні (до серединної поверхні оболонки) переміщення опор.

Задача полягає у відшуканні змінної товщини опор за умови, що контактні напруження (6) розподілені за законом (7).

3. Деформування опор. Розглядаємо тільки приведені до ліній L_1 і L_2 сили і моменти, що діють в опорах за напрямом осі α_2. Рівняння, що описують напружено-деформований стан опор, одержимо з рівнянь (1), (2), знехтувавши силами і моментами у напрямі координати α_1, а також знехтувавши поперечними зсувних та мембранними деформаціями. За відсутності тангенціальних навантажень основні рівняння набудуть вигляду

$$\frac{dN_i}{d\alpha_2}=0, \quad \frac{dQ_i}{d\alpha_2}-k_2N_i=-2bq, \quad \frac{dM_i}{d\alpha_2}-Q_i=0, \; M_i=-\frac{bh_i^3E_i}{6}\frac{d^2w_i}{d\alpha_2^2}, \tag{10}$$

де $k_2=\frac{1}{R}$; N_i, Q_i, M_i - зусилля в опорах; E_i - модуль Юнга; w_i - прогин опор; $2bq$ - навантаження на опори.

Вирішивши перші три рівняння (10) на відрізку $0\le\alpha_2\le s$ з урахуванням відсутності зусиль на кінцях опор, $Q_i(s)=0$, $M_i(s)=0$, $N_i(s)=0$ і умови симетричності опор $h_0\left(-\alpha_2\right)=h_0\left(\alpha_2\right)$, знайдемо

$$N_i\left(\alpha_2\right)=0, \; M_i\left(\alpha_2\right)=-2b\int_{\alpha_2}^{s}\left(t-\alpha_2\right)q\left(\alpha_1,t\right)dt, \; Q_i\left(\alpha_2\right)=2b\int_{\alpha_2}^{s}q\left(\alpha_1,t\right)dt. \tag{11}$$

З другої формули (11) з урахуванням умов контакту (9) і виразу для моменту (10), знайдемо формулу для визначення товщини опор

$$h_i^3\left(\alpha_2\right)=\frac{12}{E_i}\left[\int_{\alpha_2}^{s}\left(t-\alpha_2\right)q\left(\alpha_1,t\right)dt\right]\left(\frac{d^2w}{d\alpha_2^2}\right)^{-1} \quad \left(\alpha_1=\alpha_1^0, \quad \alpha_1=l_1-\alpha_1^0\right) \tag{12}$$

або з урахуванням виразу контактного тиску (7) $q\left(\alpha_1,\alpha_2\right)=\frac{Q_0a_2}{4bsh\left(a_2s\right)}ch\left(a_2\alpha_2\right)$,

$$h_i^3\left(\alpha_2\right)=\frac{3Q_0\left[a_2\left(s-\alpha_2\right)sh\left(a_2s\right)+ch\left(a_2\alpha_2\right)-ch\left(a_2s\right)\right]}{E_ia_2b\,sh\left(a_2s\right)}\left(\frac{d^2w}{d\alpha_2^2}\right)^{-1}.$$

Для випадку сталого тиску $q=const$ $\left(Q_0=4sbq\right)$ маємо вираз

$$h_i^3\left(\alpha_2\right)=\frac{3Q_0\left(s-\alpha_2\right)^2}{2E_isb}\left(\frac{d^2w}{d\alpha_2^2}\right)^{-1}. \tag{13}$$

Рівнодійна контактного тиску визначається з умови рівності нулю рівнодійної зовнішнього навантаження на оболонку.

4. Побудова узагальненого розв'язку допоміжної задачі. Розглянемо задачу про навантаження шарнірно обпертої циліндричної оболонки зусиллями (6). Функції (7), що моделюють взаємодію оболонки і опор, є кусково-неперервними функціями координат серединної поверхні оболонки, і тому зображуються умовно збіжними (у класичному розумінні суми) рядами. Ґрунтуючись на послідовнісному підході до побудови узагальнених розв'язків некоректно сформульованих крайових задач [4,8], зовнішнє навантаження на оболонку $\sigma_{33}^-=\sigma^-\left(\alpha_1,\alpha_2\right)$ і контактний тиск (6) зобразимо у вигляді границь слабкозбіжних послідовностей функцій, які також збігаються рівномірно в будь-якій області, в якій ці функції неперервні,

$$\sigma_{33}^{-}(\alpha_1,\alpha_2)=\lim_{n\to\infty}\sigma_n^{-}(\alpha_1,\alpha_2),\ \sigma_{33}^{+}(\alpha_1,\alpha_2)=\lim_{n\to\infty}\sigma_n^{+}(\alpha_1,\alpha_2) \tag{14}$$

де $\sigma_n^{-}(\alpha_1,\alpha_2)=\sum_{\substack{k=1,3,...\\ m=0,1,...}}^{n} c_{km}(\varepsilon_n)\sigma_{km}^{-}\Phi_{km}^{3}(\alpha_1,\alpha_2)$, $\sigma_n^{+}(\alpha_1,\alpha_2)=\sum_{\substack{k=1,3,...\\ m=0,1,...}}^{n} c_{km}(\varepsilon_n)\sigma_{km}^{+}\Phi_{km}^{3}(\alpha_1,\alpha_2)$ - узагальнені частинні суми рядів Фур'є; $c_{km}(\varepsilon)=\varphi(\lambda_{1k}\varepsilon)\varphi(\lambda_{2m}\varepsilon)$; $\lambda_{1k}=\dfrac{k\pi}{l_1}$; $\lambda_{2m}=\dfrac{m\pi}{l_2}$;

$\Phi_{km}^{3}(\alpha_1,\alpha_2)=\sin(\lambda_{1k}\alpha_1)\sin(\lambda_{2m}\alpha_2)$; $\varphi(\lambda)=\left[\dfrac{\sin(\lambda/2)}{\lambda/2}\right]^2$; $\varepsilon=\varepsilon_n$ - нескінченно мала послідовність, $\varepsilon_n=\mathrm{O}\left(\dfrac{1}{n^r}\right), 0<r<1$; σ_{km}^{-} - коефіцієнти Фур'є функції $\sigma_{33}^{-}(\alpha_1,\alpha_2)$;

$\sigma_{km}^{+}=\dfrac{4Q_0a_2}{\pi bl_1}\dfrac{I(Ra_2,m)\delta_m\sin(\lambda_{1k}b)\sin(\lambda_{1k}\alpha_1^0)}{\lambda_{1k}sh(Ra_2\varphi_0)}$ - коефіцієнти Фур'є функції $\sigma_{33}^{+}(\alpha_1,\alpha_2)$; $\delta_0=\dfrac{1}{2}$; $\delta_m=1$, якщо $m=1,2,...$;

$$I(a,m)=\int_0^{\varphi_0} ch(a\varphi)cos(m\varphi)d\varphi=\frac{mch(a\varphi_0)sin(m\varphi_0)+a\,sh(a\varphi_0)cos(m\varphi_0)}{(a^2+m^2)}.$$

Прогин оболонки зобразимо згідно з (14) у вигляді границі послідовності

$$w(\alpha_1,\alpha_2)=\lim_{n\to\infty}w_n(\alpha_1,\alpha_2), \tag{15}$$

де $w_n(\alpha_1,\alpha_2)=\dfrac{1}{B}\sum_{\substack{k=1,3,...\\ m=0,1,...}}^{n} c_{km}(\varepsilon_n)w_{km}(\sigma_{km}^{+}-\sigma_{km}^{-})\Phi_{km}^{3}(\alpha_1,\alpha_2)$ - узагальнені частинні суми тригонометричного ряду функції $w(\alpha_1,\alpha_2)$.

Зауважимо, що члени цих послідовностей функцій, а також їхні граничні елементи задовольняють умови (8).

Підставивши варіанту послідовності (15) у рівняння (5) з урахуванням того, що $\sigma_{km}^{+}-\sigma_{km}^{-}$ - коефіцієнти Фур'є функції $2\sigma_3^{-}=\sigma_{33}^{+}-\sigma_{33}^{-}$, знайдемо коефіцієнти ряду для прогину оболонки

$$w_{km}=\frac{1}{\Lambda'}(\Delta_{km})^2\left(\Delta_{km}+\frac{\Lambda'}{D}\right)\left[(\Delta_{km})^4+\frac{k_2^2B(1-\nu^2)}{\Lambda'}\left(\Delta_{km}+\frac{\Lambda'}{D}\right)(\lambda_{1k})^4\right]^{-1},$$

де $\Delta_{km}=\lambda_{1k}^2+\lambda_{2m}^2$.

Вираз прогину оболонки у вигляді границі послідовності частинних сум (15) є узагальненим розв'язком задачі (5), (6), (8).

5. Побудова наближеного розв'язку вихідної задачі. Висновки. Обчислення числових значень розв'язку допоміжної задачі ґрунтується на наближенні сум рядів (17) відповідними їх частинними сумами. Якщо у розвиненнях (12) і (17) зафіксувати параметр $\varepsilon\approx h$, де $2h$ - товщина оболонки, і вважати, що n - достатньо великий номер, то згідно з дослідженнями, проведеними у роботі [5], наближений розв'язок є ближчим до точного розв'язку (одержаного з використанням просторових рівнянь теорії пружності), ніж узагальнений розв'язок (17) (одержаний в межах рівнянь теорії оболонок). При цьому достатньо високу точність числових результатів забезпечує умова $n\pi\varepsilon/l_i>>1$ і, відповідно, $n>>l_i/(\pi\varepsilon)$.

Зазначимо, що наближення функції у точці узагальненою частинною сумою відповідного тригонометричного ряду ототожнюється з усередненням цієї функції на відрізку ширини 2ε з центром у заданій точці.

Таким чином, наближений розв'язок задачі (5), (6), (8)

$$w(\alpha_1, \alpha_2) \approx \frac{1}{B} \sum_{\substack{k=1,3,... \\ m=0,1,...}}^{n} c_{km}(\varepsilon_n) w_{km} \left(\sigma_{km}^{+} - \sigma_{km}^{-}\right) \Phi_{km}^{3}(\alpha_1, \alpha_2) \tag{16}$$

за умови $n >> l_i / (\pi\varepsilon)$ є оптимальним в розумінні відповідності до реальних умов навантаження, коректності застосування рівнянь теорії оболонок та збіжності рядів.

Підставивши вираз прогину оболонки (16) при $\alpha_1 = \alpha_1^0$ або $\alpha_1 = l_1 - \alpha_1^0$ у формулу (12) з урахуванням умов контакту (9), одержимо формулу, що встановлює залежність товщини опор від закону розподілу контактного тиску (7)

$$h_i^3(\alpha_2) = \frac{12B}{E_i} \left[\int_{\alpha_2}^{s} (t - \alpha_2) q\left(\alpha_1^0, t\right) dt \right] \left[\sum_{\substack{k=1,3,... \\ m=0,1,...}}^{n} c_{km}(\varepsilon_n) w_{km} \left(\sigma_{km}^{+} - \sigma_{km}^{-}\right) \Phi_{km}^{3}\left(\alpha_1^0, \alpha_2\right) \right]^{-1},$$

де $\varepsilon \approx h$ і $n >> l_i / (\pi\varepsilon)$.

Визначальним в одержаній формулі для товщини опор є параметр a_2, який характеризує різницю значень контактного тиску в середній і пригранічній зонах області контакту. Зокрема, якщо $a_2 = 0$, то справедлива гіпотеза про сталий контактний тиск у всій області контакту.

The problem of the interaction of the cylindrical shell and the elastic supports with variable thickness is considered in the paper. The law of the variability of the thickness of supports on condition of postulation of the law of contact pressure distribution is found.

Література

1. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. - М.: Наука, 1983. – 488 с.
2. Пелех Б.Л., Сухорольский М.А. Контактные задачи теории упругих анизотропных оболочек. – Киев: Наук. думка, 1980. – 216 с.
3. Григолюк Э,И., Толкачев В.М. Контактные задачи теории пластин и оболочек. - М.: Машиностроение, 1980. - 411 с.
4. Бурак Я.Й., Рудавський Ю.К., Сухорольський М.А. Узагальнені розв'язки Фур'є крайових задач теорії оболонок // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 2001. – Т. 44, №4. – С. 57-62.
5. Сухорольський М.А. Узагальнений розв'язок задачі про локальне навантаження шару // Вісник Львів. ун-ту. Серія прикладна математика та інформатика. – 2004. –Вип. 8. - С. 176-181.
6. Bijlaard P. Stresses from local loadings in cylindrical pressure vessels // Transactions of the ASME. – 1955. - V. 77, N 6. - P. 805-816.
7. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. - М.: Физматгиз, 1963. - 635 с.
8. Рівняння математичної фізики. Узагальнені розв'язки крайових задач / Рудавський Ю.К., Костробій П.П., Сухорольський М.А. та ін. – Львів: Національний ун-т „Львівська політехніка”, 2002. – 226 с.

Одержано 04.01.2005 р.