

УМОВНО ПЕРІОДИЧНІ ВИПАДКОВІ ПРОЦЕСИ ІЗ ЗМІННИМ ПЕРІОДОМ

Введено новий клас випадкових процесів – клас умовно періодичних випадкових процесів із змінним періодом. Наведено означення коефіцієнтів трансформації періоду та перетворення процесу, які є важливими характеристиками процесів із змінним періодом. Вказано, що ці процеси мають місце в сигналах, які спостерігаються в перехідних режимах стохастичних ритмічних систем. Наголошено, що на основі введеного класу процесів можуть бути вирішені ряд задач теоретичного і прикладного характеру. Запропоновано метод вибору кроку дискретизації для проведення статистичного аналізу цих процесів.

Вступ. Серед випадкових процесів і методів їх дослідження значна увага за останні 30-40 років приділялася періодичним випадковим процесам. Це зв'язано з тим, що в оточуючому нас світі спостерігається досить багато сигналів, явищ, систем, характерною особливістю яких є стохастична періодичність (ритмічність, циклічність). Ритмічними є навантаження енергосистем, графіки газоспоживання, вхідні потоки більшості систем масового обслуговування, зокрема інтенсивність телефонних викликів на АТС, інформаційні потоки в інтернет-мережах, локальних комп'ютерних мережах. Ритмічно пульсує випромінювання зірок, всередині яких відбуваються циклічні ядерні реакції; рух Місяця викликає циклічні припливи і відпливи на Землі. В земній іоносфері та атмосфері циркулюють заряджені частинки сонячного вітру, які внаслідок обертання Землі навколо своєї осі породжують ритмічні збурення навколоземного магнітного поля. Ритмічними є деякі метеофактори, зокрема температура та освітленість, причому для них, крім добової ритмічності, має місце сезонна ритмічність. Багато ритмічних сигналів спостерігається в біомедицині. В першу чергу, це ритмічна робота серця, ритмічне дихання, до ритміки схильний психофізичний стан людей. Приклади ритмічних сигналів легко навести із механіки, гідроакустики тощо.

Для вивчення ритмічних сигналів використовуються ряд моделей, які певним чином враховують їх стохастичну періодичність. Це періодично корельовані випадкові процеси (ПКВП) [1], періодичні випадкові процеси (ПВП) за Слуцьким [2], лінійні періодичні [3,4] та періодично корельовані випадкові процеси [5], періодичні білі шуми з неперервним [6] та дискретним [7,8] аргументами, марківські періодичні процеси [9,10] та ланцюги [11]. На базі цих моделей розроблено ряд методів їх статистичного аналізу [4,9], прогнозу [9,11], імітаційного моделювання [3,7-9].

Але одночасно із наявними результатами щодо можливостей дослідження стохастично періодичних сигналів якимось поза увагою науковців залишилися стохастичні сигнали, які можна назвати стохастично періодичними лише умовно. Вважається, що період, через який повторюються певні ймовірнісні характеристики таких сигналів (наприклад, моментні функції), в свою чергу теж змінюється, тобто є деякою функцією часу (чи іншого аргументу). Яскравим прикладом тут може бути електрокардіограма пацієнта, отримана відразу ж після фізичного навантаження і яка розглядається протягом деякого проміжку часу, коли пульс приходить в "норму". На рисунках 1а-1в якраз наведені три відрізки електрокардіограми, кожний тривалістю 3 сек., взяті через певні проміжки часу після дії навантаження. На рис. 1а – електрокардіограма отримана через 60 сек. після дії навантаження, на рис 1б і 1в – відповідно через 120 сек. і 180 сек. після навантаження. Аналізуючи графіки, видно, що форма електрокардіограми приблизно повторюється як на кожному із графіків, так і на різних графіках. Але при цьому легко бачити, що період повторюваності змінюється, а саме збільшується, та із плином часом стабілізується, що відповідає зменшенню частоти пульсу і його наближенню до „норми”.

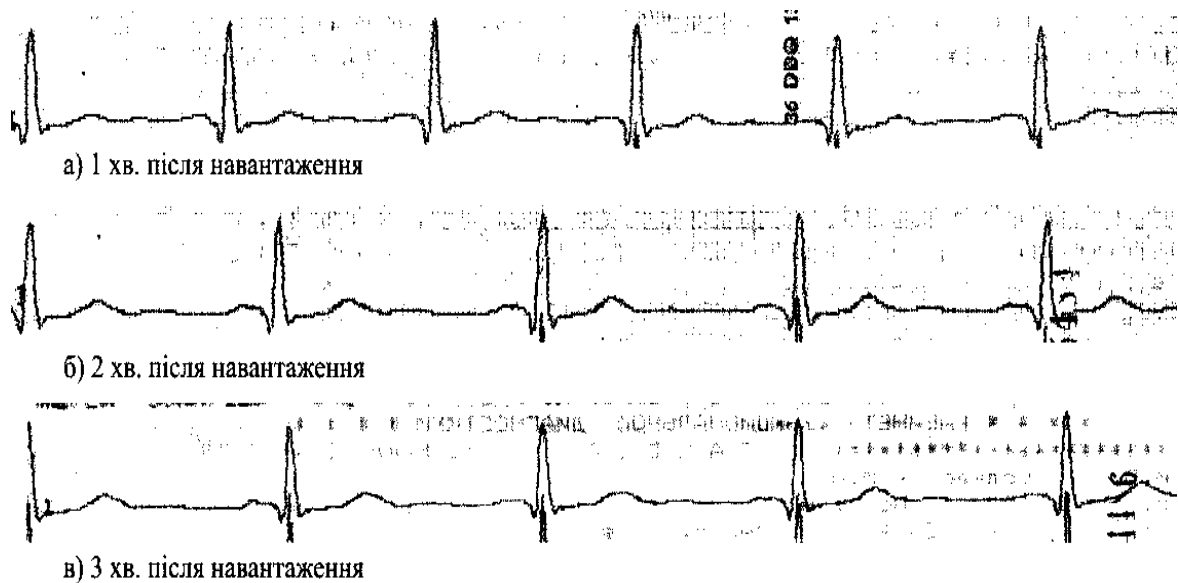


Рис. 1. Відрізки електрокардіограми, отримані через різні проміжки часу після дії навантаження

Очевидно, подібною до кардіограми буде поведінка спірограми, теж отриманої після дії навантаження чи іншого збудника психофізичного стану людини. Приклади аналогічних сигналів можна також навести із багатьох технічних систем. Це може бути робота двигунів, дизель-генераторів в перехідних режимах, тобто після зміни зовнішнього навантаження; коливання стохастичних систем при миттєвій чи динамічній зміні їх параметрів (маса, індуктивність, ємність, довжина маятника тощо).

Виникає природне запитання, як досліджувати періодичні випадкові сигнали, явища, процеси із змінним періодом? Якщо для періодичних функцій і для періодичних випадкових процесів існує ряд аналітичних та обчислювальних методів їх аналізу [4,9,12], то, наскільки відомо авторам, поки що навіть відсутнє означення періодичних випадкових процесів із змінним періодом, які можна було б використати як моделі відповідних сигналів. Хоча добре відомо, що тільки на базі моделі можлива розробка методів, алгоритмів, програмного забезпечення для обробки відповідних сигналів.

Мета роботи: ввести новий клас процесів – *клас умовно періодичних випадкових процесів із змінним періодом*, розглянути деякі їх властивості, а також можливості та методи статистичного аналізу реальних сигналів, явищ, систем, модель яких може бути обґрунтована у вигляді такого класу процесів чи їх певних модифікацій.

Нагадаємо, що функція $g(t)$ називається періодичною, якщо існує таке додатне число T (найменше із можливих), через яке значення функції повторюється, тобто виконується рівність

$$g(t) = g(t + T), \quad t \in (-\infty, \infty).$$

Щодо функцій, залежних від багатьох аргументів, то існують декілька різних понять періодичності, зокрема, розглядають періодичність по кожному із аргументів окремо і періодичність за сукупністю аргументів. Прийнятним для нас є останнє поняття.

Функція $f(t_1, \dots, t_n)$ називається періодичною за сукупністю аргументів, якщо існує таке число T , що значення функції повторюється лише при одночасній зміні всіх аргументів на це число:

$$f(t_1, \dots, t_n) = f(t_1 + T, \dots, t_n + T), \quad t_i \in (-\infty, \infty), \quad i = \overline{1, n}.$$

Коротко зупинимось на періодичних випадкових процесах, що використовуються як моделі стохастично періодичних сигналів. Тут теж існує декілька різних понять. Основні з них – це періодичність в широкому та у вузькому розумінні.

Процес $\{\xi(t), t \in (-\infty, \infty)\}$ називається періодичним (у вузькому розумінні) випадковим процесом (ПВП), якщо періодичною за сукупністю аргументів є його багатовимірна функція розподілу, тобто

$$F(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = P\{\xi(t_1) < x_1, \dots, \xi(t_n) < x_n\} = F(x_1, \dots, x_n; t_1 + T, \dots, t_n + T).$$

Випадковий процес $\xi(t)$ називається періодичним в широкому розумінні або періодично корельованим випадковим процесом (ПКВП), якщо періодичними є його перші дві моментні функції – математичне сподівання і кореляційна функція:

$$M\xi(t) = m(t) = m(t + T),$$

$$M\left\{\overset{\circ}{\xi}(t_1)\overset{\circ}{\xi}(t_2)\right\} = R(t_1, t_2) = R(t_1 + T, t_2 + T),$$

де $\overset{\circ}{\xi}(t) = \xi(t) - M\xi(t)$ – центрований процес.

Очевидно, що для ПКВП періодичною є також його дисперсія

$$D\xi(t) = d(t) = d(t + T).$$

Легко бачити, що випадкові процеси, періодичні у вузькому розумінні, будуть періодичними також в широкому розумінні.

Якщо періодичні випадкові процеси мають більш теоретичне значення, то в прикладних дослідженнях, особливо пов'язаних із задачами математичної статистики, переважно використовуються періодичні випадкові послідовності, для яких теж розрізняють періодичність у вузькому і широкому розумінні.

Випадкова послідовність $\{\xi_i, i = \dots -1, 0, 1, \dots\}$ називається періодичною (у вузькому розумінні) з періодом $L, L \geq 2$, ціле, якщо періодичною є її багатовимірна функція розподілу

$$F(x_1, \dots, x_n; k_1, \dots, k_n) = P\{\xi_{k_1} < x_1, \dots, \xi_{k_n} < x_n\} = F(x_1, \dots, x_n; k_1 + L, \dots, k_n + L).$$

Особливо широке прикладне застосування мають періодично корельовані випадкові послідовності, для яких періодичними є їх математичне сподівання

$$M\xi_i = m_i = m_{i+L}$$

та кореляційна функція

$$M\overset{\circ}{\xi}_i\overset{\circ}{\xi}_j = R(i, j) = R(i + L, j + L).$$

Як відзначалося у вступі, крім періодичних та періодично корельованих процесів широке застосування знаходять лінійні періодичні процеси [3,4], марківські періодичні процеси [10] та ланцюги [11], а також періодичні білі шуми з конкретними розподілами (нормальним, експоненційним, пуассонівським та ін.).

Повернемося до наведених вище прикладів сигналів, процесів, основною властивістю яких є випадковість та періодична повторюваність їх певних ймовірнісних характеристик, причому період зміни цих характеристик теж змінюється. Щоб була можливість дослідження подібних процесів, дамо спочатку означення періодичних функцій із змінним періодом.

Означення 1. Функція $f(t), t \in (-\infty, \infty)$ називається періодичною із змінним періодом (ПФЗП), якщо значення функції повторюється через деякий період, який, в свою чергу, теж є функцією, тобто

$$f(t) = f(t + T(t)), \quad (1)$$

де $T(t)$ – період, що є неперервною функцією часу.

Якщо в (1) $T(t) = T = \text{const}$, отримуємо класичне означення періодичної функції.

Приклад графіка періоду $T(t)$ наведено на рис. 2. В точці t_1 період функції $f(t)$ дорівнює $T(t_1)$, тобто значення функції в точках t_1 і $t_1 + T(t_1)$ повторюються: $f(t_1) = f(t_1 + T(t_1))$. В точці t_2 періодом є число $T(t_2)$. Із наведеного рисунка видно, що в точках t_1 і t_2 періоди функції $f(t)$ різні.

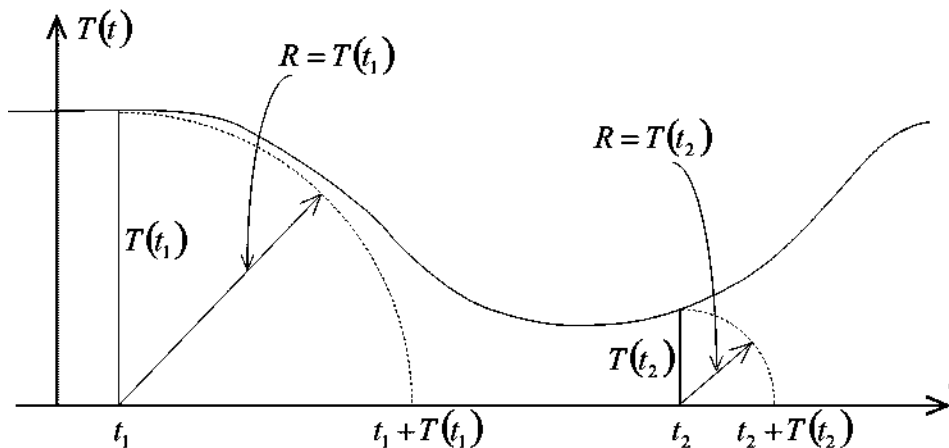


Рис. 2. Змінний період $T(t)$, його значення в фіксованих точках t_1 і t_2 та відповідні їм точки $t_1 + T(t_1)$, $t_2 + T(t_2)$, в яких значення функції повторюються

Зауважимо, що для періодичної функції $g(t), t \in (-\infty, \infty)$, з періодом T виконується рівність

$$g(t) = g(t + T) = g(t - T). \quad (2)$$

Для періодичної функції $f(t)$ із змінним періодом аналогічна рівність

$$f(t) = f(t + T(t)) = f(t - T(t))$$

в загальному випадку не виконується і можлива лише в окремих випадках. Тому для знаходження точок, розміщених через період зліва відносно t , в яких значення функції повторюються, доцільно ввести змінний період $T_-(t)$, такий що

$$f(t) = f(t - T_-(t)).$$

Означення 2. Функція багатьох змінних $f(t_1, \dots, t_n)$ називається періодичною (за сукупністю аргументів) із змінним періодом $T(t)$, якщо виконується рівність:

$$f(t_1, \dots, t_n) = f(t_1 + T(t_1), \dots, t_n + T(t_n)).$$

Перейдемо тепер до означень періодичних випадкових процесів із змінним періодом.

Означення 3. Випадковий процес $\xi(t), t \in (-\infty, \infty)$, називається **періодичним випадковим процесом із змінним періодом** (ПВПЗП), якщо періодичною із змінним періодом $T(t)$ є його багатовимірна функція розподілу:

$$F(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = F(x_1, \dots, x_n; t_1 + T(t_1), \dots, t_n + T(t_n)), t_i \in (-\infty, \infty), i = \overline{1, n}.$$

Означення 4. Випадковий процес $\xi(t)$ називається *періодично корельованим випадковим процесом із змінним періодом* (ПКВПЗП), якщо періодичними із змінним періодом $T(t)$ є його математичне сподівання і кореляційна функція, тобто

$$m(t) = m(t + T(t)), \quad R(t_1, t_2) = R(t_1 + T(t_1), t_2 + T(t_2)).$$

Функція $T(t)$, що є змінним періодом функції $f(t)$ (випадкового процесу $\xi(t)$), повинна задовольняти певні умови. Як було зазначено вище, вона повинна бути неперервною. Крім цього, на проміжках спадання функції значення її похідної повинні бути більші за $-1: T'(t) > -1$. Іншими словами, спадання функції $T(t)$ повинні бути більш повільними, ніж спадання функції $s(t) = -s$. Більш детальне дослідження умов, яким повинен задовольняти змінний період $T(t)$, необхідно розглянути окремо.

Коефіцієнт трансформації періоду. Для змінного періоду $T(t), t \in (-\infty, \infty)$, введемо коефіцієнт його трансформації (масштабування) $k(t)$. Для цього виберемо деяке число T_0 , певним чином пов'язане із $T(t)$. Це, наприклад, може бути його середнє значення на деякому відрізку $[t_1, t_2]$:

$$T_0 = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} T(t) dt.$$

В прикладних дослідженнях це може бути деяка "норма", відхилення від якої використовується як інформаційна чи діагностична ознака в задачах виявлення, класифікації тощо. Наприклад, в кардіології, якщо частота пульсу пацієнта в стані спокою, тобто "нормальна" частота, рівна f_0 , то природно прийняти, що $T_0 = 1/f_0$.

Очевидно, що при цьому "нормальна" частота залежить від багатьох факторів, зокрема від віку пацієнта, фізичного стану його організму, тому в кожному конкретному випадку набуває відповідного значення.

Означення 5. Коефіцієнтом трансформації (масштабування) періоду $T(t), t \in (-\infty, \infty)$, називається відношення

$$k(t) = \frac{T(t)}{T_0}. \quad (3)$$

Означення 5а. Коефіцієнтом трансформації (масштабування) періоду $T_-(t), t \in (-\infty, \infty)$, називається відношення

$$k_-(t) = \frac{T_-(t)}{T_0}.$$

Розглянемо ще одну характеристику ПВПЗП $\xi(t)$, яка є близькою до коефіцієнта трансформації періоду і характеризує розтяг (стиснення) процесу в часі (чи вздовж іншого аргументу), що виражається розтягом (стисненням) його реалізацій та, відповідно, його ймовірнісних, залежних від часу, характеристик. В цьому зв'язку відзначимо [13], що спеціалістами в багатьох областях, зокрема в радіоелектроніці, гідроакустиці, широко використовуються пристрої, що змінюють тривалість (довжину) сигналів при збереженні їх форми. Так в [13] наводиться приклад, коли записування інформації на магнітні носії відбувається з однією швидкістю, а відтворення – з іншою. Подібного роду перетворення розглянемо для періодичних випадкових процесів.

Нехай $\xi_0(t)$ – періодичний випадковий процес з періодом T_0 , тобто його багатовимірна функція розподілу

$$F_0(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = F_0(x_1, \dots, x_n; t_1 + T_0, \dots, t_n + T_0), t_i \in (-\infty, \infty), i = \overline{1, n}.$$

Крім цього нехай з періодичним випадковим процесом $\xi_0(t)$ взаємопов'язаний ПВПЗП $\xi(t)$ таким чином, що існує така функція $\alpha(t) > 0$, що

$$P\{\omega : \xi(t) = \xi_0(\alpha(t) \cdot t)\} = 1. \quad (4)$$

Очевидно, при виконанні (4) має місце відповідна рівність і для багатовимірних функцій розподілів процесів

$$F(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = F_0(x_1, \dots, x_n; \alpha(t_1) \cdot t_1, \dots, \alpha(t_n) \cdot t_n), t_i \in (-\infty, \infty), i = \overline{1, n}. \quad (5)$$

Можливі випадки, коли взаємозв'язок випадкових процесів $\xi(t)$ і $\xi_0(t)$ ґрунтуються лише на виконанні рівності (5).

Означення 6. Функція $\alpha(t)$, що характеризує міру розтягу (стиснення) аргументу ПВПЗП $\xi(t)$ по відношенню до деякого іншого "еталонного" періодичного випадкового процесу $\xi_0(t)$, згідно з рівністю (4) (чи (5)), називається **коефіцієнтом перетворення процесу $\xi_0(t)$** .

Якщо в частинному випадку розглядати детерміновану періодичну із змінним періодом функцію $f(t)$, що задовольняє (1), то її розтяг (стиснення) по відношенню до відповідної періодичної функції $f_0(t)$ з періодом T_0 означає існування такої функції $\alpha(t) > 0$, що

$$f(t) = f_0(\alpha(t) \cdot t).$$

Яскравим прикладом такого роду перетворень (розтяг функції чи її стиснення) є частотна модуляція синусоїдальних сигналів [14], що використовується в системах зв'язку.

Варто наголосити, що коефіцієнт трансформації періоду $k(t)$, коефіцієнт перетворення процесу $\alpha(t)$, періоди $T(t)$ і $T_0(t)$ між собою певним чином взаємопов'язані і виявлення цього взаємозв'язку вимагає додаткових досліджень.

Можливості статистичного аналізу ПВПЗП. Припускається, що коефіцієнти трансформації та перетворення можуть бути успішно використані при дослідженні стохастичних систем, що працюють в умовах ритміки, особливо при аналізі перехідних режимів таких систем після дії на систему збурення типу "дельта-функції"; після початку чи припинення дії навантаження на систему або його зміни; зміні характеристик вхідного потоку системи, в задачах статистичного аналізу ПВПЗП, особливо при виборі кроку дискретизації та отриманні з допомогою АЦП (аналогово-цифрових перетворювачів) їх дискретних реалізацій. На останньому питанні зупинимось більш детально.

Як відомо [4,9], в задачах статистичного аналізу ПВП, наприклад при оцінюванні періодичного математичного сподівання, дисперсії, кореляційної функції, проведенні гістограмного аналізу, тощо, використовуються φ_t -серії – вкладені по відношенню ПВП $\xi(t)$ стаціонарні дискретні послідовності процесу. Якщо ж в наявності є неперервні реалізації процесу (наприклад, електрокардіограма), то спочатку необхідно провести їх дискретизацію. При цьому крок дискретизації вибирається таким, щоб на відрізках довжиною T ми отримували ціле число відліків процесу, тобто

$$\Delta t = T/L, \quad (6)$$

де T – період ПВП, $L \geq 2$ – ціле число.

Враховуючи, що для ПВПЗП $\xi(t)$ його період $T(t)$ змінюється, то для того, щоб при проведенні дискретизації отримати ціле число L відліків процесу на кожному із послідовно розміщених відрізках $[a_s, a_{s+1})$, довжини яких відповідно дорівнюють періодам $T(a_s)$, необхідно, щоб при цьому крок дискретизації теж змінювався у відповідності до закону зміни самого періоду або відповідно до його коефіцієнта трансформації $k(t)$. Враховуючи ці зауваження, здавалося б, логічно вибирати крок дискретизації в кожній фіксованій точці t_{i+1} , що дорівнює

$$\Delta t_{i+1} = \frac{df T(t_{i+1})}{L}, i = 0, 1, 2, \dots \quad (7)$$

Якщо скористатися коефіцієнтом трансформації (3), то

$$\Delta t_{i+1} = \frac{k(t_{i+1}) \cdot T_0}{L} = k(t_{i+1}) \Delta t,$$

де Δt вибирається згідно з (6), а кожна наступна дискретна точка

$$t_{i+1} = t_i + \Delta t_i, i = 0, 1, 2, \dots \quad (8)$$

Початкові значення в (8) відповідно дорівнюють: $t_0 = a$, $\Delta t_0 = \frac{T(t_0)}{L}$.

Але, використовуючи такий крок дискретизації, можна пересвідчитися, що при цьому немає гарантії того, що на відрізках, які рівні періодам зміни процесу, ми в точності будемо отримувати L дискретних значень. Тут можна вказати на дві основні причини виникнення такої ситуації. По-перше, це нелінійна зміна періоду $T(t)$, що, очевидно, має місце в переважній більшості випадків; по-друге, внаслідок технічних обмеженостей аналогово-цифрових перетворювачів (АЦП), неможливості забезпечення ними необхідних кроків дискретизації (оскільки, наприклад, в (7) значення $T(t_{i+1})$, $i = 0, 1, 2, \dots$, можуть бути ірраціональними), які використовуються при отриманні дискретних реалізацій. В цьому зв'язку варто відзначити, що всебічне висвітлення питання вибору кроку дискретизації ПВПЗП, методів та засобів дискретизації реалізацій цих процесів, обґрунтування похибок, які при цьому можуть виникати, в тому числі і в оцінках ймовірнісних характеристик ПВПЗП, потребує більш глибокого та всебічного вивчення.

Для виходу із ситуації щодо вибору кроку дискретизації ПВПЗП в прикладних дослідженнях запропонуємо дещо спрощений, але порівняно легко технічно реалізований варіант. Для цього попередньо введемо деякі позначення.

Відомо, що для періодичної функції $g(t)$ крім основного періоду T її періодами будуть числа kT , $k = 2, 3, \dots$, тобто значення функції в точках $t, t + kT$, $k = 1, 2, \dots$, повторюються:

$$g(t) = g(t + kT). \quad (9)$$

Для періодичної функції $f(t)$ із змінним періодом запис рівності, аналогічної до (9), суттєво ускладнюється. Наприклад, факт рівності значення функції через один, два та три періоди набуває вигляду:

$$\begin{aligned} f(t) &= f(t + T(t)) = f(t + T(t) + T(t + T(t))) = \\ &= f(t + T(t) + T(t + T(t)) + T(t + T(t) + T(t + T(t)))) \end{aligned} \quad (10)$$

Як приклад графік періодичної із змінним періодом функції $f(t)$ протягом декількох періодів показано на рис. 3. Для координат точок

$$t, \quad t + T(t), \quad t + T(t) + T(t + T(t)), \\ t + T(t) + T(t + T(t)) + T(t + T(t) + T(t + T(t))),$$

які входять в (10) і значення функції, в яких повторюються, використано позначення

$$t = t_1, \quad t + T(t) \stackrel{df}{=} t_2, \quad t + T(t) + T(t + T(t)) \stackrel{df}{=} t_3, \\ t + T(t) + T(t + T(t)) + T(t + T(t) + T(t + T(t))) \stackrel{df}{=} t_4. \quad (11)$$

Значення функції $f(t)$ в точках t_1, t_2, t_4, t_4 виділені кружечками. Наведені також періоди функції $f(t)$ в цих точках, які, враховуючи (11), відповідно позначені через

$$T(t_1), T(t_2), T(t_3).$$

Для зручності позначення (10) і (11) зведені в таблицю 1.

Таблиця 1

№	Координата точки	Значення періоду в точці	Позначення точки	Позначення періоду
1	t	$T(t)$	t_1	$T(t_1)$
2	$t + T(t)$	$T(t + T(t))$	t_2	$T(t_2)$
3	$t + T(t) + T(t + T(t))$	$T(t + T(t) + T(t + T(t)))$	t_3	$T(t_3)$
k	$t + \dots T(t + \dots (t) \dots)$	$T(t + \dots)$	t_k	$T(t_k)$

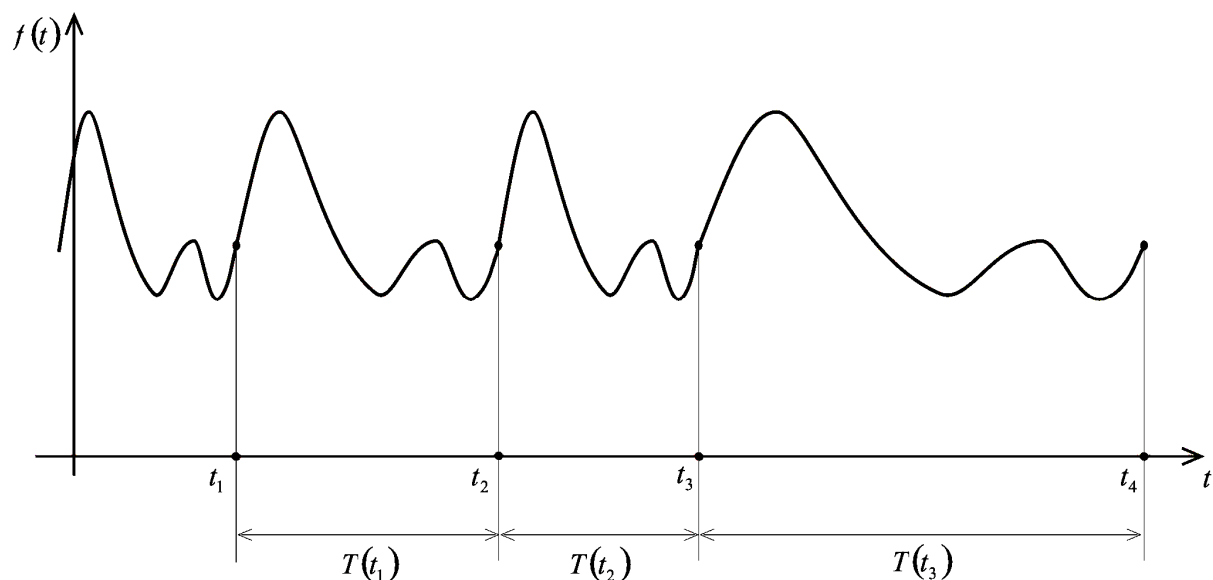


Рис. 3. Графік періодичної функції із змінним періодом; виділені кружечками точки t_1, t_2, t_3, t_4 , в яких значення функції повторюються, а також величини періодів $T(t_1), T(t_2), T(t_3)$

в перших трьох точках t_1, t_2, t_3

Вибір кроку дискретизації для ПВПЗП. Нехай на кожному із відрізків $[t_1, t_2]$, $[t_2, t_3]$, ..., $[t_k, t_{k+1}]$ періоди $T(t_1), T(t_2), \dots, T(t_k)$ змінюються настільки повільно, що,

нехтуючи незначними похибками в подальших обчисленнях, будемо вважати їх постійними, тобто

$$T(t_i) \stackrel{df}{=} T_i = \text{const}, i = 1, 2, \dots, k. \quad (12)$$

Враховуючи таке припущення і позначення (12), на кожному із відрізків $[t_i, t_{i+1}]$ виберемо крок дискретизації

$$\Delta t_i = \frac{T_i}{L}, i = 1, 2, \dots, k. \quad (13)$$

Якщо тепер провести дискретизацію ПВПЗП $\xi(t), t \in [a, b]$, з кроком дискретизації (13), отримаємо послідовність

$$\xi_i, \overline{i = 1, n}, \quad (14)$$

число відліків якої на кожному із періодів T_i дорівнює L .

Приймаючи до уваги методи обробки періодичних випадкових процесів, зокрема поняття φ_i -серій [4,9], які є вкладеними по відношенню до періодичних процесів стаціонарними послідовностями, не важко бачити, що коли із послідовності (14) виділити L різних φ_i -серій, тобто підпослідовностей

$$\xi_{s+jL}, s = \overline{0, L-1}, j = 0, 1, 2, \dots,$$

кожна з них буде стаціонарною. Використовуючи відповідні методи статистичного аналізу стаціонарних послідовностей, це дає можливість знаходити оцінки їх ймовірнісних характеристик, наприклад, оцінку математичного сподівання φ_i -серії, оцінку її дисперсії. В сукупності ці оцінки утворюють оцінки відповідних періодичних ймовірнісних характеристик ПВПЗП на дискретній множині точок $t_i = i \cdot \Delta t, i = \overline{0, L-1}$. З точністю до коефіцієнта трансформації вони також будуть оцінками на кожному із періодів T_i .

Висновки та рекомендації. В роботі введено новий клас випадкових процесів – клас умовно періодичних випадкових процесів із змінним періодом. Наведено означення коефіцієнтів трансформації періоду та перетворення процесу, які є важливими характеристиками цих процесів. Використання процесів із змінним періодом відкриває нові можливості в задачах вивчення сигналів, що спостерігаються в перехідних режимах стохастичних ритмічних систем. Наведено ряд задач теоретичного і прикладного характеру, які можуть бути вирішені на основі випадкових процесів із змінним періодом. Запропоновано метод вибору кроку дискретизації, використання якого дозволить проводити статистичний аналіз цих процесів.

Here is introduced the new class of casual processes – this is the class of conditionally casual processes with variable period. Coefficients of period transformation and process transformation are defined. They are important features of processes with variable period. There is highlighted that these processes have place in signals, which can be observed in transitional modes of stochastic rhythmical systems. There is appointed that on the base of introduced class of processes, the number of theoretical and applied tasks can be solved. The method of determination of discretization step is offered. Using of this method will allow to carry out statistical analysis of such processes.

Література

1. Коронкевич О.І. Лінійні динамічні системи під дією випадкових сил // Наукові записки Львів. ун-ту. – 1957. – 44, №8. – С. 175-183.
2. Гудзенко Л.И. О периодически нестационарных процессах // Радиотехника и электроника. – 1959. – Т.4, Вып.6. – С. 1026-1034.
3. Приймак М.В. Лінійні періодичні процеси і їх моделювання на ЕОМ // Вісник Тернопільського держ. техн. ун-ту. – 1998. – Т.3, число 3. – С. 111-114.

4. Марченко Б.Г., Приймак М.В. Побудова моделі та аналіз стохастично періодичних навантажень енергосистем // Праці Ін-ту електродинаміки. – Київ: ІЕД НАН України, 1999. – Вип. 1. – С.129-153.
5. Драган Я.П., Приймак Н.В. Линейные периодически коррелированные случайные процессы. - Львов, 1986. - 30 с. - (Препр. / АН УССР. Физико-механический ин.-т, №120).
6. Красильников О.І., Марченко Б.Г., Приймак М.В. Процеси з незалежними періодичними приростами і періодичні білі шуми // Відбір і обробка інформації. – 1996. – Вип. 10(86). – С. 22-27.
7. Приймак М.В. Дискретні періодичні білі шуми з неперервними розподілами // Праці Ін-ту електродинаміки. Електроенергетика. – Київ: ІЕД НАН України, 1999. – С.15-19.
8. Приймак М.В. Дискретні періодичні шуми з дискретними розподілами // Вимірювальна техніка та метрологія. – Львівська політехніка. – 1999. – №55. – С. 167-169.
9. Приймак М.В. Основи теорії моделювання, аналізу і прогнозу в автоматизованих системах управління ритмічними процесами: Автореф. дис...докт. техн. наук: 05.13.06 / Київ: НАУ, 2001. – 34с.
10. Приймак М.В. Марківські періодичні процеси // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – 2003. – Т.8, число 3. – С. 17-21.
11. Приймак М.В. Періодичні ланцюги Маркова в задачах статистичного аналізу і прогнозу енергонавантажень // Технічна електродинаміка. – 2004. – №2. – С. 3-7.
12. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1976. – 544 с.
13. Черницер В.М., Кадук Б.Г. Преобразователи временного масштаба. – М.: Сов. радио, 1972. – 144 с.
14. Харкевич А.А. Спектры и анализ. 4-е изд. – М.: Гос. изд. физ. мат. литературы, 1962. – 236 с.

Одержано 12.01.2005 р.