

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ. МАТЕМАТИКА. ФІЗИКА

УДК 519:24

Б. Марченко, докт. фіз.-мат. наук; Н. Мулик; М. Фриз, канд.техн.наук
Тернопільський державний технічний університет імені Івана Пулюя

ОБҐРУНТУВАННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ГАЗОНАВАНТАЖЕНЬ

Здійснено огляд основних математичних моделей систем газоспоживання з врахуванням ритмічності, коротко проаналізовано їх переваги та недоліки. Обґрунтовано вибір нової моделі, яка враховує випадковий і ритмічний характер газонавантаження, відображає механізм його утворення і дозволяє проводити імітаційне моделювання.

Вступ. Останнім часом на світовому енергетичному ринку спостерігається тенденція випереджаючого, в порівнянні з іншими енергоносіями, росту споживання газу. Це зумовлено, перш за все, його перевагами як більш екологічного та стабільного (за ціною) енергоносія, потребою диверсифікації (урізноманітнення) джерел отримання енергії та наявністю значних розвіданих запасів газу. На думку фахівців, зазначені тенденції будуть зберігатися і надалі. Очікується, що протягом наступних 20 років світове споживання газу зросте більш ніж на 60%, а його частка у світовому паливно-енергетичному балансі у 2020 р. становитиме 27,1% [1].

Така перспектива зумовлює актуалізацію проблем, пов'язаних з постачанням і споживанням газу, підвищенням ефективності та якості роботи газової системи, доведенням її показників до світового рівня. Для успішного аналізу використання газу, а тим більше для планування і прогнозу рівнів газоспоживання необхідно побудувати математичну модель газоспоживання.

На даний момент в газовій промисловості найчастіше використовуються інтегральні показники (середньодобові, середньомісячні, річні витрати газу). Такий підхід до аналізу не дає повної і об'єктивної картини витрат газу за день, а також змоги виявити час, коли проводився (якщо такий був) несанкціонований відбір газу.

Різні дослідники робили спроби математичного опису газонавантажень з врахуванням їх ритмічності, пропонуючи для цього різні моделі [2]. Зокрема:

- ✓ адитивну, що подає сигнал у вигляді добутку стаціонарного у широкому розумінні випадкового процесу і детермінованої періодичної функції;
- ✓ мультиплікативну – сигнал розглядається у вигляді добутку стаціонарного випадкового процесу і тренду (детермінованої періодичної або майже періодичної функції).

Недоліком адитивної і мультиплікативної моделей є те, що хоча вони і зображають газоспоживання у вигляді періодичного випадкового процесу, проте враховують періодичність тільки першого моменту – математичного сподівання;

- ✓ модель періодично-корельованого випадкового процесу, що враховує періодичність перших двох моментів, а тому дозволяє вивчати сигнали лише в рамках кореляційної теорії;
- ✓ випадковий процес періодичний за Слуцьким – випадковий процес з періодичними скінченно-вимірними функціями розподілу; дана модель описує сигнал у повному ймовірнісному сенсі, але не відображає властивості формування сигналу.

Постановка задачі. Проведений аналіз моделей показав, що існуючі моделі хоч і придатні для проведення аналізу газоспоживання, проте мають певні недоліки. Метою нашої роботи є побудувати та обґрунтувати нову модель газоспоживання, яка повинна задовольняти наступні вимоги: враховувати випадковий і ритмічний характер газонавантажень, описувати сигнал (під сигналом розуміємо інтенсивність газоспоживання) в повному ймовірнісному розумінні, відображати механізм утворення сигналу, що в свою чергу дозволить проводити імітаційне моделювання.

Розв'язування задачі. Побудуємо модель газоспоживання, взявши за основу модель енергонавантажень, яка була детально розглянута в [3] і ґрунтується на [4].

Нехай у момент часу τ_k , $k \in \mathbf{Z}$ кожен k -ий споживач починає вмикати газ (рис.1). Очевидно споживач повинен встановити певний рівень витрат газу у відповідності до своїх потреб. Зрозуміло, що цю дію він виконує на певному скінченному інтервалі часу. Нехай у момент часу a_k , $a_k > \tau_k$ споживач встановив достатній для нього рівень газу. На інтервалі часу (a_k, b_k) споживач не змінює рівень витрат газу, тобто використовує газ з певною сталою інтенсивністю. В момент часу b_k , $b_k > a_k > \tau_k$ приймає рішення вимкнути газ, на що так само затрачає певний час. Для спрощення моделі будемо вважати, що для ввімкнення і вимкнення газу споживач затрачає однаковий час.

Введемо наступні позначення: $\tilde{L}_k$ – загальна тривалість перебування споживача в системі, $\tilde{l}_k$ – довжина інтервалу, на якому споживач користується газом. Враховуючи введені позначення, охарактеризуємо кожен інтервал часу. Отже, k -ий споживач на інтервалі часу $\left[\tau_k; \tau_k + \frac{\tilde{L}_k - \tilde{l}_k}{2} \right]$ – вмикає газ, на інтервалі тривалістю $\tilde{l}_k$ – використовує газ, а на проміжку часу $\left[\tau_k + \frac{\tilde{L}_k + \tilde{l}_k}{2}; \tilde{L}_k \right]$ – вимикає газ. Тут $\tilde{L}_k$, $\tilde{l}_k$ – випадкові величини, які не залежать від τ , оскільки кожен споживач газу самостійно вирішує, коли і скільки часу користуватись газом. Вважаємо, що $\tilde{L}_k$ та $\tilde{l}_k$, $k \in \mathbf{Z}$ – послідовності незалежних однаково розподілених величин. Інтенсивність газоспоживання позначимо функцією $\tilde{V}_k(\tau_k, t)$, де τ_k – момент включення k -го споживача, t – момент спостереження. Моменти часу τ_k є випадковими. α_k – випадкова величина, що характеризує рівень інтенсивності споживання k -го споживача.

Для спрощення побудови моделі замість випадкових величин $\tilde{L}_k$ та $\tilde{l}_k$ введемо їх математичні сподівання $L = \mathbf{M}\tilde{L}_k$ та $l = \mathbf{M}\tilde{l}_k$.

Замість функції $\tilde{V}_k(\tau_k, t)$ вводимо функцію:

$$V_k(\tau_k, t) = \alpha_k \varphi\left(t - \tau_k - \frac{L}{2}\right), \quad t \in (-\infty, \infty), \quad (1)$$

де

$$\varphi(s) = \begin{cases} \frac{2}{L-l}\left(\frac{L}{2} + s\right), & s \in \left[-\frac{L}{2}; -\frac{l}{2}\right] \\ 1, & s \in \left(-\frac{l}{2}; \frac{l}{2}\right) \\ \frac{2}{L-l}\left(\frac{L}{2} - s\right), & s \in \left[\frac{l}{2}; \frac{L}{2}\right] \\ 0, & \text{в інших випадках,} \end{cases} \quad (2)$$

що видно із рисунка 2.

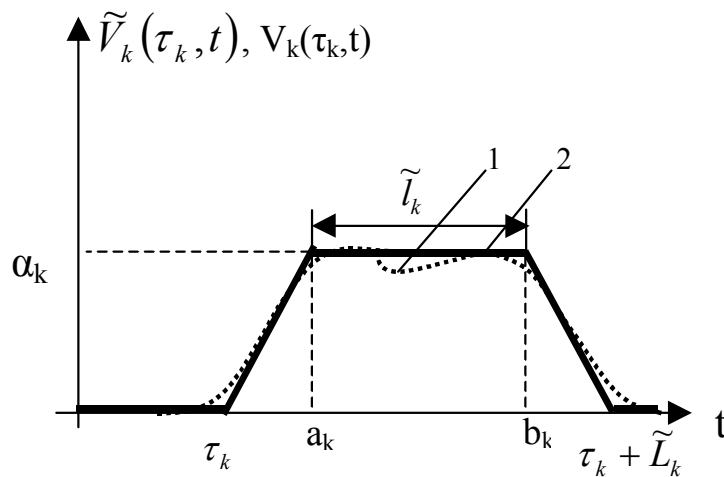


Рис. 1. Графічне зображення реалізацій:

1 – інтенсивності газоспоживання одним споживачем $\tilde{V}_k(\tau_k, t)$ та 2 – його моделі $V_k(\tau_k, t)$

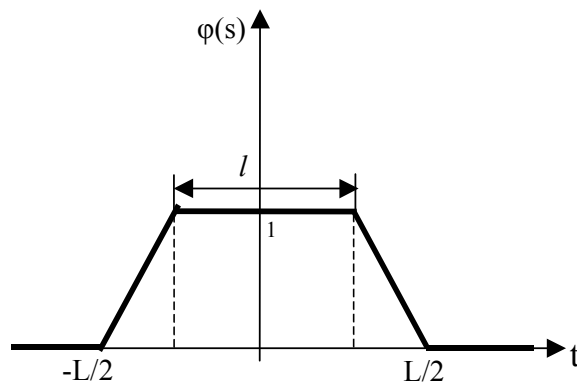


Рис. 2. Графічне зображення функції $\phi(s)$

Середовище, де функціонують споживачі, має лінійні властивості, тому загальна інтенсивність газоспоживання дорівнює сумі інтенсивностей витрат газу кожним споживачем зокрема. Отже, газоспоживання можна розглядати як випадковий процес $\xi(t)$:

$$\xi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} V_k(\tau_k, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k \phi\left(t - \tau_k - \frac{L}{2}\right). \quad (3)$$

Розглянемо процес ввімкнення споживачів у систему газоспоживання:

1. Споживачі входять у систему у послідовні випадкові моменти часу $\{\dots \tau_{-2} < \tau_{-1} < \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_k < \dots\} = \{\tau_k, \quad k \in \mathbf{Z}\}$ незалежно один від одного.
2. Величини $\Delta\tau_1 = \tau_1, \Delta\tau_2 = \tau_2 - \tau_1, \Delta\tau_3 = \tau_3 - \tau_2, \dots$ інтервалів часу між включеннями споживачів є незалежними випадковими величинами. Тобто ймовірність того, скільки споживачів підключиться на даному інтервалі часу, не залежить від того, скільки споживачів підключилося за межами цього інтервалу (умова відсутності післядії).
3. Вважаємо, що в один момент часу ввімкнути газ може лише один споживач (умова ординарності), тобто ймовірність появи двох і більше споживачів за малий проміжок часу $(\tau, \tau + \Delta\tau)$ дорівнює $o(\Delta\tau)$. За достатньо малий проміжок часу $(\tau, \tau + \Delta\tau)$ ймовірність появи одного споживача в системі — $\lambda(\tau)\Delta\tau + o(\Delta\tau)$, де

$\lambda(\tau)$ – детермінована функція, що характеризує інтенсивність включення споживачів і залежить від часу доби.

4. Послідовність випадкових величин $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \dots\}$ також є послідовністю незалежних від τ_k , $k \in \mathbf{Z}$ випадкових величин і має однаковий розподіл.

На основі пунктів 1-3 робимо висновок, що процес ввімкнення споживачів в систему є нестационарним пуассонівським потоком з параметром $\lambda(\tau)$ [5]. Введемо неоднорідний узагальнений пуассонівський процес $\pi(\tau)$, що відповідає нестационарному пуассонівському потокові з параметром $\lambda(\tau)$ таким чином, щоб його стрибки відбувались у моменти часу τ_k , $k \in \mathbf{Z}$ ввімкнення споживача в систему і дорівнювали α_k .

Тоді процес $\xi(t)$ – загальна інтенсивність газоспоживання можна записати у вигляді стохастичного інтегралу:

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t - \tau - \frac{L}{2}) d\pi(\tau), \quad t \in (-\infty, \infty). \quad (4)$$

Випадковий процес, який можна записати у вигляді згортки (4), називають лінійним випадковим процесом (ЛВП). Тут $\varphi(s)$ – ядро лінійного випадкового процесу,

невипадкова функція, для якої справджуються умови: $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2(s) ds < \infty, \forall t$,

$\varphi(s) = 0, s < 0$; $\pi(\tau)$ – породжуючий процес з незалежними приростами, причому $\mathbf{P}\{\pi(0) = 0\} = 1, \mathbf{D}[d\pi(\tau)] < \infty$.

Будучи функціоналами від стохастично неперервних випадкових процесів з незалежними приростами, лінійні випадкові процеси з неперервним часом мають безмежно подільні розподіли і характеризуються у відповідності з канонічними формами зображення характеристичних функцій цих розподілів [6], спектрами стрибків. Запишемо характеристичну функцію випадкового процесу (4), враховуючи те, що він є гільбертовим. Згідно з [7] маємо:

$$\begin{aligned} \ln f(u_1, u_2, \dots, u_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = & i \sum_{k=1}^n u_k \int_{-\infty}^{\infty} \varphi\left(t_k - \tau - \frac{L}{2}\right) d\mu(\tau) \\ & + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[e^{ix \sum_{k=1}^n u_k \varphi\left(t_k - \tau - \frac{L}{2}\right)} - 1 - ix \sum_{k=1}^n u_k \varphi\left(t_k - \tau - \frac{L}{2}\right) \right] \frac{1}{x^2} d_x d_\tau K(x, \tau), \end{aligned} \quad (5)$$

де $\mu(\tau) = \mathbf{M}\pi(\tau)$ і $K(x, \tau)$, $x \in \mathbf{R}$ – спектр стрибків процесу $\pi(\tau)$ у формі Колмогорова, – неспадна неперервна зліва обмежена функція, відносно якої звичайно вважають:

$\forall \tau, K(-\infty, \tau) = 0$, звідки $K(\infty, \tau) = \mathbf{D}\pi(\tau)$.

Ядро $\varphi(s)$ характеризує поведінку споживачів в системі, а породжуючий процес $\pi(\tau)$ – моменти та інтенсивність їх появи.

Аналізуючи графіки (реалізації) газонавантажень (рис.3) на досить тривалих термінах часу, можна спостерігати їх ритмічність (стохастичну періодичність). Поняття стохастичної періодичності поєднує в собі такі суттєві і, на перший погляд, суперечливі властивості, як повторюваність і випадковість. У наступних роботах ми обґрунтуємо ритмічність газоспоживання.

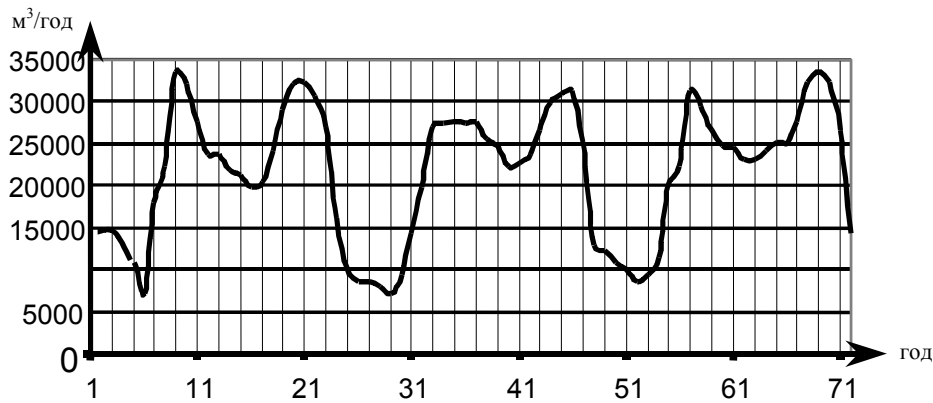


Рис. 3. Графік інтенсивності газоспоживання по м. Тернополю за три дні жовтня 2001 року

Висновок. Отже, в даній роботі ми обґрунтували вибір лінійного випадкового процесу як моделі газоспоживання. Перевагами цієї моделі є:

- можливість відображення інформації про породження газоспоживання;
- визначення параметрів моделі за результатами експериментальних досліджень;
- можливість проведення повного ймовірнісного аналізу досліджуваного сигналу.

Існують певні відмінності побудованої вище моделі газонавантажень від моделей, розроблених у роботах Приймака М.В. для аналізу енергонавантажень [8] та Млинко Б.Б. – для задач фотоплетизмодіагностики [9]. Імпульс у названих вище роботах мав прямокутну форму. Хоча дана модель придатна і для аналізу газонавантажень, проте вона не враховує інтервали часу, коли споживач вмикає і вимикає газ. Використання трапецевидного імпульсу дасть змогу більш точно оцінювати ймовірнісні характеристики сигналу.

The main mathematical models of the gas consuming systems which take into account their stochastic periodicity are considered here. Their advantages and disadvantages are analyzed briefly. The choose of new gasloading model which takes into account it's stochastic and periodic properties, describes it's creating mechanism, allows to carry out imitation modelling is ground.

Література

1. Р.М.Говдяк. Основні тенденції розвитку світової газової промисловості // Українська нафтогазова академія. 10 років натхненної праці. – 2003. – №6. – С.61.
2. О.В.Мацюк, М.В.Приймак. Моделі газонавантажень з врахуванням стохастичної періодичності та можливості їх статистичного аналізу // Розвідка та розробка нафтових і газових родовищ. – 2003. – №2(7). – С.64-68.
3. Г.Л.Баранов, Б.Г.Марченко, Н.В.Приймак. Модель стохастически периодических электроэнергетических нагрузок и анализ графиков энергосистем // Проблемы энергосбережения. – 1990. – Вып.3. – С.60-65.
4. Б.Г.Марченко, Л.Д.Проценко. Вероятностные характеристики случайной последовательности независимых прямоугольных импульсов // Радиотехника и электроника. – 1986. – №6. – С.1141-1146.
5. В.П.Бабак, Б.Г.Марченко, М.Є.Фриз. Теорія ймовірностей, випадкові процеси та математична статистика. – К: Техніка, 2004. – 288 с.
6. Лукач Е. Характеристические функции. – М.:Наука, 1979. – 424 с.
7. Марченко Б.Г. Метод стохастических интегральных представлений и его приложение в радиотехнике. – К.: Наук.думка, 1973. – 191 с.
8. Приймак М.В. Основи теорії моделювання, аналізу і прогнозу в автоматизованих системах управління ритмічними процесами: Автореф.дисерт.докт.техн.наук: 05.13.06 задачах фотоплетизмодіагностики: Автореф.канд.техн.наук: 01.05.02 / Тернопіль:ТДТУ імені Івана /Київ: НАУ, 2001. – 34с.
9. Млинко Б.Б. Математична модель ритмічного біосигналу в Пулюя, 2003. – 19 с.

Одержано 15.11.2004 р.