МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ. МАТЕМАТИКА. ФІЗИКА

УДК 517.52/524:517.58.589

М. Ленюк[1], докт. фіз.-мат. наук; М. Шелестовська[2], канд. техн. наук

[1] *Чернівецький національний університет імені Ю. Федьковича*

[2] *Тернопільська академія народного господарства*

ЗОБРАЖЕННЯ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РЯДІВ МЕТОДОМ ГІБРИДНОГО ІНТЕГРАЛЬНОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ ТИПУ ЛЕЖАНДРА 1-ГО РОДУ – ГАНКЕЛЯ 2-ГО РОДУ – (КОНТОРОВИЧА-ЛЄБЄДЄВА)

Методом порівняння розв'язків, побудованих на полярній вісі з двома точками спряження для сепаратної системи з двох диференціальних рівнянь Бесселя з різним характером виродження та одного диференціального рівняння Лежандра методом функцій Коші і методом скінченого гібридного інтегрального перетворення, одержано зображення сім'ї поліпараметричних функціональних рядів.

Вступ. В сучасній довідковій математичній літературі наведено функціональні ряди за спектральними функціями одного диференціального оператора, фундаментальну систему розв'язків для якого складають спеціальні функції математичної фізики [8, 9]. У зв'язку з широким впровадженням композитів виникає потреба в підсумовуванні функціональних рядів за спектральною функцією гібридного диференціального оператора. Одним із методів підсумовування таких рядів запропоновано метод скінченних гібридних інтегральних перетворень [10]. При цьому поява нового типу скінченного гібридного інтегрального перетворення дозволяє підсумовувати нову сім'ю функціональних рядів. В даній роботі використано скінченне гібридне інтегральне перетворення типу Лежандра 1-го роду – Ганкеля 2-го роду – (Конторовича – Лєбєдєва) для підсумовування (зображення) відповідної сім'ї поліпараметричних фундаментальних рядів.

Розглянемо задачу про побудову обмеженого на множині $I_{12}^{+}=\{r: r\in(0,R_1)\cup(R_1,R_2)\cup(R_2,\infty)\}$ розв'язку сепаратної системи модифікованих диференціальних рівнянь Лежандра і Бесселя

$$\begin{gathered}\left(\Lambda_{\mu}-q_1^2\right)u_1(r)=-g_1(r),\ r\in(0,R_1),\\ \left(\mathrm{B}_{\nu,\alpha_1}-q_2^2\right)u_2(r)=-g_2(r),\ r\in(R_1,R_2),\\ \left(\mathrm{B}_{\alpha_2}-q_3^2\right)u_3(r)=-g_3(r),\ r\in(R_2,\infty),\end{gathered}\tag{1}$$

за умовами спряження

$$\left.\left[\left(\alpha_{j1}^{k}\frac{d}{dr}+\beta_{j1}^{k}\right)u_k(r)-\left(\alpha_{j2}^{k}\frac{d}{dr}+\beta_{j2}^{k}\right)u_{k+1}(r)\right]\right|_{r=R_k}=\omega_{jk};\ j,k=1,2.\tag{2}$$

У рівностях (1) беруть участь диференціальні оператори Бесселя $\mathrm{B}_{\nu,\alpha}=\frac{d^2}{dr^2}+(2\alpha+1)r^{-1}\frac{d}{dr}-\left(\nu^2-\alpha^2\right)r^{-2}$ [1] і $\mathrm{B}_{\alpha}=r^2\frac{d^2}{dr^2}+(2\alpha+1)r\frac{d}{dr}+\alpha^2-\lambda^2r^2$

$[2]$ та диференціальний оператор Лежандра $\Lambda_\mu = \frac{d^2}{dr^2} + cthr\frac{d}{dr} + \frac{1}{4} - \frac{\mu^2}{sh^2 r}$ $[3]$, де $(2\alpha+1) > 0,\ \nu \ge \alpha \ge -\frac{1}{2},\ \mu \ge 0,\ \lambda \in (0,\infty)$. При цьому ми припускаємо, що $q_m \ge 0$, $m = 1{,}3;\ \ c_{1k} \cdot c_{2k} > 0,\ c_{jk} = \alpha_{2j}^k \cdot \beta_{1j}^k - \alpha_{1j}^k \beta_{2j}^k,\ \ j,k = 1{,}2$.

Фундаментальну систему розв'язків для рівняння Бесселя $\left(\mathrm{B}_{\nu,2} - q^2\right)v = 0$ утворюють функції $I_{\nu,\alpha}(qr)$ та $\mathrm{K}_{\nu,\alpha}(qr)$ $[1]$, а для рівняння Бесселя $\left(\mathrm{B}_\alpha - q^2\right)v = 0$ - функції $I_{q,\alpha}(\lambda r)$ та $\mathrm{K}_{q,\alpha}(\lambda r)$ $[2]$; фундаментальну систему розв'язків для рівняння Лежандра $\left(\Lambda_\mu - q^2\right)v = 0$ утворюють функції Лежандра $\mathrm{P}^\mu_{-\frac{1}{2}+q}(ch\,r)$ і $L^\mu_{-\frac{1}{2}+q}(ch\,r)$ $[3]$.

Наявність фундаментальної системи розв'язків дає можливість будувати розв'язок крайової задачі (1), (2) методом функції Коші $[4{,}5]$:

$$
\begin{aligned}
u_1(r) &= \mathrm{A}_1 \mathrm{P}^\mu_{-\frac{1}{2}+q_1}(ch\,r) + \int_0^{R_1} \varepsilon_1(r,\rho) g_1(\rho) sh\,\rho\, d\rho, \\
u_2(r) &= \mathrm{A}_2 I_{\nu,\alpha_1}(q_2 r) + \mathrm{B}_2 \mathrm{K}_{\nu,\alpha_1}(q_2 r) + \int_{R_1}^{R_2} \varepsilon_2(r,\rho) g_2(\rho) \rho^{2\alpha_1+1} d\rho, \qquad (3) \\
u_3(r) &= \mathrm{B}_3 \mathrm{K}_{q_3,\alpha_2}(\lambda r) + \int_{R_2}^{\infty} \varepsilon_3(r,\rho) g_3(\rho) \rho^{2\alpha_2-1} d\rho.
\end{aligned}
$$

Тут $\varepsilon_j(r,\rho)$ - функція Коші $[4{,}5]$:

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon_j(r,\rho)\Big|_{r=\rho+0} - \varepsilon_j(r,\rho)\Big|_{r=\rho-0} = 0, \\
&\frac{d}{dr}\varepsilon_j(r,\rho)\Big|_{r=\rho+0} - \frac{d}{dr}\varepsilon_j(r,\rho)\Big|_{r=\rho-0} = -\left[\varphi_j(\rho)\right]^{-1}, \qquad (4) \\
&\varphi_1(\rho) = sh\,\rho,\ \varphi_2(\rho) = \rho^{2\alpha_1+1},\ \varphi_3(\rho) = \rho^{2\alpha_2-1}.
\end{aligned}
$$

Визначимо функції:

$$
\begin{aligned}
&Z^{\mu,m1}_{-\frac{1}{2}+q;\,jk}(ch\,R_m) = \alpha^m_{jk} sh\,R_m\, P^\mu_{-\frac{1}{2}+q}(ch\,R_m) + \beta^m_{jk}\, P^\mu_{-\frac{1}{2}+q}(ch\,R_m), \\
&Z^{\mu,m2}_{-\frac{1}{2}+q;\,jk}(ch\,R_m) = \alpha^m_{jk} sh\,R_m\, L^\mu_{-\frac{1}{2}+q}(ch\,R_m) + \beta^m_{jk} L^\mu_{-\frac{1}{2}+q}(ch\,R_m), \\
&F^{\mu,m}_{-\frac{1}{2}+q;\,jk}(ch\,R_m, ch\,r) = Z^{\mu,m1}_{-\frac{1}{2}+q;jk}(ch\,R_m) L^\mu_{-\frac{1}{2}+q}(ch\,r) - Z^{\mu,m2}_{-\frac{1}{2}+q;jk}(ch\,R_m) \mathrm{P}^\mu_{-\frac{1}{2}+q}(ch\,r), \\
&U^{m1}_{\nu,\alpha;\,jk}(q\,R_m) = \left(\alpha^m_{jk}\frac{\nu-\alpha}{R_m} + \beta^m_{jk}\right) I_{\nu,\alpha}(q\,R_m) + \alpha^m_{jk} q^2 R_m I_{\nu+1,\alpha+1}(q\,R_m), \\
&U^{m2}_{\nu,\alpha;\,jk}(q\,R_m) = \left(\alpha^m_{jk}\frac{\nu-\alpha}{R_m} + \beta^m_{jk}\right) K_{\nu,\alpha}(q\,R_m) - \alpha^m_{jk} q^2 R_m K_{\nu+1,\alpha+1}(q\,R_m), \\
&\Psi^{m*}_{\nu,\alpha;\,jk}(q\,R_m, qr) = U^{m1}_{\nu,\alpha;\,jk}(q\,R_m) K_{\nu,\alpha}(q\,r) - U^{m2}_{\nu,\alpha;\,jk}(q\,R_m) I_{\nu,\alpha}(q\,r), \\
&S_\mu(q_1) = 2^{-1}\pi\,\Gamma\left(\frac{1}{2} + q_1 - \mu\right)\left[\Gamma\left(\frac{1}{2} + q_1 + \mu\right)\right]^{-1}.
\end{aligned}
$$

Безпосередньо перевіряється, що за функції Коші можна взяти функції:

$$\varepsilon_1(r,\rho)=\frac{S_\mu(q_1)}{Z^{\mu,11}_{-\frac{1}{2}+q_1;11}(ch R_1)}\begin{cases}P^{\mu}_{-\frac{1}{2}+q_1}(chr)F^{\mu,1}_{-\frac{1}{2}+q_1;11}(chR_1,ch\rho),0<r<\rho<R_1\\ P^{\mu}_{-\frac{1}{2}+q_1}(ch\rho)F^{\mu,1}_{-\frac{1}{2}+q_1;11}(chR_1,chr),0<\rho<r<R_1\end{cases},$$

$$\varepsilon_2(r,\rho)=\frac{q_2^{2\alpha_1}}{\Delta_{\nu,\alpha_1;11}(q_2R_1,q_2R_2)}\begin{cases}\Psi^{1*}_{\nu,\alpha_1;12}(q_2R_1,q_2r)\Psi^{2*}_{\nu,\alpha_1;11}(q_2R_2,q_2\rho),R_1<r<\rho<R_2\\ \Psi^{1*}_{\nu,\alpha_1;12}(q_2R_1,q_2\rho)\Psi^{2*}_{\nu,\alpha_1;11}(q_2R_2,q_2r),R_1<\rho<r<R_2\end{cases},$$

$$\Delta_{\nu,\alpha_1;jk}(q_2R_1,q_2R_2)=U^{11}_{\nu,\alpha_1;j2}(q_2R_1)U^{22}_{\nu,\alpha_1;k1}(q_2R_2)-U^{12}_{\nu,\alpha_1;j2}(q_2R_1)U^{21}_{\nu,\alpha_1;k1}(q_2R_2);\ j,k=1,2,$$

$$\varepsilon_3(r,\rho)=-\frac{\lambda^{2\alpha_2}}{U^{22}_{q_3,\alpha_2;12}(\lambda R_2)}\begin{cases}K_{q_3,\alpha_2}(\lambda\rho)\Psi^{2*}_{q_3,\alpha_2;12}(\lambda R_2,\lambda r),R_2<r<\rho<\infty\\ K_{q_3,\alpha_2}(\lambda r)\Psi^{2*}_{q_3,\alpha_2;12}(\lambda R_2,\lambda\rho),R_2<\rho<r<\infty\end{cases}.$$

Умови спряження (2) для визначення величин A_1, A_2, B_2, B_3 дають алгебраїчну систему:

$$Z^{\mu,11}_{-\frac{1}{2}+q_1;j1}(chR_1)A_1-U^{11}_{\nu,\alpha_1;j2}(q_2R_1)A_2-U^{12}_{\nu,\alpha_1;j2}(q_2R_1)B_2=\delta_{1j}\omega_{11}+\delta_{2j}(\omega_{21}+G_{12}), \tag{5}$$

$$U^{21}_{\nu,\alpha_1;j1}(q_2R_2)A_2-U^{22}_{\nu,\alpha_1;j1}(q_2R_2)B_2-U^{22}_{q_3,\alpha_2;j2}(\lambda R_2)B_3=\delta_{1j}\omega_{12}+\delta_{2j}(\omega_{22}+G_{23}),\ j=1,2.$$

У системі (5) беруть участь символ Кронекера δ_{jk} та функції

$$G_{12}=\frac{c_{11}}{shR_1}\int_0^{R_1}\frac{P^{\mu}_{-\frac{1}{2}+q_1}(ch\rho)}{Z^{\mu,11}_{-\frac{1}{2}+q_1;11}(chR_1)}g_1(\rho)sh\rho\,d\rho-\frac{c_{21}}{R_1^{2\alpha_1+1}}\int_{R_1}^{R_2}\frac{\Psi^{2*}_{\nu,\alpha_1;11}(q_2R_2,q_2\rho)}{\Delta_{\nu,\alpha_1;11}(q_2R_1,q_2R_2)}g_2(\rho)\rho^{2\alpha_1+1}d\rho,$$

$$G_{23}=\frac{c_{12}}{R_2^{2\alpha_1+1}}\int_{R_1}^{R_2}\frac{\Psi^{1*}_{\nu,\alpha_1;12}(q_2R_1,q_2\rho)}{\Delta_{\nu,\alpha_1;11}(q_2R_1,q_2R_2)}g_2(\rho)\rho^{2\alpha_1+1}d\rho+\frac{c_{22}}{R_2^{2\alpha_2+1}}\int_{R_2}^{\infty}\frac{K_{q_3,\alpha_2}(\lambda\rho)}{U^{22}_{q_3,\alpha_2;12}(\lambda R_2)}g_3(\rho)\rho^{2\alpha_2-1}d\rho.$$

Припустимо, що виконана умова однозначної розв'язності крайової задачі (1), (2): визначник алгебраїчної системи (5)

$$\Delta^{\mu}_{\nu,(\alpha)}(q)\equiv A_{\nu,(\alpha);2}(q)Z^{\mu,11}_{-\frac{1}{2}+q_1;11}(chR_1)-A_{\nu,(\alpha);1}(q)Z^{\mu,11}_{-\frac{1}{2}+q;21}(chR_1)=$$

$$=B^{\mu}_{\nu,\alpha_1;1}(q)U^{22}_{q_3,\alpha_2;22}(\lambda R_2)-B^{\mu}_{\nu,\alpha_1;2}(q)U^{22}_{q_3,\alpha_2;12}(\lambda R_2)\neq 0. \tag{6}$$

Тут прийняті позначення:

$$A_{\nu,(\alpha);j}(q)=U^{22}_{q_3,\alpha_2;22}(\lambda R_2)\Delta_{\nu,\alpha_1;j1}(q_2R_1,q_2R_2)-U^{22}_{q_3,\alpha_2;12}(\lambda R_2)\Delta_{\nu,\alpha_1;j2}(q_2R_1,q_2R_2),$$

$$B^{\mu}_{\nu,\alpha_1;j}(q)=Z^{\mu,11}_{-\frac{1}{2}+q_1;11}(chR_1)\Delta_{\nu,\alpha_1;2j}(q_2R_1,q_2R_2)-Z^{\mu,11}_{-\frac{1}{2}+q_1;21}(chR_1)\Delta_{\nu,\alpha_1;1j}(q_2R_1,q_2R_2),$$

$$(\alpha)=(\alpha_1,\alpha_2),\ q=(q_1,q_2,q_3),\ j=1,2.$$

Визначимо: 1) породженні неоднорідністю системи (1) функції впливу

$$\mathrm{H}^{\mu}_{\nu,(\alpha);11}(r,\rho,q)=\frac{S_{\mu}(q_1)}{\Delta^{\mu}_{\nu,(\alpha)}(\rho)}\times$$

$$\times\begin{cases} P^{\mu}_{-\frac{1}{2}+q_1}(chr)\left[A_{\nu,(\alpha);2}(q)F^{\mu,1}_{-\frac{1}{2}+q_1;11}(chR_1,ch\rho)-A_{\nu,(\alpha);1}(q)F^{\mu,1}_{-\frac{1}{2}+q_1;21}(chR_1,ch\rho)\right],0<r<\rho<R_1 \\ P^{\mu}_{-\frac{1}{2}+q_1}(ch\rho)\left[A_{\nu,(\alpha);2}(q)F^{\mu,1}_{-\frac{1}{2}+q_1;11}(chR_1,chr)-A_{\nu,(\alpha);1}(q)F^{\mu,1}_{-\frac{1}{2}+q_1;21}(chR_1,chr)\right],0<\rho<r<R_1 \end{cases}$$

$$\mathrm{H}^{\mu}_{\nu,(\alpha);12}(r,\rho,q)=\frac{c_{21}}{R_1^{2\alpha_1+1}}\frac{1}{\Delta^{\mu}_{\nu,(\alpha)}(q)}P^{\mu}_{-\frac{1}{2}+q_1}(chr)Q_{\nu,(\alpha)}(\rho,q),$$

$$Q_{\nu,(\alpha)}(r,q)=U^{22}_{q_3,\alpha_2;22}(\lambda R_2)\Psi^{2*}_{\nu,\alpha_1;11}(q_2R_2,q_2r)-U^{22}_{q_3,\alpha_2;12}(\lambda R_2)\Psi^{2*}_{\nu,\alpha_1;21}(q_2R_2,q_2r);$$

$$\mathrm{H}^{\mu}_{\nu,(\alpha);13}(r,\rho,q)=-\frac{c_{21}}{q_2^{2\alpha_1}R_1^{2\alpha_1+1}}\frac{c_{22}}{R_2^{2\alpha_2+1}}\frac{1}{\Delta^{\mu}_{\nu,(\alpha)}(q)}P^{\mu}_{-\frac{1}{2}+q_1}(chr)K_{q_3,\alpha_2}(\lambda\rho);$$

$$\mathrm{H}^{\mu}_{\nu,(\alpha);21}(r,\rho,q)=\frac{c_{11}}{shR_1}\frac{1}{\Delta^{\mu}_{\nu,(\alpha)}(q)}P^{\mu}_{-\frac{1}{2}+q_1}(ch\rho)Q_{\nu,(\alpha)}(r,q); \qquad (7)$$

$$\mathrm{H}^{\mu}_{\nu,(\alpha);22}(r,\rho,q)=\frac{q_2^{2\alpha_1}}{\Delta^{\mu}_{\nu,(\alpha)}(q)}\begin{cases} Q^{\mu}_{\nu,\alpha_1}(r,q)Q_{\nu,(\alpha)}(\rho,q), R_1<r<\rho<R_2 \\ Q^{\mu}_{\nu,\alpha_1}(\rho,q)Q_{\nu,(\alpha)}(r,q), R_1<\rho<r<R_2 \end{cases};$$

$$\mathrm{H}^{\mu}_{\nu,(\alpha);23}(r,\rho,q)=-\frac{c_{22}}{R_2^{2\alpha_2+1}}\frac{1}{\Delta^{\mu}_{\nu,(\alpha)}(q)}Q^{\mu}_{\nu,\alpha_1}(r,q)K_{q_3,\alpha_2}(\lambda\rho),$$

$$Q^{\mu}_{\nu,\alpha_1}(r,q)=Z^{\mu,11}_{-\frac{1}{2}+q_1;11}(chR_1)\Psi^{1*}_{\nu,\alpha_1;22}(q_2R_1,q_2r)-Z^{\mu,11}_{-\frac{1}{2}+q_1;21}(chR_1)\Psi^{1*}_{\nu,\alpha_1;12}(q_2R_1,q_2r),$$

$$\mathrm{H}^{\mu}_{\nu,(\alpha);31}(r,\rho,q)=-\frac{c_{11}}{shR_1}\frac{c_{12}}{q_2^{2\alpha_1}R_2^{2\alpha_1+1}}\frac{1}{\Delta^{\mu}_{\nu,(\alpha)}(q)}P^{\mu}_{-\frac{1}{2}+q_1}(ch\rho)K_{q_3,\alpha_2}(\lambda r),$$

$$\mathrm{H}^{\mu}_{\nu,(\alpha);32}(r,\rho,q)=-\frac{c_{12}}{R_2^{2\alpha_1+1}}\frac{1}{\Delta^{\mu}_{\nu,(\alpha)}(q)}Q^{\mu}_{\nu,\alpha_1}(\rho,q)K_{q_3,\alpha_2}(\lambda r),$$

$$\mathrm{H}^{\mu}_{\nu,(\alpha);33}(r,\rho,q)=\frac{\lambda^{2\alpha_2}}{\Delta^{\mu}_{\nu,(\alpha)}(q)}\times$$

$$\times\begin{cases} K_{q_3,\alpha_2}(\lambda\rho)\left[B^{\mu}_{\nu,\alpha_1;2}(q)\Psi^{2*}_{q_3,\alpha_2;12}(\lambda R_2,\lambda r)-B^{\mu}_{\nu,\alpha_1;1}(q)\Psi^{2*}_{q_3,\alpha_2;22}(\lambda R_2,\lambda r)\right], R_2<r<\rho<\infty \\ K_{q_3,\alpha_2}(\lambda r)\left[B^{\mu}_{\nu,\alpha_1;2}(q)\Psi^{2*}_{q_3,\alpha_2;12}(\lambda R_2,\lambda\rho)-B^{\mu}_{\nu,\alpha_1;1}(q)\Psi^{2*}_{q_3,\alpha_2;22}(\lambda R_2,\lambda\rho)\right], R_2<\rho<r<\infty \end{cases};$$

2) породжені неоднорідністю умов спряження функції Гріна

$$W^{\mu,1}_{\nu,(\alpha);11}(r,q)=\frac{A_{\nu,(\alpha);2}(q)}{\Delta^{\mu}_{\nu,(\alpha)}(q)}P^{\mu}_{-\frac{1}{2}+q_1}(chr); \qquad W^{\mu,1}_{\nu,(\alpha);21}(r,q)=-\frac{A_{\nu,(\alpha);1}(q)}{\Delta^{\mu}_{\nu,(\alpha)}(q)}P^{\mu}_{-\frac{1}{2}+q_1}(chr);$$

$$W^{\mu,1}_{\nu,(\alpha);12}(r,q)=\frac{c_{21}}{q_2^{2\alpha_1}R_1^{2\alpha_1+1}}\frac{U^{22}_{q_3,\alpha_2;22}(\lambda R_2)}{\Delta^{\mu}_{\nu,(\alpha)}(q)}P^{\mu}_{-\frac{1}{2}+q_1}(chr),$$

$$W^{\mu,1}_{\nu,(\alpha);22}(r,q)=-\frac{c_{21}}{q_2^{2\alpha_1}R_1^{2\alpha_1+1}}\frac{1}{\Delta^{\mu}_{\nu,(\alpha)}(q)}U^{22}_{q_3,\alpha_2;12}(\lambda R_2)P^{\mu}_{-\frac{1}{2}+q_1}(chr); \tag{8}$$

$$W^{\mu,2}_{\nu,(\alpha);11}(r,q)=-\frac{Z^{\mu,11}_{-\frac{1}{2}+q_1;21}(chR_1)}{\Delta^{\mu}_{\nu,(\alpha)}(q)}Q_{\nu,(\alpha)}(r,q);\quad W^{\mu,2}_{\nu,(\alpha);21}(r,q)=\frac{Z^{\mu,11}_{-\frac{1}{2}+q_1;11}(chR_1)}{\Delta^{\mu}_{\nu,(\alpha)}(q)}Q_{\nu,(\alpha)}(r,q);$$

$$W^{\mu,2}_{\nu,(\alpha);12}(r,q)=\frac{U^{22}_{q_3,\alpha_2;22}(\lambda R_2)}{\Delta^{\mu}_{\nu,(\alpha)}(q)}Q^{\mu}_{\nu,\alpha_1}(r,q);\quad W^{\mu,2}_{\nu,(\alpha);22}(r,q)=-\frac{U^{22}_{q_3,\alpha_2;12}(\lambda R_2)}{\Delta^{\mu}_{\nu,(\alpha)}(q)}Q^{\mu}_{\nu,\alpha_1}(r,q);$$

$$W^{\mu,3}_{\nu,(\alpha);11}(r,q)=\frac{c_{12}}{q_2^{2\alpha_1}R_2^{2\alpha_1+1}}\frac{Z^{\mu,11}_{-\frac{1}{2}+q_1;21}(chR_1)}{\Delta^{\mu}_{\nu,(\alpha)}(q)}K_{q_3,\alpha_2}(\lambda r),$$

$$W^{\mu,3}_{\nu,(\alpha);21}(r,q)=-\frac{c_{12}}{q_2^{2\alpha_1}R_2^{2\alpha_1+1}}\frac{1}{\Delta^{\mu}_{\nu,(\alpha)}(q)}Z^{\mu,11}_{-\frac{1}{2}+q_1;11}(chR_1)K_{q_3,\alpha_2}(\lambda r);$$

$$W^{\mu,3}_{\nu,(\alpha);12}(r,q)=\frac{B^{\mu}_{\nu,\alpha_1;2}(q)}{\Delta^{\mu}_{\nu,(\alpha)}(q)}K_{q_3,\alpha_2}(\lambda r);\quad W^{\mu,3}_{\nu,(\alpha);22}(r,q)=-\frac{B^{\mu}_{\nu,\alpha_1;1}(q)}{\Delta^{\mu}_{\nu,(\alpha)}(q)}K_{q_3,\alpha_2}(\lambda r).$$

У результаті однозначної розв'язності алгебраїчної системи (5), підстановки одержаних виразів $A_j\ (j=1,2)$ та $B_k\ (k=2,3)$ у формули (3) маємо єдиний розв'язок крайової задачі (1), (2):

$$u_j(r)=\sum_{m,k=1}^{2}W^{\mu,j}_{\nu,(\alpha);mk}(r,q)\omega_{mk}+\int_0^{R_1}\mathrm{H}^{\mu}_{\nu,(\alpha);j1}(r,\rho,q)g_1(\rho)sh\rho\,d\rho+ \tag{9}$$

$$+\int_{R_1}^{R_2}\mathrm{H}^{\mu}_{\nu,(\alpha);j2}(r,\rho,q)g_2(\rho)\rho^{2\alpha_1+1}d\rho+\int_{R_2}^{\infty}\mathrm{H}^{\mu}_{\nu,(\alpha);j3}(r,\rho,q)g_3(\rho)\rho^{2\alpha_3-1}d\rho,\ j=\overline{1,3}.$$

Побудуємо розв'язок даної крайової задачі методом інтегрального перетворення, породженого на множині I_{12}^{+} гібридним диференціальним оператором

$$m^{\mu}_{\nu,(\alpha)}=\theta(r)\theta(R_1-r)\Lambda_{\mu}+\theta(r-R_1)\theta(R_2-r)B_{\nu,\alpha_1}+\theta(r-R_2)B_{\alpha_2}, \tag{10}$$

$\theta(x)$ - одинична функція Хевісайда [5].

Оскільки оператор $m^{\mu}_{\nu,(\alpha)}$ самоспряжений і не має на множині I_{12}^{+} особливої точки, то його спектр дійсний і дискретний. З метою побудови спектра і відповідної йому спектральної вектор-функції розглянемо задачу Штурма-Ліувілля: побудувати обмежений на множині I_{12}^{+} розв'язок сепаратної системи диференціальних рівнянь Лежандра і Бесселя

$$(\Lambda_{\mu}+b_1^2)V_1=0,\ r\in(0,R_1),\ b_j=(\beta^2+k_j^2)^{1/2},$$

$$(B_{\nu,\alpha_1}+b_2^2)V_2=0,\ r\in(R_1,R_2),\ k_j^2\ge 0, \tag{11}$$

$$\left(B_{\alpha_2}+b_3^2\right)V_3=0,\ r\in(R_2,\infty),\ j=1,3$$

за однорідними умовами спряження (2).

Фундаментальну систему розв’язків для рівняння Бесселя $\left(B_{\nu,\alpha}+b^2\right)V=0$ утворюють функції $J_{\nu,\alpha}(br)$ та $N_{\nu,\alpha}(bR)$ [1], а для рівняння Бесселя $\left(B_{\alpha}+b^2\right)V=0$ - функції $C_\alpha(\lambda r,b)$ та $D_\alpha(\lambda r,b)$ [2]; фундаментальну систему розв’язків для рівняння Лежандра $\left(\Lambda_\mu+b^2\right)V=0$ утворюють функції $P^\mu_{-\frac{1}{2}+ib}(chr)$ та $L^\mu_{-\frac{1}{2}+ib}(chr)$ (або дві дійсні функції $A^\mu_{-\frac{1}{2}+ib}(chr)$ та $B^\mu_{-\frac{1}{2}+ib}(chr)$) [3].

Якщо покласти

$$V_1=A_1P^\mu_{-\frac{1}{2}+ib_1}(chr),$$

$$V_2=A_2\,J_{\nu,\alpha_1}(b_2r)+B_2N_{\nu,\alpha_1}(b_2r),$$

$$V_3=B_3\,D_{\alpha_2}(\lambda r,b_3),$$

то умови спряження дають для визначення $A_j\ (j=1,2)$ і $B_k\ (k=2,3)$ алгебраїчну систему:

$$Z^{\mu,11}_{-\frac{1}{2}+ib_1;\,j1}(chR_1)A_1-u^{11}_{\nu,\alpha_1;\,j2}(b_2R_1)A_2-u^{12}_{\nu,\alpha_1;\,j2}(b_2R_1)B_2=0,\ j=1,2;$$

$$u^{21}_{\nu,\alpha_1;\,j1}(b_2R_2)A_2+u^{22}_{\nu,\alpha_1;\,j1}(b_2R_2)B_2-\mathrm{X}^{22}_{\alpha_2;\,j2}(\lambda R_2,b_3)=0. \tag{12}$$

Тут прийняті позначення:

$$u^{m1}_{\nu,\alpha;\,jk}(b_2R_m)=\left(\alpha^m_{jk}\frac{\nu-\alpha}{R_m}+\beta^m_{jk}\right)J_{\nu,\alpha}(b_2R_m)-\alpha^m_{jk}R_mb_2^2\,J_{\nu+1,\alpha+1}(b_2R_m),$$

$$u^{m2}_{\nu,\alpha;\,jk}(b_2R_m)=\left(\alpha^m_{jk}\frac{\nu-\alpha}{R_m}+\beta^m_{jk}\right)N_{\nu,\alpha}(b_2R_m)-\alpha^m_{jk}R_mb_2^2\,N_{\nu+1,\alpha+1}(b_2R_m),$$

$$\mathrm{X}^{22}_{\alpha_2;\,j2}(\lambda R_2,b_3)=\left(\alpha^2_{j2}\frac{d}{dr}+\beta^2_{j2}\right)D_{\alpha_2}(\lambda r,b_3)\Big|_{r=R_2}.$$

Система (12) має ненульовий розв’язок тоді і тільки тоді, коли визначник системи

$$\delta^\mu_{\nu,(\alpha)}(\beta)\equiv Z^{\mu,11}_{-\frac{1}{2}+ib_1;11}(chR_1)a_{\nu,(\alpha);2}(\beta)-Z^{\mu,11}_{-\frac{1}{2}+ib_1;21}(chR_1)a_{\nu,(\alpha);1}(\beta)=0. \tag{13}$$

У рівнянні (13) беруть участь функції

$$a_{\nu,(\alpha);\,j}(\beta)=\mathrm{X}^{22}_{\alpha_2;22}(\lambda R_2,b_3)\delta_{\nu,\alpha_1;\,j1}(b_2R_1,b_2R_2)-\mathrm{X}^{22}_{\alpha_2;12}(\lambda R_2,b_3)\delta_{\nu,\alpha_1;\,j2}(b_2R_1,b_2R_2),$$

$$\delta_{\nu,\alpha_1;\,jk}(b_2R_1,b_2R_2)=u^{11}_{\nu,\alpha_1;\,j2}(b_2R_1)u^{22}_{\nu,\alpha_1;\,k1}(b_2R_2)-u^{12}_{\nu,\alpha_1;\,j2}(b_2R_1)u^{21}_{\nu,\alpha_1;\,k1}(b_2R_2),\ j,k=1,2.$$

Корені β_n трансцендентного рівняння $\delta^\mu_{\nu,(\alpha)}=0$ утворюють дискретний спектр [6]: різні, дійсні, симетрично розташовані відносно точки $\beta=0$; їх модулі складають монотонно зростаючу послідовність з єдиною граничною точкою $\beta=\infty$.

Кожному власному числу β_n оператора $m^{\mu}_{\nu,(\alpha)}$ відповідає одна власна вектор-функція $V^{\mu}_{\nu,(\alpha)}(r,\beta_n)=\theta(r)\theta(R_1-r)V^{\mu}_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta_n)+\theta(r-R_1)\theta(R_2-r)V^{\mu}_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta_n)+$ $+\theta(r-R_2)V^{\mu}_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta_n)$, компоненти $V^{\mu}_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta_n)$ якої обчислюються за правилами:

$$V^{\mu}_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta_n)=\frac{2}{\pi}\frac{c_{21}}{b_{2n}^{2\alpha_1}R_1^{2\alpha_1+1}}\mathrm{X}^{22}_{\alpha_2;12}(\lambda R_2,b_{3n})P^{\mu}_{-\frac{1}{2}+ib_{1n}}(chr);\; b_{jn}=\left(\beta_n^2+k_j^2\right)^{1/2};$$

$$V^{\mu}_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta_n)=\mathrm{X}^{22}_{\alpha_2;12}(\lambda R_2,b_{3n})\left[Z^{\mu,11}_{-\frac{1}{2}+ib_{1n};21}(chR_1)\Psi^1_{\nu,\alpha_1;12}(b_{2n}R_1,b_{2n}r)-\right.$$
$$\left.-Z^{\mu,11}_{-\frac{1}{2}+ib_{1n};11}(chR_1)\Psi^1_{\nu,\alpha_1;22}(b_{2n}R_1,b_{2n}r)\right]; \tag{14}$$

$$V^{\mu}_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta_n)=b^{\mu}_{\nu,\alpha_2;1}(\beta_n)D_{\alpha_2}(\lambda r,b_{3n}).$$

У рівностях (14) беруть участь функції:

$$\Psi^1_{\nu,\alpha_1;j2}(b_{2n}R_1,b_{2n}r)=u^{11}_{\nu,\alpha_1;j2}(b_{2n}R_1)N_{\nu,\alpha_1}(b_{2n}r)-u^{12}_{\nu,\alpha_1;j2}(b_{2n}R_1)J_{\nu,\alpha_1}(b_{2n}r);$$

$$b^{\mu}_{\nu,\alpha_2;j}(\beta_n)=Z^{\mu,11}_{-\frac{1}{2}+ib_{1n};21}(chR_1)\delta_{\nu,\alpha_1;1j}(b_{2n}R_1,b_{2n}R_2)-$$
$$-Z^{\mu,11}_{-\frac{1}{2}+ib_{1n};11}(chR_1)\delta_{\nu,\alpha_1;2j}(b_{2n}R_1,b_{2n}R_2);\; j=1,2.$$

Згідно із роботою [6] маємо твердження:

Теорема 1 (про дискретну функцію): Система власних вектор-функцій $\left\{V^{\mu}_{\nu,(\alpha)}(r,\beta_n)\right\}_{n=1}^{\infty}$ ортогональна на множині I^+_{12}, повна і замкнута. При цьому вагова функція

$$\sigma(r)=\sigma_1 shr\,\theta(r)\theta(R_1-r)+\sigma_2 r^{2\alpha_1+1}\theta(r-R_1)\theta(R_2-r)+\sigma_3 r^{2\alpha_2-1}\theta(r-R_2),$$

$$\sigma_1=\frac{c_{11}c_{12}}{c_{21}c_{22}}\cdot\frac{R_1^{2\alpha_1+1}}{shR_1}\cdot\frac{R_2^{2\alpha_2+1}}{R_2^{2\alpha_1+1}},\; \sigma_2=\frac{c_{12}}{c_{22}}\cdot\frac{R_2^{2\alpha_2+1}}{R_2^{2\alpha_1+1}},\; \sigma_3=1,$$

а квадрат норми спектральної вектор-функції обчислюється за стандартним правилом [6]:

$$\left\|V^{\mu}_{\nu,(\alpha)}(r,\beta_n)\right\|^2=\int_0^{R_1}\left[V^{\mu}_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta_n)\right]^2\sigma_1 shr\,dr+\int_{R_1}^{R_2}\left[V^{\mu}_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta_n)\right]^2\sigma_2 r^{2\alpha_1+1}dr+$$
$$+\int_{R_2}^{\infty}\left[V^{\mu}_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta_n)\right]^2\sigma_3 r^{2\alpha_2-1}dr\equiv\int_0^{\infty}\left[V^{\mu}_{\nu,(\alpha)}(r,\beta_n)\right]^2\sigma(r)dr.$$

Теорема 2 (типу теореми Стєклова): Будь-яка вектор-функція $g(r)=\{g_1(r);g_2(r);g_3(r)\}$ із області визначення оператора $m^{\mu}_{\nu,(\alpha)}$ зображається абсолютно і рівномірно збіжним на I^+_{12} рядом Фур'є за системою $\left\{V^{\mu}_{\nu,(\alpha)}(r,\beta_n)\right\}_{n=1}^{\infty}$:

$$g(r)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty}g(\rho)V^{\mu}_{\nu,(\alpha)}(\rho,\beta_n)\sigma(\rho)d\rho\frac{V^{\mu}_{\nu,(\alpha)}(r,\beta_n)}{\left\|V^{\mu}_{\nu,(\alpha)}(r,\beta_n)\right\|^2}. \tag{15}$$

Ряд Фур'є (15) визначає пряме

$$h^{\mu}_{\nu,(\alpha);2}\left[g(r)\right]=\int\limits_0^{\infty} g(r)V^{\mu}_{\nu,(\alpha)}(r,\beta_n)\sigma(r)dr \equiv g_n \tag{16}$$

і обернене

$$h^{-\mu}_{\nu,(\alpha);2}\left[g_n\right]=\sum_{n=1}^{\infty} g_n \frac{V^{\mu}_{\nu,(\alpha)}(r,\beta_n)}{\left\|V^{\mu}_{\nu,(\alpha)}(r,\beta_n)\right\|^2} \equiv g(r) \tag{17}$$

скінченне гібридне інтегральне перетворення типу Лежандра 1-го роду – Ганкеля 2-го роду – (Конторовича - Лєбєдєва).

Побудований методом запровадженого формулами (16), (17) інтегрального перетворення за відомою логічною схемою [7] єдиний розв'язок крайової задачі (1), (2) має структуру:

$$\begin{aligned} u_j(r)=&\int\limits_0^{R_1}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{V^{\mu}_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta_n)V^{\mu}_{\nu,(\alpha);1}(\rho,\beta_n)}{\left(\beta_n^2+\bar{q}^2\right)\left\|V^{\mu}_{\nu,(\alpha)}(r,\beta_n)\right\|^2}\right)g_1(\rho)sh\rho\,\sigma_1\,d\rho+\\ &+\int\limits_{R_1}^{R_2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{V^{\mu}_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta_n)V^{\mu}_{\nu,(\alpha);2}(\rho,\beta_n)}{\left(\beta_n^2+\bar{q}^2\right)\left\|V^{\mu}_{\nu,(\alpha)}(r,\beta_n)\right\|^2}\right)g_2(\rho)\,\sigma_2\rho^{2\alpha_1+1}\,d\rho+\\ &+\int\limits_{R_2}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{V^{\mu}_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta_n)V^{\mu}_{\nu,(\alpha);3}(\rho,\beta_n)}{\left(\beta_n^2+\bar{q}^2\right)\left\|V^{\mu}_{\nu,(\alpha)}(r,\beta_n)\right\|^2}\right)g_3(\rho)\rho^{2\alpha_2-1}\,d\rho+\\ &+\sum_{k=1}^{2}\frac{a_k}{c_{1k}}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Z^{\mu,k}_{\nu,(\alpha);12}(\beta_n)V^{\mu}_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta_n)}{\left(\beta_n^2+\bar{q}^2\right)\left\|V^{\mu}_{\nu,(\alpha)}(r,\beta_n)\right\|^2}\omega_{2k}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Z^{\mu,k}_{\nu,(\alpha);22}(\beta_n)V^{\mu}_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta_n)}{\left(\beta_n^2+\bar{q}^2\right)\left\|V^{\mu}_{\nu,(\alpha)}(r,\beta_n)\right\|^2}\omega_{1k}\right];\ j=\overline{1,3}. \end{aligned} \tag{18}$$

Порівнюючи розв'язки (9) і (18) внаслідок єдності, маємо наступні формули зображення функціональних рядів:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{V^{\mu}_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta_n)V^{\mu}_{\nu,(\alpha);k}(\rho,\beta_n)}{\left(\beta_n^2+\bar{q}^2\right)\left\|V^{\mu}_{\nu,(\alpha)}(r,\beta_n)\right\|^2}=\frac{1}{\sigma_k}\mathrm{H}^{\mu}_{\nu,(\alpha);jk}(r,\rho,q);\ \ j,k=\overline{1,3} \tag{19}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Z^{\mu,k}_{\nu,(\alpha);12}(\beta_n)V^{\mu}_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta_n)}{\left(\beta_n^2+\bar{q}^2\right)\left\|V^{\mu}_{\nu,(\alpha)}(r,\beta_n)\right\|^2}=\frac{c_{1k}}{a_k}W^{\mu,j}_{\nu,(\alpha);2k}(r,q);\ \ k=1,2;\ \ j=\overline{1,3} \tag{20}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Z^{\mu,k}_{\nu,(\alpha);22}(\beta_n)V^{\mu}_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta_n)}{\left(\beta_n^2+\bar{q}^2\right)\left\|V^{\mu}_{\nu,(\alpha)}(r,\beta_n)\right\|^2}=-\frac{c_{1k}}{a_k}W^{\mu,j}_{\nu,(\alpha);1k}(r,q);\ \ k=1,2;\ \ j=\overline{1,3} \tag{21}$$

У формулах (18) – (21) прийняті позначення:

$$a_1=\sigma_1 shR_1,\ a_2=\sigma_2 R_2^{2\alpha_1+1},\ \bar{q}^2=\max\left\{q_1^2;q_2^2;q_3^2\right\},\ k_j^2=\bar{q}^2-q_j^2\ge 0,$$

$$Z^{\mu,k}_{\nu,(\alpha);j2}(\beta_n)=\left(\alpha^k_{j2}\frac{d}{dr}+\beta^k_{j2}\right)V^{\mu}_{\nu,(\alpha);k+1}(r,\beta_n)\Big|_{r=R_k}.$$

Функції впливу визначені формулами (7), функції Гріна умов спряження – формулами (8), а компоненти власної вектор-функції – формулами (14). Оскільки праві частини рівностей (19)-(21) не залежать від $\overline{q}^2$, то можна покласти $q_1^2 = q_2^2 = q_3^2 = q^2$.

Основна теорема: Якщо вектор-функція $f = \{\Lambda_\mu[g_1(r)]; B_{\nu,\alpha_1}[g_2(r)]; B_{\alpha_2}[g_3(r)]\}$ неперервна на множині I_{12}^+, вектор-функція $g(r)$ задовольняє умови обмеження

$$\lim_{r\to 0} shr\left(\frac{dg_1}{dr}V_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta_n) - g_1(r)\frac{dV_{\nu,(\alpha);1}}{dr}\right) = 0, \quad \lim_{r\to\infty} r^{2\alpha_2+1}\left(\frac{dg_3}{dr}V^{\mu}_{\nu,(\alpha);3} - g_3\frac{dV^{\mu}_{\nu,(\alpha);3}}{dr}\right) = 0$$

та умови спряження (2) і виконується умова (6) однозначної розв'язності крайової задачі (1), (2), то справджуються формули (19)-(21) зображення поліпараметричних функціональних рядів за власними вектор-функціями оператора $m^{\mu}_{\nu,(\alpha)}$.

Зауваження: Одержанні суми функціональних рядів неперервно залежать від параметрів і даних крайової задачі. Це дозволяє із загальних структур виділяти практично потрібний частковий випадок безпосередньо (в рамках даної моделі).

Висновок. Результати роботи поповнюють довідникову математичну літературу і можуть бути використані при підсумовуванні функціональних рядів, що описують стаціонарний режим, на який виходять композиційні елементи конструкцій, які знаходяться в полі дії стрибкоподібного навантаження, та функціональних рядів, що виникають в результаті дослідження фізико-технічних процесів в неоднорідних середовищах.

Representation of the polyparametric functional series was obtained by means of solutions comparison, built on the polar axis roith two conjugated points for the separate system from two Bessel's differential equations with different origin method and one Legandre different equation by Koshi function metod and limitted hybrid integral trans formation method.

Література

1. Ленюк М.П. Исследование основных краевых задач для диссипативного волнового уравнения Бесселя. – Киев, 1983. – 62с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 83.3)
2. Ленюк М.П., Міхалевська Г.І Інтегральні перетворення типу Конторовича-Лєбєдєва. – Чернівці: Прут, 2002. – 280с.
3. Ленюк М.П., Шинкарик Н.И. Гибридные интегральные преобразования Лежандра. – Львов, 1989. – 60с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т прикл. Пробл. Механики и математики; 89.0)
4. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. – М.: Физматгиз, 1959. – 468с.
5. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй специальный курс. – М.: Наука, 1965. -328с.
6. Комаров Г.М., Лен юк М.П., Мороз В.В. Скінченні гібридні інтегральні перетворення, породжені диференціальними рівняннями другого порядку. – Чернівці: Прут, 2001. – 228с.
7. Ленюк М.П., Матієга В.М. Підсумовування функціональних рядів методом гібридного інтегрального перетворення типу (Лежандра, Конторовича-Лєбєдєва, Конторовича-Лєбєдєва). – Чернівці: Прут, 2002. – 76с. – (Препринт / НАН України. Ін-т прикл. пробл. механіки і математики ім.. Я.С. Підстригача; 03.02)
8. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Наука, 1971. – 1108с.
9. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Марычев О.И. Интегралы и ряды. Специальные функции. – М.: Наука, 1983. – 798 с.
10. Блажієвський А.М., Ленюк М.П. Зображення поліпараметричних функціональних рядів методом скінченних гібридних інтегральних перетворень: В 3-ьох томах. – Київ: Інститут математики НАН України, 1999 (Т.1, 167 с.), 2000 (Т.2, 168 с.),. – Чернівці: пРУТ, 2002. – Т.3. – 264 с.

Одержано 15.04.2004 р.