

ВИЗНАЧЕННЯ ПАРАМЕТРІВ ЕЛЕМЕНТІВ СІЛЬСЬКОГОСПОДАРСЬКИХ МАШИН ШЛЯХОМ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

Розглянуто питання математичного описання технологічного процесу роботи машин сільськогосподарського призначення, в першу чергу взаємодії робочих, опорних і рушійних елементів машин з ґрунтовим середовищем. Розроблення математичних моделей і комп'ютерних програм для їхньої реалізації дозволить на сучасному теоретичному рівні визначати необхідні для проектування машин параметри: потужність, сили опору ґрунтів різанню чи переміщенням, деформації середовища та ін. Вони можуть також розглядатися як фрагменти системи автоматизованого проектування (САПР), розробка якої є складною комплексною науково-технічною проблемою, що ще потребує свого вирішення.

Стан проблеми

Необхідні для проектування сільськогосподарських машин вихідні параметри найчастіше призначаються за аналогією до існуючих машин або з емпіричних чи напівемпіричних залежностей, встановлених на основі результатів натурних експериментів. Такий підхід унеможливорює врахування впливу кожного конкретного фактора на величини проектних параметрів, що обмежує можливості проектування машин нових класів. Більш раціональним є використання на цьому етапі математичного моделювання процесу взаємодії машини з технологічним середовищем. Це потребує розробки відповідного математичного апарату і проведення лабораторних досліджень матеріалів середовища, що суттєво дешевше та інформативніше за натурні експерименти.

В практиці проектування сільськогосподарських машин використовують математичні моделі декількох класів. Для визначення опору ґрунту різанню та переміщенню – логіко-математичні моделі В.П. Горячкіна, Ю.О. Вєтрова, А.М. Холодова, А.М. Зеленіна, J.Y. Wong, M.G. Bekker та ін. Для опису напруженого стану в опорних та рушійних елементах, а також для оцінки можливості сприйняття середовищем робочих навантажень використовують лінійні чи нелінійні моделі механіки деформівного твердого тіла. Перший тип моделей вимагає для їх реалізації проведення спеціальних натурних випробувань, що можна віднести до недоліків цих моделей. Відомі моделі другого типу неадекватно описують процес взаємодії машини з ґрунтовим середовищем, оскільки не враховують специфічні особливості деформування та руйнування дискретних матеріалів.

Метою описаних нижче досліджень є розробка математичної моделі взаємодії робочих та опорних елементів сільськогосподарських машин з ґрунтовим середовищем і визначення шляхом моделювання основних проектних параметрів машини.

Формулювання моделі

Математичне моделювання процесу взаємодії машини з ґрунтом зводиться до розв'язання контактної задачі взаємодії пружних областей (елементи машини) з фізично нелінійною областю нескінченних розмірів, що заповнена дискретним матеріалом.

Задачі контактування між собою пружних областей достатньо вивчені. Відмінність задачі, що розглядається, полягає в особливих законах деформування ґрунтів або інших дискретних матеріалів. Закономірності зміни їх об'єму і форми описуються в багатомірному просторі "напруження – деформації" складними поверхнями деформування, а не найпростішими лінійними співвідношеннями закону Гука, як для ідеально пружного матеріалу. Характер поверхонь деформування можна визначити тільки за результатами спеціальних лабораторних випробувань зразків матеріалу.

Моделювання технологічного процесу зводиться до розв'язання контактних задач при поетапному силовому чи кінематичному навантаженні середовища зі сторони робочого органу машини до настання в середовищі граничного стану. Контактні умови передбачають існування спільних поверхонь, точки яких одночасно належать і середовищу, і органу машини. Це дозволяє визначити напруження і деформації в кожній точці елементів машини та середовища з урахуванням особливостей деформування останнього, визначити контактні зусилля і переміщення та обґрунтувати основні технічні параметри машини.

Розрахункова схема описаної задачі показана на рис. 1. На схемі область O_1 моделює ґрунтове середовище, O_2 – робочий орган машини, $S_{(u)}$ та $S_{(o)}$ – границі, на яких задані кінематичні умови (переміщення), $S_{(R)}$ – границі, на яких відомі силові умови.

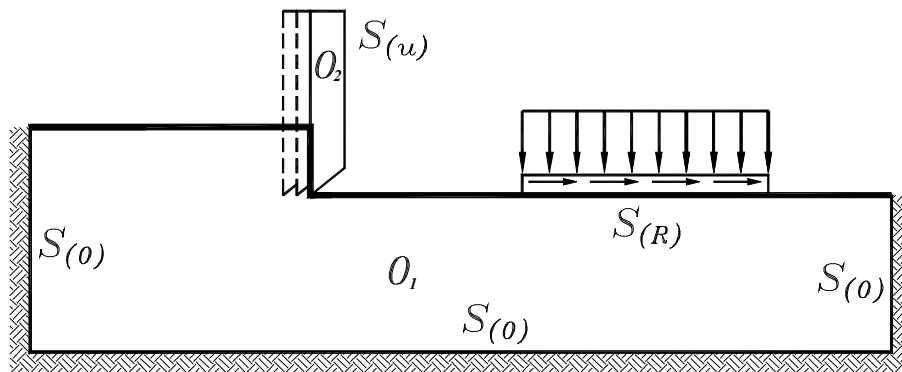


Рис. 1. Розрахункова схема контактної задачі взаємодії елементів машини з технологічним середовищем

Контактну задачу можна сформулювати таким чином.

Для областей O_1 і O_2 з границями $S \in (S_{(R)}, S_{(u)}, S_{(o)})$ визначити напруження, деформації та переміщення $\{\sigma\} = f(x, y, z)$, $\{\varepsilon\} = F(x, y, z)$, $\{u\} = \Phi(x, y, z)$, що відповідають розрахунковій схемі та граничним умовам.

Задача зводиться до розв'язання системи матричних рівнянь:

$$[B]^T \{\sigma\} = \{V\} \text{ - диференціальних рівнянь рівноваги;}$$

$$\{\varepsilon\} = [B]\{u\} \text{ - диференціальних геометричних рівнянь;}$$

$\{\sigma\} = [D_{zm}]\{\varepsilon\}$ - фізичних рівнянь для матеріалу середовища, що включають змінні параметри поверхні деформування, котрі залежать від досягнутого в кожній точці розрахункової області напруженого стану і визначаються з експериментально одержаних інваріантних нелінійних фізичних співвідношень

$$\tau_0 = A \sigma_0 \gamma_0^\alpha = G_{zm} \gamma_0,$$

$$\sigma_0 = K_{zm} \varepsilon_0$$

з урахуванням граничних умов

$$[A]^T \{\sigma\} = \{R_s\} \quad \text{на } S_{(R)},$$

$$\{u\} = \{u_s\} \quad \text{на } S_{(u)},$$

$$\{u\} = \{0\} \quad \text{на } S_{(o)}.$$

В наведених математичних рівняннях

$\{\sigma\}$, $\{\varepsilon\}$, $\{u\}$, $\{R\}$, $\{V\}$ - вектори напружень, деформацій, переміщень, зовнішніх сил і об'ємних сил;

τ_0 , σ_0 , γ_0 , ε_0 - октаедричні напруження і деформації, що розглядаються як

інваріанти напруженого та деформаційного станів;

A, α - параметри функцій, що апроксимують експериментальні деформаційні залежності;

$G_{зм}, K_{зм}$ - змінні модулі зсуву і об'ємної деформації, величини яких залежать від досягнутого рівня напруженодеформативного стану у кожній точці середовища;

$[B], [A], [D_{зм}]$ - прямокутні матриці диференціальних операторів, напрямних косинусів, змінних деформаційних параметрів.

Відмінність сформульованої задачі від відомих полягає в тому, що система рівнянь включає нові нелінійні фізичні співвідношення, котрі відображають характерні особливості деформування дискретних матеріалів: нелінійність залежностей "напруження – деформації", а також прояв внутрішнього тертя на усіх етапах деформування – залежність деформацій зсуву від величини стискуючих напружень.

В основу моделі покладені нелінійні фізичні рівняння зі змінними модулями деформації, величини яких залежать від досягнутого в кожній точці розрахункової області рівня напруженодеформативного стану, що не дозволяє їх попереднє визначення. Тому рішення задачі може бути одержано тільки чисельними методами на основі спеціально розроблених ітераційних процедур.

Базовим вибрано відомий метод скінченних елементів.

Скінченно-елементне формулювання моделі взаємодії машини з технологічним середовищем зводиться до наступних операцій.

Суцільні області середовища і елементів машини, що з ним контактують, замінюють їх дискретними моделями у вигляді системи скінченних елементів

Істотним є вибір скінченних елементів спеціальної форми для забезпечення сталості величини напружень і деформацій в об'ємі одного елемента. Це дозволяє призначати значення модулів деформацій не для кожної точки розрахункової області, а тільки для кожного елемента. Цим вимогам відповідають симплекс-елементи в формі трикутних призм чи тетраедрів з лінійними функціями розподілу переміщень.

Формуються вектори вузлових сил $\{R\}$ і відомих вузлових переміщень $\{\delta_u\}$ на границях області S_u . Для прийнятих симплекс-елементів компоненти вузлових сил на границі області визначаються з умови рівноваги.

Для кожного елемента області формується матриця жорсткості $[k]$

$$[k] = [B^e]^T [D_{зм}] [B^e] V,$$

підматриця $[D_{зм}]$ якої включає залежні від досягнутого елементом напруженого стану деформаційні модулі $G_{зм}, K_{зм}$. Величини цих модулів на кожному етапі розрахунку призначають з одержаних експериментально інваріантних фізичних залежностей:

$$G_{зм} = A \sigma_0 \gamma^{\alpha-1}, \quad K_{зм} = G_{зм} \frac{1+\nu}{1-2\nu}.$$

За правилом "складання" одержується глобальна матриця $[K]$ жорсткості системи елементів і записується система рівнянь рівноваги

$$[K]\{\delta\} = \{R\}.$$

Організовується ітераційна процедура розв'язування системи одержаних рівнянь, в результаті якої визначається вектор вузлових переміщень

$$\{\delta\} = [K]^{-1}\{R\},$$

а далі - деформацій

$$\{\epsilon^e\} = [B^e] \{\delta^e\}$$

і напружень

$$\{\sigma^e\} = [D^e] \{\varepsilon^e\}$$

в кожному елементі.

Для реалізації імітаційного моделювання ступенями змінюють переміщення робочого органу машини (граничні умови) і на кожному ступені розв'язують нелінійну граничну задачу.

Гранична умова на контактних поверхнях полягає в тому, що вузли дискретних моделей областей на поверхнях їх контакту обов'язково повинні бути спільними для кожної з контактуючих областей. Це автоматично забезпечує виконання умови нерозривності переміщень на контактних поверхнях.

Розв'язок задачі повинен задовольняти умови рівноваги, суцільності та фізичні закони деформування матеріалів. Перші дві умови при розв'язуванні методом скінченних елементів виконуються апіорі. Для виконання третьої умови розроблена процедура поступового наближення напруженодеформованого стану в кожному елементі до поверхні деформування матеріалу.

Розв'язання ведеться в переміщеннях.

На першому етапі задаються початковими значеннями модулів зсуву $G^{(I)}$ та об'ємної деформації $K^{(I)}$. За їх значеннями формується початкова матриця деформаційних коефіцієнтів $[D^{(I)}]$

$$[D^{(I)}] = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} K^{(I)} + 4G^{(I)} & K^{(I)} - 2G^{(I)} & K^{(I)} - 2G^{(I)} & 0 & 0 & 0 \\ K^{(I)} - 2G^{(I)} & K^{(I)} + 4G^{(I)} & K^{(I)} - 2G^{(I)} & 0 & 0 & 0 \\ K^{(I)} - 2G^{(I)} & K^{(I)} - 2G^{(I)} & K^{(I)} + 4G^{(I)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3G^{(I)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3G^{(I)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3G^{(I)} \end{bmatrix}$$

та матриця жорсткості $[k^{(I)}]$ елемента

$$[k^{(I)}] = [B^e]^T [D^{(I)}] [B^e] V,$$

де V – об'єм елемента.

Після формування глобальної матриці жорсткості $[K^{(I)}]$ складають систему лінійних рівнянь МСЕ, в які входять призначені початкові параметри пружності $G^{(I)}$ і $K^{(I)}$

$$[K^{(I)}] \{\delta^{(I)}\} = \{R\},$$

в якій $\{\delta^{(I)}\}$ – вектор вузлових переміщень,

$\{R\}$ – вектор вузлових навантажень.

З розв'язання лінійної задачі знаходять вузлові переміщення $\{\delta^{(I)}\}$ – $\{\delta^{(I)}\} = [K_e^{(I)}]^{-1} \{R\}$, а з них – усі компоненти тензорів деформацій і напружень

$$\{\varepsilon^{(I)}\} = [B] \{\delta^{(I)}\},$$

$$\{\sigma^{(I)}\} = [D^{(I)}] [B] \{\delta^{(I)}\}.$$

Визначені напруження $\{\sigma^{(I)}\}$ та деформації $\{\varepsilon^{(I)}\}$ відповідають лінійно-деформівному середовищу з початково прийнятими параметрами $G^{(I)}$ і $K^{(I)}$.

Для того, щоб точка з координатами $(\{\sigma^{(I)}\}, \{\varepsilon^{(I)}\})$ потрапила на фактичну поверхню деформування дискретного матеріалу, на другому етапі ітераційного процесу

коректуються деформаційні характеристики кожного елемента залежно від досягнутого в ньому напруженого стану.

За досягнутими на першому етапі напруженнями $\{\sigma^{(I)}\}$ і деформаціями $\{\varepsilon^{(I)}\}$ визначають величини октаедричних напружень та деформацій $(\sigma_0^{(I)}, \tau_0^{(I)}, \gamma_0^{(I)}, \varepsilon_0^{(I)})$.

За допомогою фізичних залежностей дискретних матеріалів визначають значення модулів зсуву $G^* = A_0 \sigma_0^{\alpha-1}$ або $G^* = \frac{\tau_0}{\gamma_0}$ та об'ємної деформації

$K^* = 2G \frac{1+\nu}{1-2\nu}$, що відповідають прийнятим фізичним співвідношенням.

Ці модулі приймаються як деформативні характеристики елемента на другому етапі ітерацій.

Таким чином, на другому етапі кожному елементу надаються свої деформаційні характеристики залежно від досягнутого в ньому напруженого стану і розрахунок повторюється вже для неоднорідної області.

Заново формуються матриці $[D^{(II)}]$, $[k^{(II)}]$, $[K^{(II)}]$ та нова система рівнянь $[K^{(II)}] \{\delta^{(II)}\} = \{R\}$.

Ітерації повторюються, поки не отримаємо бажаної точності $[\xi]$ на n -ому етапі для всіх елементів системи

$$\left| \frac{\tau_0^{(n)*} - \tau_0^{(n)}}{\tau_0^{(n)*}} \right| \leq [\xi].$$

Рекурентні залежності, що описують запропонований алгоритм для k -го етапу, можна записати таким чином:

$$\left. \begin{aligned} G_{zm}^{(k)} &= \frac{\tau_0^{(k-1)*}}{\gamma_0^{(k-1)}}; \\ K_{zm}^{(k)} &= G_{zm}^{(k)} \frac{1+\nu}{1-2\nu}; \end{aligned} \right\} \text{ - коректування деформаційних параметрів;}$$

$$\begin{aligned} [D^{(k)}] &= [D](G_{zm}^{(k)}, K_{zm}^{(k)}) \text{ - формулювання нової матриці деформаційних параметрів;} \\ [k^{(k)}] &= [B]^T [D^{(k)}] [B] V \rightarrow [K^{(k)}] \text{ - формування матриці жорсткості кожного скінченного елемента;} \end{aligned}$$

$$[K^{(k)}] \{\delta^{(k)}\} = \{R\} \text{ - формування системи рівнянь методу переміщень;}$$

$$\{\delta^{(k)}\} = [K^{(k)}]^{-1} \{R\} \text{ - розв'язання системи рівнянь;}$$

$$\{\varepsilon^{(k)}\} = [B^{(k)}] \{\delta^{(k)}\} \rightarrow \{\gamma_0^{(k)}, \varepsilon_0^{(k)}\} \text{ - обчислення деформацій;}$$

$$\{\sigma^{(k)}\} = [D^{(k)}] [B^{(k)}] \{\delta^{(k)}\} \rightarrow \{\sigma_0^{(k)}, \tau_0^{(k)}\} \text{ - обчислення напружень;}$$

$$\tau_0^{(k)*} = A_0 \sigma_0^{(k)} (\gamma_0^{(k)})^\alpha \text{ - визначення досягнутих значень інваріантних напружень;}$$

$$\left| \frac{\tau_0^{(k)*} - \tau_0^{(k)}}{\tau_0^{(k)*}} \right| \leq [\xi] \text{ - перевірка розходження.}$$

Відмінність запропонованого ітераційного процесу від існуючих полягає в тому, що "зближення" відбувається не в одній площині напружень – деформацій $(\tau_0 - \gamma_0)$, а в тривимірному просторі $(\tau_0, \gamma_0, \sigma_0)$. Положення кожної кривої $(\tau_0 - \gamma_0)$ визначається рівнем досягнутого стискуючого напруження $\sigma_0^{(k)}$.

Описаний ітераційний процес, а також поверхню деформування дискретного матеріалу, подано на рис. 2.

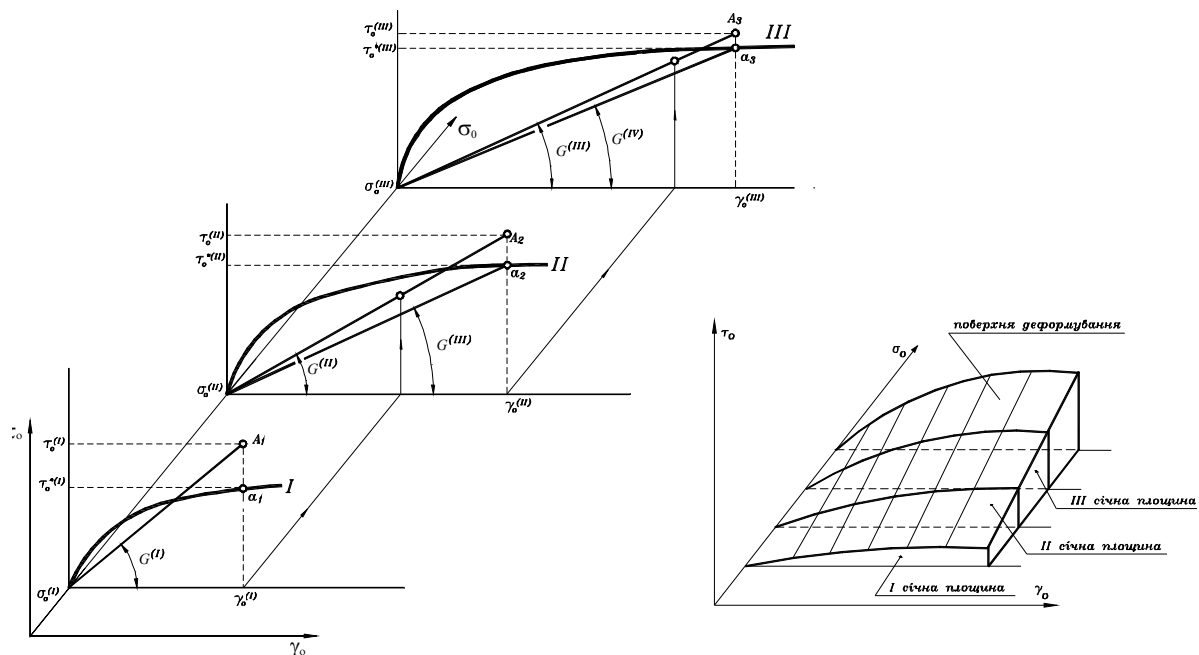


Рис. 2 Графічне ілюстрування ітераційного процесу

Висновки. Запропонована математична модель технологічного процесу взаємодії сільськогосподарських машин з дискретним середовищем використовує апарат механіки деформівного твердого тіла з особливими співвідношеннями між напруженнями і деформаціями, що враховують характерні особливості деформування і руйнування ґрунтів та інших структурно неоднорідних матеріалів. Імітаційне комп'ютерне моделювання на базі розробленої обчислювальної ітераційної процедури зводиться до поетапного розв'язання контактної задачі при змінюванні величини переміщення робочого органу машини або інших характеристик процесу. Це дозволяє визначати необхідні для проектування машин на першому етапі вихідні параметри: потужність, сили опору ґрунтів різанню і переміщенню та ін.

Questions of the mathematical description of technological process of work of agricultural machines, first of all interactions of working, basic and driving elements of machines with the solid environment are considered. Development of mathematical models and computer programs for their realization will allow at modern theoretical level to determine necessary for designing machines parameters: capacity; forces of resistance of solid to cutting or moving; deformations of environment. They can be considered also as fragments of system of automated designing which development is a difficult complex scientific and technical problem, which else demands the decision.

Одержано 19.05.2004 р.