МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ТЕРНОПІЛЬСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ІВАНА ПУЛЮЯ

Кафедра математичних методів в інженерії

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до практичних занять з дисципліни

«ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА»

для студентів факультету
«Комп'ютерно-інформаційних систем і програмної інженерії»

Тернопіль
2020

УДК 519(07)
М54

Укладачі:
Ясній О. П., докт. техн. наук, професор;
Валяшек В. Б., канд. фіз.-мат. наук, доцент;
Крива Н. Р., старший викладач.

Рецензент:
Михайлишин М. С., канд. техн. наук, доцент.

Методичні вказівки розглянуто й затверджено на засіданні
методичного семінару кафедри математичних методів в інженерії
Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя.
Протокол № 5 від 10 грудня 2019 р.

Схвалено та рекомендовано до друку на засіданні науково-методичної комісії
факультету комп'ютерних систем і програмної інженерії
Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя.
Протокол № 3 від 18 грудня 2019 р.

М54 Методичні вказівки до практичних занять з дисципліни «Теорія ймовірностей та математичної статистики» для студентів факультету «Комп'ютерно-інформаційних систем і програмної інженерії» / Укладачі: Ясній О.П., Валяшек В.Б., Крива Н.Р. – Тернопіль : Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя, 2020. – 76 с.

УДК 519(07)

Методичні вказівки до практичних занять з дисципліни «Теорія ймовірностей та математична статистика» укладено з урахуванням тем практичних занять, тем лекцій, тестів, екзаменаційних питань та вимог для комплексної перевірки знань з дисципліни.

Відповідальна за випуск старший викладач *Крива Н. Р.*

ЗМІСТ

Теорія ймовірностей. *Випадкові події* ………………………………………………. 4

1. Основні поняття. Операції над подіями. Означення ймовірності події …………… 4

1.1. Приклади розв'язування задач ……………………………………………………… 5

2. Елементи комбінаторики. Теореми додавання та множення ймовірностей. Ймовірність настання принаймні однієї події. Формула повної ймовірності і формула Байєса ……………………………………………………………………………... 8

2.1. Приклади розв'язування задач ……………………………………………………… 10

3. Схема випробувань з повтореннями ………………………………………………. 14

3.1. Приклади розв'язування задач ……………………………………………………… 15

4. Задачі для самостійного розв'язування ……………………………………………… 20

Випадкові величини ...………………………………………………………………….. 26

5. Випадкові величини. Закон розподілу, функція розподілу, щільність розподілу ймовірностей ……………………………………………………………………………... 26

5.1. Приклади розв'язування задач ……………………………………………………… 27

6. Числові характеристики випадкових величин. Їх властивості. Знаходження щільності розподілу для неперервної випадкової величини. Обчислення математичного сподівання, моди, медіани, дисперсії ………………………………. 34

6.1. Приклади розв'язування задач ……………………………………………………… 35

7. Найважливіші закони розподілу ймовірностей. Аналіз графіків законів розподілів, знаходження основних числових характеристик …………………………………… 41

7.1. Приклади розв'язування задач ……………………………………………………… 44

8. Закон великих чисел. Центральна гранична теорема …………………………….. 49

8.1. Приклади розв'язування задач ……………………………………………………… 50

9. Задачі для самостійного розв'язування ……………………………………………… 52

Математична статистика ……………………………………………………………… 58

10. Побудова статистичного ряду, полігону частот, гістограми та емпіричної функції розподілу. Обчислення оцінок математичного сподівання та дисперсії ………….. 58

10.1. Приклади розв'язування задач ……………………………………………………… 60

11. Обчислення інтервальних статистичних оцінок. Точність і надійність визначення довірчого інтервалу. Перевірка статистичних гіпотез щодо нормального закону розподілу. Критерій узгодженості Пірсона ……………………………………….. 64

11.1. Приклади розв'язування задач ……………………………………………………… 66

12. Задачі для самостійного розв'язування ……………………………………………… 69

Основна література ………………………………………………………………………. 71

Додаткова література ……………………………………………………………………. 73

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ.

ВИПАДКОВІ ПОДІЇ

1. Основні поняття. Операції над подіями. Означення ймовірності події.

Випробування – реальний або мислений експеримент (виконуваний за певної незмінної сукупності умов), результати якого піддаються спостереженню.

Подія – результат випробування.

Якщо в результаті випробування деяка подія неодмінно відбудеться, то вона називається ***достовірною*** і позначається літерою *U*. Подія, яка в даному випробуванні не може відбутись, називається ***неможливою*** і позначається літерою *V*.

Якщо в результаті випробування деяка подія може відбутись, а може не відбутись, то вона називається ***випадковою***. Випадкові події позначаються літерами *A, B, C, D*, … .

Випадкові події, які не можна розкласти на простіші, називаються ***елементарними***. Можлива елементарна подія – це кожний із можливих результатів окремого випробування.

Простір елементарних подій – множина можливих елементарних подій, кожною з яких може закінчитись випробування. Якщо позначимо $\omega_i \ (i = 1, 2, \ldots, n)$ можливі елементарні події, то цю множину можна записати у вигляді $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$. Простір Ω може містити скінченну, зліченну або незліченну множину значень.

Випадковій події *A*, яка може відбутись у результаті випробування, можна поставити у відповідність деяку множину елементарних подій, що сприяють появі цієї події: $A = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m\}$, яка є підмножиною Ω.

Сума подій. Подія *A* називається **сумою** подій *B* і *C*, тобто *A* = = *B* + *C* або $A = B \cup C$, якщо при випробуванні відбувається принаймні одна із цих подій. Множину елементарних подій, що становлять подію *A*, дістають об'єднанням множин елементарних подій, що становлять події *B* і *C*. Аналогічно визначається сума *n* (*n* > 2) подій.

Добуток подій. Подія *A* називається **добутком** подій *B* і *C*, тобто *A* = *BC* або $A = B \cap C$, якщо в результаті випробування відбуваються як подія *B*, так і подія *C*. Множина елементарних подій, що становлять подію *A*, визначається як переріз множин, що становлять події *B* і *C*. Аналогічно визначається добуток *n* (*n* > 2) подій.

Різниця подій. Подія *A* називається **різницею** подій *B* і *C*, тобто *A* = *B* – *C* або $A = B : C$, якщо відбувається подія *B* і не відбувається подія *C*. Множина елементарних подій, що становлять подію *A*, містить елементарні події, що становлять *B*, виключаючи ті, при яких відбувається подія *C*.

Події *B* і *C* у даному випробуванні називаються ***несумісними***, якщо відповідні їм множини елементарних подій не містять однакових елементів:

$B \cap C = V$. Це означає, що коли одна з подій відбулась, друга подія відбутись не може.

Події B і C називаються ***рівноможливими*** у даному випробуванні, якщо є підстава вважати, що жодна з них не є об'єктивно більш можливою, ніж інша.

Події $A_1, A_2, ..., A_n$ у даному випробуванні утворюють ***повну групу подій***, якщо вони несумісні і в результаті випробування неодмінно відбудеться принаймні одна з них, а отже, їхня сума є достовірною подією: $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = U$.

Події A і $\overline{A}$ називаються ***протилежними***, якщо вони несумісні й утворюють повну групу подій, тобто $A \cap \overline{A} = V$ і $A \cup \overline{A} = U$.

Означення ймовірності. Ймовірністю події А називається числова міра об'єктивної можливості настання цієї події в певному випробуванні. Позначається така ймовірність **P(A).**

Властивості ймовірності

1. Ймовірність достовірної події $P(U) = 1$.
2. Ймовірність неможливої події $P(V) = 0$.
3. Ймовірність будь-якої випадкової події $0 < P(A) < 1$.

Класичне означення ймовірності

Ймовірністю випадкової події А називається відношення кількості елементарних подій *m*, які сприяють появі цієї події (становлять множину її елементарних подій), до загальної кількості *n* рівноможливих елементарних подій, що утворюють простір елементарних подій Ω:

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

1.1. Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Монету підкидають тричі. Визначити елементарні події цього експерименту.

Розв'язання. Триразове підкидання монети — це одна спроба. Елементарними випадковими подіями будуть:

ω_1 = г г г (тричі випаде герб);

ω_2 = ц ц ц (тричі випаде цифра);

$$\left.\begin{aligned} \omega_3 &= \text{г г ц} \\ \omega_4 &= \text{г ц г} \\ \omega_5 &= \text{ц г г} \end{aligned}\right\} \quad \text{(герб випаде двічі);}$$

$$\left.\begin{array}{l}\omega_6 = \text{г ц ц}\\ \omega_7 = \text{ц г ц}\\ \omega_8 = \text{ц ц г}\end{array}\right\}\quad \text{(герб випаде один раз).}$$

Отже, цьому експерименту відповідають вісім елементарних подій.

Приклад 2. Гральний кубик, кожна грань якого позначена певною цифрою від 1 до 6, підкидають один раз. При цьому на грані випадає одна із зазначених цифр. Побудувати простір елементарних подій для цього експерименту (множину Ω) і такі випадкові події:

1) A – випаде число, кратне 2;

2) B – випаде число, кратне 3.

Розв'язання. Оскільки кубик має шість граней, то в результаті експерименту може випасти одна із цифр від 1 до 6.

Отже, $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; 1) $A = \{2, 4, 6\}$; 2) $B = \{3, 6\}$.

Приклад 3. Монету підкидають чотири рази. Побудувати простір елементарних подій для цього експерименту і такі випадкові події:

1) A – герб випаде двічі; 2) B – герб випаде не менш як тричі.

Розв'язання. Шуканий простір елементарних подій:

Ω = {гггг, гггц, ггцг, гцгг, ццгг, ггцц, гццг, гцгц, цгцг, ццгг, цггц, гццц, цгцц, ццгц, цццг, цццц};

1) A = {ггцц, ццгг, гцгц, цгцг, гццг, цггц};

2) B = {гггг, гггц, ггцг, гцгг, цггг).

Приклад 4. Гральний кубик підкидають один раз. Яка ймовірність того, що на грані кубика з'явиться число, кратне 3?

Розв'язання. Число всіх елементарних подій для цього експерименту $n = 6$. Нехай B — поява на грані числа, кратного 3. Число елементарних подій, що сприяють появі B, дорівнює двом ($m = 2$).

Отже,

$$P(B) = \frac{m}{n} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Приклад 5. У кожній із трьох урн містяться червоні та сині кульки. Із кожної урни навмання беруть по одній кульці. Побудувати простір елементарних подій для цього експерименту — множину Ω і такі випадкові події:

A – серед трьох навмання взятих кульок дві виявляються червоного кольору;

B – серед трьох кульок дві виявляються синього кольору.

Обчислити $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$.

Розв'язання. Позначимо появу кульки червоного кольору як Ч, а синього кольору як С. Тоді простір елементарних подій буде такий: = {ЧЧЧ, ЧЧС, ЧСЧ, СЧЧ, ЧСС, СЧС, ССЧ, ССС}, $n = 8$.

Події: A = {ЧЧС, ЧСЧ, СЧЧ}, $m_1 = 3$;

B = {ССЧ, СЧС, ЧСС}, $m_2 = 3$.

Події A і B є несумісними ($A \cap B = \varnothing$).

Обчислюємо: $P(A) = \frac{m_1}{n} = \frac{3}{8}$; $P(B) = \frac{m_2}{n} = \frac{3}{8}$; $P(A \cap B) = 0$.

Приклад 6. В електричну мережу увімкнено чотири електролампочки. При проходженні електричного струму в мережі кожна електролампочка із певною ймовірністю може перегоріти або не перегоріти. Побудувати простір елементарних подій (множину Ω) – числа електролампочок, які не перегорять, і такі випадкові події:

A – із чотирьох електролампочок перегорять не більш як дві;

B – не менш як три. Обчислити $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$.

Розв'язання. Нехай A_i ($i = \overline{1,4}$) відповідно першу, другу, третю та четверту електролампочку, що не перегорять, а $\overline{A_i}$ — що перегорять. Тоді простір елементарних подій буде:

$\Omega = \{A_1 A_2 A_3 A_4,\ A_1 A_2 A_3 \overline{A}_4,\ A_1 A_2 \overline{A}_3 A_4,\ A_1 \overline{A}_2 A_3 A_4,\ \overline{A}_1 A_2 A_3 A_4,\ A_1 A_2 \overline{A}_3 \overline{A}_4,$ $\overline{A}_1 \overline{A}_2 A_3 A_4,\ \overline{A}_1 A_2 \overline{A}_3 A_4,\ A_1 \overline{A}_2 A_3 \overline{A}_4,\ A_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3 A_4,\ \overline{A}_1 A_2 A_3 \overline{A}_4,\ A_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3 \overline{A}_4,\ \overline{A}_1 A_2 \overline{A}_3 \overline{A}_4,\ \overline{A}_1 \overline{A}_2 A_3 \overline{A}_4,$ $\overline{A}_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3 A_4,\ \overline{A}_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3 \overline{A}_4\}$, $n = 16$.

Випадкові події:

$A = \{A_1 A_2 \overline{A}_3 \overline{A}_4,\ \overline{A}_1 \overline{A}_2 A_3 A_4,\ A_1 \overline{A}_2 A_3 \overline{A}_4,\ \overline{A}_1 A_2 \overline{A}_3 A_4,\ A_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3 A_4,\ \overline{A}_1 A_2 A_3 \overline{A}_4,\ \overline{A}_1 A_2 A_3 A_4,$ $A_1 \overline{A}_2 A_3 A_4,\ A_1 A_2 \overline{A}_3 A_4,\ A_1 A_2 A_3 \overline{A}_4,\ A_1 A_2 A_3 A_4\}$, $m_1 = 11$.

$B = \{A_1 A_2 \overline{A}_3 \overline{A}_4,\ \overline{A}_1 \overline{A}_2 A_3 A_4,\ A_1 \overline{A}_2 A_3 \overline{A}_4,\ \overline{A}_1 A_2 \overline{A}_3 A_4,\ A_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3 A_4,\ \overline{A}_1 A_2 A_3 \overline{A}_4,\ A_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3 \overline{A}_4,$ $\overline{A}_1 A_2 \overline{A}_3 \overline{A}_4,\ \overline{A}_1 \overline{A}_2 A_3 \overline{A}_4,\ \overline{A}_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3 A_4,\ \overline{A}_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3 \overline{A}_4\}$, $m_2 = 11$.

$A \cap B = \{A_1 A_2 \overline{A}_3 \overline{A}_4,\ \overline{A}_1 \overline{A}_2 A_3 A_4,\ A_1 \overline{A}_2 A_3 \overline{A}_4,\ \overline{A}_1 A_2 \overline{A}_3 A_4,\ A_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3 A_4,\ \overline{A}_1 A_2 A_3 \overline{A}_4\}$, $m_3 = 6$.

$$P(A) = \frac{m_1}{n} = \frac{11}{16};\quad P(B) = \frac{m_2}{n} = \frac{11}{16};\quad P(A \cap B) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}.$$

2. Елементи комбінаторики. Теореми додавання та множення ймовірностей. Ймовірність настання принаймні однієї події. Формула повної ймовірності і формула Байєса

Елементи комбінаторики

Нехай скінченна невпорядкована множина складається із n елементів. Виконаємо такі випробування:

1. Упорядкуємо дану множину, пронумерувавши всі її елементи. Тоді елементарною подією у випробуванні буде довільне переставлення з n елементів, а кількість можливих переставлень дорівнюватиме $n!$

2. Розіб'ємо множину на впорядковані підмножини, які містять по m $(m < n)$ елементів і різняться між собою або порядком, або елементами. Тоді елементарною подією у випробуванні буде довільне розміщення з n елементів по m. Кількість таких розміщень

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)...(n-m+1).$$

3. Розіб'ємо множину на невпорядковані підмножини, які містять по m $(m < n)$ елементів і різняться між собою принаймні одним елементом. Тоді елементарною подією у цьому випробуванні буде комбінація, а кількість таких комбінацій

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

4. Беремо з множини навмання m елементів з поверненням. Тоді у фіксованій підмножині кожний елемент може повторитися m разів. Елементарною подією у випробуванні буде розміщення з n елементів по m із повторенням, а кількість таких розміщень

$$R_n^m = n^m.$$

5. Нехай скінченну множину з n різних елементів розбито на r підмножин, у кожній з яких міститься $n_i (i = 1,2,...,r)$ елементів, причому $\sum_{i=1}^{r} n_i = n.$ Із кожної підмножини навмання беремо по m_i елементів без повернення. Тоді елементарною подією буде довільна комбінація елементів. Кількість таких комбінацій

$$K = C_{n_1}^{m_1} \cdot C_{n_2}^{m_2} ... C_{n_r}^{m_r},$$

$$K = A_{n_1}^{m_1} \cdot A_{n_2}^{m_2} ... A_{n_r}^{m_r},$$

якщо їхній порядок істотний.

6. Нехай скінченну множину з n елементів розбито на r підмножин, у кожній з яких міститься n_i $(i = 1,2,...,r)$ однакових елементів, причому $\sum_{i=1}^{r} n_i = n.$ Упорядкуємо цю множину. Тоді елементарною подією буде довільне переставлення з n елементів із повторенням, а число елементарних подій

$$P_n(n_1, n_2, ..., n_r) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot ... \cdot n_r!}.$$

Геометричне означення ймовірності

Якщо простір елементарних подій Ω можна подати у вигляді деякого геометричного образу, а множину елементарних подій для події A – як частину цього геометричного образу, то ймовірність події A визначається як відношення мір цих множин: $P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$. При цьому вважається, що ймовірність попадання в деяку частину геометричного образу пропорційна до міри цієї його частини.

Статистичне означення ймовірності. **Статистичною ймовірністю події** ***A*** називається відношення кількості m випробувань, в яких подія A відбулась, до загальної кількості виконаних випробувань n: $W(A) = \frac{m}{n}$.

Знаходження статистичної ймовірності пов'язане з проведенням n випробувань, тому вона називається ще частістю, або відносною частотою, події.

Теореми додавання ймовірностей. Нехай подія А є сумою двох подій В і С. Тоді:

а) якщо події B і C несумісні, то $P(A) = P(B \cup C) = P(B) + P(C)$;

б) якщо події B і C сумісні, то $P(A) = P(B \cup C) = P(B) + P(C) - \; - P(B \cap C)$.

Події B і C називаються ***залежними***, якщо ймовірність однієї з них змінюється залежно від того, відбулась друга подія чи ні. У противному разі події називаються ***незалежними***. Імовірність події C, визначена за умови, що подія B відбулася, називається ***умовною*** і позначається $P(C/B)$.

Теореми множення ймовірностей. Нехай подія А є добутком двох подій В і С. Тоді:

а) якщо події B і C незалежні, то $P(A) = P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$;

б) якщо події B і C залежні, то $P(A) = P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C/B)$.

Ці теореми справджуються й для добутку n ($n > 2$) подій.

Ймовірність настання принаймні однієї події. Нехай у результаті випробування можуть відбутися n подій $A_1, A_2, ..., A_n$. Потрібно знайти ймовірність того, що відбудеться принаймні одна з них. Позначимо цю подію літерою А. Тоді протилежною буде подія $\overline{A}$, яка полягає в тому, що в результаті випробування одночасно настали протилежні події: $\overline{A} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A}_i$. Знайдемо ймовірність події А через ймовірність протилежної події: $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A}_i\right)$.

Формула повної ймовірності і формула Байєса. Нехай подія A може відбутися тільки за умови настання однієї із несумісних подій B_i (i = 1, 2,…, n), які утворюють повну групу. Тоді ймовірність події A подається формулою:

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n} P(B_i)\cdot P(A/B_i),$$

де $P(B_i)$ – ймовірність події B_i; $P(A/B_i)$ – умовні ймовірності настання події A.

Наведена залежність називається ***формулою повної ймовірності***.

Знову розглянемо події $B_i (i=1, 2, ...,n)$, які утворюють повну групу подій і попарно несумісні. Ці події називатимемо ***гіпотезами***. Подія A може відбутись одночасно з деякою із подій B_i. Відомі ймовірності подій B_i та умовні ймовірності того, що подія A відбудеться. Відомо, що в результаті випробування подія A відбулась. Потрібно з огляду на це переоцінити ймовірності гіпотез B_i. Для цього застосовують формулу Байєса:

$$P(B_i / A)=\frac{P(B_i)P(A/B_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A/B_i)}, (i=1, 2, ..., n).$$

2.1. Приклади розв’язування задач

Приклад 1. У шухляді міститься 10 однотипних деталей, 6 із яких є стандартними, а решта бракованими. Навмання із шухляди беруть чотири деталі. Обчислити ймовірність таких випадкових подій:

A – усі чотири деталі виявляються стандартними;
B – усі чотири деталі виявляються бракованими;
D – із чотирьох деталей виявляються дві стандартними і дві бракованими.

Розв’язання. Кількість усіх елементарних подій множини Ω

$$n=C_{10}^4=\frac{10!}{4!\,6!}=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 3\cdot 6}=210;$$

кількість елементарних подій, що сприяють події A: $m_1=C_6^4=\frac{6!}{2!\,4!}=15$;

кількість елементарних подій, що сприяють появі B: $m_2=C_4^4=\frac{4!}{4!\,0!}=1$;

кількість елементарних подій, що сприяють появі D: $m_3=C_6^2\,C_4^2=15\cdot 6=90$.

Обчислимо ймовірності цих подій:

$$P(A)=\frac{m_1}{n}=\frac{C_6^4}{C_{10}^4}=\frac{15}{630}=\frac{3}{112}=\frac{15}{210}=\frac{1}{14};\qquad P(B)=\frac{m_2}{n}=\frac{C_4^4}{C_{10}^4}=\frac{1}{210};$$

$$P(D)=\frac{m_3}{n}=\frac{C_6^2\cdot C_4^2}{C_{10}^4}=\frac{90}{210}=\frac{3}{7}.$$

Приклад 2. Двоє осіб домовились зустрітися в певному місці у проміжку часу від t_1 до t_2 годин, а також про те, що той, хто прийде першим, чекатиме на другого протягом *t* годин. Знайти ймовірність того, що зустріч відбудеться, якщо кожна особа може прийти в довільний момент часу *t* є $[t_1;t_2]$.

Розв'язання. Подія *A* – «зустріч відбудеться». Позначимо довжину часового проміжку $t_2 - t_1 = T,$ а моменти приходу кожної особи – x і y. Тоді подія *A* відбудеться за умови $|x - y| \le t,$ де $0 \le x \le T,\ 0 \le y \le T.$ Зобразимо ці умови на площині в системі координат XOY (рис. 1). Як бачимо з рис. 1, часу *T* відповідає площа квадрата $OBCD$, а події *A* – площа шестикутника $OEFCKM$. Скориставшись геометричним означенням імовірності, дістанемо:

$$P(A) = \frac{S_{OEFCKM}}{S_{OBCD}} = \frac{T^2 - (T - t)^2}{T^2} = \frac{t(2T - t)}{T^2}.$$

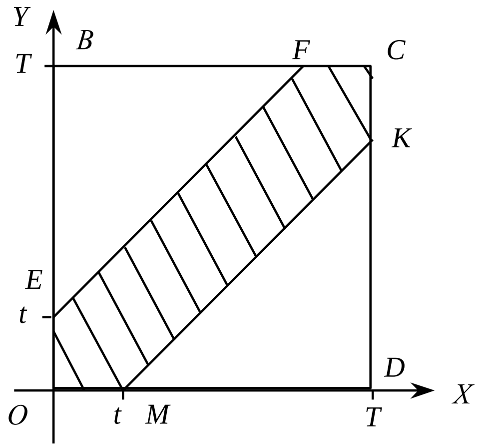

Рис. 1

Приклад 3. Набираючи номер телефону, абонент забув дві останні цифри і, вважаючи, що вони різні, набрав їх навмання. Знайти ймовірність того, що набрано правильні цифри.

Приклад 4. Із множини чисел **Ω** = $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ навмання беруть одне число, а далі з решти – друге. Яка ймовірність того, що здобуте двоцифрове число буде парним?

Розв'язання. Позначимо через A_1 – поява непарної цифри при першому вийманні, через B_1 – поява парної цифри при першому, а через B_2 – появу парної цифри при другому вийманні.

Нехай *C* – випадкова подія: поява парного двоцифрового числа.

Тоді $C = (A_1 \cap B_2) \cup (B_1 \cap B_2)$.

Оскільки випадкові події A_1, B_1, B_2 є залежними, то

$$P\,(C) = P\,(A_1 \cap B_2) \cup (B_1 \cap B_2) = P(A_1 \cap B_2) + P\,(B_1 \cap B_2) =$$

$$= P\,(A_1)\,P\,(B_2 / A_1) + P\,(B_1)\,P\,(B_2 / B_1) = \frac{5}{9}\ \frac{4}{8} + \frac{4}{9}\ \frac{3}{8} = \frac{32}{72} = \frac{4}{9}.$$

Приклад 5. Гральний кубик і монету підкидають по одному разу. Яка ймовірність того, що при цьому на грані кубика випаде число, кратне 3, а на монеті герб?

Розв'язання. Нехай поява числа, кратного трьом – подія A, а поява герба – подія B. Випадкові події A і B є між собою незалежними. Отже,

$P(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$; $P(B)=\frac{1}{2}$; $P(A\cap B)=P(A)\ P(B)=\frac{1}{3}\ \frac{1}{2}=\frac{1}{6}$.

Приклад 6. Три студенти складають на сесії екзамен з математики. Імовірність того, що перший складе екзамен, дорівнює 0,9, для другого та третього студентів ця ймовірність становить відповідно 0,8 і 0,7.

Обчислити ймовірності таких випадкових подій:

1) A – три студенти складуть екзамен;
2) B – три студенти не складуть екзамену;
3) C – два студенти складуть екзамен.

Розв'язання. Позначимо A_1, A_2, A_3 – випадкові події, які полягають у тому, що перший, другий і третій студенти складуть екзамен з математики. Тоді $\overline{A_1}$, $\overline{A_2}$, $\overline{A_3}$ – відповідно не складуть. За умовою задачі маємо:

$$P(A_1) = 0{,}9,\ \ P(A_2) = 0{,}8,\ \ P(A_3) = 0{,}7.$$

Тоді ймовірності протилежних подій такі:

$P(\overline{A_1}) = 1 - P(A_1) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1;$
$P(\overline{A_2}) = 1 - P(A_2) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2;$
$P(\overline{A_3}) = 1 - P(A_3) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$

Позначимо події: $A=\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\overline{A}_3$, $B=\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\overline{A}_3$,

$$C = (A_1\cap A_2\cap\overline{A}_3)\cup(A_1\cap\overline{A}_2\cap A_3)\cup(\overline{A}_1\cap A_2\cup A_3).$$

Оскільки випадкові події A_i, $\overline{A_i}$ (i = 1, 2, 3) є між собою незалежними, то

$$P(A) = P(A_1\cap A_2\cap A_3) = P(A_1)\ P(A_2)\ P(A_3) = 0{,}9\cdot 0{,}8\cdot 0{,}7 = 0{,}504;$$

$$P(B) = P(\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}) = P(\overline{A_1})\ P(\overline{A_2})\ P(\overline{A_3}) = 0{,}1\cdot 0{,}2\cdot 0{,}3 = 0{,}006;$$

$$P(C) = P\left(\left(A_1\cap A_2\cap\overline{A}_3\right)\cup\left(A_1\cap\overline{A}_2\cap A_3\right)\cup\left(\overline{A}_1\cap A_2\cap A_3\right)\right) =$$

$$= P\left(A_1\cap A_2\cap\overline{A}_3\right)+P\left(A_1\cap\overline{A}_2\cap A_3\right)+P\left(\overline{A}_1\cap A_2\cap A_3\right) =$$

$$= P(A_1)\ P(A_2)\ P(\overline{A}_3)+P(A_1)\ P(\overline{A}_2)\ P(A_3)+P(\overline{A}_1)\ P(A_2)\ P(A_3) =$$

$$= 0{,}9\cdot 0{,}8\cdot 0{,}3+0{,}9\cdot 0{,}2\cdot 0{,}7+0{,}1\cdot 0{,}8\cdot 0{,}7 = 0{,}216+0{,}126+0{,}056 = 0{,}398.$$

Приклад 7. Прилад складається з чотирьох елементів, що працюють незалежно один від одного. Ймовірність того, що перший елемент не вийде з ладу під час роботи приладу, є величиною сталою і дорівнює 0,95. Для другого, третього і четвертого елементів ця ймовірність дорівнює відповідно 0,9; 0,85; 0,8. Яка ймовірність того, що під час роботи приладу з ладу не вийде хоча б один елемент?

Розв'язання. Нехай $p_1 = 0{,}95$ — ймовірність того, що перший елемент не вийде з ладу. Для другого, третього та четвертого елементів ця ймовірність становитиме відповідно $p_2 = 0{,}9$; $p_3 = 0{,}85$; $p_4 = 0{,}8$. Ймовірність того, що ці елементи вийдуть із ладу, дорівнюватиме відповідно:

$$q_1 = 1 - p_1 = 1 - 0{,}95 = 0{,}05;$$

$$q_2 = 1 - p_2 = 1 - 0{,}9 = 0{,}1;$$

$$q_3 = 1 - p_3 = 1 - 0{,}85 = 0{,}15;$$

$$q_4 = 1 - p_4 = 1 - 0{,}8 = 0{,}2.$$

Маємо:

$$P(C) = 1 - q_1 q_2 q_3 q_4 = 1 - 0{,}05 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}15 \cdot 0{,}2 = 1 - 0{,}00015 = 0{,}99985.$$

Приклад 8. Гральний кубик підкидається чотири рази. Чому дорівнює ймовірність того, що цифра 3 з'явиться при цьому хоча б один раз?

Розв'язання. Ймовірність того, що при одному підкиданні з'явиться цифра 3, дорівнює $\frac{1}{6}$. Тоді $q = 1 - p = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

Дістанемо:

$$P(C) = 1 - q^4 = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 1 - \frac{625}{1296} = \frac{671}{1296}.$$

Приклад 9. На склад надходять однотипні вироби з чотирьох заводів: 15% – із заводу № 1, 25% – із заводу № 2; 40% – із заводу № 3 і 20% – із заводу № 4. Під час контролю продукції, яка надходить на склад, установлено, що в середньому брак становить для заводу № 1 – 3%, заводу № 2 – 5%, заводу № 3 – 8% і заводу № 4 – 1%. Навмання взятий виріб зі складу виявився бракованим. Яка ймовірність того, що його виготовив завод № 1?

Розв'язання. Позначимо B_1 гіпотезу проте, що виріб був виготовлений заводом № 1,

B_2 — заводом № 2, B_3 — заводом № 3 і B_4 — заводом № 4. Ці гіпотези єдино можливі і несумісні. Нехай A — випадкова подія, що полягає в появі бракованого виробу.

За умовою задачі маємо:

$P(B_1) = 0{,}15$, $P(B_2) = 0{,}25$, $P(B_3) = 0{,}4$, $P(B_4) = 0{,}2$, $P(A/B_1) = 0{,}03$, $P(A/B_2) = 0{,}05$, $P(A/B_3) = 0{,}08$, $P(A/B_4) = 0{,}01$.

За формулою Байєса переоцінюємо першу гіпотезу B_1:

$$P(B_1/A) = \frac{P(B_1)\,P(A/B_1)}{P(B_1)\,P(A/B_1) + P(B_2)\,P(A/B_2) + P(B_3)\,P(A/B_3) + P(B_4)\,P(A/B_4)} =$$

$$= \frac{0{,}15 \cdot 0{,}03}{0{,}15 \cdot 0{,}03 + 0{,}25 \cdot 0{,}05 + 0{,}4 \cdot 0{,}08 + 0{,}2 \cdot 0{,}01} = \frac{0{,}0045}{0{,}051} = \frac{45}{510} = \frac{3}{34}.$$

3. Схема випробувань з повтореннями

Незалежні випробування. Нехай проводяться n випробувань, у кожному з яких подія А може як відбутись, так і не відбутись. Якщо ця ймовірність у кожному випробуванні не залежить від того, відбулась вона в інших випробуваннях чи ні, то такі випробування називаються незалежними щодо події А. Згідно з означенням випробування також незалежні, якщо в кожному з них ймовірність настання події А однакова, тобто дорівнює тому самому числу. Ймовірність того, що подія А відбудеться в кожному з незалежних випробувань, позначають $P(A)=p,$ а ймовірність настання протилежної події $P(\overline{A})=1-p=q.$ Для розв'язування задач на повторні незалежні випробування застосовують такі формули і теореми.

Формула Бернуллі. Ймовірність того, що в n незалежних випробуваннях, у кожному з яких ймовірність $P(A) = p$, подія A відбудеться m раз, подається так:

$$P_n(m)=C_n^m p^m q^{n-m}.$$

Формула застосовується, якщо $n \le 10.$

Найімовірніше число появи події. Частота m_0 настання події A в n незалежних повторних випробуваннях називається ***найімовірнішим числом появи події***, якщо їй відповідає найбільша ймовірність. Вона визначається за формулою:

$$np-q \le m_0 \le np+p.$$

Розподіл може мати одне або два найімовірніші числа.

Локальна теорема Лапласа. Ймовірність того, що в n незалежних випробуваннях, у кожному з яких $P(A) = p$, подія A відбудеться m раз, подається такою наближеною залежністю:

$$P_n(m)\approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\cdot\varphi(x),\ \text{де}\ \varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},\ x=\frac{m-np}{\sqrt{npq}}.$$

Локальна теорема Лапласа дає змогу обчислювати ймовірності $P_n(m)$, якщо $n > 10$ і $p > 0{,}1$.

Формула Пуассона. Якщо в кожному з n незалежних повторних випробувань $P(A)=p$ і $0<p<0{,}1$, а n велике, то

$$P_n(m)\approx\frac{a^m}{m!}e^{-a},\ a=np.$$

Інтегральна теорема Лапласа. Ймовірність того, що подія A відбудеться від m_1 до m_2 раз при проведенні n незалежних випробувань, у кожному з яких подія A відбувається з ймовірністю p, подається формулою:

$$P_n(m_1,m_2)\approx\Phi(x_2)-\Phi(x_1),\ \text{де}\ \Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$ – функція Лапласа;

$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}},\ x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

Значення функції Лапласа наводяться у спеціальних таблицях.

Відхилення відносної частоти від імовірності. Ймовірність того, що при проведенні n незалежних випробувань відхилення відносної частоти події A від її ймовірності за модулем не перевищить ε, визначається за формулою:

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

3.1. Приклади розв’язування задач

Приклад 1. Із партії, в якій 12 стандартних і 4 нестандартні деталі, навмання беруться 3 деталі з поверненням. Знайти ймовірність того, що серед узятих деталей:

1) усі три стандартні;

2) не більш як одна нестандартна;

3) принаймні одна нестандартна.

Розв’язання. Маємо схему трьох незалежних випробувань. Нехай подія A – «узята щоразу деталь стандартна», тоді $P(A) = p = \frac{12}{16} = 0{,}75.$ Ймовірності обчислюватимемо за формулою Бернуллі:

1) $P_3(3) = C_3^3 p^3 q^0 = 0{,}75^3 = 0{,}421875$.

2) Подію «із трьох деталей не більш як одна нестандартна» можна розглядати так: узято 3 стандартні деталі або 2 стандартні і одну нестандартну деталь. У позначеннях формули Бернуллі

$$P_3(m \geq 2) = P_3(3) + P_3(2) = 0{,}421875 + C_3^2 \cdot 0{,}75^2 \cdot 0{,}25 = 0{,}84375 .$$

3) Протилежною для даної буде подія «усі три деталі стандартні». Їй рівносильна подія $P_3(m < 3)$.

4) Обчислимо цю ймовірність:

$$P_3(m < 3) = 1 - P_3(3) = 1 - 0{,}421875 = 0{,}578125.$$

Приклад 2. Ймовірність того, що студент складе іспит з математики, є величиною сталою і дорівнює в середньому 0,8. Нехай є група з восьми студентів. Знайти найімовірнішу кількість членів цієї групи котрі складуть іспит з математики, і обчислити відповідну ймовірність.

Розв’язання. За умовою задачі $n = 8$; $p = 0{,}8$; $q = 0{,}8$.

$$np - q \le m_0 \le np + p$$
$$8 \cdot 0{,}8 - 0{,}2 \le m_0 \le 8 \cdot 0{,}8 + 0{,}8$$
$$6{,}2 \le m_0 \le 7{,}2.$$

Отже, $m_0 = 7$; $P_8(7) = C_8^7\ p^7\ q = 8\,(0{,}8)^7\ 0{,}2 = 1{,}6\,(0{,}8)^7 = 0{,}524288$.

Доходимо висновку: найімовірніша кількість студентів, які складуть екзамен, $m_0 = 7$. Відповідна ймовірність дорівнює 0,524288.

Приклад 3. Ймовірність того, що посіяне зерно ячменю проросте в лабораторних умовах, у середньому дорівнює 0,9. Було посіяно 700 зернин ячменю в лабораторних умовах. Визначити найімовірніше число зернин, що проростуть із цієї кількості зернин, та обчислити ймовірність цього числа.

Розв'язання. За умовою задачі:

$n = 700$, $p = 0{,}9$, $q = 0{,}1$;

$np - q \le m_0 \le np + p \qquad 700 \cdot 0{,}9 - 0{,}1 \le m_0 \le 700 \cdot 0{,}9 + 0{,}9$

$729{,}9 \le m_0 \le 630{,}9 \qquad m_0 = 630$.

Отже, шукане число $m_0 = 630$.

Відповідна ймовірність буде така:

$$\sqrt{npq} = \sqrt{700 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1} = \sqrt{63} \approx 7{,}94;$$
$$np = 700 \cdot 0{,}9 = 630;$$
$$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{630 - 630}{7{,}94} = 0;$$
$$P_{700}(630) \approx \frac{\varphi(0)}{7{,}94} = \frac{0{,}3989}{7{,}94} \approx 0{,}05.$$

Приклад 4. В електромережу ввімкнено незалежно одну від одної 500 електролампочок, які освітлюють у вечірній час виробничий цех заводу. Ймовірність того, що електролампочка в електромережі не перегорить, є величиною сталою і дорівнює 0,8. Яка ймовірність того, що з 500 електролампочок не перегорить:

1) не більш як 380 шт.;

2) не менш як 390 шт.

Розв'язання. За умовою задачі:

$n = 500$; $p = 0{,}8$; $q = 0{,}2$; $0 \le m \le 380$; $390 \le m \le 500$;

$\sqrt{npq} = \sqrt{500 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2} = \sqrt{80} \approx 8{,}9$, $np = 500 \cdot 0{,}8 = 400$.

1) $x_j = \dfrac{m_j - np}{\sqrt{npq}} = \dfrac{3809 - 400}{8{,}9} = -\dfrac{380 - 400}{8{,}9} = -\dfrac{20}{8{,}9} \approx -2{,}25$;

$$x_i = \frac{m_i - np}{\sqrt{npq}} = \frac{0 - 400}{8{,}9} \approx -45\,;$$

$$P_{500} = (0 \le m \le 380) \approx \Phi(-2{,}25) - \Phi(-45) = \Phi(4{,}5) - \Phi(2{,}25) =$$
$$= 0{,}5 - 0{,}4881 = 0{,}0119.$$

2) $$x_i = \frac{m_i - np}{\sqrt{npq}} = \frac{390 - 400}{8{,}9} = -\frac{10}{8{,}9} \approx -1{,}12\,;$$

$$x_j = \frac{m_j - np}{\sqrt{npq}} = \frac{500 - 400}{8{,}9} = \frac{100}{8{,}9} \approx 11{,}23\,;$$

$$P_{500}(390 \le m \le 400) \approx \Phi(11{,}23) - \Phi(-1;1{,}12) = \Phi(11{,}23) + \Phi(1{,}12) =$$
$$= 0{,}5 + 0{,}3686 = 0{,}8686.$$

Приклад 5. У разі автоматичного виготовлення втулок брак становить у середньому 10%. Скільки втулок має взяти контролер, аби ймовірність того, що абсолютна величина відхилення відносної частоти появи стандартної втулки W(A) (A – випадкова подія, що полягає в появі стандартної втулки) від імовірності p виготовлення такої втулки не перевищує ε = 0,001, дорівнювала 0,999:

$$P(|W(A) - p| < \varepsilon) \approx 0{,}999\,.$$

Розв'язання. За умовою задачі: q = 0,1, ε = 0,001, p = 1 – q = 1 – 0,1 = 0,9;

$$P(|W(A) - 0{,}9| < 0{,}001) \approx 0{,}999\,.$$

Далі маємо:

$$P(|W(A) - p| < \varepsilon) = 2\,\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) = 2\,\Phi(x) = 0{,}999,$$

де $x = \varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}$ $\quad n = \left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^2 pq\,.$

Оскільки $2\Phi(x)$ = 0,999, то $\Phi(x)$ = 0,4995 , $\quad x \approx 3{,}4$

Отже, $n = \left(\frac{3{,}4}{0{,}001}\right)^2 0{,}9 \cdot 0{,}1 = (3400)^2\, 0{,}09 = 1040400\,.$

Тобто контролер має перевірити 1 040 400 втулок.

Приклад 6. Ймовірність появи випадкової події в кожному з 900 незалежних експериментів є величиною сталою і дорівнює 0,75. Яким має бути значення ε > 0, щоб $P(|W(A) - p| < \varepsilon)$ = 0,99?

Розв'язання. За умовою задачі: n = 900; p = 0,75; q = 0,25; $2\Phi(x)$ = 0,99.
Далі маємо $\Phi(x)$ = 0,495; x = 2,74 і

$$x = \varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}} \to \quad \varepsilon = x \Big/ \sqrt{\frac{n}{pq}} = \frac{2{,}74}{\sqrt{\frac{900}{0{,}75 \cdot 0{,}25}}} = \frac{2{,}74\sqrt{0{,}75 \cdot 0{,}25}}{30} \approx 0{,}04\,.$$

Отже, умову задачі задовольняє значення ε ≈ 0,04.

Приклад 7. Радіоприлад містить 1000 мікроелементів, які працюють незалежно один від одного, причому кожний може вийти з ладу під час роботи приладу з ймовірністю $p = 0{,}002$. Обчислити ймовірності таких випадкових подій:

1) під час роботи приладу з ладу вийдуть 3 мікроелементи;

2) від трьох до шести.

Розв'язання. За умовою задачі маємо $n = 1000$; $p = 0{,}002$; $m = 3$; $3 \le m \le 6$. Оскільки n велике, а p мале число, то для обчислення ймовірностей застосуємо формулу Пуассона Для цього обчислимо значення параметра $a = np = 1000\ 0{,}002 = 2$.

1) $P_{1000}(3) \approx 0{,}18044$.

2) $P_{1000}(3 \le m \le 6) = P_{1000}(3) + P_{1000}(4) + P_{1000}(5) + P_{1000}(6) =$

$= 0{,}180447 + 0{,}168031 + 0{,}100819 + 0{,}050409 + 0{,}021604 = 0{,}52131.$

Приклад 8. Частка довгих волокон у партії бавовни становить у середньому 0,6 загальної кількості волокон. Скільки потрібно взяти волокон, щоб найімовірніше число довгих волокон серед них дорівнювало 40?

Розв'язання. Скористаємося формулою, за якою визначається найімовірніше число: $np - q \le m_0 \le np + p$. Підставимо сюди значення відомих величин:

$$0{,}6n - 0{,}4 \le 40 \le 0{,}6n + 0{,}6;\ \ -0{,}4 - 40 \le -0{,}6n \le 0{,}6 - 40;\ \ \frac{39{,}4}{0{,}6} \le n \le \frac{40{,}4}{0{,}6};\ \ 65{,}7 \le n \le 67{,}3.$$

Задача має два розв'язки: $n = 66$ і $n = 67$.

Приклад 9. На кожні 40 відштампованих виробів у середньому припадає 4 дефектних. Із усієї продукції навмання узято 400 виробів. Знайти ймовірність того, що серед них 350 виробів будуть без дефектів.

Розв'язання. Подія A — «узято виріб без дефекту». За умовою $P(A) = p = 0{,}9$. Проведено $n = 400$ незалежних випробувань. Розв'яжемо задачу за формулою локальної теореми

Лапласа: $P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x)$, $x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$. Підставляючи дані за умовою задачі, дістаємо: $x = \frac{350 - 400 \cdot 0{,}9}{\sqrt{400 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1}} \approx -1{,}67$. За таблицями знаходимо $\varphi(-1{,}67) = 0{,}0989$, беручи до уваги, що $\varphi(x)$ – парна функція.

Отже, $P_{400}(350) \approx \frac{0{,}0989}{6} \approx 0{,}0165$.

Приклад 10. Завод відправив на базу 1000 доброякісних виробів. За час перебування в дорозі кожний виріб може бути пошкоджено з імовірністю 0,003. Знайти ймовірність того, що на базу прибудуть 3 пошкоджені вироби.

Розв'язання. Якщо подія A – «виріб пошкоджено», то її ймовірність p = 0,003. Розглядається схема незалежних випробувань, n = 1000. Ймовірність події A досить мала, тому задачу розв'яжемо за формулою Пуассона: $P_n(m) \approx \frac{a^m}{m!} e^{-a}$.

Виконуючи обчислення, знаходимо: $a = np = 1000 \cdot 0{,}003 = 3;\ P_{1000}(3) \approx \frac{3^3}{3!} e^{-3} \approx 0{,}229$.

Приклад 11. Зерна пшениці проростають з ймовірністю 0,95. Знайти ймовірність того, що із 2000 посіяних зерен зійде від 1880 до 1920.

Розв'язання. Подія A – «зерно пшениці зійшло». Її ймовірність p = 0,95, кількість незалежних випробувань n = 2000. Застосуємо формулу інтегральної теореми Лапласа:

$$P_n(m_1; m_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),\ x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}},$$

$$x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}},\ \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt -$$

функція Лапласа, а далі виконаємо обчислення:

$$x_1 = \frac{1880 - 2000 \cdot 0{,}95}{\sqrt{2000 \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}05}} \approx -1{,}03;\ x_2 = \frac{1920 - 1900}{\sqrt{95}} \approx 2{,}06;$$

$$P_{2000}(1880; 1920) \approx \Phi(2{,}06) - \Phi(-1{,}03) = \Phi(2{,}06) +$$

$$+ \Phi(1{,}03) = 0{,}4803 + 0{,}3485 = 0{,}8288\ .$$

Значення функції Лапласа беруться з відповідної таблиці.

Приклад 12. Верстат-автомат виготовляє стандартну деталь з ймовірністю 0,9. Із продукції беруть партію деталей. Скільки деталей має містити партія, щоб з ймовірністю 0,9973 можна було стверджувати: у партії відхилення відносної частоти появи нестандартної деталі від ймовірності її виготовлення не перевищуватиме 0,03? Визначити можливу кількість нестандартних деталей у партії за даних умов.

Розв'язання. Подія A – «виготовлено нестандартну деталь». Маємо схему з n незалежними випробуваннями, в якій $P(A) = p = 0{,}1.$ Скористаємося формулою:

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

$2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) = 0{,}9973;\ \Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) = 0{,}49865.$ За таблицями знаходимо $\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}} = 3;\ n = \frac{9pq}{\varepsilon^2} = 900.$

Визначимо кількість нестандартних деталей у партії за даних умов, розв'язавши нерівність:

$$\left|\frac{m}{900} - 0{,}1\right| < 0{,}03;\ \text{-}0{,}03 < \frac{m}{900} - 0{,}1 < 0{,}03;\ 0{,}07 < \frac{m}{900} < 0{,}13;\ 63 < m < 117.$$

Отже, у партії із 900 деталей буде від 63 до 117 нестандартних деталей.

Приклад 13. Маємо три партії деталей. Перша складається з 9 стандартних і 3 нестандартних; друга – із 12 стандартних і 3 нестандартних; третя – із 18 стандартних і 9 нестандартних деталей. Із кожної партії навмання беруть по одній деталі. Знайти ймовірність того, що в партії буде 0, 1, 2, 3 стандартні деталі.

Розв'язання. Подія A – «поява стандартної деталі в кожному випробуванні». Позначимо через $p_i(i=1,2,3)$ ймовірності узяття стандартної деталі із i-ої партії. Для обчислення ймовірностей складемо твірну функцію:

$$\varphi(z)=\prod_{i=1}^{3}(p_i z+q_i)=\left(\frac{3}{4}z+\frac{1}{4}\right)\left(\frac{4}{5}z+\frac{1}{5}\right)\left(\frac{2}{3}z+\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{5}z^3+\frac{13}{30}z^2+\frac{3}{20}z+\frac{1}{60}.$$

Отже, $P_3(0)=\frac{1}{60};\ P_3(1)=\frac{3}{20};\ P_3(2)=\frac{13}{30};\ P_3(3)=\frac{2}{5}.$

4. Задачі для самостійного розв'язування

1. Партія складається зі стандартних і нестандартних деталей, які ретельно перемішані. З неї навмання беруть дві деталі. Визначити:

1) простір елементарних подій;
2) множини елементарних подій для таких подій:
   а) A_1 – поява однієї стандартної і однієї нестандартної деталей;
   б) A_2 – поява не менш як однієї стандартної деталі;
   в) A_3 – поява не більш як однієї стандартної деталі.

2. Із ящика, в якому є бронзові, мідні, латунні та сталеві деталі, беруть одну деталь. Події A_1, A_2, A_3, A_4 означають відповідно, що взята деталь бронзова, латунна, мідна, сталева. Визначити подію $B=\left(A_1\cup\overline{A}_3\right)\cap\left(\overline{A}_4\cup A_2\right)$.

3. У ящику містяться 3 латунні (Л), 3 сталеві (С) і 1 бронзова (Б) деталь. Беруть 2 деталі. Визначити:

1) простір елементарних подій Ω;
2) множину елементарних подій A_3, яка утворює з подіями A_1 і A_2 повну групу, якщо $A_1=\{\text{СС, ЛС}\}, A_2=\{\text{БЛ,ЛС}\}$ – елементарні події, позначені згідно з матеріалом деталей.

4. Прилад складається з двох блоків 1-го типу і трьох блоків 2-го типу. Події $A_k(k=1,2)$ означають, що працює k-й блок 1-го типу, а події $B_j(j=1,2,3)$ – працює j-й блок 2-го типу. Прилад працює, якщо працює принаймні один блок першого типу і не менше як два блоки 2-го типу. Виразити подію C – «прилад працює» через події A_k і B_j.

5. Робітник виготовив n деталей. Нехай подія $A_i(i=1,2,\ldots,n)$ полягає в тому, що i-та деталь має дефект. Записати такі події:

1) ні одна з деталей не має дефектів;
2) принаймні одна деталь має дефект;
3) лише одна деталь має дефект.

6. Партія з 10 деталей містить 4 браковані. Знайти ймовірність того, що з навмання взятих двох деталей будуть:

1) дві придатні;
2) дві браковані;
3) 1 придатна і 1 бракована.

7. Партія складається з 20 виробів, з яких 8 виробів 1-го сорту, 6–2-го, 2–3-го сорту, а решта – браковані. Навмання беруть 4 вироби. Знайти ймовірність того, що серед них виявилося 2 вироби 1-го сорту, 1–2-го сорту і 1 бракований.

8. Навмання взятий телефонний номер складається із 6 цифр. Знайти ймовірність того, що в ньому всі цифри різні.

9. На прямокутній полиці навмання розставлено 8 томів зібрання творів. Знайти ймовірність того, що в результаті I, II і III томи стоять поруч.

10. Набираючи номер телефону, абонент забув дві останні цифри і, вважаючи, що вони різні, набрав їх навмання. Знайти ймовірність того, що набрано правильні цифри.

11. У лотереї на кожні 500 білетів розігрується 100 речових і 50 грошових виграшів. Знайти ймовірність виграшу для особи, яка має один білет.

12. На складі є 10 кінескопів заводу № 1 і вісім кінескопів заводу № 2. Навмання взято чотири кінескопи. Знайти ймовірність того, що серед них два кінескопи заводу № 1 і два кінескопи заводу № 2.

13. Партія електролампочок складається з 10 придатних і п'яти бракованих. Із партії навмання по одній беруть усі лампочки. Знайти ймовірність того, що останньою буде взято придатну.

14. У партії із 16 деталей чотири нестандартні. Навмання з поверненням беруть три деталі. Знайти ймовірність того, що серед них дві деталі будуть стандартними.

15. Восьмеро осіб у випадковому порядку сідають за круглий стіл. Знайти ймовірність того, що троє товаришів опиняться поруч.

16. До ліфта дев'ятиповерхового будинку на 1-му поверсі зайшло троє пасажирів. Кожен із них з однаковою ймовірністю виходить на будь-якому з поверхів, починаючи з 2-го. Знайти ймовірність того, що всі пасажири:

1) вийдуть на 5-му поверсі;
2) вийдуть одночасно на одному з поверхів;
3) вийдуть на різних поверхах.

17. Із літер розрізного українського алфавіту було складено слово «АНАНАС», а далі всі літери кинуто в урну і ретельно перемішано. Знайти ймовірність того, що, беручи літери одну за одною й укладаючи їх підряд, знову дістанемо це слово.

18. Набір трицифрового номера виграшної облігації виконують триразовим викиданням з урни одного за одним трьох жетонів із п'яти, пронумерованих цифрами від 1 до 5. Знайти ймовірність того, що вибраний номер містить цифру 3.

19. Стержень завдовжки L розрубують на дві частини. Знайти ймовірність того, що менша з частин, на які він поділяється, має довжину не менше як $\frac{L}{5}$.

20. Усередині круга радіусом *R* навмання вибирають точку. Знайти ймовірність того, що точка потрапить усередину:

1) вписаного у круг квадрата;
2) вписаного у круг правильного трикутника.

21. Замовник і виконавець домовились зустрітись у певний час від 11-ї до 12-ї години, а також про те, що той, хто прийде першим, чекатиме другого не більше як 20 хв, після чого залишить місце зустрічі. Знайти ймовірність того, що вони зустрінуться, якщо кожний може прийти до зазначеного місця в довільний момент часу між 11-ю і 12-ю годинами.

22. Відділ технічного контролю навмання відібрав 200 одиниць готової продукції і виявив серед них 12 одиниць, що не відповідають стандарту. Визначити відносні частоти появи бракованої і стандартної одиниць продукції, якщо навмання береться одна одиниця продукції.

23. У магазині протягом місяця досліджувалась частота попиту на чоловічі костюми за їхніми розмірами. Результати дослідження згруповано та подано в таблиці:

Розмір	46	48	50	52	54	56
Частота	110	250	380	460	340	180

Знайти відносну частоту попиту за розмірами.

24. На кожні 25 відштампованих заготівок верстат-автомат дає в середньому 3 нестандартні. Обчислити наближено, скільки потрібно зробити заготівок, щоб одержати 50 стандартних.

25. На двох верстатах-автоматах виробляються однакові заготівки, які транспортером перекидаються в те саме місце. Продуктивність другого верстата в 1,5 рази більша, ніж першого. Перший верстат дає 5 % нестандартних заготівок, а другий — 93 % стандартних. Знайти ймовірність того, що взята навмання заготівка буде:

1) стандартна; 2) нестандартна.

26. На конвеєр надходять деталі від трьох автоматів. Перший дає 90%, другий – 93%, а третій – 95% придатної продукції. Протягом зміни від першого автомата надходить 60, від другого – 50, від третього – 40 деталей. Знайти ймовірність потрапляння на конвеєр:

1) нестандартної деталі; 2)стандартної деталі.

27. На складі зберігаються кінескопи, 70% яких виготовлено на заводі № 1, а решта – на заводі № 2. Ймовірність того, що кінескоп витримає гарантійний строк, дорівнює 0,9 для заводу № 2 і 0,8 для заводу № 1. Знайти ймовірність того, що навмання взятий кінескоп:

1) не витримає гарантійного строку; 2) витримає гарантійний строк.

28. Маємо дві партії деталей. Перша складається з 15 стандартних і 4 нестандартних, друга – із 10 стандартних і 3 нестандартних. Із першої партії береться одна деталь і перекладається у другу. Знайти ймовірність того, що деталь, яку після цього взяли із другої партії :

1) стандартна; 2) нестандартна.

29. Маємо три партії деталей. Перша складається з 10 стандартних і 4 нестандартних, друга – із 14 стандартних і 4 нестандартних, третя – із 16 стандартних і 5 нестандартних деталей. Із навмання вибраної партії береться деталь. Знайти ймовірність того, що деталь буде: 1) стандартною; 2) нестандартною.

30. Металеві заготівки для подальшої обробки надходять із двох цехів: 55% із першого, 45% із другого. При цьому продукція з першого цеху містить 3%, а з другого цеху – 5% браку. Знайти ймовірність того, що заготівка, яка надійшла на обробку:

1) придатна; 2) бракована.

31. На склад надходить продукція від двох підприємств. Від першого – 60%, від другого – 40%. Перше підприємство дає 80% продукції 1-го сорту і 20% 2-го сорту, а друге дає 70% продукції 1-го сорту і 30% 2-го сорту. Знайти ймовірність того, що навмання взята одиниця продукції буде:

1) першого сорту; 2) другого сорту.

32. Для посіву пшениці заготовлено насіння, серед якого 95 % 1-го сорту, 3 % 2-го та 2 % 3-го сорту. Ймовірність того, що з насінини виросте колосок, в якому не менш ніж 50 зерен, для 1-го сорту насіння становить 0,5, для 2-го сорту – 0,2, для 3-го – 0,1. Знайти ймовірність того, що навмання взятий колосок у разі такого посіву матиме не менш як 50 зерен.

33. Маємо 50 комплектів деталей. Відомо, що кількість комплектів із дефектами серед них може з однаковою ймовірністю становити 0, 1 або 2. Знайти ймовірність того, що навмання взяті 3 комплекти виявилися без дефектів.

34. Кожний виготовлений заводом виріб може мати дефект з ймовірністю p. У цеху є три контролери, кожний з яких виявляє дефект з ймовірністю $p_i \left(i = 1,2,3\right)$. Ймовірності потрапляння деталі на перевірку до кожного контролера однакові. Виріб, який не було забраковано в цеху, перевіряє ВТК заводу, де дефект виявляється з ймовірністю p_0. Визначити ймовірність того, що:

1) виріб буде забраковано в цеху;
2) виріб буде забраковано у ВТК заводу;
3) виріб буде забраковано.

35. Партія складається з 10 стандартних і 5 нестандартних деталей. Із партії навмання взяли деталь і без обстеження відклали вбік. Знайти ймовірність того, що довільно взята після цього з партії деталь буде стандартною.

36. На кожні 30 штампованих виробів у середньому припадає 6 виробів з дефектом. Знайти ймовірність того, що з 5 навмання взятих виробів 3 виявляться без дефекту.

37. Деталі 2-го сорту становлять 2/3 усіх деталей, які є в партії. Знайти ймовірність того, що з 4 навмання взятих деталей 3 виявляться 2-го сорту.

38. Частка 3-го сорту становить у деякій масовій продукції у середньому 20 %. Знайти ймовірність того, що з п’яти узятих примірників продукції не менш як три будуть 3-го сорту.

39. У партії, яка складається із виробів двох сортів, виробів 2-го сорту в 1,5 рази більше, ніж 1-го. Знайти ймовірність того, що серед трьох навмання взятих виробів принаймні один буде 1-го сорту.

40. Ймовірність виграшу облігації за весь період позики становить 0,6. Куплено 5 облігацій. Знайти ймовірність такої події:

1) виграють дві облігації;
2) виграш випаде принаймні на одну облігацію;
3) виграють не більш як дві облігації.

41. За один цикл автомат виготовляє 10 деталей. За скільки циклів ймовірність виготовлення принаймні однієї бракованої деталі буде не менш як 0,8, якщо ймовірність виготовлення бракованої деталі для автомата становить 0,01?

42. Для забезпечення роботи на деякому будівельному об’єкті автопідприємство має 6 автомобілів. Ймовірність виходу кожного автомобіля на лінію в першу зміну дорівнює 0,8. Знайти ймовірність нормальної роботи автопідприємства, якщо для цього в першу зміну потрібно мати на лінії не менш як 4 автомобілі.

43. Автомат штампує вироби 1-го сорту з ймовірністю 0,6. Скільки виробів має містити партія, щоб найімовірніша кількість виробів 1-го сорту становила 55?

44. Промтоварна база обслуговує 8 магазинів. Заявки на товар на наступний день можуть надходити від кожного магазину з імовірністю 0,6. Знайти найімовірнішу кількість заявок, які можуть надходити на базу щодня, а також імовірність надходження такої кількості заявок.

45. Знайти найімовірнішу кількість зупинок прядильного верстата протягом години роботи, якщо середня кількість зупинок за кожні 12 хв дорівнює 4.

46. Яку частку (у відсотках) виробів 1-го сорту має виробляти автомат, щоб у партії із 100 навмання взятих виробів найімовірніша кількість виробів 1-го сорту дорівнювала 80?

47. Частка 2-го сорту деякої масової продукції в середньому становить 20 %. Навмання взято 100 примірників цієї продукції. Яка кількість виробів 2-го сорту в утвореній групі найімовірніша і яка ймовірність того, що в цій групі буде саме така кількість виробів 2-го сорту?

48. Частка заготівок із відхиленням від установленого стандарту при обточуванні таких заготівок становить у середньому 0,11 усієї кількості обточених заготівок. Знайти ймовірність того, що із 70 обточених заготівок 62 відповідають стандарту.

49. Стандартних деталей автомат штампує у 5 раз більше, ніж нестандартних. Навмання вибрано 200 деталей. Знайти ймовірність того, що серед них 30 деталей нестандартні.

50. Знайти ймовірність зупинки 20 верстатів із 80 працюючих, якщо ймовірність зупинки кожного верстата становить 0,8.

51. Посівний фонд містить 92 % насіння 1-го сорту. Навмання взято 150 зерен. Знайти ймовірність того, що серед них 140 зерен 1-го сорту.

52. Прядильниця обслуговує 1000 веретен. Ймовірність обриву нитки на одному веретені протягом 1 хв дорівнює 0,005. Знайти ймовірність того, що протягом 1 хв буде обрив нитки на двох веретенах.

53. До банку надійшло 5000 пачок грошових знаків. Ймовірність того, що пачку неправильно укомплектовано, дорівнює 0,0004. Знайти ймовірність того, що серед одержаних пачок буде не більш як одна неправильно укомплектована.

54. Пристрій складається із 2000 елементів, які працюють незалежно один від одного. Імовірність відказу кожного елемента дорівнює 0,002. Знайти ймовірність відказу принаймні одного елемента.

55. Ймовірність того, що під час сортування скляний виріб буде розбито, дорівнює 0,002. Знайти ймовірність того, що із 1500 виробів при сортуванні буде розбито 4.

56. Деталі 1-го сорту становлять у середньому 2/3 усіх деталей, що їх виготовляє верстат-автомат. Навмання взято 300 деталей. Знайти ймовірність того, що серед них буде від 190 до 210 деталей 1-го сорту.

57. Нестандартних виробів автомат штампує в середньому у 9 раз менше, ніж стандартних. Із продукції цього автомата навмання взято 200 виробів. Знайти ймовірність того, що серед них від 170 до 185 стандартних виробів.

58. У результаті автоматичного штампування заготівок виходить 10 % браку. Узято навмання 300 заготівок. Знайти ймовірність того, що кількість бракованих заготівок відхилиться від найімовірнішої кількості бракованих заготівок не більш ніж на шість.

59. Частка 1-го сорту в деякій продукції в середньому становить 80 %. Скільки примірників цієї продукції треба взяти, щоб з ймовірністю 0,9 можна було стверджувати, що в партії буде не менш як 75 примірників 1-го сорту?

60. Обстежується 500 проб руди. Ймовірність промислового вмісту металу в кожній пробі дорівнює 0,7. Знайти ймовірність того, що кількість проб із промисловим вмістом металу буде в межах від 300 до 370.

61. Автоматичне штампування металевих клем для з’єднання пластин дає в середньому 12 % відхилень від установленого стандарту. Знайти ймовірність того, що в партії із 600 клем відхилення відносної частоти появи нестандартних клем від ймовірності їх появи не перевищить 0,02.

62. На кожні 30 виготовлених деталей припадає в середньому 20 деталей 1-го сорту. Із продукції вибирається партія з 900 деталей. У яких межах може міститися відносна частота появи деталі 1-го сорту, якщо відхилення її від ймовірності потрібно гарантувати з ймовірністю 0,95? Визначити також межі частоти для деталей 1-го сорту.

63. Проводяться n незалежних випробувань, в кожному з яких деяка подія A настає зі сталою ймовірністю $p = 0{,}8$.

1) Знайти ймовірність того, що в 625 випробуваннях відносна частота відхилиться від ймовірності не більш ніж на 0,03.

2) Скільки потрібно провести випробувань, щоб з ймовірністю 0,9 гарантувати, що відхилення відносної частоти від ймовірності настання події A не перевищить 0,01?

3) У яких межах може міститися відносна частота настання події A в 1000 випробуваннях, якщо відхилення відносної частоти від ймовірності настання події A в одному випробуванні потрібно гарантувати з ймовірністю 0,7?

64. На трьох верстатах-автоматах виготовляються однакові деталі. Перший верстат дає 5 % браку, другий – 7 %, третій – 9 %. Із продукції кожного верстата навмання взято по одній деталі. Знайти ймовірність того, що серед них виявилось:

1) 0, 1, 2, 3 придатних;
2) принаймні одна деталь придатна;
3) принаймні одна деталь бракована.

65. Пристрій складається із 4 елементів, які працюють незалежно. Ймовірність відказу кожного з елементів протягом зміни відповідно дорівнює 0,1, 0,2, 0,3, 0,4. Знайти ймовірність того, що упродовж зміни не буде відказу жодного елемента; відкажуть 1, 2, 3, 4 елементи.

ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

5. Випадкові величини. Закон розподілу, функція розподілу, щільністю розподілу ймовірностей

Випадковою називається величина, яка може набувати різних числових значень. Строгіше означення випадкової величини пов'язане з поняттям простору елементарних подій. Нехай задано простір елементарних подій Ω. Однозначна числова функція $X = f(\Omega)$, яку задано на просторі елементарних подій, називається ***випадковою величиною***. Якщо простір Ω дискретний, то випадкова величина ***дискретна***. Неперервному простору елементарних подій відповідає ***неперервна випадкова величина***.

Співвідношення між значеннями випадкової величини і їхніми ймовірностями називається ***законом розподілу випадкової величини***.

Для дискретних випадкових величин закони розподілу можуть задаватися множиною значень, що їх набуває випадкова величина, і ймовірностями цих значень.

Якщо $p_i = P(X = x_i)$, то $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, або, якщо величина набуває зліченної множини значень, то $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$.

Закони розподілу дискретних випадкових величин задаються у табличній формі (подаються значення випадкової величини і їхні ймовірності), аналітичній (наводиться формула, за якою обчислюються ймовірності для заданих значень випадкової величини), графічній (у прямокутній системі координат задається набір точок $(x_i; p_i)$; сполучивши точки відрізками прямих, дістанемо многокутник розподілу ймовірностей). Універсальним способом задання закону розподілу ймовірностей є ***функція розподілу*** $F(x) = P(X < x)$. Для дискретних величин $F(x) = \sum_{x_i < x} p(x_i)$.

Функція розподілу – не спадна, неперервна зліва, $\lim_{x\to-\infty} F(x)=0$, $\lim_{x\to\infty} F(x)=1$. Для довільних α і β $P(\alpha \le X < \beta)=F(\beta)-F(\alpha)$.

Якщо X – неперервна випадкова величина, то $F(x)$ – неперервна і диференційована; її похідна $f(x)=F'(x)$ називається ***щільністю розподілу ймовірностей***. При цьому $f(x)$ – невід'ємна функція, для якої $P(\alpha \le X < \beta)=\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$; $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$; $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$.

5.1. Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Закон розподілу дискретної випадкової величини X задано таблицею

$X = x_i$	2,5	3	4,5	5	5,5	6
$P(X = x_i) = p_i$	a	$2a$	a	$3a$	a	$2a$

Знайти ймовірності можливих значень випадкової величини X: x_1 = 2,5; x_3 = 4,5; x_4 = 5; x_5 = 5,5; x_6 = 6. Обчислити ймовірності таких випадкових подій: 1) $X < 3$; 2) $X \le 3$; 3) $X < 5$; 4) $X \le 5$; 5) $2,5 \le X < 5,5$; 6) $X \ge 5,5$.

Розв'язання. За умовою нормування дістанемо:

$$\sum_{i=1}^{6} p_i = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = a + 2a + a + 3a + a + 2a = 1 \to$$

$$\to 10a = 1 \to a = 0,1$$

Отже, закон розподілу дискретної випадкової набуває такого вигляду:

$X = x_i$	2,5	3	4,5	5	5,5	6
$P(X = x_i) = p_i$	0,1	0,2	0,1	0,3	0,1	0,2

Обчислимо ймовірності подій:

1) $P(X < 3) = P(X = 2,5) = 0,1$;

2) $P(X \le 3) = P(X = 2,5) + P(X = 3) = 0,1 + 0,2 = 0,3$;

3) $P(X < 5) = P(X = 2,5) + P(X = 3) + P(X = 4,5) = 0,1 + 0,2 + 0,1 = 0,4$;

4) $P(X \le 5) = P(X = 2,5) + P(X = 3) + P(X = 5) = 0,1 + 0,2 + 0,1 + 0,3 = 0,7$;

5) $P(2,5 \le X \le 5,5) = P(X = 2,5) + P(X = 4,5) + P(X = 5) + P(X = 5,5) == 0,1 + 0,2 + 0,1 + 0,3 + 0,1 = 0,8$;

6) $P(X \ge 5,5) = P(X = 5,5) + P(X = 6) = 0,1 + 0,2 = 0,3$.

Приклад 2. Маємо три ящики. У першому містяться 6 стандартних і 4 браковані однотипні деталі, у другому – 8 стандартних і 2 браковані деталі, а в третьому – 5 стандартних і 5 бракованих. Із кожного ящика навмання беруть по одній деталі. Побудувати закон розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини X – появи числа стандартних деталей серед трьох навмання взятих; визначити $F(x)$ та побудувати графік цієї функції.

Розв'язання. Серед трьох навмання взятих деталей число стандартних може бути 0; 1; 2; 3.

У табличній формі закон розподілу дискретної випадкової величини має вигляд:

$X = x_i$	0	1	2	3
$P(X = x_i) = p_i$	p_1	p_2	p_3	p_4

Обчислимо ймовірності p_1, p_2, p_3, p_4. Із цією метою позначимо $A_{с1}$ і $A_{б1}$ випадкову подію, що полягає відповідно в появі стандартної деталі з першого ящика і появі бракованої деталі з першого ящика. Тоді випадкові події $A_{с2}$, $A_{б2}$, $A_{с3}$, $A_{б3}$ означають появу відповідно стандартної та бракованої деталей із другого і третього ящиків. Імовірності цих подій такі:

$$P(A_{с1}) = \frac{6}{10};\quad P(A_{б1}) = \frac{4}{10};$$

$$P(A_{с2}) = \frac{8}{10};\quad P(A_{б2}) = \frac{2}{10};$$

$$P(A_{с3}) = \frac{5}{10};\quad P(A_{б3}) = \frac{5}{10}.$$

Оскільки випадкові події $A_{с1}$, $A_{с2}$, $A_{с3}$, $A_{б1}$, $A_{б2}$, $A_{б3}$ є незалежними, маємо:

$$P_1 = P(A_{б1})\,P(A_{б2})\,P(A_{б3}) = \frac{4}{10}\,\frac{2}{10}\,\frac{5}{10} = \frac{40}{1000} = 0{,}04;$$

$$P_2 = P(A_{с1})P(A_{б2})P(A_{б3}) + P(A_{б1})P(A_{с2})P(A_{б3}) + P(A_{б1})P(A_{б2})P(A_{с3}) =$$

$$= \frac{6}{10}\,\frac{2}{10}\,\frac{5}{10} + \frac{4}{10}\,\frac{2}{10}\,\frac{5}{10} = \frac{60+160+40}{1000} = \frac{260}{1000} = 0{,}26;$$

$$P_3 = P(A_{с1})P(A_{с2})P(A_{б3}) + P(A_{с1})P(A_{б2})P(A_{с3}) + P(A_{б1})P(A_{с2})P(A_{с3}) =$$

$$= \frac{6}{10}\,\frac{8}{10}\,\frac{5}{10} + \frac{6}{10}\,\frac{2}{10}\,\frac{5}{10} + \frac{4}{10}\,\frac{8}{10}\,\frac{5}{10} = \frac{240+60+160}{1000} = \frac{460}{1000} = 0{,}46;$$

$$P_4 = P(A_{с1})\,P(A_{с2})\,P(A_{с3}) = \frac{6}{10}\,\frac{8}{10}\,\frac{5}{10} = \frac{240}{1000} = 0{,}24.$$

Перевіримо виконання умови нормування:

$$\sum_{i=1}^{4} P_i = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 0{,}04 + 0{,}26 + 0{,}46 + 0{,}24 = 1.$$

Умова нормування виконується. Отже, закон розподілу ймовірностей побудовано правильно. Запишемо його в табличній формі:

x_i	0	1	2	3
p_i	0,04	0,26	0,46	0,24

Приклад 3. Закон розподілу неперервної випадкової величини X задано функцією розподілу ймовірностей

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le -3;\\ \dfrac{(x+3)^2}{49}, & -3<x\le 4;\\ 1, & x>4.\end{cases}$$

Побудувати графік функції $F(x)$ і обчислити $P(-1<X<2)$.

Розв'язання. $F(x)$ графічно зображено на рис. 2.

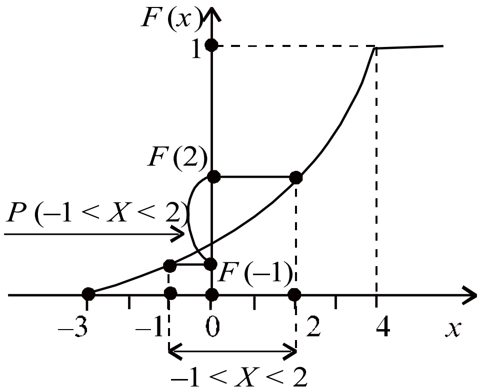

Рис. 2

обчислимо

$$P(-1<X<2)=F(2)-F(-1)=\left.\frac{(x+3)^2}{49}\right|_{x=2}-\left.\frac{(x+3)^2}{49}\right|_{x=-1}=$$

$$=\frac{25}{49}-\frac{4}{49}=\frac{21}{49}=\frac{3}{7}.$$

Приклад 4. Функція розподілу ймовірностей має такий вигляд:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le -2;\\ ax+b, & -2<x\le 5;\\ 1, & x>5.\end{cases}$$

Знайти значення сталих a і b. Обчислити $P(1 < X < 4)$.

Розв'язання. Згідно з властивостями $F(x)$ маємо:

$$\begin{cases}-2a+b=0\\ 5a+b=1\end{cases}\to a=\frac{1}{7},\quad b=\frac{2}{7}.$$

Коли $a=\frac{1}{7},\quad b=\frac{2}{7}$ функція розподілу ймовірностей набирає вигляду

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le -2;\\ \dfrac{x+2}{7}, & -2<x\le 5;\\ 1, & x>5.\end{cases}$$

Обчислюємо ймовірність події $1 < X < 4$:

$$P(1<X<4)=F(4)-F(1)=\frac{6}{7}-\frac{3}{7}=\frac{3}{7}.$$

Приклад 5. Закон неперервної випадкової величини X задано у вигляді:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \frac{1}{2}\sin x, & 0<x\le\pi;\\ 0, & x>\pi.\end{cases}$$

Знайти $F(x)$ і побудувати графіки функцій $f(x)$, $F(x)$. Обчислити $P\left(\frac{\pi}{6}<X<\frac{\pi}{4}\right)$.

Розв'язання. Маємо:

$$F(x)=\int_0^x f(x)dx=\int_0^x \frac{1}{2}\sin dx=\frac{1}{2}\int_0^x \sin dx=\frac{1}{2}(-\cos x|_0^x)=\frac{1}{2}(-\cos x+1)=$$
$$=\frac{1-\cos x}{2}.$$

Отже, функція розподілу ймовірностей буде така:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \frac{1}{2}(1-\cos x), & 0<x\le\pi;\\ 1, & x>\pi.\end{cases}$$

Графіки функцій $f(x)$, $F(x)$ зображені відповідно на рис. 3 і 4.

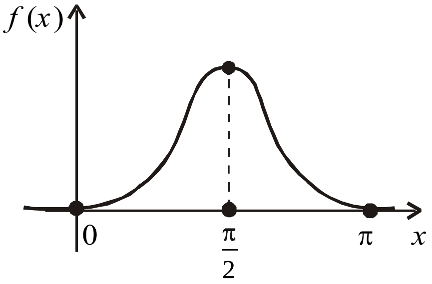

Рис. 3

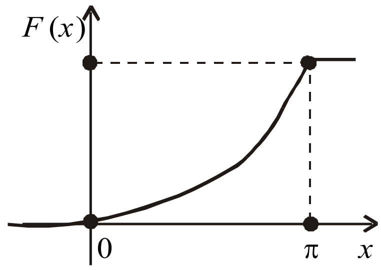

Рис. 4

Ймовірність події $\frac{\pi}{6}<X<\frac{\pi}{4}$ можна обчислити:

$$P\left(\frac{\pi}{6}<X<\frac{\pi}{4}\right)=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=-\cos x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}=-\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}.$$

Приклад 6. За заданою щільністю ймовірностей маємо:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le -2;\\ a\sqrt{x+2}, & -2<x\le 7;\\ 0, & x>7.\end{cases}$$

Знайти значення сталої a та функцію $F(x)$. Побудувати графіки функцій $f(x)$, $F(x)$.

Розв'язання. Значення сталої a визначаємо з умови нормування:

$$\int_{-2}^{7} f(x)dx=1\to\int_{-2}^{7} a\sqrt{x+2}\,dx=1\to a\int_{-2}^{7}\sqrt{x+2}\,dx=1\to a=\frac{1}{\int_{-2}^{7}\sqrt{x+2}\,dx}.$$

Тут $\int\limits_{-2}^{7} \sqrt{x+2}\ dx = \frac{2}{3}\sqrt{(x+2)^3}\Big|_{-2}^{7} = \frac{2}{3}\left(\sqrt{9^3} - \sqrt{0}\right) = \frac{2}{3}27 = 18.$

Отже,

$$a = \frac{1}{18}.$$

При знайденому значенні a щільність ймовірностей

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le -2; \\ \frac{1}{18}\sqrt{x+2}, & -2 < x \le 7; \\ 0, & x > 7. \end{cases}$$

Функція розподілу ймовірностей визначається так:

$$F(x) = \int\limits_{-2}^{x} f(x)dx = \int\limits_{-2}^{x} \frac{1}{18}\sqrt{x+2}\ \ dx = \frac{1}{18}\int\limits_{-2}^{x}\sqrt{x+2}\ \ dx = \frac{1}{18}\ \frac{(x+2)^3}{\frac{3}{2}}\Bigg|_{-2}^{x} =$$

$$= \frac{1}{27}\sqrt{(x+2)^3}\Big|_{-2}^{x} = \frac{1}{27}\sqrt{(x+2)^3}.$$

Отже,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le -2; \\ \frac{1}{27}\sqrt{(x+2)^3}, & -2 < x \le 7; \\ 1, & x > 7. \end{cases}$$

Графіки функцій $f(x)$, $F(x)$ зображені відповідно на рис. 5 і 6.

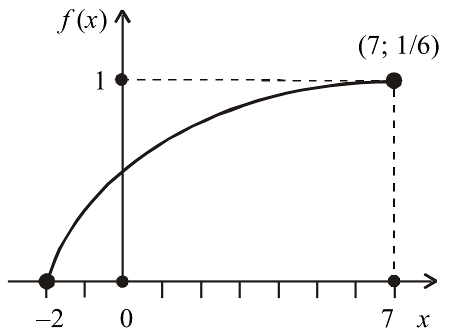

Рис. 5

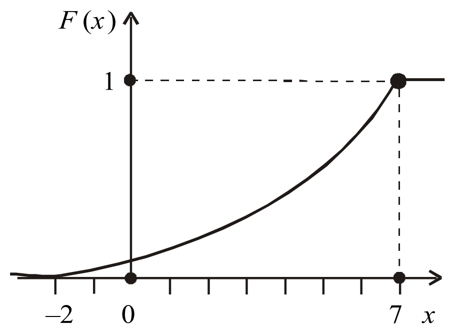

Рис. 6

Приклад 7. Неперервна випадкова величина X має закон розподілу ймовірностей у вигляді трикутника, зображеного на рис. 7.

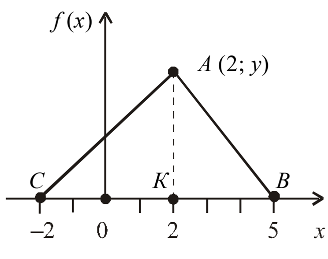

Рис. 7

Записати вирази для щільності ймовірностей і функції розподілу ймовірностей. Побудувати графік $F(x)$ і обчислити $P(0 < X < 4)$.

Розв'язання. На проміжку [–2; 2] щільність ймовірностей змінюється за законом прямої пропорційної залежності $f(x) = k_1x + b_1$ ($k_1 > 0$), а на проміжку [2; 5] за аналогічним законом $f(x) = k_2x + b_2$ ($k_2 < 0$). Для знаходження значень параметрів k_1, b_1, k_2, b_2 обчислимо координати вершини цього трикутника $A(x, y)$. Абсциса цієї точки відома за умовою задачі: $x = 2$; ординату знаходимо за умовою нормування, згідно з якою площа цього трикутника ABC має дорівнювати одиниці:

$$S_\Delta = \frac{1}{2} CB \cdot AK = \frac{1}{2} 7y = 1 \to y = \frac{2}{7}.$$

Отже, шукані координати:

$$x = 2; \quad y = \frac{2}{7}.$$

Знаходимо рівняння прямої, яка проходить через точки C (–2; 0) і $A\left(2; \frac{2}{7}\right)$:

$$\frac{y-0}{x+2} = \frac{\frac{2}{7}-0}{2+2} \qquad \frac{y}{x+2} = \frac{1}{14} \qquad y = \frac{x+2}{14}$$

Отже, на проміжку [–2; 2] маємо:

$$f(x) = \frac{1}{14}(x+2).$$

Рівняння прямої, що проходить через точки $A\left(2; \frac{2}{7}\right)$, $B(2; 0)$:

$$\frac{y-0}{x-5} = \frac{\frac{2}{7}-0}{2-5} \qquad \frac{y}{x-5} = -\frac{2}{21} \qquad y = -\frac{2}{21}(x-5).$$

Звідси на проміжку [2; 5] дістаємо:

$$f(x) = -\frac{2}{21}(x-5) = \frac{2}{21}(5-x).$$

Отже, на проміжку [–2; 5] щільність ймовірностей

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le -2; \\ \frac{1}{14}(x+2), & -2 < x \le 2; \\ \frac{2}{21}(5-x), & 2 < x \le 5; \\ 0, & x > 5. \end{cases}$$

Знаходимо $F(x)$ на обох розглядуваних проміжках:

1) на проміжку [–2; 2]:

$$F(x)=\int_{-2}^{x} f(x)dx=\int_{-2}^{x}\frac{1}{14}(x+2)dx=\frac{1}{14}\int_{-2}^{x}(x+2)dx=\left.\frac{(x+2)^2}{28}\right|_{-2}^{x}=\frac{(x+2)^2}{28};$$

2) на проміжку [–2; 5]:

$$F(x)=F(2)+\int_{2}^{x} f(x)\,dx=\frac{16}{28}+\frac{2}{21}\int_{2}^{x}(5-x)\,dx=\frac{16}{28}+\frac{1}{21}\left(-\left.\frac{(5-x)^2}{2}\right|_{-2}^{x}\right)=$$

$$=\frac{16}{28}-\frac{1}{21}(x-5)^2\Big|_2^x=\frac{16}{28}-\frac{(x-5)^2}{21}+\frac{9}{21}=\frac{4}{7}-\frac{(x-5)^2}{21}-\frac{3}{7}=1-\frac{(x-5)^2}{21}.$$

Отже, функція розподілу ймовірностей

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le -2;\\ \dfrac{(x+2)^2}{28}, & -2<x\le 2;\\ 1-\dfrac{(x-5)^2}{21}, & 2<x\le 5;\\ 1, & x>5.\end{cases}$$

Графік $F(x)$ зображено на рис. 8.

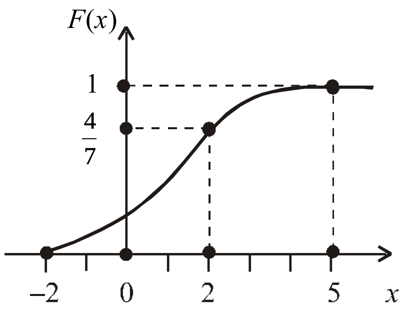

Рис. 8

Обчислюємо ймовірність події $0<X<4$.
На інтервалі [0; 4] діють два закони розподілу:

$$P(0<X<4)=P(0<X<2)+P(2<X<4).$$

1) $F(2)-F(0)+F(4)-F(2)=F(4)-F(0)=\left(1-\frac{1}{21}\right)-\frac{4}{28}=$

$$=\frac{21-1}{21}-\frac{4}{28}=\frac{20}{21}-\frac{1}{7}=\frac{20-3}{21}=\frac{17}{21}.$$

2) $P(0<X<4)=P(0<X<2)+P(2<X<4)=\int_0^2\frac{1}{14}(x+2)\,dx+$

$$+\int_2^4\frac{2}{21}(5-x)\,dx=\left.\frac{(x+2)^2}{28}\right|_0^2+\frac{2}{21}\left(-\left.\frac{(5-x)^2}{2}\right|_2^4\right)=\frac{16}{28}-\frac{4}{28}+\frac{1}{21}(-1+9)=$$

$$=\frac{12}{28}+\frac{8}{21}=\frac{3}{7}+\frac{8}{21}=\frac{17}{21}.$$

Отже, $P(0<X<4)=\dfrac{17}{21}$.

6. Числові характеристики випадкових величин. Їх властивості. Знаходження щільності розподілу для неперервної випадкової величини. Обчислення математичного сподівання, моди, медіани, дисперсії

Математичним сподіванням, або середнім значенням, $M(X)$ випадкової величини, називається ряд $\sum_i x_i p_i$ (для дискретних випадкових величин) і інтеграл $\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$ (для неперервних випадкових величин), якщо вони абсолютно збіжні. Математичне сподівання має такі властивості:

1) $MC = C$ (C – стала);
2) $MCX = CMX$;
3) $M(X+Y) = MX + MY$;
4) $MXY = MX \cdot MY$, якщо X і Y – незалежні випадкові величини.

Дисперсія (позначається через $D(X)$) випадкової величини X визначається за формулою:

$$DX = M(X - MX)^2 = MX^2 - (MX)^2.$$

Основні властивості дисперсії:

1) $DC = 0$;
2) $DCX = C^2 DX$;
3) $D(X+Y) = DX + DY$, якщо випадкові величини незалежні.

Середнє квадратичне відхилення (позначається літерою σ) є квадратним коренем із дисперсії.

Якщо від випадкової величини віднімемо її математичне сподівання, то дістанемо центровану випадкову величину, математичне сподівання якої дорівнює нулю. Ділення випадкової величини на її середнє квадратичне відхилення називається ***нормуванням*** цієї випадкової величини.

Випадкова величина $X^* = \dfrac{X - MX}{\sigma}$ має нульове математичне сподівання й одиничну дисперсію.

Медіаною (Me) випадкової величини є X будь-який корінь рівняння $F(x) = 0{,}5$.

Мода дискретної величини (MO) – це таке її значення, імовірність якого найбільша.

Модою неперервного розподілу є значення випадкової величини, за якого щільність розподілу має максимум.

6.1. Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Дано щільність ймовірностей

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \frac{1}{3}\sin\frac{2}{3}x, & 0<x\le\frac{3}{2}\pi;\\ 0, & x>\frac{3}{2}\pi.\end{cases}$$

Обчислити *M* (*X*).

Розв'язання.

$$M(X)=\int_0^{\frac{3}{2}\pi}x\ f(x)dx=\int_0^{\frac{3}{2}\pi}x\ \frac{1}{3}\sin\frac{2}{3}xdx=\frac{1}{3}\int_0^{\frac{3}{2}\pi}x\sin\frac{2}{3}xdx=\left|\begin{array}{l}u=x,\quad du=dx\\ \sin\frac{2}{3}xdx=dv\to\\ \to v=-\frac{3}{2}\cos\frac{2}{3}x\end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{3}\left(-x\frac{3}{2}\cos\frac{2}{3}x\Big|_0^{\frac{3}{2}\pi}+\frac{3}{2}\int_0^{\frac{3}{2}\pi}\cos\frac{2}{3}xdx\right)=\frac{1}{3}\left(-\frac{3}{2}x\cos\frac{2}{3}x\Big|_0^{\frac{3}{2}\pi}+\frac{9}{4}\sin\frac{2}{3}x\Big|_0^{\frac{3}{2}\pi}\right)=\frac{3}{4}\pi.$$

$$M(X)=\frac{3}{4}\pi.$$

Приклад 2. За заданою функцією розподілу ймовірностей

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le -4;\\ \frac{\sqrt{x+4}}{3}, & -4<x\le 6;\\ 1, & x>6.\end{cases}$$

Обчислити *M* (*X*).

Розв'язання. Для обчислення *M* (*X*) необхідно знайти щільність ймовірностей

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<-4;\\ \frac{1}{6\sqrt{x+4}}, & -4<x\le 6;\\ 0, & x>6.\end{cases}$$

Тоді:

$$M(X)=\int_{-4}^{6}x\ f(x)dx=\int_{-4}^{6}x\frac{1}{6\sqrt{x+3}}dx=\frac{1}{6}\int_{-4}^{6}\frac{x}{\sqrt{x+3}}dx=\left|\begin{array}{lll}x+3=z^2 & & \\ x=z^2-3 & \to & \begin{array}{c}-3\le x\le 6\\ 0\le z\le 3\end{array}\\ dx=2zdz & & \end{array}\right|$$

$$=\frac{1}{6}\int_0^3\frac{z^2-3}{z}2zdz=\frac{1}{3}\int_0^3(z^2-3)dz=\frac{1}{3}\left(\int_0^3 z^2dz-3\int_0^3 dz\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{z^3}{3}\Big|_0^3-3z\Big|_0^3\right)=\frac{1}{3}(9-9)=0;$$

$$M(X)=0.$$

Приклад 3. За заданою щільністю ймовірностей

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le -2;\\ a\ (x+2)(x-4), & -2<x\le 4;\\ 0, & x>4.\end{cases}$$

Знайти a і $F(x)$, Mo.

Розв'язання. За умовою нормування маємо:

$$a=\frac{1}{\int\limits_{-2}^{4}(x+2)(x-4)dx}\quad\to\int\limits_{-2}^{4}x^2dx-2\int\limits_{-2}^{4}xdx-8\int\limits_{-2}^{4}dx=\left.\frac{x^3}{3}\right|_{-2}^{4}-x^2\Big|_{-2}^{4}-8x\Big|_{-2}^{4}=$$

$$=\frac{64+8}{3}-(16-4)-8(4+2)=24-12-48=-36\to a=-\frac{1}{36}.$$

Щільність ймовірностей зі знайденим a матиме вигляд

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le -2;\\ \dfrac{(4-x)(x+2)}{36}, & -2<x<4;\\ 0, & x\ge 4.\end{cases}$$

Графік $f(x)$ зображено на рис. 9

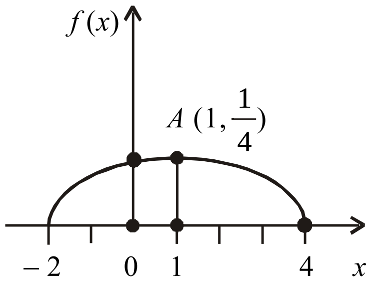

Рис. 9

Згідно з рис. 9 маємо $f(1)=\max$. Отже, Mo = 1.

Визначаємо Me:

$$F(x)=\int\limits_{-2}^{x}f(x)dx=\frac{1}{36}\int\limits_{-2}^{x}(4-x)(x+2)dx==\frac{1}{36}\int\limits_{-2}^{x}(8+2x-x^2)dx=\frac{1}{36}\left(\int\limits_{-2}^{x}8dx+\int\limits_{-2}^{x}2xdx-\int\limits_{-2}^{x}x^2dx\right)=$$

$$=\frac{1}{36}\left(8x\Big|_{-2}^{x}+x^2\Big|_{-2}^{x}-\left.\frac{x^3}{3}\right|_{-2}^{x}\right)=\frac{1}{36}\left(8x+16+x^2-4-\frac{x^3}{3}-\frac{8}{3}\right)==\frac{1}{36}\left(\frac{24x+36+3x^2-x^3-8}{3}\right)=$$

$$\frac{28+24x+3x^2-x^3}{108}.$$

Отже,

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le -2;\\ \dfrac{28+24x+3x^2-x^3}{108}, & -2<x\le 4;\\ 1, & x>4.\end{cases}$$

Визначимо Ме:

$$F(\mathrm{Me}) = \frac{1}{2} \quad \to \frac{28 + 24\mathrm{Me} + 3\mathrm{Me}^2 - \mathrm{Me}^3}{108} = \frac{1}{2} \quad \to \mathrm{Me}^3 - 3\mathrm{Me}^2 - 24\mathrm{Me} + 26 = 0 \to \mathrm{Me} = 1.$$

Ме можна знайти, скориставшись щільністю ймовірностей:

$$\int_{-\infty}^{\mathrm{Me}} f(x)dx = \int_{\mathrm{Me}}^{\infty} f(x)dx,$$

або при $X \in [a; b]$:

$$\int_{a}^{\mathrm{Me}} f(x)dx = \int_{\mathrm{Me}}^{e} f(x)dx .$$

Отже, Ме – можливе значення випадкової величини X, причому таке, що пряма, проведена перпендикулярно до відповідної точки на площині X = Ме, поділяє площу фігури, яка обмежена функцією $f(x)$, на дві рівні частини.

Приклад 4. Маємо чотири електролампочки, кожна з яких має дефект з імовірністю $q = 0{,}1$ ($p = 1 - q = 0{,}9$ – імовірність того, що в лампочці дефект відсутній). Послідовно беруть по одній лампочці, вгвинчують у патрон і вмикають електричний струм. Під час вмикання струму лампочка з дефектом перегорить, і її замінять на іншу. Побудувати закон розподілу дискретної випадкової величини X – число лампочок, які будуть випробувані. Обчислити $\sigma(X)$.

Розв'язання. Дискретна випадкова величина X – число лампочок, які будуть випробувані – набуває таких можливих значень:

$$x_1 = 1; \quad x_2 = 2; \quad x_3 = 3; \quad x_4 = 4.$$

Обчислимо відповідні ймовірності:

$$P(X = 1) = p_1 = 0{,}9; \quad P(X = 2) = p_2 = pq = 0{,}09; \quad P(X = 3) = p_3 = pq^2 = 0{,}009;$$

$$P(X = 4) = p_4 = pq^3 + q^4 = 0{,}0009 + 0{,}0001 = 0{,}001.$$

Адже четверта лампочка буде випробувана, коли третя перегорить, а четверта – ні, або коли й четверта перегорить.

У табличній формі закон розподілу X матиме такий вигляд:

x_i	1	2	3	4
p_i	0,9	0,09	0,009	0,001

Далі виконуємо такі обчислення:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i p_i = 1 \cdot 0{,}9 + 2 \cdot 0{,}09 + 3 \cdot 0{,}009 + 4 \cdot 0{,}001 == 0{,}9 + 0{,}18 + 0{,}027 + 0{,}004 = 1{,}111;$$

$$M(X^2) = \sum_{i=1}^{4} x_i^{\,2} p_i = 1 \cdot 0{,}9 + 4 \cdot 0{,}09 + 9 \cdot 0{,}009 + 16 \cdot 0{,}001 == 0{,}9 + 0{,}36 + 0{,}081 + 0{,}016 = 1{,}357;$$

$$D(X) = M(X^2) - M_2(X) = 1{,}357 - (1{,}111)^2 = 1{,}357 - 1{,}234321 = 0{,}122679;$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0{,}122679} \approx 0{,}35.$$

Приклад 5. Закон розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини X задано функцією

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le -6; \\ 0{,}1, & -6 < x \le -4; \\ 0{,}3, & -4 < x \le 1; \\ 0{,}4, & 1 < x \le 3; \\ 0{,}6, & 3 < x \le 5; \\ 0{,}8, & 5 < x \le 8; \\ 1, & x > 8. \end{cases}$$

Обчислити $D(X)$; $\sigma(X)$.

Розв'язання. За заданою функцією розподілу ймовірностей подамо закон розподілу таблицею

x_i	-6	-4	1	3	5	8
p_i	0,1	0,2	0,1	0,2	0,2	0,2

$$M(X) = \sum_{i=1}^{6} x_i p_i = -6 \cdot 0{,}1 - 4 \cdot 0{,}2 + 1 \cdot 0{,}1 + 3 \cdot 0{,}2 + 5 \cdot 0{,}2 + 8 \cdot 0{,}2 = 1{,}9;$$

$$M(X^2) = \sum_{i=1}^{6} x_i^{\,2} p_i = 36 \cdot 0{,}1 + 16 \cdot 0{,}2 + 1 \cdot 0{,}1 + 9 \cdot 0{,}2 + 25 \cdot 0{,}2 + 64 \cdot 0{,}2 = 26{,}25;$$

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = 26{,}5 - (1{,}9)^2 = 26{,}5 - 3{,}61 = 22{,}89;$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{22{,}89} \approx 4{,}78.$$

Приклад 6. Задано щільність ймовірностей:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ \dfrac{1}{2}\sin x, & 0 < x \le \pi; \\ 0, & x > \pi. \end{cases}$$

Обчислити $D(X)$; $\sigma(X)$. Знайти Mo; Me.

Розв'язання.

$$M(X) = \int_0^{\pi} x f(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} x \sin x dx = \begin{vmatrix} u = x, \quad du = dx \\ \sin dx = dv \to \\ \to v = -\cos x \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{-x\cos x}{2}\Bigg|_0^{\pi} + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos x dx = \frac{-x\cos x}{2}\Bigg|_0^{\pi} + \frac{1}{2}\sin x\Bigg|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{-\pi\cos\pi + 0\cos 0}{2} + \frac{1}{2}(\sin\pi - \sin 0) = \frac{\pi}{2};$$

$$M(X) = \frac{\pi}{2};$$

$$M(X^2)=\int_0^{\pi} x^2 f(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi} x^2 \sin x\,dx=\left|\begin{array}{l} u=x^2, \quad du=2xdx \\ \sin xdx=dv\to \\ \to v=-\cos x \end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\left(-x^2\cos x\Big|_0^{\pi}+2\int_0^{\pi} x\cos xdx\right)=\left|\begin{array}{l} u=x, \quad du=dx \\ \cos dx=dv \\ v=\sin x \end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\left[-x^2\cos x\Big|_0^{\pi}+2\left(x\sin x\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\sin xdx\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[-x^2\cos x\Big|_0^{\pi}+2\left(x\sin x\Big|_0^{\pi}+\cos x\Big|_0^{\pi}\right)\right]=\frac{1}{2}(\pi^2-2)=\frac{\pi^2-2}{2};$$

$$D(X)=M(X^2)-M^2(X)=\frac{\pi^2-2}{2}-\frac{\pi^2}{4}=\frac{2\pi^2-4-\pi^2}{4}=\frac{\pi^2-4}{4};$$

$$D(X)=\frac{\pi^2-4}{4};$$

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\frac{\sqrt{\pi^2-4}}{2}.$$

Графік $f(x)$ зображено на рис. 10.

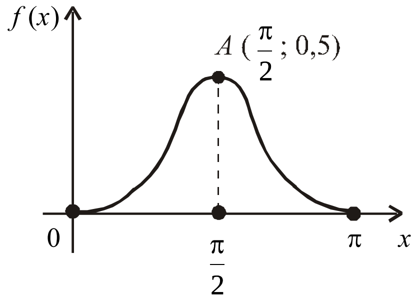

Рис. 10

Оскільки $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}=0{,}5$ є максимальним значенням, то $\mathrm{Mo}=\frac{\pi}{2}$.

Знаходимо $F(x)=\int_0^x \frac{1}{2}\sin dx=-\frac{1}{2}\cos x\Big|_0^x=\frac{1-\cos x}{2}$.

Отже,

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0; \\ \dfrac{1-\cos x}{2}, & 0<x\ge\pi; \\ 1, & x>\pi. \end{cases}$$

$$F(\mathrm{Me})=\frac{1-\cos\mathrm{Me}}{2}=\frac{1}{2} \quad\to\quad \cos\mathrm{Me}=0\to\mathrm{Me}=\frac{\pi}{2}$$

Приклад 7. Задано щільність ймовірностей (рис. 11).

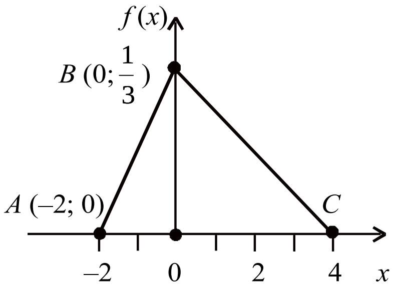

Рис. 11

Обчислити $D(X)$; $\sigma(X)$; Ме. Знайти Мо.

Розв'язання. За умовою нормування знайти ординату точки B:

$$\frac{AB\cdot OB}{2}=1\rightarrow\frac{6\cdot 7}{2}=1\rightarrow y=\frac{1}{3}.$$

На проміжку [–2; 0] $f(x)=\dfrac{x+2}{6}$.

На [0; 4] $f(x)=-\dfrac{(x-4)}{12}=\dfrac{4-x}{12}$.

Отже, щільність ймовірностей

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le -2;\\ \dfrac{x+2}{6}, & -2<x\le 0;\\ \dfrac{4-x}{12}, & 0,\ x>4.\end{cases}$$

Знаходимо функцію розподілу ймовірностей:

На проміжку [–2; 0] $F(x)=\int\limits_{-2}^{x}\dfrac{x+2}{6}=\dfrac{(x+2)^2}{12}$.

На [–2; 4] $F(x)=F(0)+\int\limits_{0}^{x}\dfrac{4-x}{12}dx=\dfrac{4}{12}-\dfrac{(4-x)^2}{24}\Bigg|_0^x=$

$$=\frac{4}{12}-\frac{(x-4)^2}{24}+\frac{16}{24}=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}-\frac{(x-4)^2}{24}=1-\frac{(x-4)^2}{24}.$$

Отже, функцію розподілу ймовірностей можна подати у вигляді

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le -2;\\ \dfrac{(x+2)^2}{12}, & -2<x\le 0;\\ 1-\dfrac{(x-4)^2}{24}, & 0<x\le 4;\\ 1, & x>4.\end{cases}$$

Графік $F(x)$ зображено на рис. 12.

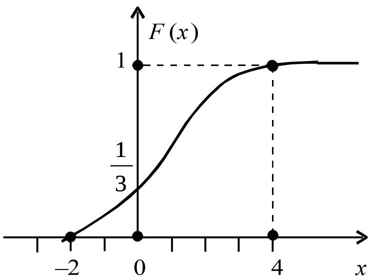

Рис. 12

Далі обчислюємо *D* (*X*):

$$M(X)=\int_{-2}^{0}xf(x)dx+\int_{0}^{4}xf(x)dx=$$

$$\int_{-2}^{0}x\frac{x+2}{6}dx+\int_{0}^{4}x\frac{4-x}{12}dx=\frac{1}{6}\int_{-2}^{0}(x^2+2x)dx+\frac{1}{12}\int_{0}^{4}(4x-x^2)dx=$$

$$=\frac{1}{6}\left(\int_{-2}^{0}x^2dx+2\int_{-2}^{0}xdx\right)+\frac{1}{12}\left(4\int_{0}^{4}xdx-\int_{0}^{4}x^2dx\right)=\frac{1}{6}\left(\frac{x^3}{3}\Bigg|_{-2}^{0}+x^2\Bigg|_{-2}^{0}\right)+\frac{1}{12}\left(2x^2\Bigg|_{0}^{4}-\frac{x^3}{3}\Bigg|_{0}^{4}\right)=$$

$$=\frac{1}{6}\left(\frac{8}{3}-4\right)+\frac{1}{12}\left(32-\frac{64}{3}\right)=\frac{1}{6}\left(\frac{8-12}{3}\right)+\frac{1}{12}\left(\frac{96-64}{3}\right)=-\frac{4}{18}+\frac{32}{36}=\frac{-8+32}{36}=\frac{24}{36}=\frac{2}{3}.$$

$$M(X^2)=\int_{-2}^{0}x^2f(x)dx+\int_{0}^{4}x^2f(x)dx=\frac{1}{6}\int_{-2}^{0}x^2(x+2)dx+\frac{1}{12}\int_{0}^{4}x^2(4-x)dx=$$

$$=\frac{1}{6}\left(\int_{-2}^{0}x^3dx+2\int_{-2}^{0}x^2dx\right)+\frac{1}{12}\left(4\int_{0}^{4}x^2dx-\int_{0}^{4}x^3dx\right)=$$

$$=\frac{1}{6}\left(-4+\frac{16}{3}\right)+\frac{1}{12}\left(\frac{256}{3}-64\right)=\frac{1}{6}\left(\frac{-12+16}{3}\right)+\frac{1}{12}\left(\frac{256-192}{3}\right)=$$

$$=\frac{4}{18}+\frac{64}{36}=\frac{8+64}{36}=\frac{72}{36}=2;$$

$$D(X)=M(X^2)-M^2(x)=2-\left(\frac{2}{3}\right)^2=2-\frac{4}{9}=\frac{18-4}{9}=\frac{14}{9};$$

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{\frac{14}{9}}=\frac{\sqrt{14}}{9}=\frac{\sqrt{14}}{3}.$$

Для визначення Me необхідно знайти проміжок, в якому вона міститься. Оскільки $F(0)=\frac{1}{3}<0{,}5,$ то медіана належить проміжку [0; 4].

Далі маємо:

$$1-\frac{(\text{Me}-4)^2}{24}=\frac{1}{2}\to\frac{(\text{Me}-4)^2}{24}=\frac{1}{2}\to(\text{Me}-4)^2=12\to$$

$$\to\text{Me}-4=\pm2\sqrt{3}\to\text{Me}=4\pm2\sqrt{3}\to\text{Me}=4+2\sqrt{3}\in[-2;\ 4];$$

$$\text{Me}=4-2\sqrt{3}\in[-2;4].$$

Отже, Me = $4-2\sqrt{3}$; Mo = 0.

7. Найважливіші закони розподілу ймовірностей. Аналіз графіків законів розподілів, знаходження основних числових характеристик

У теорії ймовірностей часто застосовуються деякі закони розподілу випадкових величин. Розглянемо ці розподіли, а також задачі, де вони використовуються.

1.Біноміальний закон розподілу . Ймовірності в цьому законі визначаються за формулою $P(X=m)= \ =C_n^m p^m (1-p)^{n-m}$, m = 0,1,2, …, n. Закон справджується для схеми незалежних повторних випробувань, у кожному з яких подія A настає з ймовірністю p. Частота настання події A має біноміальний закон розподілу. Числові характеристики розподілу:

$$MX=np,\ DX=np(1-p).$$

2. Закон розподілу Пуассона. Дискретна випадкова величина має розподіл Пуассона, якщо вона набуває зліченної множини значень $(m=0,1,2,\dots)$ з ймовірностями

$$P(X=m)=\frac{a^m}{m!}e^{-a},(a>0).$$

Цей розподіл описує кількість подій, які настають в однакові проміжки часу за умови, що ці події відбуваються незалежно одна від одної зі сталою інтенсивністю. Розподіл Пуассона розглядається як статистична модель для кількості альфа-частинок, що їх випромінює радіоактивне джерело за певний проміжок часу; кількості викликів, які надходять на телефонну станцію за певний період доби; кількості вимог щодо виплати страхових сум за рік; кількості дефектів на однакових пробах речовини і т. ін. Розподіл застосовується в задачах статистичного контролю якості, у теорії надійності, теорії масового обслуговування. Математичне сподівання і дисперсія в цьому розподілі однакові і дорівнюють a. Для цього розподілу складено таблиці щодо різних значень a (0,1 – 20). У таблицях для відповідних значень a наведено ймовірності $P(X=m)$ і $P(X\geq m)$.

Якщо у схемі незалежних повторних випробувань n велике і p або $1-p$ прямують до нуля, то біноміальний розподіл апроксимується розподілом Пуассона, коли $a=np$.

3. Геометричний розподіл. Закон подається формулою:

$$P(X=m)=p(1-p)^{m-1}, m=1,\ 2,\dots .$$

Геометричний закон розподілу має частота настання події у схемі незалежних повторних випробувань, якщо вони проводяться до першого настання події. У формулі p — імовірність настання події в кожному випробуванні. Геометричний закон розподілу застосовується у задачах статистичного контролю якості і теорії надійності. Числові характеристики розподілу: $MX=\frac{1}{p},\quad DX=\frac{1-p}{p^2}.$

4. Гіпергеометричний розподіл. Гіпергеометричний розподіл описує ймовірність настання m успішних результатів у n випробуваннях, якщо значення n мале порівняно з обсягом сукупності N:

$$P(X=m)=\frac{C_k^m\cdot C_{N-k}^{n-m}}{C_N^n},\ \ m=0,1,2,\dots,n;\ k\geq n.$$

Наприклад, ймовірність того, що з n деталей, які випадково вибрано з партії обсягом N, m виявляться дефектними, має гіпергеометричний закон розподілу (k – кількість дефектних деталей у партії). Цей закон розподілу застосовується в задачах статистичного контролю якості та в суміжних галузях. Числові характеристики розподілу:

$$MX = \frac{kn}{N},\ DX = \frac{nk(N-k)(N-n)}{N^2(N-1)}.$$

Зі зменшенням відношення $\frac{n}{N}$ гіпергеометричний розподіл наближається до біноміального з параметрами n і $p = \frac{k}{N}$. Дуже часто гіпергеометричний розподіл апроксимується розподілом Пуассона, якщо $a = \frac{nk}{N}$.

5. Рівномірний закон розподілу. Якщо ймовірність потрапляння випадкової величини на інтервал пропорційна до довжини інтервалу і не залежить від розташування інтервалу на осі, то вона має рівномірний закон розподілу. Щільність такого розподілу:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le a; \\ \dfrac{1}{b-a}, & \text{якщо } a < x \le b; \\ 0, & \text{якщо } x > b. \end{cases}$$

Рівномірний закон розподілу легко моделювати. За допомогою функціональних перетворень із величин, розподілених рівномірно, можна діставати величини з довільним законом розподілу. Числові характеристики розподілу:

$$MX = \frac{a+b}{2},\ DX = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

6. Показниковий закон розподілу. Щільність розподілу випадкової величини, розподіленої за показниковим законом, задається формулою:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le 0; \\ ae^{-ax}, & \text{якщо } x > 0. \end{cases}$$

Випадкові величини з таким законом розподілу широко застосовуються в задачах з теорії надійності та теорії масового обслуговування. Числові характеристики:

$$MX = \frac{1}{a},\ DX = \frac{1}{a^2}.$$

7. Нормальний закон розподілу. Нормальний закон розподілу задається щільністю

$$f(x) = \ = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Параметри a і σ, які входять до виразу щільності розподілу, є відповідно математичним сподіванням та середнім квадратичним відхиленням випадкової величини. Нормальний закон розподілу широко застосовується в математичній статистиці. Для обчислення ймовірності потрапляння випадкової величини, розподіленої нормально, на проміжок використовується функція Лапласа:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

$$P(\alpha \le X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right).$$

Часто застосовується також формула:

$$P(|X - a| < \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right).$$

7.1. Приклади розв'язування задач

Приклад 1. У кожному із 100 контейнерів міститься по 8 виробів першого сорту, а решта 2 – браковані. Із кожного контейнера навмання беруть по одному виробу. Визначити M (X), D (X), σ (X) для дискретної випадкової величини X – поява числа виробів першого сорту серед 100 навмання взятих.

Розв'язання. Цілочислова випадкова величина X має біноміальний закон розподілу. Із умови задачі маємо:

$$n = 100,\ p = 0{,}8,\ q = 0{,}2,\ k = 0, 1, 2, 3, ..., 100.$$

Тоді:

$$M(X) = np = 100 \cdot 0{,}8 = 80;$$

$$D(X) = npq = 100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2 = 16;$$

$$\sigma(X) = \sqrt{npq} = \sqrt{16} \approx 4.$$

Приклад 2. У деякому населеному пункті маємо 0,1% дальтоніків. Навмання вибирають 5000 мешканців цього населеного пункту. Визначити M (X), D (X), σ (X) випадкової величини X – числа дальтоніків, яких буде виявлено серед 5000 навмання вибраних мешканців.

Розв'язання. Цілочислова випадкова величина X має пуассонівський закон розподілу. Із умови задачі: $n = 5000$, $p = 0{,}0001$. Дістаємо:

$$M(X) = np = 5000 \cdot 0{,}0001 = 0{,}5;$$

$$D(X) = M(X) = np = 0{,}5;$$

$$\sigma(X) = \sqrt{np} = \sqrt{0{,}5} \approx 0{,}71\ .$$

Приклад 3 Спортсмен стріляє зі спортивної рушниці по одній і тій самій мішені. Імовірність влучити в мішень при одному пострілі є величиною сталою і дорівнює 0,8. Стрільба по мішені ведеться до першого влучення. Визначити M (X), D (X), σ (X) випадкової величини X – числа витрачених спортсменом набоїв.

Розв'язання. Випадкова величина X є цілочисловою, з геометричним законом розподілу ймовірностей. За умовою задачі: p = 0,8; q = 0,2. Маємо:

$$M(X)=\frac{1}{p}=\frac{1}{0{,}8}=\frac{5}{4};\; D(X)=\frac{q}{p^2}=\frac{0{,}2}{0{,}64}=\frac{5}{16};\; \sigma(X)=\sqrt{\frac{5}{16}}=\frac{\sqrt{5}}{4}.$$

Приклад 4. В ящику міститься 10 однотипних деталей, із них 7 стандартних, а решта є бракованими. Навмання із ящика беруть m деталей. Побудувати закони розподілу цілочислової випадкової величини X – появу числа стандартних деталей серед m навмання взятих і обчислити

$M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, якщо: $m = 4$.

Розв'язання. Побудуємо гіпергеометричні закони розподілу: m = 4; n_1 = 7; $n-n_1$ = 3; k = 1, 2, 3, 4.

У табличній формі закон розподілу подається так:

$X=x_k=k$	1	2	3	4
$P_k=P(X=k)=\frac{C_7^kC_3^{4-k}}{C_{10}^4}$	$\frac{C_7^1C_3^3}{C_{10}^4}$	$\frac{C_7^2C_3^2}{C_{10}^4}$	$\frac{C_7^3C_3^1}{C_{10}^4}$	$\frac{C_7^4C_3^{10}}{C_{10}^4}$

Або

k	1	2	3	4
$P_k=\frac{C_7^kC_3^{4-k}}{210}$	$\frac{7}{210}$	$\frac{63}{210}$	$\frac{105}{210}$	$\frac{35}{210}$

$$\sum P_k=\frac{7+63+105+35}{210}=\frac{210}{210}=1.$$

1) $$M(X)=\sum kp_k=1\frac{7}{210}+2\frac{63}{210}+3\frac{105}{210}+4\frac{35}{210}=$$
$$=\frac{7+126+315+140}{210}=\frac{588}{210}=2{,}8;$$

2) $$M(X^2)=\sum k^2p_k=1\frac{7}{210}+4\frac{63}{210}+9\frac{105}{210}+16\frac{35}{210}=$$
$$=\frac{7+252+945+560}{210}=\frac{1764}{210}=8{,}4;$$

3) $\sigma(X)=\sqrt{0{,}56}\approx 0{,}75$.

Приклад 5. У цеху є 5 верстатів. Ймовірність того, що верстат працює, дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що працюватимуть не менш як 3 верстати.

Розв'язання. Ймовірність того, що працює будь-який верстат, дорівнює 0,8. Тому справджується біноміальний закон розподілу:

$$P(X=m)=C_n^m p^m (1-p)^{n-m},\ m=0,1,2,...,n;$$

$$P(X\ge 3)=P(X=3)+P(X=4)+P(X=5).$$

Зазначені ймовірності знайдемо за наведеною щойно формулою.

$$P(X\ge 3)=C_5^3\cdot 0{,}8^3\cdot 0{,}2^2+C_5^4\cdot 0{,}8^4\cdot 0{,}2+0{,}8^5=$$
$$=0{,}2048+0{,}4096+0{,}32768=0{,}94208\ .$$

Приклад 6. Визначити ймовірність потрапляння за контрольні межі не менш ніж 2 деталей із проби з 5 деталей, якщо автомат, із продукції якого беруться проби, обробляє 2 деталі за 1 хв і за зміну у його продукції виявляється 38 деталей, які виходять за контрольні межі. Застосувати для розв’язування задачі закон розподілу Пуассона.

Розв’язання. Застосуємо формулу розподілу Пуассона: $P(X=m)==\frac{(\lambda t)^m}{m!}$, $m=0,1,...$. Знайдемо λ – середню кількість бракованих деталей, які виготовляються за 1 хв. Якщо тривалість зміни 480 хв, то $\lambda=\frac{38}{480}\approx 0{,}08.$ Пробу з 5 деталей виготовляють за $t=\frac{5}{2}=2{,}5$ хв, $\lambda t=0{,}08\cdot 2{,}5=0{,}2.$ Знайдемо шукану ймовірність: $P(X\ge 2)=\sum\limits_{m=2}^{5}\frac{(\lambda t)^m}{m!}=0{,}0175.$ Значення ймовірності знайдемо в таблицях при $\lambda t=0{,}8$ і $m=2.$

Приклад 7. Постачальник поставляє замовникові партії деталей обсягом 10000 шт. кожна. Замовник вважає бажаним бракувати партії, в яких 2 % браку з ймовірністю не менш як 0,98. Постачальник хотів би, щоб при цьому партії з 0,5 % браку приймались би з ймовірністю не менш ніж 0,93. Визначити обсяг вибірки n і кількість бракованих деталей, за якої партія бракується. Скористатися для розв’язування задачі розподілом Пуассона.

Розв’язання. Нехай для контролю відібрано n деталей. Якщо в партії 2 % бракованих деталей, то параметр $a_1=0{,}02n,$ якщо у партії 0,5 % бракованих деталей, то $a_2=0{,}005n.$ При конкретному значенні n маємо деяке значення $a_1.$ Відшукуємо за таблицями значення C, при якому $\sum\limits_{m=c}^{\infty}\frac{a_1^m}{m!}e^{-a_1}\ge 0{,}98.$ Перевіряємо, чи буде при знайденому значенні C партія, в якій 0,5 % бракованих деталей, прийматися з ймовірністю не менш як 0,93. Для цього шукаємо $P(X\ge C)=\sum\limits_{m=c}^{\infty}\frac{a_2{}^m}{m!}$ – ймовірність відхилення партії. Віднявши від одиниці цю ймовірність, дістанемо ймовірність прийняття партії, в якій 0,5 % бракованих деталей. Якщо вона не менш як 0,93, то значення n і C забезпечують виконання умов задачі. Розв’язуючи задачу, бажано, щоб n було якомога меншим. Тому послідовно розглядаємо значення n і вибираємо серед них найменше.

Нехай n = 600, тоді $a_1=12,\ a_2=3.$ Згідно з таблицями при $a_1=12$, C = 6, $P(X\ge 6)=0{,}97966\approx 0{,}98.$ При $a_2=3$ $P(X\ge 6)==0{,}083918,$тобто ймовірність прийняття партії, в якій 0,5 % браку, становить 0,916082, що менше за 0,93. Значення n треба збільшити.

Нехай n = 800, тоді $a_1 = 16,\ a_2 = 4.$ Значення C = 9. В тому разі партія з 0,5 % браку приймається з ймовірністю 0,978637. Отже, значення обсягу вибірки можна зменшити.

Нехай n = 700, тоді $a_1 = 14,\ a_2 = 3{,}5.$ Значення C = 7. В такому разі партія з 0,5 % браку приймається з ймовірністю 0,93471.

Отже, обсяг вибірки n = 700. В такому разі партія відхиляється, якщо серед вибраних деталей буде не менш як 7 бракованих деталей.

Приклад 8. Партія містить 200 виробів, серед яких 25 бракованих. Для перевірки якості з партії відібрали 10 виробів. Якщо при цьому кількість бракованих виробів не перевищує одиниці, то партія приймається. Знайти ймовірність того, що партію буде прийнято. Визначити цю саму ймовірність, якщо апроксимувати гіпергеометричний розподіл біноміальним розподілом і законом розподілу Пуассона.

Розв'язання. Застосуємо формулу гіпергеометричного закону розподілу. Партію буде прийнято, якщо кількість бракованих серед дібраних 10 дорівнюватиме нулю або одиниці.

$$P(X \le 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{C_{175}^{10}}{C_{200}^{10}} + \frac{C_{25}^{1} \cdot C_{175}^{9}}{C_{200}^{10}} \approx 0{,}638.$$

Обчислимо цю саму ймовірність за допомогою формули біноміального закону розподілу, $p = \frac{25}{200} = \frac{1}{8}$:

$$P(X \le 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = \left(\frac{7}{8}\right)^{10} + 10 \cdot \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^{9} \approx 0{,}639.$$

Обчислимо, нарешті, цю саму ймовірність за допомогою закону розподілу Пуассона:

$$a = np = 10 \cdot \frac{1}{8} = 1{,}25. \quad P(X \le 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = e^{-1{,}25} + 1{,}25e^{-1{,}25} \approx 0{,}644.$$

Як бачимо, похибки обчислення в разі апроксимації гіпергеометричного розподілу порівняно невеликі.

Приклад 9. Випадкова величина X розподілена рівномірно. Знайти щільність її розподілу, якщо $P(X \ge 3) = 0{,}4,$ а $MX = 2.$

Розв'язання. Щільність рівномірного розподілу $f(x) = \frac{1}{b-a}.$ Отже, потрібно визначити область зміни випадкової величини. Складаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \int_3^b \frac{1}{b-a}dx = 0{,}4; \\ \int_a^b \frac{x}{b-a}dx = 2. \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{b-3}{b-a} = 0{,}4; \\ \frac{a+b}{2} = 2. \end{cases} \quad \begin{cases} 0{,}6b + 0{,}4a = 3; \\ b = 4 - a. \end{cases} \quad b = 7,\ a = -3.$$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le -3; \\ 0{,}1, & \text{якщо } -3 < x \le 7; \\ 0, & \text{якщо } x > 7. \end{cases}$$

Приклад 10. Випадкова величина розподілена показниково з параметром a. При якому значенні параметра ймовірність потрапляння випадкової величини на відрізок $[\alpha;\beta]$ буде найбільшою?

Розв'язання. Нехай параметр a – неперервна й диференційована величина. Знайдемо ймовірність потрапляння випадкової величини на відрізок і дослідимо здобуту функцію на екстремум:

$$P(\alpha \le X < \beta) = \int_\alpha^\beta ae^{-ax}dx = e^{-a\alpha} - e^{-a\beta};\ P(a) = e^{-a\alpha} - e^{-a\beta};\ P'(a) = -\alpha e^{-a\alpha} +$$

$$+\beta e^{-a\beta};\ -\alpha e^{-a\alpha} + \beta e^{-a\beta} = 0;\ \beta e^{-a\beta} = \alpha e^{-a\alpha};\ \ln\beta - a\beta = \ln\alpha - a\alpha;\ a = \frac{\ln\beta - \ln\alpha}{\beta - \alpha}.$$

Покажемо, що при даному значенні a досягається максимум $P(a)$. Знайдемо другу похідну:

$$P''(a) = \alpha^2 e^{-a\alpha} - \beta^2 e^{-a\beta};$$

$$P''\left(\frac{\ln\beta - \ln\alpha}{\beta - \alpha}\right) = \alpha^2 e^{-\alpha\ln\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta-\alpha}}} - \beta^2 e^{-\beta\ln\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta-\alpha}}} =$$

$$= \alpha^2 e^{\ln\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\alpha}{\beta-\alpha}}} - \beta^2 e^{\ln\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\alpha}{\beta-\alpha}}} = \alpha^2\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\alpha}{\beta-\alpha}} - \beta^2\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\beta-\alpha}} = \alpha\frac{\alpha^{\frac{\beta}{\beta-\alpha}}}{\beta^{\frac{\alpha}{\beta-\alpha}}} - \beta\frac{\alpha^{\frac{\beta}{\beta-\alpha}}}{\beta^{\frac{\alpha}{\beta-\alpha}}} =$$

$= \frac{\alpha^{\frac{\beta}{\beta-\alpha}}}{\beta^{\frac{\alpha}{\beta-\alpha}}}(\alpha - \beta) < 0,$ оскільки $\alpha < \beta.$ Друга похідна у критичній точці від'ємна, тому $P(a)$ в ній досягає максимуму.

Приклад 11. Висунуто гіпотезу про те, що відхилення розміру деталі від номіналу є випадковою нормально розподіленою величиною з $MX = 0$ і $DX = 25$ мкм^2. Чи відповідає заданій гіпотезі те, що в перевірених 6 деталей відхилення належало проміжку $[5;13)$? Рівень значущості α = 0,0005.

Розв'язання. Розглянемо подію A — «відхилення в 6 деталей належить проміжку $[5;13)$». Обчислимо ймовірність цієї події і зіставимо її з рівнем значущості α. Якщо ймовірність буде меншою за α, то результат випробування не відповідатиме висунутій гіпотезі. Ймовірність події A знайдемо за теоремою множення ймовірностей:

$$P(A) = p^6, \text{ де } p = P(5 \le X < 13).$$

Обчислимо цю ймовірність:

$$P(5 \le X < 13) = \Phi\left(\frac{13-0}{5}\right) - \Phi\left(\frac{5-0}{5}\right) = \Phi(2{,}6) - \Phi(1) = 0{,}4953 - 0{,}3413 = 0{,}154.$$

Тоді $P(A) = 0{,}154^6 < 0{,}2^6 = 0{,}000064$. Ймовірність події A менша від рівня значущості. Отже, гіпотеза про закон розподілу не відповідає значенням випадкової величини у випробуваннях.

Приклад 12. Похибка спостереження X при вимірюванні довжини розподілена нормально з $a = 5$ мм і $\sigma = 4$ мм. Знайти ймовірність того, що виміряне значення відхилиться від істинного більш ніж на 10 мм.

Розв'язання. Згідно з умовою потрібно знайти $P(|X| \ge 10)$. Виразимо цю ймовірність через ймовірність протилежної події:

$$P(|X| \ge 10) = 1 - P(|X| < 10) = 1 - P(-10 < X < 10) = 1 - \Phi\left(\frac{10-5}{4}\right) +$$

$$+ \Phi\left(\frac{-10-5}{4}\right) = 1 - \Phi(1{,}25) - \Phi(3{,}75) = 1 - 0{,}3944 - 0{,}4999 = 0{,}1057.$$

8. Закон великих чисел. Центральна гранична теорема

Нерівності Чебишова.

Перша форма: якщо випадкова величина X невід'ємна і $MX < \infty$, то $P(X \ge \varepsilon) \le \frac{MX}{\varepsilon}$.

Друга форма: якщо для випадкової величини існують моменти першого та другого порядку, то $P(|X - MX| < \varepsilon) \ge 1 - \frac{DX}{\varepsilon^2}$.

Послідовність випадкових величин $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ задовольняє закон великих чисел, якщо

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} MX_i\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Теорема Хінчина. Якщо випадкові величини у послідовності випадкових величин $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ незалежні, однаково розподілені і мають скінченне математичне сподівання a, то

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - a\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Теорема Чебишова. Якщо випадкові величини у послідовності випадкових величин $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ незалежні, мають скінченні математичні сподівання і рівномірно обмежені дисперсії $(DX_i \le C,\ i = 1,2,...)$, то до послідовності $X_1, X_2,..., X_n,...$. можна застосувати закон великих чисел.

Теорема Маркова. Нехай випадкові величини в послідовності $X_1, X_2,..., X_n,...$. мають скінченні і як завгодно залежні математичні сподівання. Тоді, якщо $\frac{1}{n^2} D\sum_{i=1}^{n} X_i \to 0,$ при $n \to \infty,$ то для послідовності $X_1, X_2,..., X_n,...$. можна застосувати закон великих чисел.

Теорема Бернуллі. Нехай проводиться n незалежних повторних випробувань, у кожному з яких ймовірність настання події A дорівнює p. Тоді

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1,$$

де m – частота події A у даних випробуваннях.

Центральна гранична теорема. Для послідовності випадкових величин $X_1, X_2,..., X_n,...$. розглянемо:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i;\ DX_i = b_i^2;\ B_n^2 = \sum_{i=1}^{n} b^2;\ S_n^* = \frac{S_n - MS_n}{B_n}.$$

У схемі незалежних повторних випробувань

$$P_n(m_1, m_2) \approx \Phi\left(\frac{m_2 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{m_1 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right),$$

де $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$ Це випливає з того, що частоту події можна подати як суму n випадкових величин – частот настання події в окремих випробуваннях. При достатньо великих значеннях n закон розподілу цієї суми близький до нормального.

Аналогічними міркуваннями для цієї схеми легко дістати формулу:
$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}\right),$ де m – частота події A у n випробуваннях.

8.1. Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Середнє споживання електроенергії протягом травня у місті дорівнює 360 000 кВт. год.

1. Оцінити ймовірність того, що споживання електроенергії у травні поточного року перевищить 1 000 000 кВт. год.

2. Оцінити ту саму ймовірність за умови, що середнє квадратичне відхилення споживання електроенергії за травень дорівнює 40 000 кВт. год.

Розв'язання. 1. Випадкова величина X – споживання електроенергії набуває невід'ємних значень. Математичне сподівання її дорівнює 360 000. Оцінимо ймовірність за допомогою першої форми нерівності Чебишова: $P(X \ge 1\,000\,000) \le \frac{360\,000}{1\,000\,000} = 0{,}36.$

2. Оцінимо цю саму нерівність, якщо відоме середнє квадратичне відхилення *X*. Скористаємося другою формою нерівності Чебишова:

$$P(X \geq 1\,000\,000) = 1 - P(X < 1\,000\,000) = 1 - P(0 < X < 1\,000\,000) = 1 -$$
$$- P(-360\,000 < X < -MX < 640\,000) = 1 - P(|X - MX| < 640\,000) \leq 1 - 1 +$$
$$+ \frac{(40\,000)^2}{(640\,000)^2} = \frac{1}{256}.$$

Отже, якщо існує момент другого порядку, оцінка ймовірності істотно менша.

Приклад 2. Імовірність деякої події визначається методом Монте-Карло. Знайти кількість незалежних випробувань, які забезпечують з ймовірністю не менш як 0,99 обчислення шуканої ймовірності з похибкою, що не перевищує 0,01. Оцінку подати за допомогою нерівності Чебишова і теореми Лапласа.

Розв'язання. Оцінкою для ймовірності є відносна частота $\frac{m}{n}$. Знаходимо її числові характеристики:

$$M\left(\frac{m}{n}\right) = p;\ D\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{p(1-p)}{n}.$$

Для відносної частоти існують моменти другого порядку. Запишемо другу форму нерівності Чебишова для відносної частоти:

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}.$$

Значення ε = 0,01, добуток $p(1 - p)$ оцінимо максимальним числом 0,25. Підставивши ці значення у праву частину нерівності Чебишова, дістанемо:

$$1 - \frac{0{,}25}{n(0{,}01)^2} \geq 0{,}99;\ 0{,}01 \geq \frac{2500}{n};\ n \geq 250\,000.$$

Оцінимо тепер *n* за допомогою теореми Лапласа:

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}\right).\ \ 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}\right) \geq 0{,}99;\ \ \Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}\right) \geq 0{,}495;\ \ \varepsilon\sqrt{\frac{n}{0{,}25}} \geq 2{,}58;$$

$$n \geq \frac{(2{,}58)^2 \cdot 0{,}25}{(0{,}01)^2} = 16641$$

Як бачимо, оцінка за нерівністю Чебишова значно більша, ніж за теоремою Лапласа.

Приклад 3. Дано послідовність незалежних випадкових величин $X_1, X_2, ..., X_n, ...$. Випадкова величина X_k може набувати значень $-\sqrt{k},\ 0,\ \sqrt{k}$ з ймовірностями, що дорівнюють відповідно $\frac{1}{k+1},\ \ 1 - \frac{2}{k+1},\ \frac{1}{k+1}$. Чи можна застосувати до цієї послідовності закон великих чисел?

Розв'язання. Знайдемо числові характеристики для випадкової величини X_k:

$$MX_k = 0;\ DX_k = MX_k^2 = \frac{2k}{k+1}.$$

Дисперсії величин, які утворюють послідовність, обмежені зверху числом 2. Отже, закон великих чисел можна застосувати.

Приклад 4. Дано послідовність незалежних випадкових величин $X_1, X_2, ..., X_n,...$. Математичні сподівання цих величин дорівнюють нулю, а $DX_k = k^{\alpha}$ (α – додатна стала, яка менша від 1). Чи можна застосувати до цієї послідовності закон великих чисел?

Розв'язання. З'ясуємо, яку з теорем можна застосувати до цієї послідовності. Не можна застосувати ні теорему Хінчина, бо величини мають різні закони розподілу, ні теорему Чебишова, бо дисперсії зростають і необмежені зверху $\lim\limits_{k\to\infty} DX_k = \infty$.

Розглянемо умови теореми Маркова.

Знаходимо $D\left(\sum\limits_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum\limits_{k=1}^{n} k^{\alpha}$ і оцінюємо цю суму:

$$\sum_{k=1}^{n} k^{\alpha} < \int_{1}^{n+1} x^{\alpha} dx < \frac{(n+1)^{\alpha+1}}{\alpha+1}.$$

Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \frac{(n+1)^{\alpha+1}}{\alpha+1} = 0,$ то згідно з теоремою Маркова до послідовності можна застосувати закон великих чисел.

9. Задачі для самостійного розв'язування

1. За заданим законом розподілу ймовірностей

x_i	–2	2	4	8	10
p_i	0,1	$2a$	0,3	0,1	3a

обчислити $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$. Знайти Mo.

2. Четверо студентів складають іспит з теорії ймовірностей. Ймовірність того, що перший із них складе іспит, дорівнює 0,9; для другого і третього ця ймовірність дорівнює 0,8, а для четвертого – 0,7. Побудувати закон розподілу величини X – числа студентів, котрі складуть зазначений іспит, і обчислити $M(X)$; $\sigma(X)$; As. Знайти моду.

3. Маємо три ящики. У першому з них міститься 6 стандартних і 4 браковані однотипні деталі, у другому – 8 стандартних і 2 браковані й у третьому – 5 стандартних і 5 бракованих деталей. Із кожного ящика навмання беруть по одній деталі.

Обчислити $M(X)$, $\sigma(X)$, As для дискретної випадкової величини X – появи числа стандартних деталей серед трьох навмання взятих. Знайти Mo.

4. Задано функцію розподілу ймовірностей

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le -8;\\ 0{,}1, & -8<x\le -6;\\ 0{,}3, & -6<x\le -4;\\ 0{,}4, & -4<x\le -2;\\ 0{,}7, & -2<x\le 0;\\ 1, & x>0.\end{cases}$$

Обчислити $M(X)$; $\sigma(X)$. Знайти Mo.

5. Для виготовлення деталей використовуються труби завдовжки 4, 5 і 6 м. При цьому половина труб поставляється завдовжки 6 м, а труб завдовжки 4 і 5 м надходить однакова кількість. Знайти закон розподілу кількості заготівок завдовжки 0,5 м, утворених із навмання взятої труби. Знайти математичне сподівання та дисперсію випадкової величини.

Розв'язати цю задачу для випадку, коли навмання беруться дві труби.

6. Ймовірність того, що деталь, яку виготовив верстат-автомат, належить до 1-го сорту, ставить 0,8. Робітник періодично перевіряє якість кожної виготовленої деталі, але щоразу не більше як чотирьох деталей. Якщо деталь 2-го сорту, то верстат зупиняють для регулювання. Скласти закон розподілу кількості перевірених деталей в одній серії спостережень. Знайти математичне сподівання та дисперсію цієї величини.

7. Вагони з вантажем можуть прибути на станцію протягом доби. Якщо організувати чергування на N розвантажувальних майданчиках способом A, то середня кількість своєчасно розвантажених вагонів становитиме Np. У разі організації чергування способом B буде своєчасно вивантажено $N(1-(1-p)^2)$ вагонів, якщо вони надійдуть у першу половину доби, Np вагонів, якщо вони надійдуть у третю чверть доби, і $0{,}5Np$, якщо вони надійдуть в останню її чверть. При якому значенні p доцільно організувати чергування за схемою B?

8. Визначити ціну лотерейного білета, за якої забезпечується прибуток від лотереї, що дорівнює третині суми, одержаної від реалізації білетів, якщо на кожні 100 з них установлено один виграш у 100 грн, два — по 20 грн і чотири — по 10 грн.

9. Дискретну випадкову величину X задано такою функцією розподілу:

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо } x\le 0;\\ 0{,}3, & \text{якщо } 0<x\le 2;\\ 0{,}4, & \text{якщо } 2<x\le 3;\\ 0{,}7, & \text{якщо } 3<x\le 4;\\ 1, & \text{якщо } x>4.\end{cases}$$

Знайти закон розподілу X у табличній формі.

10. Задано функцію $F(x)=a\sin x+b\cos x+0{,}5$. Довести, що коли $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, то можна знайти a і b, такі, що $F(x)$ – функція розподілу ймовірностей. Знайти ці значення та щільність розподілу $f(x)$.

11. Існує гіпотеза, що випадкова величина X має таку функцію розподілу:

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо } x\le 0;\\ ax^2, & \text{якщо } 0<x\le 3;\\ 1, & \text{якщо } x>3.\end{cases}$$

У результаті чотирьох випробувань випадкова величина набувала значень, більших за 2. Чи відповідає цей результат висуненій гіпотезі, якщо рівень значущості дорівнює 0,005? Гіпотеза приймається, якщо ймовірність події більша за рівень значущості.

12. Випадкова величина X задається функцією розподілу:

$$F(x)=\begin{cases}0, \text{ якщо } x\le 1,\\ a+b\cdot arctgx, \text{ якщо } x>1.\end{cases}$$

Знайти $a,b,$ $P(2\le X<4)$, $f(x)$ і медіану Me.

13. Випадкова величина X задається функцією розподілу:

$$F(x)=\begin{cases}0, \text{ якщо } x<a,\\ bx^2-\dfrac{1}{3}, \text{ якщо } a<x\le 2,\\ 1, \text{ якщо } x>2.\end{cases}$$

Знайти $a,b,$ $P(1{,}2\le X<1{,}5)$, $f(x)$ і медіану Me.

14. Графік щільності розподілу – півколо з центром у початку координат. Знайти аналітичний вираз для $f(x)$, функцію розподілу $F(x)$, математичне сподівання MX та моду розподілу.

15. Графік щільності розподілу – півеліпс, фокуси якого лежать на осі абсцис симетрично щодо початку координат, а мала вісь у 4 рази менша за велику. Знайти аналітичний вираз для $f(x)$, MX та $F(x)$.

16. Графік щільності розподілу – ламана лінія ABC. Знайти аналітичний вираз для $f(x)$ і $F(x)$, якщо кут ABC прямий, точка B лежить на осі ординат, а точки A і C – на осі абсцис симетрично відносно початку координат.

17. Графік щільності розподілу – ламана лінія ABC. Точка $A(-2;\ 0)$, точка C лежить на осі абсцис, ймовірність того, що випадкова величина невід'ємна, утричі більша за ймовірність того, що вона набуває від'ємних значень. Знайти аналітичний вираз для $f(x)$.

18. Випадкова величина X набуває значень на відрізку $[a;2]$, де задано щільність її розподілу $f(x)=Ax^2$. Визначити $a, A, F(x)$ і $D(x)$, якщо $MX=0$.

19. Випадкова величина X набуває значень на відрізку $[a;2]$, $f(x)=\frac{3}{16}x^{n+1}$, $MX=0$. Знайти a і $n(n\in N)$.

20. Випадкова величина X набуває значень на відрізку $[a;b]$, де задано щільність її розподілу $f(x)=\frac{3}{16}(x-c)^2$. Визначити a і b, якщо $f(a)=f(b)$ і $MX=2$.

21. Випадкова величина X набуває значень на відрізку $[1;b]$, де задано щільність її розподілу $f(x)=A\ln x$. Визначити A і b, якщо $MX=\frac{e^2+1}{4}$.

22. Випадкова величина X набуває значень на відрізку $[1;5]$, де $f(x) = AB^x$. Визначити A і B, якщо $MX = \frac{79\ln 2 - 15}{15\ln 2}$.

23. Щільність розподілу $f(x)$ – парна функція. Знайти $F(-1)$, якщо $F(1) = 0{,}8$.

24. Брак при виготовленні деталей становить у середньому 5 %. Знайти ймовірність того, що серед 5 навмання взятих деталей: а) не виявиться жодної бракованої; б) буде дві браковані деталі.

25. На регістр ЕОМ надходить команда щодо округлення числа у більший чи менший бік до найближчого цілого числа. Знайти ймовірність того, що при обробці шести чисел половину буде округлено у більший , а половину – у менший бік.

26. Робітник обслуговує 6 однотипних верстатів. Ймовірність того, що верстат потрібно обслуговувати протягом часу T, дорівнює $\frac{1}{3}$.

Знайти ймовірність того, що за час T:

а) потрібно буде обслуговувати 3 верстати;

б) кількість вимог на обслуговування за час T буде від 2 до 5.

27. В електромережу ввімкнено 4 прилади, потужність кожного з них 660 Вт. Знайти ймовірність того, що мережу буде знеструмлено, якщо напруга в ній 220 В, запобіжник розрахований на 10 А і ймовірності для кожного приладу бути ввімкненим становить 0,5.

28. Ймовірність відказу при випробуванні кожного приладу дорівнює 0,2. Скільки приладів треба випробувати, щоб з ймовірністю не менш як 0,9 дістати не менш як 3 відкази?

29. За один цикл автомат виготовляє 10 деталей. За скільки циклів ймовірність виготовлення принаймні однієї бракованої деталі буде не меншою за 0,8, коли ймовірність того, що довільна деталь бракована, становить 0,01?

30. У процесі роботи ЕОМ час від часу виникають збої. Середня кількість збоїв за добу дорівнює 3. Знайти ймовірності таких подій:

а) за дві доби не буде жодного збою;

б) за тиждень роботи буде не менш як 4 збої.

31. Ймовірність виготовлення бракованого свердла дорівнює 0,02. Свердла пакуються в коробки по 100 штук. Знайти ймовірність того, що в коробці:

а) не буде бракованих свердел;

б) бракованих свердел буде не більш як три.

32. У деякій місцевості на кожні 100 кавунів припадає в середньому один, маса якого не менша за 10 кг. Знайти ймовірність того, що в партії із 400 кавунів буде:

а) 3 кавуни масою не менш як 10 кг;

б) не менш ніж 2 такі кавуни.

33. За певного типу зварювання в металі незалежно одна від одної утворюються тріщини, в середньому по дві на зварне з'єднання. Яка ймовірність того, що у зварному з'єднанні буде не більш як дві тріщини?

34. Партія виробів приймається, якщо дефектні деталі становлять не більш як 2 %. Скільки деталей треба випробувати для того, щоб партію, в якій 3 % дефектних деталей, не було прийнято з ймовірністю $P > 0{,}95$, а партію, в якій 1 % дефектних деталей, було прийнято з ймовірністю не менш як 0,95?

35. Верстат-автомат за нормального налагодження випускає браковану деталь з ймовірністю 0,02. Переналагодження виконується після випуску першої бракованої деталі. Знайти математичне сподівання кількості деталей, виготовлених між двома переналагодженнями.

36. П'ять із шести космічних кораблів виводяться на орбіту без екіпажу. Якщо всі п'ять запусків будуть успішними, то останній корабель буде запущено з екіпажем. За якої ймовірності успішного запуску корабля ймовірність невдалого шостого запуску буде найбільшою? Знайти цю ймовірність.

37. Для контролю партії, що містить 1000 виробів, з неї роблять вибірку обсягом 50. Знайти ймовірність того, що у вибірці не буде бракованих деталей, якщо в цій партії 4 вироби браковані. Зіставити точне значення цієї ймовірності з наближеним, здобутим за формулою Пуассона.

38. Із партії обсягом 500 валів привода взято 50 з метою контролю діаметра. Із попередніх досліджень відомо, що в середньому 2 % валів браковані. Яка ймовірність того, що серед 50 вибраних валів буде не більш як один бракований?

39. Із партії, в якій 25 електронних ламп, вибрано для випробувань на довговічність 5 ламп. Партія приймається, якщо вийде із ладу не більш як одна з випробуваних ламп. Яка ймовірність того, що партію буде прийнято, якщо із 25 ламп 4 дефектні?

40. Час відправлення міжміського автобуса рівномірно розподілений на часовому проміжку від 0.00 до 20.00. Визначити ймовірність того, що пасажир, який прибув на станцію о 16.00, встигне на автобус.

41. Шкала секундоміра має ціну поділки 0,2 с. Яка ймовірність відлічити час за цим секундоміром із похибкою, більшою за 0,04 с, якщо відлік здійснюється з точністю до цілої поділки з округленням у найближчий бік?

42. Випадкова величина X розподілена показниково. Яка з подій більш ймовірна: випадкова величина набула значення, більшого чи меншого за своє математичне сподівання?

43. Час безперервної роботи автоматичного верстата розподіляється за показниковим законом. При якому значенні параметра a з ймовірністю не менше 0,98 буде гарантована неперервна робота верстата протягом 4 годин?

44. Час між двома збоями ЕОМ розподіляється показниково з параметром a. Щоб розв'язати деяку задачу, потрібна безвідмовна робота ЕОМ протягом часу τ. Якщо в цей період буде збій, який виявиться наприкінці розв'язування задачі, то її доведеться розв'язувати заново. Знайти закон розподілу Y — часу, за який задачу буде розв'язано, і його математичне сподівання.

45. Вантажі із залізничної станції вивозять автомобілями за кільцевими маршрутами. Визначити вантажопідйомність автомобіля на маршруті MX, якщо обсяг перевезень розподіляється за показниковим законом, коли $a = 0{,}25$. Яка ймовірність того, що всі вантажі буде вивезено? Як зміниться ця ймовірність, якщо взяти вантажопідйомність автомобіля $q = MX + \sigma(X)$?

46. Технічними умовами передбачено, що довжина заготівки деякої деталі має бути між 24 і 25 см. Якщо довжина деталі розподіляється нормально з

$a = 24{,}6$ см і $\sigma = 0{,}4$ см, то яка частка заготівок матиме довжину, що виходить за межі, задані технічними умовами?

47. Середня витрата води в населеному пункті становить 50 000 л за день. Оцінити ймовірність того, що в цьому населеному пункті протягом одного певного дня витрата води не перевищить 150 000 л.

48. Середнє квадратичне відхилення похибки вимірювання азимуту дорівнює $20'$ (математичне сподівання її дорівнює нулю). Визначити ймовірність того, що похибка середнього арифметичного трьох вимірювань не перевищить одного градуса.

49. Ймовірність настання події *А* в кожному випробуванні $p = \frac{1}{3}$. Яку найменшу кількість випробувань потрібно виконати, щоб з ймовірністю не менш як 0,99 можна було стверджувати, що частота настання події *А* відхилялась за абсолютною величиною від її ймовірності не більш ніж на 0,01?

Для розв'язування скористатися:

а) нерівністю Чебишова;

б) інтегральною теоремою Лапласа.

50. Задано послідовність незалежних випадкових величин $X_1, X_2, ..., X_n$, які набувають значень $-\sqrt{n}$, 0, $\sqrt{n}$ з ймовірностями відповідно $\frac{2}{n}$, $1-\frac{4}{n}$, $\frac{2}{n}$. Чи можна до цієї послідовності застосувати закон великих чисел?

51. Задано послідовність незалежних випадкових величин $X_1, X_2, ..., X_n$, які набувають значень $-n\alpha$, 0, $n\alpha\,(\alpha > 0)$ з ймовірностями відповідно $\frac{1}{2^n}$, $1-\frac{1}{2^{n-1}}$, $\frac{1}{2^n}$. Чи можна до цієї послідовності застосувати закон великих чисел?

52. Випадкова величина – середня арифметична незалежних однаково розподілених випадкових величин: $n = 225$, $\sigma = 15$. Якого максимального відхилення цієї величини від її математичного сподівання можна очікувати з ймовірністю P = 0,9544?

53. Перевіряється партія деталей. З ймовірністю p = 0,01 деталь може мати дефект *А* і незалежно від цього з ймовірністю p = 0,03 – дефект *В*. В яких межах при P = 0,9973 перебуватиме кількість стандартних деталей у партії із 1000 деталей?

54. При виготовленні виливків брак становить 20 %. Скільки потрібно виготовити виливків, щоб з ймовірністю P = 0,95 забезпечити програму випуску виробів, згідно з якою передбачено отримати 50 бездефектних виливків?

55. При складанні статистичного звіту треба було додати 10 000 000 чисел, кожне з яких округлювалося з точністю до 10^{-m}. Вважаючи, що похибки округлення взаємно незалежні і рівномірно розподілені на проміжку $\left(-0{,}5\cdot 10^{-m}; 0{,}5\cdot 10^{-m}\right]$ знайти межі, в яких міститься сумарна похибка (P = 0,9544).

МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

10. Побудова статистичного ряду, полігону частот, гістограми та емпіричної функції розподілу. Обчислення оцінок математичного сподівання та дисперсії

Кількісні ознаки елементів генеральної сукупності можуть бути одновимірними і багатовимірними, дискретними і неперервними.

Коли реалізується вибірка, кількісна ознака, наприклад X, набуває конкретних числових значень ($X = x_i$), які називають ***варіантою***.

Зростаючий числовий ряд варіант називають **варіаційним.**

Кожна варіанта вибірки може бути спостереженою n_i раз ($n_i \geq 1$), число n_i називають ***частотою варіанти x_i***.

При цьому

$$n = \sum_{i=1}^{k} n_i \ ,$$

де k – кількість варіант, що різняться числовим значенням;
n – обсяг вибірки.

Відношення частоти n_i варіанти x_i до обсягу вибірки n називають її ***відносною частотою*** і позначають через W_i, тобто

$$W_i = \frac{n_i}{n} .$$

Для кожної вибірки виконується рівність

$$\sum_{i=1}^{k} W_i = 1 .$$

Якщо досліджується ознака генеральної сукупності X, яка є неперервною, то варіант буде багато. У цьому разі варіаційний ряд – це певна кількість рівних або нерівних частинних інтервалів чи груп варіант зі своїми частотами.

Такі частинні інтервали варіант, які розміщені у зростаючій послідовності, утворюють ***інтервальний варіаційний ряд.***

На практиці для зручності, як правило, розглядають інтервальні варіаційні ряди, у котрих інтервали є рівними між собою.

Дискретний статистичний розподіл вибірки. Перелік варіант варіаційного ряду і відповідних їм частот, або відносних частот, називають **дискретним статистичним розподілом вибірки.**

Дискретний статистичний розподіл вибірки можна подати емпіричною функцією $F^*(x)$.

Емпірична функція $F^*(x)$ та її властивості. Функція аргументу x, що визначає відносну частоту події $X < x$, тобто

$$F^*(x) = W(X < x) = \frac{n_x}{n},$$

називається ***емпіричною***, або ***комулятою***.

Тут n – обсяг вибірки;

n_x – кількість варіант статистичного розподілу вибірки, значення яких менше за фіксовану варіанту x;

$F^*(x)$ – називають ще *функцією нагромадження відносних частот*.

Властивості $F^*(x)$:

1) $0 \le F^*(x) \le 1$;

2) $F(x_{\min}) = 0$, де $x_{\min}$ є найменшою варіантою варіаційного ряду;

3) $F(x)\big|_{x > x_{\max}} = 1$, де $x_{\max}$ є найбільшою варіантою варіаційного ряду;

4) $F(x)$ є неспадною функцією аргументу x, а саме: $F(x_2) \ge F(x_1)$ при $x_2 \ge x_1$.

Полігон частот і відносних частот. Дискретний статистичний розподіл вибірки можна зобразити графічно у вигляді ламаної лінії, відрізки якої сполучають координати точок $(x_i; n_i)$, або $(x_i; W_i)$.

У першому випадку ламану лінію називають *полігоном частот*, у другому – *полігоном відносних частот*.

Числові характеристики:

1) ***вибіркова середня величина*** $\bar{x}_В$. Величину, яка визначається формулою

$$\bar{x}_В = \frac{\sum x_i n_i}{n},$$

називають *вибірковою середньою величиною дискретного статистичного розподілу вибірки*.

Тут x_i – варіанта варіаційного ряду вибірки;

n_i – частота цієї варіанти;

n – обсяг вибірки ($n = \sum n_i$).

Якщо всі варіанти з'являються у вибірці лише по одному разу, тобто $n_i = 1$, то

$$\bar{x}_В = \frac{\sum x_i}{n};$$

2) ***відхилення варіант***. Різницю $(x_i - \bar{x}_В)n_i$ називають відхиленням варіант.

При цьому

$$\sum (x_i - \bar{x}_В) n_i = \sum x_i n_i - \sum \bar{x}_В n_i = n \cdot \bar{x}_В - n \cdot \bar{x}_В = 0.$$

Отже, сума відхилень усіх варіант варіаційного ряду вибірки завжди дорівнює нулеві;

3) ***Мода*** (Mo*). ***Модою дискретного статистичного розподілу вибірки*** називають варіанту, що має найбільшу частоту появи.

Мод може бути кілька. Коли дискретний статистичний розподіл має одну моду, то він називається *одномодальним*, коли має дві моди – *двомодальним* і т. д.;

4) ***Медіана*** (Me*). ***Медіаною дискретного статистичного розподілу вибірки*** називають варіанту, яка поділяє варіаційний ряд на дві частини, рівні за кількістю варіант;

5) ***Дисперсія***. Для вимірювання розсіювання варіант вибірки відносно $\bar{x}_в$ вибирається дисперсія.

Дисперсія вибірки – це середнє арифметичне квадратів відхилень варіант відносно $\bar{x}_в$, яке обчислюється за формулою

$$D_в = \frac{\sum (x_i - \bar{x}_в)^2 n_i}{n}$$

або

$$D_в = \frac{\sum x_i^2 n_i}{n} - (\bar{x}_в)^2;$$

6) ***Середнє квадратичне відхилення вибірки*** $\sigma_В$. При обчисленні $D_В$ відхилення підноситься до квадрата, а отже, змінюється одиниця виміру ознаки X, тому на основі дисперсії вводиться середнє квадратичне відхилення

$$\sigma_в = \sqrt{D_в},$$

яке вимірює розсіювання варіант вибірки відносно $\bar{x}_в$, але в тих самих одиницях, в яких вимірюється ознака X;

7) ***Розмах*** (R). Для грубого оцінювання розсіювання варіант відносно $\bar{x}_в$ застосовується величина, яка дорівнює різниці між найбільшою x_{max} і найменшою x_{min} варіантами варіаційного ряду. Ця величина називається ***розмахом***

$$R = x_{max} - x_{min};$$

8) ***коефіцієнт варіації V***. Для порівняння оцінок варіацій статистичних рядів із різними значеннями $\bar{x}_в$, які не дорівнюють нулеві, вводиться коефіцієнт варіації, який обчислюється за формулою

$$V = \frac{\sigma_в}{\bar{x}_в} 100\,\%.$$

10.1. Приклади розв'язування задач

Приклад 1. За заданим дискретним статистичним розподілом вибірки

$X = x_i$	–6	–4	–2	2	4	6
n_i	5	10	15	20	40	10
W_i	0,05	0,1	0,15	0,2	0,4	0,1

потрібно:

1. Побудувати $F^*(x)$ і зобразити її графічно;
2. Накреслити полігони частот і відносних частот.

Розв'язання. Згідно з означенням та властивостями $F^*(x)$ має такий вигляд:

$$F^*(x) = W(X < x) = \frac{n_x}{n} = \begin{cases} 0 & x \le -6, \\ 0{,}05 & -6 < x \le -4, \\ 0{,}15 & -4 < x \le -2, \\ 0{,}3 & -2 < x \le 2, \\ 0{,}5 & 2 < x \le 4, \\ 0{,}9 & 4 < x \le 6, \\ 1, & x > 6. \end{cases}$$

Графічне зображення $F^*(x)$ подано на рис. 13

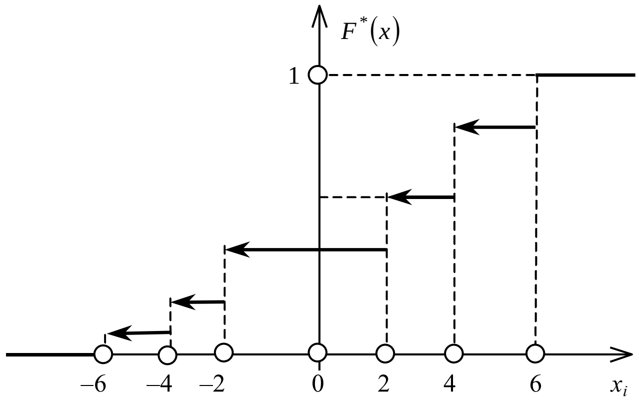

Рис. 13

Полігони частот та відносних частот зображено на рис.14, 15.

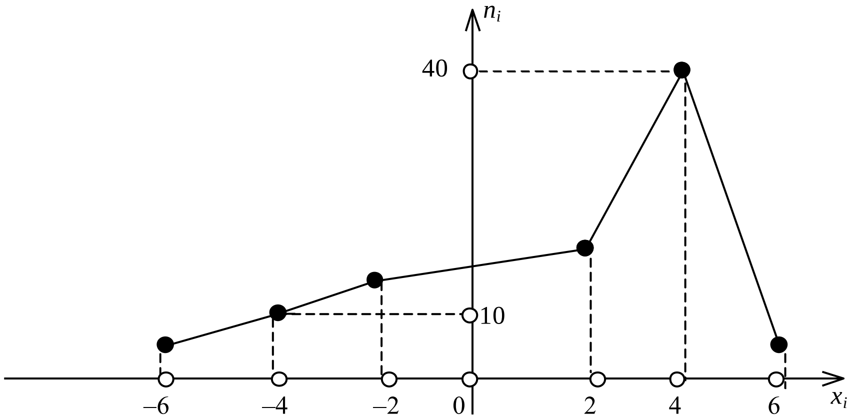

Рис. 14

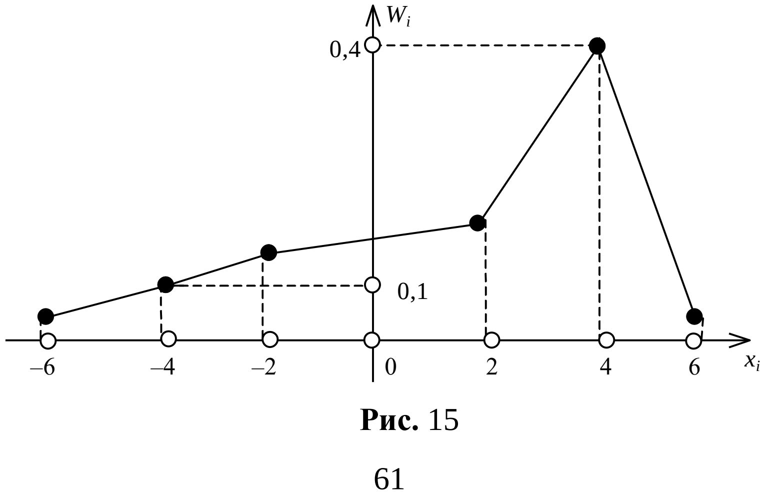

Рис. 15

Приклад 2. За заданим статистичним розподілом вибірки

$X = x_i$	2,5	4,5	6,5	8,5	10,5
n_i	10	20	30	30	10

потрібно:

1) обчислити $\bar{x}_В$, $D_В$, $\sigma_В$;
2) знайти Mo*, Me*;
3) обчислити R, V.

Розв'язання. Оскільки $n = \sum n_i = 100$, дістанемо:

$$\bar{x}_В = \frac{\sum x_i n_i}{n} = \frac{2{,}5\cdot 10 + 4{,}5\cdot 20 + 6{,}5\cdot 30 + 8{,}5\cdot 30 + 10{,}5\cdot 10}{100} = 6{,}7;$$

$$\bar{x}_В = 6{,}7\,.$$

Для обчислення $D_В$ визначається

$$\frac{\sum x_i^2 n_i}{n} = \frac{(2{,}5)^2\cdot 10 + (4{,}5)^2\cdot 20 + (6{,}5)^2\cdot 30 + (8{,}5)^2\cdot 30 + (10{,}5)^2\cdot 10}{100} = 50{,}05.$$

Тоді

$$D_В = \frac{\sum x_i^2 n_i}{n} - (\bar{x}_В)^2 = 50{,}05 - (6{,}7)^2 = 50{,}05 - 44{,}89 = 5{,}16\,.$$

$$D_В = 5{,}16.$$

$$\sigma_В = \sqrt{D_В} = \sqrt{5{,}16} \approx 2{,}27.$$

$$\sigma_В = 2{,}27.$$

$$\text{Mo}^* = 6{,}5;\ 8{,}5.$$

Отже, наведений статистичний розподіл вибірки буде двомодальним. Me* = 6,5, оскільки варіанта x = 6,5 поділяє варіаційний ряд 2,5; 4,5; **6,5**; 8,5; 10,5 на дві частини: 2,5; 4,5 і 8,5; 10,5, які мають однакову кількість варіант.

$$R = x_{\max} - x_{\min} = 10{,}5 - 2{,}5 = 8.$$

$$V = \frac{\sigma_В}{\bar{x}_В}100\,\% = \frac{2{,}27}{6{,}7}100\,\% = 33{,}88\,\%.$$

Приклад 3. У цеху встановлено 5 верстатів. Протягом 25 днів реєструвалась кількість верстатів, які не працювали. Здобуто такі значення: 0, 1, 2, 1, 1, 2, 3, 2, 1, 4, 2, 0, 0, 2, 2, 3, 3, 1, 0, 1, 2, 1, 3, 5, 0. Побудувати статистичну функцію розподілу. Знайти $\max\limits_x \left|F(x) - F_n^*(x)\right|$, вважаючи, що виконується біноміальний закон розподілу з $p = \frac{1}{3}$. Обчислити $\bar{x}$ і s^2. Порівняти знайдені значення з MX і DX згідно з гіпотезою про закон розподілу, а також знайти Mo*, Me*, R.

Розв'язання. На підставі вибіркових даних складемо статистичний ряд:

x_i	0	1	2	3	4	5
Частоти	5	7	7	4	1	1

Запишемо статистичну функцію розподілу, скориставшись формулою $F_n^*(x)=\sum\limits_{x_i<x}\frac{n(x_i)}{n}$.

$$F_n^*(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо } x\le 0;\\ \frac{1}{5}, & \text{якщо } 0<x\le 1;\\ \frac{12}{25}, & \text{якщо } 1<x\le 2;\\ \frac{19}{25}, & \text{якщо } 2<x\le 3;\\ \frac{23}{25}, & \text{якщо } 3<x\le 4;\\ \frac{24}{25}, & \text{якщо } 4<x\le 5;\\ 1, & \text{якщо } x>5.\end{cases}$$

Щоб визначити, $\max\limits_x\left|F(x)-F_n^*(x)\right|$ знайдемо функцію розподілу за біноміальним законом з $n=5$ і $p=\frac{1}{3}$.

Обчислимо ймовірності: $P(X=m)=C_n^m p^m(1-p)^{n-m}$;

$P(X=0)=\frac{32}{243}$; $P(X=1)=\frac{80}{243}$; $P(X=2)=\frac{80}{243}$; $P(X=3)=\frac{40}{243}$; $P(X=4)=\frac{10}{243}$; $P(X=5)=\frac{1}{243}$.

Запишемо теоретичну функцію розподілу згідно з формулою $F(x)=\sum\limits_{x_i<x}p(x_i)$:

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо } x\le 0;\\ \frac{32}{243}, & \text{якщо } 0<x\le 1;\\ \frac{112}{243}, & \text{якщо } 1<x\le 2;\\ \frac{192}{243}, & \text{якщо } 2<x\le 3;\\ \frac{232}{243}, & \text{якщо } 3<x\le 4;\\ \frac{242}{243}, & \text{якщо } 4<x\le 5;\\ 1, & \text{якщо } x>5.\end{cases}$$

Визначимо модуль максимальної різниці значень теоретичної та статистичної функцій розподілу:

$$\max_x \left|F(x)-F_n^*(x)\right| = \max\left|0-0;\frac{32}{243}-\frac{1}{5};\frac{112}{243}-\frac{12}{25};\frac{192}{243}-\frac{19}{25};\frac{232}{243}-\frac{23}{25};\frac{242}{243}-\frac{24}{25};1-1\right| = \frac{83}{1215}.$$

Знайдемо числові характеристики вибіркової сукупності.

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i n_i = \frac{1}{25}(7+14+12+4+5) = 1,68.$$

Дисперсію визначимо за формулою $s^2 = \bar{x}^2 - (\bar{x})^2$. Знайдемо середнє значення квадрата x:

$$\bar{x}^2 = \frac{1}{25}(7+28+36+16+25) = 4,48.$$

Отже, $s^2 = 4,48 - (1,68)^2 = 1,6576.$

Згідно з гіпотезою про закон розподілу теоретичні числові характеристики $MX \approx 1,67;\ DX \approx 1,11$. Бачимо, що значення математичного сподівання і вибіркового середнього різняться мало, тоді як між теоретичною і вибірковою дисперсією різниця значна.

Вибірковий розподіл має два значення з найбільшою частотою, розподіл двомодальний, медіана розподілу Me^* =2. Розмах варіації R = 5 – 0 = 5.

11. Обчислення інтервальних статистичних оцінок. Точність і надійність визначення довірчого інтервалу. Перевірка статистичних гіпотез щодо нормального закону розподілу. Критерій узгодженості Пірсона

Статистичною називається гіпотеза, яка стосується виду або параметрів розподілу випадкової величини і яку можна перевірити на підставі результатів спостереження у випадковій вибірці. Перевіряючи статистичні гіпотези за результатами випадкової вибірки, завжди ризикують прийняти хибне рішення. Помилки, яких можна припуститися, бувають двох родів. ***Помилка першого роду*** полягає в тому, що гіпотеза перевірювана H_0 відхиляється, тоді як вона правильна. ***Помилка другого роду*** полягає у тому, що гіпотеза H_0 приймається, тоді як вона хибна, а правильною є деяка гіпотеза H_1. Ця гіпотеза, яка протиставляється гіпотезі H_0, називається ***альтернативною***. При цьому, хоча множина альтернативних гіпотез може бути нескінченною, висувається тільки одна альтернативна гіпотеза H_1. Статистичні гіпотези поділяються на прості і складні. ***Проста гіпотеза*** однозначно визначає закон розподілу випадкової величини. Для побудови статистичного критерію, який дає змогу перевірити деяку гіпотезу H_0, необхідно вибрати ***статистичну характеристику*** гіпотези Q – деяку вибіркову функцію, визначити допустиму ймовірність помилки першого роду α (рівень значущості), сформулювати альтернативну гіпотезу H_1, знайти критичну область G для статистичної характеристики, щоб мінімізувати ймовірність помилки другого роду. Критична область G – це така множина значень *Q*, що коли $Q \in G,$ то гіпотеза H_0 відхиляється на користь гіпотези H_1. Критична область визначається так, щоб імовірність потрапляння в неї статистичної характеристики за умови, що правильна гіпотеза H_0, дорівнювала α – заданому рівню значущості, тобто $P(Q \in G/H_0) = \alpha.$ Крім того, необхідно, щоб $P(Q \in G/H_1)$ була максимальною, тобто ймовірність помилки другого роду має бути мінімальною. Останнє співвідношення називається ***вимогою максимізації потужності критерію***, який виражає ймовірність того, що не буде допущено помилки другого роду.

Перевірка гіпотези про математичне сподівання нормально розподіленої сукупності.

Якщо дисперсія сукупності відома і дорівнює σ^2, то при H_0: $a = a_{0.}$ і H_1: $a = a_1$ за статистичну характеристику береться вибіркова функція $Z = \frac{\overline{X} - a_0}{\sigma}\sqrt{n}.$ Критична область визначається залежно від значення a_1 і відповідно до рівня значущості α. Можливі три випадки.

1. Якщо $a_1 > a_0,$ то критична область правостороння. Її межа z_α визначається за умовою: $P(Z \geq z_\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{z_\alpha}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \; = 0{,}5 - \Phi(z_\alpha) = \alpha$. Тоді $z_\alpha = \Phi^{-1}(0{,}5 - \alpha).$
2. Якщо $a_1 < a_0$, то критична область лівостороння, $z_\alpha = \; = -\Phi^{-1}(0{,}5 - \alpha).$
3. Якщо $a_1 \neq a_0,$ то критичній області належать значення $z \geq z_{\frac{\alpha}{2}}$ і $z \leq -z_{\frac{\alpha}{2}}$. При цьому $z_{\frac{\alpha}{2}} = \Phi^{-1}\left(0{,}5 - \frac{\alpha}{2}\right).$

Коли дисперсія сукупності невідома, то для перевірки гіпотези використовується вибіркова функція $Z = \frac{\overline{X} - a_0}{s}\sqrt{n-1},$ розподілена за законом Стьюдента з *n* – 1 ступенями волі. Вигляд критичної області визначають так само, як і в попередніх випадках, а межу знаходять за допомогою таблиць розподілу Стьюдента з відповідною кількістю ступенів волі. Якщо *n* > 20, то розподіл Стьюдента апроксимується нормальним розподілом з нульовим математичним сподіванням і одиничною дисперсією.

Перевірка гіпотези про дисперсію нормально розподіленої сукупності.

Коли рівень значущості дорівнює α, перевіримо гіпотезу H_0: $\sigma^2 = \sigma_0^2$ за альтернативної гіпотези H_1: $\sigma^2 = \sigma_1^2.$ Якщо справджується гіпотеза, яка перевіряється, то вибіркова функція $U = \frac{nS^2}{\sigma_0^2}$ має розподіл χ^2 з *n* – 1 ступенями волі. Як і в попередніх випадках, вигляд критичної області визначається значенням $\sigma_1^2.$ Межі критичної області визначаються так:

1) якщо $\sigma_1^2 > \sigma_0^2,$ то критична область *G* правостороння, $U_\alpha = \chi^2(\alpha);$
2) якщо $\sigma_1^2 < \sigma_0^2,$ то критична область *G* лівостороння, $U_\alpha = \chi^2(1 - \alpha);$

3) якщо $\sigma_1^2 = \sigma_0^2$, то критична область двостороння. Їй належать значення $U \le u_1$ і $U \ge u_2$, де $u_1 = \chi^2\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$, а $u_2 = \chi^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.

Перевірка гіпотези про рівність дисперсій двох нормально розподілених сукупностей.

Нехай задано дві нормально розподілені сукупності. На підставі вибірок обсягом n_1 і n_2 із цих сукупностей потрібно перевірити гіпотезу H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ за альтернативної гіпотези H_1: $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$. Статистичною характеристикою для перевірки гіпотези H_0 буде вибіркова функція $F = \dfrac{\frac{n_1}{n_1-1}s_1^2}{\frac{n_2}{n_2-1}s_2^2}$. При побудові відношення чисельник має бути не меншим від знаменника. Якщо гіпотеза H_0 правильна, то вибіркова функція F має розподіл Фішера з n_1-1 і n_2-1 ступенями волі. Критична область G правостороння і визначається умовою $P(F \ge f_\alpha) = \alpha$.

Критерій χ^2 Пірсона

Критерій ґрунтується на порівнянні теоретичних і емпіричних частот. Нехай область реалізацій випадкової величини розбито на k інтервалів, частоти яких дорівнюють n_i, $\sum_{i=1}^{k} n_i = n.$ Якщо гіпотеза про закон розподілу в сукупності правильна, то можна обчислити ймовірності $p_i = P(x_{i-1} \le X < x_i)$, тобто ймовірність потрапляння випадкової величини на i-й інтервал. Теоретичні частоти потрапляння на цей інтервал можна розглядати як математичне сподівання компонентів випадкової величини, розподіленої за поліноміальним законом:

$$P(X_1 = m_1; X_2 = m_2; ...; X_k = m_k) =$$
$$= \frac{n!}{\prod_{i=1}^{k}(m_i)!} p_i^{m_1} p_2^{m_2} ... p_k^{m_k}; \quad MX_i = n_i' = np_i, \ i = 1,2,...,k.$$

Статистичною характеристикою гіпотези є вибіркова функція $U = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i' - n_i)^2}{n_i'}$. Якщо $n \to \infty$, то вибіркова функція має розподіл χ^2 з $k-r-1$ ступенями волі, де r – кількість параметрів, оцінки для яких знайдено за вибірковими даними. Критична область для статистичної характеристики правостороння.

11.1. Приклади розв’язування задач

Приклад 1. Під час перевірки діаметрів 17 установочних кілець було здобуто такі числові характеристики: $\bar{x} = 12{,}075$ мм і $s^2 = 0{,}065$ мм^2. Вважаючи, що розмір, який контролюється, має нормальний закон розподілу, перевірити гіпотезу $H_0{:}\,a=12$ мм при H_1: $a\neq 12$ мм, якщо $\alpha=0{,}05$.

Розв'язання. Статистичною характеристикою гіпотези є вибіркова функція $Z=\frac{\overline{X}-a_0}{S}\sqrt{n-1}$, яка розподілена за законом Стьюдента з $n-1$ ступенями волі. Згідно з виглядом альтернативної гіпотези, критична область двостороння (рис. 14).

Межа критичної області $z_{\frac{\alpha}{2}}=F^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)=F^{-1}(1-0{,}025)= =F^{-1}(0{,}975)=2{,}12.$

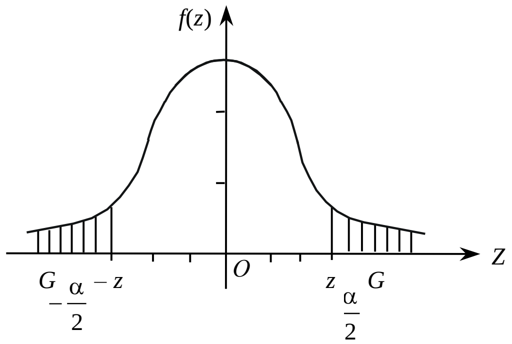

Рис. 14

Межу відшукували за таблицями функції розподілу Стьюдента при 16 ступенях волі. Обчислимо реалізацію вибіркової функції: $z=\frac{12{,}075-12}{\sqrt{0{,}065}}\sqrt{16}\approx 1{,}177.$ Реалізація вибіркової функції не належить до критичної області, і гіпотеза H_0 приймається.

Приклад 2. Із нормально розподіленої сукупності зроблено вибірку обсягом n = 15. За рівня значущості $\alpha=0{,}02$ перевірити гіпотезу $H_0{:}\ \sigma^2=12$ при альтернативній гіпотезі $H_1{:}\ \sigma^2=10,$ якщо $s^2=11.$

Розв'язання. Статистичною характеристикою гіпотези є вибіркова функція $U=\frac{nS^2}{\sigma_0^2},$ розподілена за законом χ^2 з $n-1$ ступенями волі. Критична область лівостороння, бо $\sigma_1^2<\sigma_0^2$ (рис. 15).

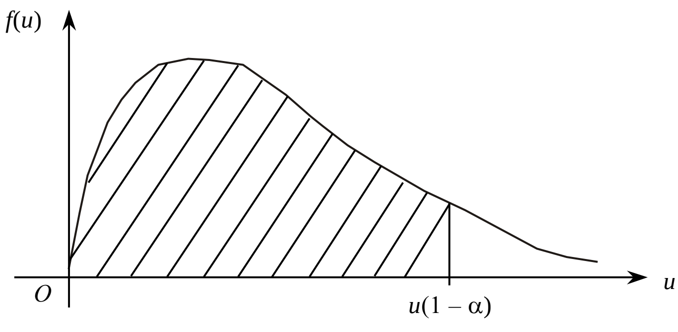

Рис. 15

Межу критичної області знаходимо за таблицями розподілу χ^2: $u_\alpha = \chi^2(1-\alpha) = \chi^2(0{,}98)$ при 14 ступенях волі. $u_{0,02} = 15{,}4.$ Реалізація вибіркової функції $u = \frac{15 \cdot 11}{12} = 13{,}75.$

Значення функції належить критичній області, отже, гіпотеза H_0 відхиляється на користь альтернативної гіпотези H_1.

Приклад 3. При відрахунках на шкалах вимірювальних приладів цифри показів звичайно оцінюють лише наближено у частках шкали. За рівня значущості $\alpha = 0{,}05$ потрібно перевірити гіпотезу про рівномірний закон розподілу, скориставшись наведеними в таблиці даними.

Цифра показу	Частота, n_i	Теоретична частота, n_i'	Відхилення, $n_i - n_i'$	$\frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}$
0	35	20	15	11,25
1	16	20	–4	0,8
2	15	20	–5	1,25
3	17	20	–3	0,45
4	17	20	–3	0,45
5	19	20	–1	0,05
6	11	20	–9	4,05
7	16	20	–4	0,8
8	30	20	10	5
9	24	20	4	0,8
Сума	200	200	–	24,9

Розв'язання. Застосуємо критерій χ^2 Пірсона. Для обчислення значення статистичної характеристики гіпотези, яка перевіряється, у таблиці записані теоретичні частоти $n_i' = n \cdot p_i$. При цьому вважалось, що довільна цифра має однакову ймовірність $p_i = 0{,}1$, тому усі значення теоретичних частот $n_i' = 200 \cdot 0{,}1 = 20.$ У останньому стовпці таблиці знайдено суму, яка дорівнює значенню вибіркової функції $U = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}.$ За таблицями розподілу χ^2 з 9 ступенями волі $u_\alpha = 16{,}9.$ Критична область правостороння, і фактичне значення вибіркової функції належить їй. Тому гіпотеза рівномірності розподілу відхиляється, що свідчить про систематичні помилки при знятті показань.

12. Задачі для самостійного розв'язування

1. З метою маркетингового дослідження в одному з відділів магазину щодня фіксувались продажі товару А. За 25 робочих днів отримано дані (в шт.):

3, 1, 3, 3, 4, 3, 5, 4, 3, 3, 3, 1, 4, 3, 5, 3, 1, 4, 4, 3, 5, 1, 3, 4, 5.

Потрібно: а) записати варіаційний та статистичний ряди для даної вибірки; б) знайти емпіричну функцію розподілу і побудувати її графік; в) побудувати полігон відносних частот.

2. З метою дослідження впливу телевізійної реклами певного товару було опитано 100 осіб віком від 10 до 40 років. Виявилось, що з товаром ознайомлені:

Вікова категорія	(10,15)	(15,20)	(20,25)	(25,30)	(30,35)	(35,40)
Кількість осіб	12	25	30	18	10	5

Потрібно побудувати: а) гістограму частот; б) гістограму відносних частот за даним розподілом вибірки.

3. У відділі технічного контролю зафіксували позитивні відхилення x_i (в мкм) від номінального розміру деталі серед $n = 20$ штук бракованих:

x_i	2	3	4	5	6
n_i	2	4	9	3	2

Потрібно знайти: а) вибіркову середню $\overline{x}_B$; б) вибіркову дисперсію D_B;

в) вибіркове середнє квадратичне відхилення σ_B; г) виправлену вибіркову дисперсію S^2 за даним розподілом вибірки.

4. Дано статистичний розподіл вибірки (за результатами вимірювань).

x_i	12,4	13,4	14,4	15,4	16,4	17,4	18,4
n_i	4	6	10	40	17	15	8

Потрібно, використовуючи умовні варіанти, обчислити: а) вибіркову середню $\overline{x}_B$; б) вибіркову дисперсію D_B; в) вибіркове середнє квадратичне відхилення σ_B.

5. Знайти довірчий інтервал для оцінки з надійністю γ невідомого математичного сподівання a нормально розподіленої ознаки X генеральної сукупності, якщо відомі генеральне середнє квадратичне відхилення σ, вибіркова середня $\overline{x}_B$ і об'єм вибірки n:

γ =0,99; σ =4; $\overline{x}_B$ =13,6; n =144.

6. Знайти довірчий інтервал для оцінки з надійністю γ невідомого математичного сподівання a нормально розподіленої ознаки X генеральної сукупності, якщо відомі виправлене середнє квадратичне відхилення S, вибіркова середня $\overline{x}_B$ і об'єм вибірки n:

γ =0,95; S =4; $\bar{x}_B$ =74,2; n =25.

7. Залежність між змінними величинами, одержана на основі експерименту, виражається такою таблицею:

x_i	1	2	3	4	5
y_i	3,1	2,6	3,4	2,5	0,9

Потрібно: а) знайти вибіркове рівняння прямої лінії регресії Y на X за даними n=5 спостережень; б) зробити рисунок, на якому побудувати експериментальні точки і пряму лінію регресії.

10. Кількість деталей, потрібних для ремонту обладнання на тиждень, визначалася на підставі спостережень, здійснюваних протягом 20 тижнів. У результаті було здобуто такі значення: 0, 1, 1, 1, 0, 0, 2, 3, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 4, 0, 5, 2, 3. Побудувати статистичну функцію розподілу і знайти $\max\limits_x \left|F(x) - F_n^*(x)\right|$, вважаючи, що кількість використовуваних деталей має розподіл Пуассона з $a = 1$. Обчислити $\bar{x}$ і s^2 за вибірковими даними і зіставити їх зі значеннями MX і DX, згідно з висунутою гіпотезою про закон розподілу у сукупності.

11. Для оцінювання ймовірності настання події було проведено 10 серій послідовних випробувань до першого успішного випробування. У результаті здобуто такі значення: 4, 3, 5, 3, 4, 4, 3, 5, 3, 4. Побудувати статистичну функцію розподілу і знайти $\max\limits_x \left|F(x) - F_n^*(x)\right|$, вважаючи, що справджується геометричний розподіл з р = 0,25. Знайти $\bar{x}$ і s^2, а також MX і DX для відповідного геометричного розподілу.

12. У вимірювальному приладі установлено 5 однотипних опорів. Під час експлуатації 15 приладів протягом року кількість опорів, які довелося замінити, була такою: 1, 3, 2, 0, 4, 1, 5, 5, 5, 4, 3, 4, 2, 1, 2. Побудувати статистичну функцію розподілу. Знайти $\max\limits_x \left|F(x) - F_n^*(x)\right|$, вважаючи, що кількість замінених опорів має розподіл Пуассона з $a = 3$. Знайти вибіркові середню величину та дисперсію і зіставити їхні значення з числовими характеристиками відповідного розподілу Пуассона.

13. Для контроля якості продукції, що належить певній сукупності, було зроблено серію вибірок обсягом n = 20. У результаті 10 серій дістали такі значення кількості бракованих деталей: 1, 3, 2, 1, 4, 3, 1, 1, 2, 1. Побудувати статистичну функцію розподілу і знайти $\max\limits_x \left|F(x) - F_n^*(x)\right|$, наблизивши гіпергеометричний розподіл розподілом Пуассона з $a = 2$. Знайти $\bar{x}$ і s^2, зіставивши їхні значення зі значенням a.

14. Вибірка 50 електроламп заводу А показала середню тривалість горіння $\bar{x}_1 = 1282$ год із середнім квадратичним відхиленням $s_1 = 80$ год, а така сама вибірка того самого типу ламп заводу B – $\bar{x}_2 = 1208$ год, $s_2 = 94$ год. Перевірити гіпотезу про те, що строк служби ламп з обох заводів однаковий, якщо рівень значущості α = 0,02.

ОСНОВНА ЛІТЕРАТУРА

1. Іванюта І. Д., Рибалка В. І., Рудоміно-Дусятська І. А. Елементи теорії ймовірностей та математичної статистики. Навчальний посібник. – Київ: «Слово», 2006. –272 с.
2. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебное пособие для вузов. – Москва: Высшая школа, 2003. – 480 с.
3. Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: Учебное пособие для вузов. – Москва: Высшая школа, 2004. – 404 с.
4. Барковський В. В., Барковська Н. В., Лопатін О. К. Теорія ймовірностей та математична статистика: Навчальний посібник. – Київ: НАУ, 2006. – 424 с.
5. Жлуктенко В. І., Наконечний С. І. Теорія ймовірностей і математична статистика: Навчально-методичний посібник у 2-х ч., Ч. 1 – Київ: КНЕУ. – 2000. – 304 с.
6. Жлуктенко В. І., Наконечний С. І., Савіна С. С. Теорія ймовірностей і математична статистика: Навчально-методичний посібник у 2-х ч., Ч. 2 – Київ: КНЕУ. – 2001. –336 с.
7. Грищенко В. О. Теорія ймовірностей та математична статистика для економістів: Навчальний посібник. – Київ: КДТЕУ, 2000. – 170 с.
8. Рудоміно-Дусятська І. А. Теорія ймовірностей та математична статистика. Збірник завдань. – Київ: Університет економіки та права «КРОК», 2003. – 54 с.
9. Бобик О. В. Теорія ймовірностей і математична статистика: Підручник / О. І. Бобик, Г. І. Берегова, Б. І. Копитко. – К.: ВД «Професіонал», 2007. – 560 с
10. Валєєв К. Г. Збірник задач з теорії ймовірностей та математичної статистики: Навчальний посібник / К. Г. Валєєв, І. А. Джалладова. – К.: КНЕУ, 2008. – 352 с.
11. Васильченко І. П. Вища математика для економістів (спеціальні розділи): Підручник. – Київ: Кондор, 2004. – 352 с.

12. Каніовська І. Ю. Теорія ймовірностей у прикладах і задачах: Навчальний посібник. – Київ: ІВЦ «Видавництво «Політехніка»», 2004. – 156 с.
13. Донченко В. С. Теорія ймовірностей та математична статистика: Навчальний посібник / В. С. Донченко, М. В.-С. Сидоров, М. М. Шарапов. – К.: Видавничий дім «Академія», 2009. – 286 с. – (АЛЬМА-МАТЕР).
14. Кармелюк Г. І. Теорія ймовірності та математична статистика. Посібник з розв'язування задач: Навчальний посібник / Г. І. Кармелюк. – К.: Центр учбової літератури, 2007. – 576 с.
15. Турчин В. М. Теорія ймовірностей: Основні поняття, приклади, задачі: Навчальний посібник. – Київ: А.С.К., 2004. – 476 с.

ДОДАТКОВА ЛІТЕРАТУРА

16. Лавренчук В. П. Вища математика: курс лекцій: у 3 ч. Ч. 2. Теорія ймовірностей та математична статистика / В. П. Лавренчук, Т. І. Готинчан, О. С. Кондур, В. С. Дронь. – Івано-Франківськь, 2011. – 263 с.
17. Анісімов В.В., Черняк О. І. Математична статистика: Навчальний посібник. – Київ: МП «Леся», 1995. – 105 с.
18. Жлуктенко В. І., Наконечний С. І. Практикум з курсу «Теорія ймовірностей і математична статистика». – К.: КІНГ, 1991. – 304 с.
19. Практикум з теорії ймовірностей та математичної статистики: Навчальний посібник / За ред. Р. К. Чорнея. – К.: МАУП, 2003. – 328 с.
20. Черняк О. І. Теорія ймовірностей та математична статистика: Збірник задач / О. І. Черняк, О. М. Бушна, А. В. Ставицький. – К.: Знання, 2001. – 199 с. – (Вища освіта XXI століття).
21. Кушлик-Дивульська О. І. Теорія ймовірностей та математична статистика: навч. посіб. / О. І. Кушлик-Дивульська, Н. В. Поліщук, Б. П. Орел, П. І. Штабалюк. – 2-ге вид., випр. і доповн. – К.: НТУУ «КПІ», 2012. – 219 с.
22. Тичинська Л. М. Теорія ймовірностей: навч. посіб. Ч. 1. Історичні екскурси та основні теоретичні відомості / Л. М. Тичинська; МОН України, Вінниц. нац. техн. ун-т. – Вінниця, 2010. – 112 с.
23. Міхайленко В. М. Теорія ймовірностей та математична статистика. Модуль 1. Теорія ймовірностей / В. М. Міхайленко, С. А. Теренчук, О. В. Доля, Н. Д. Федоренко, Ю. П. Філонов. Київ. нац. ун-т буд-ва і архіт. – К. 2012. – 51 с.
24. Галицька І. Є. Теорія ймовірностей та математична статистика: навч. посіб. Ч. 2. Математична статистика / І. Є. Галицька, В. І. Сущук-Слюсаренко. МОНМС України, Нац. техн. ун-т України «Київ. політехн. ін-т». – Київ, 2011. – 216 с.
25. Доля О. В. Теорія ймовірностей та математична статистика. Модуль 2. Математична статистика / О. В. Доля, С. А. Теренчук. Київ. нац. ун-т буд-ва і архіт. – К., 2012. – 44 с.

ДЛЯ НОТАТОК

ДЛЯ НОТАТОК

Навчально-методична література

Ясній О. П., Валяшек В. Б., Крива Н. Р.

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до практичних занять
з дисципліни

«ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА»

для студентів факультету
«Комп'ютерно-інформаційних систем і програмної інженерії»

Комп'ютерне макетування та верстка *А. П. Катрич*

Формат 60х90/16. Обл. вид. арк. 2,68. Тираж 10 прим. Зам. № 3286.

Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя.
46001, м. Тернопіль, вул. Руська, 56.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4226 від 08.12.11.