Міністерство освіти і науки України
Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

М.Р. Петрик, О.Ю. Петрик, І.В. Бойко,

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ В НАУКОВО-ТЕХНІЧНИХ ДОСЛІДЖЕННЯХ

на основі високпродуктивних обчислень

(курс лекцій)

Навчально-методичний посібник

Тернопіль
2019

УДК 519.62
М34

Укладачі:
Петрик М.Р., докт. фіз.-мат. наук, професор,
Петрик О.Ю., ст. викладач,
Бойко І.В., канд. фіз.-мат. наук, доцент,

Рецензенти:
О.А. Пастух, докт. техн. наук, професор,
Є.Б. Яворська, канд. техн. наук, доцент.

Навчально-методичний посібник розглянуто й затверджено на засіданні науково-методичної комісії факультету комп'ютерно-інформаційних систем і програмної інженерії Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя.
Протокол № 1 від 28 серпня 2019 р.

М34 Математичне моделювання в науково-технічних дослідженнях на основі високопродуктивних обчислень (курс лекцій). / Укладачі : Петрик М.Р., Петрик О.Ю., Бойко І.В., – Тернопіль : Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя, 2019 – 92 с.

УДК 519.62

Даний посібник написано згідно програми предметів "Математичне моделювання в науково-технічних дослідженнях", "Системи рівнянь у частинних похідних", "Методологія та технологія створення складних програмних систем", що читаються на факультеті комп'ютерно-інформаційних систем і програмної інженерії.

Для студентів спеціальності 121 – "Інженерія програмного забезпечення", аспірантів та викладачів вищих навчальних закладів.

ЗМІСТ

Вступ

Диференціальні рівняння і методи математичного моделювання та дослідження їх розв’язків широко використовуються у різноманітних галузях і розділах сучасної науки й техніки. Саме тому навчальна дисципліна «Математичне моделювання в науково-технічних дослідженнях» займає чільне місце у підготовці спеціалістів з програмної інженерії, інформатики, математики, прикладної математики тощо.

Пропонований посібник охоплює основну частину університетської програми з диференціальних рівнянь для студентів напрямів підготовки 121 «Інженерія програмного забезпечення», «Інформатика», «Прикладна математика», але може бути використаний також для студентів інших інженерно-технічних вищих спеціальностей..

Метою посібника є ознайомлення студентів з основними поняттями, твердженнями, методами та застосуваннями теорії диференціальних рівнянь у математичному моделюванні, сприяння глибокому засвоєнню теоретичного матеріалу за допомогою розв’язаних прикладів і задач різного рівня складності, побудови математичних моделей, підготовка їх до самостійної роботи з науковою літературою.

Посібник має вигляд лекційного курсу, які умовно можна поділити на 5 основних тематичних розділів: «звичайні диференціальні рівняння першого порядку», «звичайні диференціальні рівняння вищих порядків», «системи звичайних диференціальних рівнянь», «рівняння з частинними похідними першого порядку», «диференціальні рівняння в математичних моделях фізичних процесів».

Тематичні розділи посібника включають тематично розподілений матеріал, завдання для лабораторних занять та самостійної роботи.

Важливі поняття, теореми, методи проілюстровано прикладами та математичними моделями, що мають прикладне застосування з використанням високошвидкісних аналітичних розвязків, що дозволяє реалізувати високопродуктивні технології обчислень.

Кожна тема супроводжується питаннями для контролю та самостійної роботи студентів.

Тема 1. Диференціальні рівняння першого порядку

Основні використовувані визначення теорії диференціальних рівнянь.

Визначення 1. Рівняння, що містять похідні від шуканої функції та можуть містити шукану функцію та незалежну змінну, називаються диференціальними рівняннями.

Визначення 2. Якщо в диференціальному рівнянні невідомі функції є функціями однієї змінної

$$F(x, y, y', y'', \ \dots \ , y^{(n)}) = 0,$$

то диференціальне рівняння називається звичайним.

Визначення 3. Якщо невідома функція, що входить в диференціальне рівняння, є функцією двох або більшої кількості незалежних змінних

$$F(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \ \dots \ , \frac{\partial^k z}{\partial x^l, \partial y^{k-l}}, \ \dots \ , \frac{\partial^n z}{\partial y^n}) = 0,$$

то диференціальне рівняння називається рівнянням в частинних похідних.

Визначення 4. Порядком диференціального рівняння називається максимальний порядок похідної від невідомої функції, що входить в диференціальне рівняння.

Визначення 5. Розв’язком диференціального рівняння називається функція, що має необхідну ступінь гладкості, і яка при підстановці в диференціальне рівняння обертає його в тотожність.

Визначення 6. Процес знаходження розв’язку диференціального рівняння називається інтегруванням диференціального рівняння.

Рівняння першого порядку, що розв’язане відносно похідної, має вигляд

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

Диференціальне рівняння становить зв’язок між координатами точки та кутовим коефіцієнтом дотичної $\frac{dy}{dx}$ до графіку розв’язку в цій же точці. Якщо знати x та y то можна обчислити $f(x, y)$ тобто $\frac{dy}{dx}$. Таким чином, диференціальне рівняння визначає поле напрямків, і задача інтегрування рівнянь зводиться до знаходження кривих, що звуться інтегральними кривими, напрям дотичних до яких в кожній точці співпадає з напрямом поля.

1.1. Рівняння з відокремлюваними змінними

1.1.1. Загальна теорія

Рівняння вигляду

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y),$$

або більш загального вигляду

$$f_1(x) f_2(y)dx + g_1(x)g_2(y)dy = 0$$

називаються рівняннями зі змінними, що розділяються. Розділимо його на $f_2(y)g_1(x)$ і одержимо

$$\frac{f_1(x)}{g_1(x)}dx + \frac{g_2(y)}{f_2(y)}dy = 0.$$

Взявши інтеграли, отримаємо

$$\int \frac{f_1(x)}{g_1(x)}dx + \int \frac{g_2(y)}{f_2(y)}dy = C,$$

або $\Phi(x, y) = C$.

Визначення. Кінцеве рівняння $\Phi(x, y) = 0$, що визначає розв'язок $y(x)$ диференціального рівняння як неявну функцію від x, називається інтегралом розглянутого рівняння.

Визначення. Рівняння $\Phi(x, y) = C$, що визначає всі без винятку розв'язки даного диференціального рівняння, називається загальним інтегралом.

Бувають випадки (в основному), що невизначені інтеграли $\int \frac{f_1(x)}{g_1(x)}dx$ або $\int \frac{g_2(y)}{f_2(y)}dy$ не можна записати в елементарних функціях. Незважаючи на це, задача інтегрування вважається виконаною. Кажуть, що диференціальне рівняння розв'язане в квадратурах.

Можливо, що загальний інтеграл $\Phi(x, y) = C$ розв'язується відносно y: $y = y(x,C)$. Тоді, завдяки вибору C, можна одержати всі розв'язки.

Визначення. Залежність $y = y(x,C)$, що тотожньо задовольняє вихідному диференціальному рівнянню, де C довільна стала, називається загальним розв'язком диференціального рівняння.

Геометрично загальний розв'язок являє собою сім'ю кривих, що не перетинаються, які заповнюють деяку область. Іноді треба виділити одну криву сім'ї, що проходить через задану точку $M(x_0, y_0)$.

Визначення. Знаходження розв'язку $y = y(x)$, що проходить через задану точку $M(x_0, y_0)$, називається розв'язком задачі Коші.

Визначення. Розв'язок, який записаний у вигляді $y = y(x, x_0, y_0)$ і задовольняє умові $y(x_0, x_0, y_0) = y_0$, називається розв'язком у формі Коші.

1.1.2. Рівняння, що зводяться до рівнянь з відокремлюваними змінними

Розглянемо рівняння вигляду

$$\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c),$$

де a, b, c - сталі.

Зробимо заміну $ax + by + c = z$. Тоді $adx + bdy = dz$ і $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{b}(\frac{dz}{dx} - a)$.

Підставивши в вихідне рівняння, одержимо

$$\frac{1}{b}\left(\frac{dz}{dx} - a\right) = f(z) \quad \text{або} \quad \frac{dz}{dx} = a + bf(z) \ .$$

Розділивши змінні, запишемо

$$\frac{dz}{a + bf(z)} - dx = 0 \quad \text{і} \quad \int \frac{dz}{a + bf(z)} - x = C \ .$$

Загальний інтеграл має вигляд $\Phi(ax + by + c, x) = C$.

1.2. Однорідні диференціальні рівняння

1.2.1. Загальна теорія

Нехай рівняння має вигляд

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \ .$$

Якщо функції $M(x, y)$ та $N(x, y)$ однорідні одного ступеня, то рівняння називається однорідним. Нехай функції $M(x, y)$ та $N(x, y)$ однорідні ступеня k, тобто

$M(tx, ty) = t^k M(x, y), \qquad N(tx, ty) = t^k N(x, y).$

Робимо заміну $y = ux,\ dy = udx + xdu$. Після підстановки одержуємо

$M(x, ux)dx + N(x, ux)(udx + xdu) = 0$,

або

$$x^k M(1, u)dx + x^k N(1, u)(udx + xdu) = 0 \ .$$

Скоротивши на x^k і розкривши скобки, запишемо

$$M(1, u)dx + uN(1, u)dx + xN(1, u)du = 0 \ .$$

Згрупувавши, одержимо рівняння зі змінними, що розділяються

$$\left[M(1, u) + uN(1, u)\right]dx + xN(1, u)du = 0,$$

або

$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{N(1,u)}{M(1,u) + uN(1,u)} du = C .$$

Взявши інтеграли та замінивши $u = y/x$, отримаємо загальний інтеграл $\Phi(x, y/x) = C$.

1.2.2. Рівняння, що зводяться до однорідних

Нехай маємо рівняння вигляду

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2} \right).$$

Розглянемо два випадки

$$1)\ \Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0 .$$

Тоді система алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 \end{cases}$$

має єдиний розв'язок (x_0, y_0). Проведемо заміну $x = x_1 + x_0,\ \ y = y_1 + y_0$ та отримаємо

$$\frac{dy_1}{dx_1} = f\left(\frac{a_1(x_1 + x_0) + b_1(y_1 + y_0) + c_1}{a_2(x_1 + x_0) + b_2(y_1 + y_0) + c_2} \right) =$$

$$= f\left(\frac{a_1 x_1 + b_1 y_1 + (a_1 x_0 + b_1 y_0 + c_1)}{a_2 x_1 + b_2 y_1 + (a_2 x_0 + b_2 y_0 + c_2)} \right).$$

Оскільки (x_0, y_0) - розв'язок системи алгебраїчних рівнянь, то диференціальне рівняння прийме вигляд

$$\frac{dy_1}{dx_1} == f\left(\frac{a_1 x_1 + b_1 y_1}{a_2 x_1 + b_2 y_1} \right)$$

і є однорідним нульового ступеня. Робимо заміну $y_1 = ux_1,\ dy_1 = udx_1 + x_1 du$.

Підставимо в рівняння

$$u + x_1 \frac{du}{dx_1} = f\left(\frac{a_1 x_1 + b_1 u x_1}{a_2 x_1 + b_2 u x_1} \right).$$

Одержимо

$$x_1 du + \left[u - f\left(\frac{a_1 + b_1 u}{a_2 + b_2 u} \right) \right] dx_1 = 0 .$$

Розділивши змінні, маємо

$$\int \frac{du}{u - f\left(\dfrac{a_1 + b_1 u}{a_2 + b_2 u} \right)} + \ln x_1 = C .$$

І загальний інтеграл диференціального рівняння має вигляд $\Phi(u, x_1) = C$.

Повернувшись до вихідних змінних, запишемо

$$\Phi\left(\frac{y-y_0}{x-x_0}, x-x_0\right)=C .$$

2) Нехай $\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=0$, тобто коефіцієнти строк лінійно залежні і

$a_1x+b_1y=\alpha(a_2x+b_2y)$.

Робимо заміну $a_2x+b_2y=z$. Звідси $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{b_2}\left(\frac{dz}{dx}-a_2\right)$.

Підставивши в диференціальне рівняння, одержимо

$$\frac{1}{b_2}\left(\frac{dz}{dx}-a_2\right)=f\left(\frac{\alpha z+c_1}{z+c_2}\right),$$

або

$$\frac{dz}{dx}=a_2+b_2f\left(\frac{\alpha z+c_1}{z+c_2}\right).$$

Розділивши змінні, отримаємо

$$\int\frac{dz}{a_2+b_2f\left(\frac{\alpha+c_1}{z+c_2}\right)}-x=C .$$

Загальний інтеграл має вигляд $\Phi(a_2x+b_2y,x)=C.$

1.3. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку

1.3.1. Загальна теорія

Рівняння, що є лінійним відносно невідомої функції та її похідної, називається лінійним диференціальним рівнянням. Його загальний вигляд такий:

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x) .$$

Якщо $q(x)\equiv 0$, тобто рівняння має вигляд

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=0 ,$$

то воно зветься однорідним. Однорідне рівняння є рівнянням зі змінними, що розділяються і розв’язується таким чином:

$$\frac{dy}{y}=-p(x)dx,\ \int\frac{dy}{y}=-\int p(x)dx+\ln C,\ \ln y=-\int p(x)dx+\ln C.$$

Нарешті $y=Ce^{-\int p(x)dx}$.

Розв’язок неоднорідного рівняння будемо шукати методом варіації довільних сталих (методом невизначених множників Лагранжа). Він складається в тому, що розв’язок неоднорідного рівняння шукається в такому ж вигляді, як і розв’язок однорідного, але C вважається невідомою функцією від x, тобто $C = C(x)$ і $y = C(x)e^{-\int p(x)dx}$. Для знаходження $C(x)$ підставимо y у рівняння

$$\frac{dC(x)}{dx}e^{-\int p(x)dx} - C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx} + p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x).$$

Звідси

$$dC(x) = q(x)e^{\int p(x)dx}dx.$$

Проінтегрувавши, одержимо

$$C(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C.$$

І загальний розв’язок неоднорідного рівняння має вигляд

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left[\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\right].$$

Якщо використовувати початкові умови $y(x_0) = y_0$, то розв’язок можна записати у формі Коші:

$$y(x, x_0, y_0) = e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt}y_0 + \int_{x_0}^{x} e^{-\int_t^x p(\xi)d\xi}q(t)dt.$$

1.3.2. Рівняння Бернуллі

Рівняння вигляду

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)y^m, \quad m \neq 1$$

називається рівнянням Бернуллі. Розділимо на y^m і одержимо

$$y^{-m}\frac{dy}{dx} + p(x)y^{1-m} = q(x).$$

Зробимо заміну: $y^{1-m} = z,\ (1-m)y^{-m}\dfrac{dy}{dx} = dz$.

Підставивши в рівняння, отримаємо

$$\frac{1}{1-m}\frac{dz}{dx} + p(x)z = q(x).$$

Одержали лінійне диференціальне рівняння. Його розв’язок має вигляд

$$z = e^{-(1-m)\int p(x)dx}\left[(1-m)\int q(x)e^{(1-m)\int p(x)dx}dx + C\right].$$

1.3.3. Рівняння Рікатті

Рівняння вигляду

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y + r(x)y^2 = q(x)$$

називається рівнянням Рікатті. В загальному випадку рівняння Рікатті не інтегрується. Відомі лише деякі частинні випадки рівнянь Рікатті, що інтегруються в квадратурах. Розглянемо один з них. Нехай відомий один частинний розв'язок $y = y_1(x)$. Робимо заміну $y = y_1(x) + z$ і одержуємо

$$\frac{dy_1(x)}{dx} + \frac{dz}{dx} + p(x)[y_1(x) + z] + r(x)[y_1(x) + z]^2 = q(x).$$

Оскільки $y_1(x)$ - частинний розв'язок, то

$$\frac{dy_1}{dx} + p(x)y_1 + r(x){y_1}^2 \equiv q(x).$$

Розкривши дужки і використовуючи вказану тотожність, одержуємо

$$\frac{dz}{dx} + p(x)z + 2r(x)y_1(x)z \ + r(x)z^2 = 0.$$

Перепишемо одержане рівняння у вигляді

$$\frac{dz}{dx} + [p(x) + 2r(x)y_1(x)]z = -r(x)z^2,$$

це рівняння Бернуллі з $m = 2$.

1.4. Рівняння в повних диференціалах

1.4.1. Загальна теорія

Якщо ліва частина диференціального рівняння

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

є повним диференціалом деякої функції $u(x, y)$, тобто

$$du(x, y) = M(x, y)dx + N(x, y)dy,$$

і, таким чином, рівняння приймає вигляд $du(x, y) = 0,$ то рівняння називається рівнянням в повних диференціалах. Звідси вираз

$$u(x, y) = C$$

є загальним інтегралом диференціального рівняння.

Критерієм того, що рівняння є рівнянням в повних диференціалах, тобто необхідною та достатньою умовою, є виконання рівності

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}.$$

Нехай маємо рівняння в повних диференціалах. Тоді

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = M(x,y), \ \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = N(x,y).$$

Звідси $u(x,y) = \int M(x,y)dx + \phi(y),$ де $\phi(y)$ - невідома функція. Для її визначення продиференціюємо співвідношення по y і прирівняємо $N(x,y)$.

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)dx\right) + \frac{d\phi(y)}{dy} = N(x,y).$$

Звідси

$$\phi(y) = \int \left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)dx\right)\right]dy\,.$$

Остаточно, загальний інтеграл має вигляд

$$\int M(x,y)dx + \int \left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)dx\right)\right]dy = C.$$

Як відомо з математичного аналізу, якщо відомий повний диференціал

$$du(x,y) = M(x,y)dx + N(x,y)dy\,,$$

то $u(x,y)$ можна визначити, взявши криволінійний інтеграл по довільному контуру, що з'єднує фіксовану точку (x_0, y_0) і точку із змінними координатами (x,y). Більш зручно брати криву, що складається із двох відрізків прямих. В цьому випадку криволінійний інтеграл розпадається на два простих інтеграла

$$u(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} M(x,y)dx + N(x,y)dy =$$
$$\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y_0)} M(x,y_0)dx + \int_{(x,y_0)}^{(x,y)} N(x,y)dy =$$
$$= \int_{x_0}^{x} M(x,y_0)dx + \int_{y_0}^{y} N(x,y)dy.$$

В цьому випадку одразу одержуємо розв'язок задачі Коші.

$$\int_{x_0}^{x} M(x,y_0)dx + \int_{y_0}^{y} N(x,y_0)dy = 0\,.$$

1.4.2. Множники інтегрування

В деяких випадках рівняння

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

не є рівнянням в повних диференціалах, але існує функція $\mu = \mu(x,y)$ така, що рівняння

$$\mu(x,y)M(x,y)dx + \mu(x,y)N(x,y)dy = 0$$

вже буде рівнянням в повних диференціалах. Необхідною та достатньою умовою цього є рівність

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu(x,y)M(x,y)) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu(x,y)N(x,y),$$

або

$$\frac{\partial \mu}{\partial y}M + \mu\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial \mu}{\partial y}N + \mu\frac{\partial N}{\partial x}.$$

Таким чином замість звичайного диференціального рівняння відносно функції $y(x)$ одержимо диференціальне рівняння в частинних похідних відносно функції $\mu(x,y)$. Задача інтегрування його значно спрощується, якщо відомо в якому вигляді шукати функцію $\mu(x,y)$, наприклад $\mu = \mu(\omega(x,y))$, де $\omega(x,y)$ - відома функція. В цьому випадку одержуємо

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{d\mu}{d\omega}\frac{\partial \omega}{\partial y},\ \frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{d\mu}{d\omega}\frac{\partial \omega}{\partial x}.$$

Після підстановки в рівняння маємо

$$\frac{d\mu}{d\omega}\frac{\partial \omega}{\partial y}M + \mu\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{d\mu}{d\omega}\frac{\partial \omega}{\partial x}N + \mu\frac{\partial N}{\partial x},$$

або

$$\frac{d\mu}{d\omega}\left[N\frac{\partial \omega}{\partial x} - M\frac{\partial \omega}{\partial y}\right] = \mu\left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right].$$

Розділимо змінні

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N\frac{\partial \omega}{\partial x} - M\frac{\partial \omega}{\partial y}}d\omega.$$

Проінтегрувавши і поклавши сталу інтегрування одиницею, одержимо:

$$\mu(\omega(x,y)) = \exp\left\{\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N\frac{\partial \omega}{\partial x} - M\frac{\partial \omega}{\partial y}}d\omega\right\}.$$

Розглянемо частинні випадки.

1) Нехай $\omega(x,y) = x$. Тоді $\frac{\partial \omega}{\partial x} = 1,\ \frac{\partial \omega}{\partial y} = 0,\ d\omega = dx.$

І формула має вигляд

$$\mu(x) = \exp\left\{\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}dx\right\}.$$

2) Нехай $\omega(x,y) = y$. Тоді $\frac{\partial \omega}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial \omega}{\partial y} = 1,\ d\omega = dy.$

I формула має вигляд

$$\mu(y)=\exp\left\{\int\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{-M}dy\right\}$$

3) Нехай $\omega(x,y)=x^2\pm y^2$.Тоді

$$\frac{\partial\omega}{\partial x}=2x,\ \frac{\partial\omega}{\partial y}=\pm 2y,\ d\omega=d(x^2\pm y^2).$$

I формула має вигляд

$$\mu(x,y)=\exp\left\{\int\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{2xN\pm 2yM}d(x^2\pm y^2)\right\}.$$

4) Нехай $\omega(x,y)=xy$**.** Тоді $\dfrac{\partial\omega}{\partial x}=y,\ \dfrac{\partial\omega}{\partial y}=x,\ d\omega=d(xy).$

I формула має вигляд

$$\mu(x,y)=\exp\left\{\int\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{yN-xM}d(xy)\right\}.$$

1.5. Диференціальні рівняння першого порядку, що не розв’язні відносно похідної

Диференціальне рівняння першого порядку, не розв′язане відносно похідної, має такий вигляд

$$F(x,y,y')=0.$$

1.5.1. Частинні випадки рівнянь, що інтегруються в квадратурах

Розглянемо ряд диференціальних рівнянь, що інтегруються в квадратурах.

1) Рівняння вигляду $F(y')=0$. Нехай алгебраїчне рівняння $F(k)=0$ має по крайній мірі один дійсний корінь $k=k_0$. Тоді, інтегруючи $y'=k_0$, одержимо $y=k_0x+C$. Звідси $k_0=\dfrac{y-C}{x}$ і вираз $F\left(\dfrac{y-c}{x}\right)=0$ містить всі розв′язки вихідного диференціального рівняння.

2) Рівняння вигляду $F(x,y')=0$. Нехай це рівняння можна записати у параметричному вигляді

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y'=\psi(t). \end{cases}$$

Використовуючи співвідношення $dy = y'dx$, одержимо $dy=\psi(t)\varphi'(t)dx$. Проінтегрувавши, запишемо

$$y=\int \psi(t)\varphi'(t)dt + C\,.$$

І загальний розв′язок в параметричній формі має вигляд

$$\begin{cases} x=\phi(t) \\ y=\int \psi(t)\varphi'(t)dt + C. \end{cases}$$

3) Рівняння вигляду $F(y,y')=0$. Нехай це рівняння можна записати у параметричному вигляді

$$\begin{cases} y=\phi(t) \\ y'=\psi(t). \end{cases}$$

Використовуючи співвідношення $dy = y'dx$, отримаємо $\phi'(t)dt=\psi(t)dx$ і $dx=\dfrac{\varphi'(t)}{\psi(t)}dt$.

Проінтегрувавши, запишемо

$$x=\int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}dt + C\,.$$

І загальний розв′язок в параметричній формі має вигляд

$$\begin{cases} x=\int \dfrac{\varphi'(t)}{\psi(t)}dt + C \\ y=\phi(t). \end{cases}$$

4) Рівняння Лагранжа

$$y=\phi(y')x+\psi(y')\,.$$

Введемо параметр $y'=\dfrac{dy}{dx}=p$ і отримаємо

$$y=\phi(p)x+\psi(p).$$

Продиференціювавши, запишемо

$$dy=\phi'(p)xdp+\varphi(p)dx+\psi'(p)dp.$$

Замінивши $dy=pdx$ одержимо

$$pdx=\phi'(p)xdp+\varphi(p)dx+\psi'(p)dp.$$

Звідси

$$\left[p-\phi(p)\right]dx-\phi'(p)xdp=\psi'(p)dp.$$

І отримали лінійне неоднорідне диференціальне рівняння

$$\frac{dx}{dp}+\frac{\varphi'(p)}{\varphi(p)-p}x=\frac{\psi'(p)}{p-\varphi(p)}.$$

Його розв′язок

$$x=e^{\int\frac{\varphi'(p)}{\varphi(p)-p}dp}\left[\int\frac{\psi'(p)}{p-\varphi(p)}e^{\int\frac{\varphi'(p)}{\varphi(p)-p}dp}dp+C\right]=\Psi(p,C).$$

І остаточний розв′язок рівняння Лагранжа в параметричній формі запишеться у вигляді

$$\begin{cases}x=\Psi(p,C)\\ y=\varphi(p)\Psi(p,C)+\psi(p).\end{cases}$$

5) Рівняння Клеро.

Частинним випадком рівняння Лагранжа, що відповідає $\varphi(y')=y'$ є рівняння Клеро

$$y=y'x+\psi(y').$$

Поклавши $y'=\frac{dy}{dx}=p$, отримаємо $y=px+\psi(p)$. Продиференцюємо $dy=pdx+xdp+\psi'(p)dp.$ Оскільки $dy=pdx$, то

$$pdx=pdx+xdp+\psi'(p)dp.$$

Скоротивши, одержимо $[x+\psi'(p)]dp=0.$ Можливі два випадки.

1. $x+\psi'(p)=0$ і розв’язок має вигляд

$$\begin{cases}x=-\psi'(p)\\ y=-p\psi'(p)+\psi(p).\end{cases}$$

2. $dp=0,\ \ p=C$ і розв’язок має вигляд

$$y=Cx+\psi(C).$$

Загальним розв’язком рівняння Клеро буде сім’я прямих $y=Cx+\psi(C)$. Цю сім’ю огинає особа крива $x=-\psi'(p)$, $y=-p\psi'(p)+\psi(p)$.

6) Параметризація загального вигляду. Нехай диференціальне рівняння $F(x,y,y')=0$ вдалося записати у вигляді системи рівнянь з двома параметрами

$x=\varphi(u,v),\ \ y=\psi(u,v),\ \ y'=\theta(u,v)$.

Використовуючи співвідношення $dy=y'dx$, одержимо

$$\frac{\partial\psi(u,v)}{\partial u}du+\frac{\partial\psi(u,v)}{\partial v}dv=\theta(u,v)\left[\frac{\partial\varphi(u,v)}{\partial u}du+\frac{\partial\varphi(u,v)}{\partial v}dv\right].$$

Перегрупувавши члени, одержимо

$$\left[\frac{\partial\psi(u,v)}{\partial u}-\theta(u,v)\frac{\partial\varphi(u,v)}{\partial u}\right]du=\left[\theta(u,v)\frac{\partial\varphi(u,v)}{\partial v}-\frac{\partial\psi(u,v)}{\partial v}\right]dv.$$

Звідси

$$\frac{du}{dv}=\frac{\theta(u,v)\dfrac{\partial\varphi(u,v)}{\partial v}-\dfrac{\partial\psi(u,v)}{\partial v}}{\dfrac{\partial\psi(u,v)}{\partial u}-\theta(u,v)\dfrac{\partial\varphi(u,v)}{\partial u}}.$$

Або отримали рівняння вигляду

$$\frac{du}{dv}=f(u,v).$$

Параметризація загального вигляду не дає інтеграл диференціального рівняння. Вона дозволяє звести диференціальне рівняння, не розв'язане відносно похідної, до диференціального рівняння, розв'язаного відносно похідної.

7) Нехай рівняння $F(x,y,y')=0$ можна розв'язати відносно y' і воно має n-коренів, тобто його можна записати у вигляді $\prod_{i=1}^{n}\left[y'-f_i(x,y)\right]=0$.

Розв'язавши кожне з рівнянь $y'=f_i(x,y),\ i=\overline{1,n}$, отримаємо n загальних розв'язків (або інтервалів) $y=\varphi_i(x,C),\ i=\overline{1,n}$ (або $\varphi_i(x,y)=C,\ i=\overline{1,n}$). І загальний розв'язок вихідного рівняння, не розв'язаного відносно похідної має вигляд

$$\prod_{i=1}^{n}\left[y-\varphi_i(x,C)\right]=0 \text{ або } \prod_{i=1}^{n}\left(\varphi_i(x,y)-C\right)=0.$$

1.6. Існування та єдиність розв'язків диференціальних рівнянь першого порядку. Неперервна залежність та диференційованість

Клас диференціальних рівнянь, що інтегруються в квадратурах, досить невеликий, тому мають велике значення наближені методи розв'язку диференціальних рівнянь. Але, щоб використовувати ці методи, треба бути впевненим в існуванні розв'язку шуканого рівняння та в його єдиності.

Зараз значна частина теорем існування та єдиності розв'язків не тільки диференціальних, але й рівнянь інших видів доводиться методом стискуючих відображень.

Визначення. Простір M називається метричним, якщо для довільних двох точок $x,y\in M$ визначена функція $\rho(x,y)$, що задовольняє аксіомам:

1. $\rho(x,y)\ge 0$, причому $\rho(x,y)=0$ тоді і тільки тоді, коли $x=y$;
2. $\rho(x,y)=\rho(y,x)$ (комутативність);
3. $\rho(x,y)\le\rho(x,z)+\rho(z,y)$ (нерівність трикутника).

Функція $\rho(x,y)$ називається відстанню в просторі M (метрикою простору M).

Приклад 1.6.1. Векторний n- вимірний простір R^n .

Нехай $x=(x_1,x_2,\ \dots\ ,x_n),\ y=(y_1,y_2,\ \dots\ ,y_n)$. За метрику можна взяти: $\rho(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right)^{1/2}$, $\rho(x,y)=\max_{i=\overline{1,n}}|x_i-y_i|$.

Приклад 1.6.2. Простір неперервних функцій на відрізку $[a,b]$ позначається - $C_{[a,b]}$. За метрику можна взяти

$$\rho(x(t),y(t))=\left(\int_a^b(x(t)-y(t))^2\,dt\right)^{1/2},\ \ \rho(x(t),y(t))=\max_{t\in[a,b]}|x(t)-y(t)|.$$

Визначення. Послідовність $x_1,x_2,\ \dots\ ,x_n$ називається фундаментальною, якщо для довільного $\varepsilon>0$ існує $N(\varepsilon)>0$ таке, що при $n\ge N(\varepsilon)$ і довільному $m=1,2,\ \dots$ буде $\rho(x_n,x_{n+m})<\varepsilon$.

Визначення. Метричний простір M називається повним, якщо довільна фундаментальна послідовність точок $x_1,x_2,\ \dots\ ,x_n,\ \dots$ простору M збігається до деякої точки $\overline{x}$ простору M .

Теорема (принцип стискуючих відображень). Нехай в повному метричному просторі M задано оператор A, що задовольняє умовам.

1. Оператор A переводить точки простору M в точки цього ж простору, тобто якщо $x\in M$, то і $A[x]\in M$.

2. Оператор A є оператором стиску, тобто
$\rho(A[x],A[y])\le\alpha\rho(x,y)$, де $0<\alpha<1,\ \ x,y$ - довільні точки M .

Тоді існує єдина нерухома точка $\overline{x}\in M$, яка є розв'язком операторного рівняння $A[\overline{x}]=\overline{x}$ і вона може бути знайдена методом послідовних відображень, тобто $\overline{x}=\lim_{n\to\infty}x_n$, де $x_{n+1}=A[x_n]$, причому x_0, вибирається довільно.

Доведення. І. Візьмемо довільну точку $x_0\in M$ і побудуємо послідовність $x_1=A[x_0],\ x_2=A[x_1],\ \dots\ ,x_{n+1}=A[x_n],\ \dots$. Покажемо, що побудована послідовність є фундаментальною. Дійсно

$$\begin{aligned}
&\rho(x_2,x_1)=\rho(A[x_1],A[x_0])\le\alpha\rho(x_1,x_0),\\
&\rho(x_3,x_2)=\rho(A[x_2],A[x_1])\le\alpha\rho(x_2,x_1)\le\alpha^2\rho(x_1,x_0),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\rho(x_{n+1},x_n)=\rho(A[x_n],A[x_{n-1}])\le\alpha\rho(x_n,x_{n-1})\le\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\le\ \dots\ \le\alpha^n\rho(x_1,x_0).
\end{aligned}$$

Оцінимо $\rho(x_n,x_{n+m})$. Застосувавши $(n-1)$-разів правило трикутника, отримуємо

$$\rho(x_n, x_{n+m}) \le \rho(x_n, x_{n+1}) + \rho(x_{n+1}, x_{n+2}) + \ \dots\ + \rho(x_{n+m-1}, x_{n+m}) \le$$
$$\le \alpha^n \rho(x_1, x_0) + \alpha^{n+1}\rho(x_1, x_0) + \ \dots\ + \alpha^{n+m-1}\rho(x_1, x_0) =$$
$$= \alpha^n \rho(x_1, x_0)[1 + \alpha + \ \dots\ + \alpha^{m-1}] < \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x_1, x_0).$$

Таким чином $\rho(x_n, x_{n+m}) < \dfrac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x_1, x_0)$**.** И при достатньо великому n **:** $\rho(x_n, x_{n+m}) < \varepsilon$**,** тобто послідовність $x_1, x_2,\ ....\ x_n, ...$ є фундаментальною і, в силу повноти простору M , збігається до деякого елемента цього ж простора $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \overline{x},\ \overline{x} \in M$.

II. Покажемо, що x є нерухомою точкою, тобто $A\left[\overline{x}\right] = \overline{x}$.

Нехай від супротивного $A\left[\overline{\overline{x}}\right] = \overline{\overline{x}}$ і $\overline{x} \ne \overline{\overline{x}}$**.** Застосувавши правило трикутника, одержимо $\rho(\overline{x}, \overline{\overline{x}}) < \rho(\overline{x}, x_n) + \rho(x_n, x_{n+1}) + \rho(x_{n+1}, \overline{\overline{x}})$. Оцінимо кожний з доданків.

1) Оскільки $x_n \to \overline{x}$ **,** то при $n > N(\varepsilon)$ буде $\rho(\overline{x}, x_n) < \varepsilon/3$**.**

2)Оскільки послідовність є фундаментальною, то при $\rho(\overline{x}, x_n) < \varepsilon/3$ буде $\rho(x_n, x_{n+1}) < \varepsilon/3$.

3) І, нарешті, $\rho(x_{n+1}, \overline{\overline{x}}) = \rho(A[x_n], A[\overline{\overline{x}}]) \le \alpha\rho(x_n, \overline{\overline{x}}) < \alpha\dfrac{e}{3} < \dfrac{e}{3}.$

Таким чином $\rho(\overline{x}, \overline{\overline{x}}) < \dfrac{\varepsilon}{3} + \dfrac{\varepsilon}{3} + \dfrac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$, причому $\overline{x}$ і $\overline{\overline{x}}$ фіксовані, а ε можна вибрати як завгодно малим. Отже $\rho(\overline{x}, \overline{\overline{x}}) = 0$**,** а в силу другої аксіоми метричного простору це значить, що $\overline{x} = \overline{\overline{x}}$**.**

III. Покажемо, що нерухома точка єдина. Нехай, від супротивного, існують дві точки $\overline{x}$ і $\overline{\overline{x}}$: $A[\overline{x}] = \overline{x}$ і $A[\overline{x}] = \overline{\overline{x}}$. Але тоді $\rho(A[\overline{x}], A[\overline{\overline{x}}]) = \rho(\overline{x}, \overline{\overline{x}})$, що суперечить припущенню про стислість оператора.

Таким чином, припущення про неєдиність нерухомої точки помилкове. З використанням теореми про нерухому точку доведемо теорему про існування та єдиність розв'язку задачі Коші диференціального рівняння, розв'язаного відносно похідної.

Теорема (про існування та єдиність розв'язку задачі Коші). Нехай у диференціальному рівнянні $\dfrac{dy}{dx} = f(x, y)$ функція $f(x, y)$ визначена в прямокутнику

$D = \{(x, y) : |x_0 - a \le x \le x_0 + a,\ y_0 - b \le y \le y_0 + b\}$. і задовольняє умовам:

1) $f(x, y)$ неперервна по x та y у D ;

2) $f(x, y)$ задовольняє умові Ліпшиця по змінній y, тобто

$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le N|y_1 - y_2|,\quad N = const.$

Тоді існує єдиний розв'язок $y = y(x)$ диференціального рівняння, який визначений при

$x_0 - h \le x \le x_0 + h$ **,** і задовольняє умові

$y(x_0) = y_0$, де $h < \min\{a, b/M, 1/N\}$, $M = \max_{x,y\in D} |f(x,y)|$.

Доведення. Розглянемо простір, елементами якого є функції $y(x)$**,** неперервні на відрізку $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$ й обмежені $|y(x) - y_0| \le b$**.** Введемо метрику $\rho(y(x), z(x)) = \max_{x\in[x_0-h,x_0+h]} |y(x) - z(x)|$. Одержимо повний метричний простір $C_{[x_0-h,x_0+h]}$. Замінимо диференціальне рівняння

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \; , y(x_0) = y_0$$

еквівалентним інтегральним рівнянням

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt.$$

Розглянемо оператор $A[y] = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt.$ Через те, що $\left|\int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt\right| \le \int_{x_0}^{x} |f(t, y(t))| dt \le M|x - x_0| \le Mh \le b$, то оператор $A[y]$ ставить у відповідність кожній неперервній функції $y(x)$**,** визначеній при $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$ й обмежений $|y(x) - y_0| \le b$ також неперервну функцію $A[y] = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt$, визначену при $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$ й обмежену $|A[y] - y(x)| \le b$**.**

Перевіримо, чи є оператор A оператором стиску.

$$\begin{aligned}
&\rho(A[y], A[z]) = \\
&= \max_{x\in[x_0-h,x_0+h]} \left| y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt - y_0 - \int_{x_0}^{x} f(t, z(t))dt \right| \le \\
&\le \max_{x\in[x_0-h,x_0+h]} \int_{x_0}^{x} |f(t, y(t)) - f(t, z(t))| dt \le \\
&\le N \max_{x\in[x_0-h,x_0+h]} \int_{x_0}^{x} |y(t) - z(t)| dt \le \\
&\le N \max_{x\in[x_0-h,x_0+h]} |y(t) - z(t)| \left|\int_{x_0}^{x} dt\right| \le Nh\rho(y, z).
\end{aligned}$$

І оскільки $Nh < 1$, то оператор A є оператором стиску $\rho(A[y],[z]) < \alpha\rho(y,z)$, $0 < \alpha < 1$. Відповідно до принципу стислих відображень операторне рівняння $A[y] = y$ має єдиний розв'язок, тобто інтегральне рівняння $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt$, чи задача Коші для диференціального рівняння

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y), \; y(x_0) = y_0$$

також має єдиний розв'язок.

Зауваження. Умову Ліпшіца $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le N|y_1 - y_2|$ можна замінити іншою, більш грубою, але легше перевіряємою умовою існування обмеженої по модулю частинної похідної $f_y^{'}(x,y)$ в області D. Дійсно,

$$\left| f(x,y_1) - f(x,y_2) \right| = \left| f_y^{'}(x,\xi) \right| \left| y_1 - y_2 \right| \le N \left| y_1 - y_2 \right|,$$

де $\xi \in [y_1, y_2]$, $N = \max\limits_{(x,y)\in D} \left| f_y^{'}(x,y) \right|$.

Використовуючи доведену теорему про існування та єдиність розв'язку задачі Коші розглянемо ряд теорем, що описують якісну поведінку розв'язків.

Теорема. (про неперервну залежність розвʹязків від параметру) Якщо права частина диференціального рівняння

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y,\mu)$$

неперервна по μ при $\mu \in [\mu_1, \mu_2]$ і при кожному фіксованому μ задовольняє умовам теореми існування й єдиності, причому стала Ліпшиця N не залежить від μ, то розвʹязок $y = y(x,\mu)$, що задовольняє початковій умові $y(x_0) = y_0$, неперервно залежить від μ.

Доведення. Оскільки члени послідовності

$$y_n(x,\mu) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t,\mu))dt$$

є неперервними функціями змінних x і μ, а стала $\alpha = Nh < 1$ не залежить від μ, то послідовність $\{y_n(x,\mu)\}$ збігається до $y(x,\mu)$ рівномірно по μ . І, як випливає з математичного аналізу, якщо послідовність неперервних функцій збігається рівномірно, то вона збігається до неперервної функції, тобто $y = y(x,\mu)$ - функція, неперервна по μ.

Теорема (про неперервну залежність від початкових умов). Нехай виконані умови теореми про існування та єдиність розвʹязків рівняння

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

з початковими умовами $y(x_0) = y_0$. Тоді, розвʹязки $y = y(x_0, y_0; x)$, що записані у формі Коші, неперервно залежать від початкових умов.

Доведення. Роблячи заміну $z = y(x_0, y_0; x) - y_0$, $t = x - x_0$, одержимо диференціальне рівняння $\dfrac{dz}{dt} = f(t + x_0, z + y_0)$ з нульовими початковими умовами. На підставі попередньої теореми маємо неперервну залежність розвʹязків від x_0, y_0 як від параметрів.

Теорема (про диференційованість розв′язків). Якщо в околі точки (x_0, y_0) функція $f(x, y)$ має неперервні змішані похідні до k-го порядку, то розв′язок $y(x)$ рівняння

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

з початковими умовами $y(x_0) = y_0$ в деякому околі точки (x_0, y_0) буде $(k+1)$ - раз неперервно диференційований.

Доведення. Підставивши $y(x)$ в рівняння, одержимо тотожність

$$\frac{dy(x)}{dx} \equiv f(x, y(x)),$$

яку можна диференціювати

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f\ .$$

Якщо $k > 1$, то праворуч функція неперервно диференційована. Продиференціюємо її ще раз

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{dy}{dx} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{dy}{dx}\right) f + \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right),$$

або

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} f + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} f^2 + \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f\right).$$

Проробивши це k-разів, отримаємо твердження теореми.

Розглянемо диференціальне рівняння, не розв′язане відносно похідної $F(x, y, y') = 0$.

Нехай (x_0, y_0) - точка на площині. Підставивши її в рівняння, одержимо відносно y' алгебраїчне рівняння

$F(x_0, y_0, y') = 0$.

Це рівняння має корені $y_0', y_1', \dots, y_n', \dots$. Задача Коші для диференціального рівняння, не розв′язаного відносно похідної, ставиться в такий спосіб. Потрібно знайти розв′язок $y = y(x)$ рівняння $F(x, y, y') = 0$, що задовольняє умовам $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$, де x_0, y_0 - довільні значення, а y_0' - один з вибраних наперед коренів алгебраїчного рівняння $F(x_0, y_0, y') = 0$.

Теорема (існування й єдиність розв′язку задачі Коші рівняння, не розв′язаного відносно похідної). Нехай у замкненому околі точки (x_0, y_0, y_0') функція $F(x, y, y')$

задовольняє умовам:

1) $F(x,y,y')$ - неперервна по всіх аргументах;

2) $\frac{\partial F}{\partial y'}$ існує і відмінна від нуля;

3) $\left|\frac{\partial F}{\partial y}\right| \le N_1$.

Тоді при $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$, де h - досить мало, існує єдиний розв′язок $y = y(x)$ рівняння $F(x,y,y') = 0$, що задовольняє початковій умові $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0^{'}$.

Доведення. Як випливає з математичного аналізу відповідно до теореми про неявну функцію можна стверджувати, що умови 1) і 2) гарантують існування єдиної неперервної в околі точки $(x_0, y_0, y_0^{'})$ функції $y' = f(x,y)$, зумовленої рівнянням $F(x,y,y') = 0$, для якої $y_0^{'} = f(x_0, y_0)$. Перевіримо, чи задовольняє $f(x,y)$ умові Ліпшиця чи більш грубій $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \le N$.

Диференціюємо $F(x,y,y') = 0$ по y. Оскільки $y' = f(x,y)$, то одержуємо

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial y'}\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Звідси

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial y'}}.$$

З огляду на умови 2), 3), одержимо, що в деякому околі точки (x_0, y_0) буде $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \le N$ і для рівняння $y' = f(x,y)$ виконані умови теореми існування і єдиності розв’язку задачі Коші.

1.6.1. Особливі розв’язки

Визначення. Розв’язок $y = \phi(x)$ диференціального рівняння, в кожній точці якого $M(x,y)$ порушена єдиність розв’язку задачі Коші, називається особливим розв’язком.

Очевидно, особливі розв’язки треба шукати в тих точках області D, де порушені умови теореми про існування й єдиність розв’язку задачі Коші. Але, оскільки умови теореми носять достатній характер, то їхнє не виконання для існування особливих розв’язків, носить необхідний характер. І точки $M(x,y)$ області D, у яких порушені умови теореми про існування та єдиність розв’язку диференціального рівняння, є лише "підозрілими" на особливі розв’язки.

Розглянемо рівняння

$$y' = f(x, y).$$

Неперервність $f(x, y)$ в області D звичайно виконується, і особливі розв'язки варто шукати там, де $\frac{\partial f}{\partial y} = \pm\infty$.

Для диференціального рівняння, не розв'язаного відносно похідної $F(x, y, y') = 0$, умови неперервності $F(x, y, y')$ й обмеженості $\frac{\partial F}{\partial y}$ звичайно виконуються. І особливі розв'язки варто шукати там, де задовольняються рівняння:

$$F(x, y, y') = 0,$$

$$\frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'} = 0.$$

Вилучаючи із системи y', одержимо $\Phi(x, y) = 0$. Однак не в кожній точці $M(x, y)$, у якій $\Phi(x, y) = 0$, порушується єдиність розв'язку, тому що умови теореми мають лише достатній характер і не є необхідними. Якщо ж яка-небудь гілка $y = \phi(x)$ кривої $\Phi(x, y) = 0$ є інтегральною кривою, то $y = \phi(x)$ називається особливим розв'язком.

Таким чином, для знаходження особливого розв'язку рівняння $F(x, y, y') = 0$ треба

1) знайти p - дискримінантну криву, обумовлену рівняннями $F(x, y, p) = 0$, $\frac{\partial F(x, y, p)}{\partial p} = 0$.

2) з'ясувати шляхом підстановки - є чи серед гілок p - дискримінантної кривої інтегральні криві;

3) чи порушена умова одиничності в точках цих кривих.

2. Нелінійні диференціальні рівняння вищих порядків

2.1. Загальні визначення. Існування та єдиність розв'язків рівнянь

Диференціальне рівняння n-го порядку має вигляд

$$F(x, y, y', \ \dots \ , y^{(n)}) = 0.$$

Якщо диференціальне рівняння розв'язане відносно старшої похідної, то воно має вигляд

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ \dots \ , y^{(n-1)}).$$

Іноді його називають диференціальним рівнянням у нормальній формі. Для диференціального рівняння, розв'язаного відносно похідної, задача Коші ставиться таким чином. Потрібно знайти функцію $y = y(x)$, n- раз неперервно диференційовану, що при підстановці в рівняння обертає його в тотожність і задовольняє початковим умовам $y(x_0)=y_0, y'(x_0)=y_0^{'}, \ldots, y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$. Для диференціального рівняння, не розв’язаного відносно похідної, задача Коші полягає в знаходженні розв’язку $y=y(x)$, що задовольняє початковим даним

$$y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_0^{'},\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)},\ y^{(n)}(x_0)=y_0^{(n)}\ ,$$

де значення $x_0, y_0, y_0^{'}, \ldots, y_0^{(n-1)}$ довільні, а $y_0^{(n)}$ один з коренів алгебраїчного рівняння

$$F(x_0, y_0, y_0', \ldots, y^{(n)})=0.$$

Теорема (*існування та єдиності розв’язку задачі Коші рівняння, розв’язаного відносно похідної***)**. Нехай у деякому замкненому околі точки $(x_0, y_0, y_0^{'}, \ldots, y_0^{(n-1)})$ функція $f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ задовольняє умовам:

1) вона визначена і неперервна по всім змінним;

2) задовольняє умові Ліпшиця по всім змінним, починаючи з другого.

Тоді при $x_0-h\le x\le x_0+h$, де h- досить мала величина, існує і єдиний розв’язок $y=y(x)$ рівняння $y^{(n)}=f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$, що задовольняє початковим умовам

$y(x_0)=y_0, y'(x_0)=y_0^{'}, \ldots, y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}, y^{(n)}(x_0)=y_0^{(n)}$.

Теорема (*існування та єдиності розв’язку задачі Коші рівняння, не розв’язаного відносно похідної***).** Нехай у деякому замкненому околі точки $(x_0, y_0, y_0^{'}, \ldots, y_0^{(n-1)}, y_0^{(n)})$ функція $F(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n)})$ задовольняє умовам:

1) вона визначена і неперервна по всім змінним;

2) $\left|\dfrac{\partial F}{\partial y}\right|<M_0, \left|\dfrac{\partial F}{\partial y'}\right|<M_1, \ldots, \left|\dfrac{\partial F}{\partial y^{(n-1)}}\right|<M_n$;

3) $\left|\dfrac{\partial F}{\partial y^{(n)}}\right|\ne 0$.

Тоді при $x_0-h\le x\le x_0+h$, де h- досить мала величина, існує і єдиний розв’язок $y=y(x)$ рівняння $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)})=0$, що задовольняє початковим умовам

$$y(x_0)=y_0, y'(x_0)=y_0^{'}, \ldots, y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}, y^{(n)}(x_0)=y_0^{(n)}.$$

Визначення. Загальним розв’язком диференціального рівняння n-го порядку називається n-раз неперервно диференційована функція $y=y(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$, що обертає при підстановці рівняння в тотожність, у якій вибором сталих $C_1, \ldots, C_n$ можна одержати розв’язок довільної задачі Коші в області існування та єдиності розв’язків.

2.2. Диференціальні рівняння вищих порядків, що інтегруються в квадратурах

Розглянемо деякі типи диференціальних рівнянь, що інтегруються в квадратурах.

1) Рівняння вигляду

$$y^{(n)} = f(x).$$

Проінтегрувавши його n-раз одержимо загальний розв'язок у вигляді

$$y = \underbrace{\int \ldots \int}_{n} f(x)\underbrace{dx \ \ldots \ dx}_{n} + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \ \ldots \ + C_{n-1}x + C_n \ .$$

Якщо задані умови Коші

$$y(x_0) = y_0, \ y'(x_0) = y_0', \ \ldots \ , y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$

то розв'язок має вигляд

$$y = \int_{x_0}^{x} \ldots \int_{x_0}^{x} f(x)dx \ \ldots \ dx + \frac{y_0}{(n-1)!}(x-x_0)^{(n-1)} +$$

$$+ \frac{y'_0}{(n-2)!}(x-x_0)^{(n-2)} + \ \ldots \ + y^{(n-2)}(x-x_0) + y_0^{(n-1)}.$$

2) Рівняння вигляду

$$F(x, y^{(n)}) = 0.$$

Нехай це рівняння вдалося записати в параметричному вигляді

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y^{(n)} = \psi(t). \end{cases}$$

Використовуючи основне співвідношення $dy^{(n-1)} = y^{(n)}dx$, одержимо

$$dy^{(n-1)} = \psi(t)\varphi'(t)dt.$$

Проінтегрувавши його, маємо

$$y^{(n-1)} = \int \psi(t)\varphi'(t)dt + C_1 = \psi_1(t, C_1).$$

І одержимо параметричний запис рівняння $(n-1)$-порядку

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y^{(n-1)} = \psi_1(t, C_1). \end{cases}$$

Проробивши зазначений процес ще $(n-1)$-раз, одержимо загальний розв'язок рівняння в параметричному вигляді

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi_n(t, C_1, \ \ldots \ , C_n) \end{cases}$$

3) Рівняння вигляду

$$F(y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0.$$

Нехай це рівняння вдалося записати в параметричному вигляді

$$\begin{cases} y^{(n-1)} = \varphi(t) \\ y^{(n)} = \psi(t). \end{cases}$$

Використовуючи основне співвідношення $dy^{(n-1)} = y^{(n)}dx$ **,** одержуємо

$dx = \dfrac{dy^{(n-1)}}{dy^{(n)}} = \dfrac{\varphi'(t)}{\psi(t)}dt$. Проінтегрувавши, маємо

$$x = \int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}dt + C_1 = \psi_1(t, C_1) .$$

І одержали параметричний запис рівняння $(n-1)$-порядку

$$\begin{cases} x = \psi_1(t, C_1) \\ y^{(n-1)} = \varphi(t). \end{cases}$$

Використовуючи попередній пункт, понизивши порядок на одиницю, запишемо

$$\begin{cases} x = \psi_1(t, C_1) \\ y^{(n-2)} = \varphi_2(t, C_2). \end{cases}$$

Проробивши останню процедуру $(n-2)$-раз, запишемо загальний розв’язок у параметричному вигляді

$$\begin{cases} x = \psi_1(t, C_1) \\ y = \varphi_n(t, C_2, \ \dots \ , C_n). \end{cases}$$

4) Нехай рівняння вигляду

$$F(y^{(n-2)}, y^{(n)}) = 0$$

можна розв'язати відносно старшої похідної

$$y^{(n)} = f(y^{(n-2)}) .$$

Домножимо його на $2y^{(n-1)}dx$ й одержимо

$$2y^{(n-1)}y^{(n)}dx = 2f(y^{(n-2)})y^{(n-1)}dx .$$

Перепишемо його у вигляді

$$d(y^{(n-1)})^2 = 2f(y^{(n-2)})d(y^{(n-2)}) .$$

Проінтегрувавши, маємо

$$(y^{(n-1)})^2 = 2\int f(y^{(n-2)})d(y^{(n-2)}) + C_1 ,$$

тобто $y^{(n-1)} = \pm\sqrt{2\int f(y^{(n-2)})d(y^{(n-2)}) + C_1}$,

або

$$y^{(n-1)} = \pm\psi_1(y^{(n-2)}, C_1) .$$

Таким чином одержали параметричний запис рівняння $(n-1)$-порядку

$$\begin{cases} y^{(n-2)} = t \\ y^{(n-1)} = \pm\psi_1(t, C_1) \end{cases}$$

і повернулися до третього випадку.

2.3. Найпростіші випадки зниження порядку в диференціальних рівняннях вищих порядків

Розглянемо деякі типи диференціальних рівнянь вищого порядку, що допускають зниження порядку.

1) Рівняння не містить шуканої функції і її похідних до $(k-1)$-порядку включно

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)} \ \dots \ , y^{(n)}) = 0 .$$

Зробивши заміну: $y^{(k)} = z,\ y^{(k+1)} = z',\ \dots\ ,\ y^{(n)} = z^{(n-k)}$,

одержимо рівняння $(n-k)$-порядку $F(x, z, y',\ \dots\ , z^{(n-k)}) = 0$.

2) Рівняння не містить явно незалежної змінної

$$F(y, y',\ \dots\ , y^{(n)}) = 0 .$$

Будемо вважати, що y - нова незалежна змінна, а $y',\ \dots\ , y^{(n)}$ - функції від y. Тоді

$$\begin{aligned}
&y'_x = p(y),\\
&y''_{x^2} = \frac{d}{dx} y'_x = \frac{d}{dy}(p(y))\frac{dy}{dx} = p'_y p,\\
&y'''_{x^3} = \frac{d}{dx} y''_{x^2} = \frac{d}{dy}(p'_y p)\frac{dy}{dx} = (p''_{y^2} p + p'^2_{y^2})p,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

Після підстановки одержимо $F(y, p, p'_y p, (p''_{y^2} p + p'^2)p,\ \dots\ , p^{(n-1)}) = 0$ диференціальне рівняння $(n-1)$-порядку.

3) Нехай функція F диференціального рівняння

$$F(x, y, y',\ \dots\ , y^{(n)}) = 0$$

є однорідної щодо аргументів $y, y',\ \dots\ , y^{(n)}$.

Робимо заміну $y = e^{\int u dx}$, де $u = u(x)$ - нова невідома функція. Одержимо

$$\begin{aligned}
&y' = e^{\int u dx} u,\\
&y'' = e^{\int u dx} u^2 + e^{\int u dx} u' = e^{\int u dx}(u^2 + u'),\\
&y''' = e^{\int u dx} u(u^2 + u') + e^{\int u dx}(2uu' + u'') =\\
&\quad = e^{\int u dx}(u^3 + 3uu' + u''),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

Після підстановки одержимо

$$F(x, e^{\int udx}, e^{\int udx}u\ , e^{\int udx}(u^2+u'), e^{\int udx}(u^3+3uu'+u''),\ \ldots)=0\,.$$

Оскільки рівняння однорідне відносно $e^{\int udx}$, то цей член можна винести і на нього скоротити. Одержимо

$F(x,1,u\ ,u^2+u',u^3+3uu'+u'',\ \ldots\ ,u^{(n-1)})=0$

диференціальне рівняння $(n-1)$-порядку.

4) Нехай ліва частина рівняння

$$F(x,y,y',\ \ldots\ ,y^{(n)})=0$$

є похідної деякого диференціального виразу ступеня $(n-1)$, тобто

$$\frac{d}{dx}\Phi(x,y,y',\ \ldots\ ,y^{(n-1)})=F(x,y,y',\ \ldots\ ,y^{(n)})\,.$$

У цьому випадку легко обчислюється, так званий, перший інтеграл

$$\Phi(x,y,y',\ \ldots\ ,y^{(n-1)})=C\,.$$

5) Нехай диференціальне рівняння

$$F(x,y,y',\ \ldots\ ,y^{(n)})=0\,,$$

розписано у вигляді диференціалів

$$\Phi(x,y,dx,dy,d^2y,\ \ldots\ ,d^ny)=0$$

і Φ - функція однорідна по всім перемінним. Зробимо заміну $x=e^t$, $y=ue^t$, де u, t - нові змінні. Тоді одержуємо

$$dx=e^t dt,\ y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{u'_t e^t+ue^t}{e^t}=u'_t+u\,,\ y''_{x^2}=\frac{d}{dx}y'_x=\frac{d}{dt}\left(u'_t+u\right)\frac{dt}{dx}=\frac{u''_{t^2}+u'_t}{e^t}\,,$$

$$y'''_{x^3}=\frac{d}{dx}y''_{x^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{u''_{t^2}+u'_t}{e^t}\right)\frac{dt}{dx}=$$
$$=\frac{\left(u'''_{t^3}+u''_{t^2}\right)e^t-\left(u''_{t^2}+u'_t\right)e^t}{e^{3t}}=\frac{u'''_{t^3}-u'_t}{e^{2t}}\ \ldots\ .$$

Підставивши, одержимо

$$\Phi(x,y,dx,dy,\ d^2y,\ \ldots,\ d^ny)=$$
$$=\Phi(e^t,ue^t,e^t dt,\ (u'_t+u)e^t dt,(u''_{t^2}+u'_t)e^t dt,\ \ldots)=0.$$

Скоротивши на e^t одержимо $\Phi(1,u,dt,u'_t+u,\ u''_{t^2}+u'_t,\ \ldots,\ u_t^{(n)})=0$.

Тобто одержимо диференціальне рівняння, що не містить явно незалежної змінної, або повертаємося до другого випадку.

3. Лінійні диференціальні рівняння вищих порядків

Рівняння вигляду

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ ...\ + a_n(x)y = b(x)$$

називається лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням n-го порядку.

Рівняння вигляду

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ ...\ + a_n(x)y = 0$$

називається лінійним однорідним диференціальним рівнянням n-го порядку.

Якщо при $x \in [a,b],\ a_0(x) \neq 0$ коефіцієнти $b(x),\ a_i(x),\ i = \overline{0,n}$ неперервні, то для рівняння

$$y^{(n)} = -\frac{a_1(x)}{a_0(x)}y^{(n-1)} - \ ...\ - \frac{a_n(x)}{a_0(x)}y + \frac{b(x)}{a_0(x)}.$$

виконуються умови теореми існування та єдиності і існує єдиний розв’язок $y = y(x)$, що задовольняє початковим умовам

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0^{'},\ ...\ ,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$

3.1. Лінійні однорідні рівняння

3.1.1. Властивості лінійних однорідних рівнянь

Властивість 1. Лінійність і однорідність зберігаються при довільному перетворенні незалежної змінної $x = \varphi(t)$.

Дійсно, після заміни $x = \varphi(t)$**,** одержимо

$$y_x^{'} = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\varphi^{'}(t)}\frac{dy}{dt},$$

$$y_{x^2}^{''} = \frac{d}{dx}y_x^{'} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\varphi^{'}(t)}\frac{dy}{dt}\right)\frac{1}{\varphi'(t)} = -\frac{\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^2}\frac{dy}{dx} + \frac{1}{(\varphi'(t))^2}\frac{d^2y}{dt^2}.$$

І після підстановки і приведення подібних, одержимо знову лінійне однорідне рівняння

$$A_0(t)\frac{d^ny}{dt^n} + A_1(t)\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \ ...\ + A_n(t)y = 0\ .$$

Властивість 2. Лінійність і однорідність зберігаються при лінійному перетворенні невідомої функції $y = \alpha(x)z$.

Дійсно, після заміни $y = \alpha(x)z$, одержимо

$$y_x^{'} = \alpha'(x)z + \alpha(x)z'$$

$$y_{x^2}^{''} = \alpha''(x)z + 2\alpha'(x)z' + \alpha(x)z''$$

....

І після підстановки одержимо знову лінійне однорідне рівняння

$$\overline{A_0}(x)z^{(n)}+\overline{A_1}(x)z^{(n-1)}+\ \dots\ +\overline{A_n}(x)z=0\,.$$

3.1.2. Властивості розв'язків лінійних однорідних рівнянь

Властивість 1. Якщо $y=y_1(x)$ є розв'язком однорідного лінійного рівняння, то і $y=Cy_1(x)$, де C - довільна стала, теж буде розв'язком однорідного лінійного рівняння.

Дійсно, нехай $y=y_1(x)$ - розв'язок лінійного однорідного рівняння, тобто

$$a_0(x)y_1^{(n)}(x)+a_1(x)y_1^{(n-1)}(x)+\ \dots\ +a_n(x)y_1(x)\equiv 0\,.$$

Тоді і

$$\begin{aligned}&a_0(x)[Cy(x)]^{(n)}+a_1(x)[Cy_1(x)]^{(n-1)}+\ \dots\ +a_n(x)Cy_1(x)=\\&=C[a_0(x)y_1^{(n)}(x)+a_1(x)y_1^{(n-1)}(x)+\ \dots\ +a_n(x)y_1(x)]\equiv 0,\end{aligned}$$

оскільки вираз в дужках дорівнює нулю.

Властивість 2. Якщо $y_1(x)$ і $y_2(x)$ є розв'язками лінійного однорідного рівняння, то і $y=y_1(x)+y_2(x)$ теж буде розв'язком лінійного однорідного рівняння.

Дійсно, нехай $y_1(x)$ і $y_2(x)$ - розв'язки лінійного рівняння, тобто

$$\begin{aligned}&a_0(x)y_1^{(n)}(x)+a_1(x)y_1^{(n-1)}(x)+\ \dots\ +a_n(x)y_1(x)\equiv 0,\\&a_0(x)y_2^{(n)}(x)+a_1(x)y_2^{(n-1)}(x)+\ \dots\ +a_n(x)y_2(x)\equiv 0.\end{aligned}$$

Тоді і

$$\begin{aligned}&a_0(x)[y_1(x)+y_2(x)]^{(n)}+a_1(x)[y_1(x)+y_2(x)]^{(n-1)}+\ \dots +\\&+a_n(x)[y_1(x)+y_2(x)]=\\&=[a_0(x)y_1^{(n)}(x)+a_1(x)y_1^{(n-1)}(x)+\ \dots\ +a_n(x)y_1(x)]+\\&+[a_0(x)y_2^{(n)}(x)+a_1(x)y_2^{(n-1)}(x)+\ \dots\ +a_n(x)y_2(x)]\equiv 0,\end{aligned}$$

оскільки обидві дужки дорівнюють нулю.

Властивість 3. Якщо $y_1(x),\ y_2(x),\dots\ ,y_n(x)$ - розв'язки однорідного лінійного рівняння, то і $y=\sum\limits_{i=1}^{n}C_iy_i(x)$, де $C_1,\ C_2,\ ,C_n$- довільні сталі, також буде розв'язком лінійного однорідного рівняння.

Дійсно, нехай $y_i(x),\ i=1,n$ - розв'язки лінійного однорідного рівняння, тобто

$a_0(x)y_i^{(n)}(x)+a_1(x)y_i^{(n-1)}(x)+\dots+a_n(x)y_i\,(x)\equiv 0$, $i=\overline{1,n}$.

Тоді і

$$\begin{aligned}&a_0(x)\left[\sum_{i=1}^{n}C_iy_i(x)\right]^{(n)}+a_1(x)\left[\sum_{i=1}^{n}C_iy_i(x)\right]^{(n-1)}+\ \dots\\&+a_n(x)\left[\sum_{i=1}^{n}C_iy_i(x)\right]=\sum_{i=1}^{n}C_i\left[a_0(x)y_i^{(n)}(x)+\dots+a_n(x)y_i(x)\right]\equiv 0,\end{aligned}$$

оскільки кожна дужка дорівнює нулю.

Властивість 4. Якщо комплексна функція дійсного аргументу $y = u(x) + iv(x)$ є розв'язком лінійного однорідного рівняння, то окремо дійсна частина $u(x)$ і уявна $v(x)$ будуть також розв'язками цього рівняння.

Дійсно, нехай $y = u(x) + iv(x)$ є розв'язком лінійного однорідного рівняння, тобто

$$a_0(x)[u(x) + iv(x)]^{(n)} + a_1(x)[u(x) + iv(x)]^{(n-1)} + \ldots$$
$$+ a_n(x)[u(x) + iv(x)] \equiv 0.$$

Розкривши дужки і перегрупувавши члени, одержимо

$$[a_0(x)u^{(n)}(x) + a_1(x)u^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n(x)u(x)]$$
$$+ i[a_0(x)v^{(n)}(x) + a_1(x)v^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n(x)v(x)] \equiv 0.$$

Комплексний вираз дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли дорівнюють нулю дійсна і уявна частини, тобто

$$a_0(x)u^{(n)}(x) + a_1(x)u^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n(x)u(x) \equiv 0,$$
$$a_0(x)v^{(n)}(x) + a_1(x)v^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n(x)v(x) \equiv 0,$$

або функції $u(x)$, $v(x)$ є розв'язками рівняння, що і було потрібно довести.

3.1.3. Лінійна залежність і незалежність розв'язків. Загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння вищого порядку

Визначення. Функції $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ називаються лінійно залежними на відрізку $[a,b]$ якщо існують не всі рівні нулю сталі $C_1, \ldots, C_n$ такі, що при всіх $x \in [a,b]$

$$C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x) \equiv 0.$$

Якщо ж тотожність справедлива лише $C_1 = C_2 = \ldots = C_n = 0$, то функції $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ називаються лінійно незалежними.

Приклад 3.1.1. Функції $1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}$ - лінійно незалежні на будь-якому відрізку $[a,b]$**,** тому що вираз $C_1 + C_2 x + \ldots + C_n x^{n-1} = 0$ є многочленом ступеню $(n-1)$ і має не більш, ніж $(n-1)$ дійсних коренів.

Приклад 3.1.2. Функції $e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \ldots, e^{\lambda_n x}$, де всі λ_i - дійсні різні числа - лінійно незалежні.

Приклад 3.1.3. Функції $1, \sin x, \cos x, \ldots, \sin nx, \cos nx$ - лінійно незалежні.

Теорема (*необхідна умова лінійної незалежності функцій***).** Якщо функції $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ - лінійно залежні, то визначник $W[y_1(x), \ldots, y_n(x)]$, який називається визначником Вронського, тотожно дорівнює нулю при всіх $x \in [a,b]$**,**

$$W[y_1, \ldots, y_n] = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x) & \ldots & y'_n(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \equiv 0.$$

Доведення. Нехай $y_1(x)\ y_2(x)\ ...\ y_n(x)$ - лінійно залежні. Тоді існують не всі рівні нулю сталі $C_1,\ ...\ ,C_n$ такі, що при $x \in [a,b]$ буде тотожно виконуватися: $C_1 y_1(x) + C_2\, y_2(x) +\ ... + C_n y_n(x) \equiv 0.$

Продиференціювавши $(n-1)$ - раз , одержимо

$$\begin{cases} C_1 y_1(x) \ + \ C_2 y_2(x) + \ ... \ + C_n\, y_n(x) = 0 \\ C_1 y'_1(x) \ + \ C_2 y'_2(x) + \ ... \ + C_n y'_n(x) = 0 \\ .... \\ C_1 y_1^{(n-1)}(x) + \ C_2 y_2^{(n-1)}(x) + \ ... \ + C_n y_n^{(n-1)}(x) = 0. \end{cases}$$

Для кожного фіксованого $x \in [a,b]$ одержимо лінійну однорідну систему алгебраїчних рівнянь, що має ненульовий розв'язок $C_1,\ ...\ ,C_n$. А це можливо тоді і тільки тоді, коли визначник системи дорівнює нулю, тобто $W[y_1,\ ...\ ,y_n] \equiv 0$ при всіх $x \in [a,b]$**.**

Теорема (*достатня умова лінійної незалежності розв'язків***).** Якщо розв'язки лінійного однорідного рівняння $y_1(x)\ y_2(x)\ ...\ y_n(x)$ - лінійно незалежні, то визначник Вронського $W[y_1,\ ...\ ,y_n]$ не дорівнює нулю в жодній точці $x \in [a,b]$**.**

Доведення. Припустимо, від супротивного, що існує $x_0 \in [a,b]$, при якому $W[y_1(x_0),\ ...\ ,y_n(x_0)] = 0$. Оскільки визначник дорівнює нулю, то існує ненульовий розв'язок $C_1^0,\ C_2^0,\ ...\ ,\ C_n^0$ лінійної однорідної системи алгебраїчних рівнянь.

$$\begin{cases} C_1^0 y_1(x) \ + \ C_2^0 y_2(x) + \ ... \ + C_n^0\, y_n(x) = 0 \\ C_1^0 y'_1(x) \ + \ C_2^0 y'_2(x) + \ ... \ + C_n^0 y'_n(x) = 0 \\ .... \\ C_1^0 y_1^{(n-1)}(x) + \ C_2^0 y_2^{(n-1)}(x) + \ ... \ + C_n^0 y_n^{(n-1)}(x) = 0. \end{cases}$$

Розглянемо лінійну комбінацію $y = C_1^0 y_1(x_0) +\ ...\ C_n^0 y_n(x_0)$ з отриманими коефіцієнтами.

У силу третьої властивості ця комбінація буде роз'язком. У силу вибору сталих $C_1^0,\ C_2^0,\ ...\ ,\ C_n^0$, розв'язок буде задовольняти умовам

$$y(x_0) = 0,\ y'(x_0) = 0,\ ...\ y^{(n-1)}(x_0) = 0.$$

Але цим же умовам, як неважко перевірити простою підстановкою, задовольняє і тотожний нуль, тобто $y(x) \equiv 0$. І в силу теореми існування та єдиності ці два розв'язки співпадають, тобто $C_1^0 y_1(x_0) +\ ...\ C_n^0 y_n(x_0) \equiv 0$ при $x \in [a,b]$**,** або система функцій $y_1(x)\ y_2(x)\ ...\ y_n(x)$ лінійно залежна, що суперечить припущенню. Таким чином $W[y_1(x),\ ...\ ,y_n(x)] \neq 0$ у жодній точці $x_0 \in [a,b]$, що і було потрібно довести .

На підставі попередніх двох теорем сформулюємо необхідні і достатні умови лінійної незалежності розв'язків лінійного однорідного рівняння.

Теорема. Для того щоб розв'язки лінійного однорідного диференціального рівняння

$y_1(x), \dots, y_n(x)$ були лінійно незалежними, необхідно і достатньо, щоб визначник Вронського не дорівнював нулю в жодній точці $x \in [a,b]$**,** тобто $W[y_1(x), \dots, y_n(x)] \neq 0$**.**

Теорема. Загальним розв'язком лінійного однорідного рівняння

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = 0$$

є лінійна комбінація n - лінійно незалежних розв'язків $y = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x)$.

Доведення. Оскільки $y_i(x), i = 1, 2, \dots n$ є розв'язками, то в силу третьої властивості їхня лінійна комбінація також буде розв'язком.

Покажемо, що цей розв'язок загальний, тобто вибором сталих $C_1, \dots, C_n$ можна розв'язати довільну задачу Коші

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0', \dots y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$

Дійсно, оскільки система розв'язків лінійно незалежна, то визначник Вронського відмінний від нуля й алгебраїчна система неоднорідних рівнянь

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + \dots + C_n y_n(x_0) = y_0 \\ C_1 y'_1(x_0) + C_2 y'_2(x_0) + \dots + C_n y'_n(x_0) = y_o' \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \dots + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \end{cases}$$

має єдиний розв'язок $C_1^0, C_2^0, \dots, C_n^0$. І лінійна комбінація $y = \sum_{i=1}^{n} C_i^0 y_i(x)$ є розв'язком, причому, як видно із системи алгебраїчних рівнянь, буде задовольняти довільно обраним умовам Коші.

Властивість. Максимальне число лінійно незалежних розв'язків дорівнює порядку рівняння.

Це випливає з попередньої теореми, тому що будь-який розв'язок виражається через лінійну комбінацію n - лінійно незалежних розв'язків.

Визначення. Будь-які n -лінійно незалежних розв'язків лінійного однорідного рівняння n-го порядку називаються фундаментальною системою розв'язків.

3.1.4. Формула Остроградського - Ліувіля

Оскільки максимальне число лінійно незалежних розв'язків дорівнює n, то система $y_1(x), \dots, y_n(x), y(x)$ буде залежною і $W[y_1(x), \dots, y_n(x), y(x)] \equiv 0$**,** тобто

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) & y(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x) & \dots & y'_n(x) & y'(x) \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots & \\ y_1^{(n)}(x) & y_2^{(n)}(x) & \dots & y_n^{(n)}(x) & y^{(n)}(x) \end{vmatrix} \equiv 0.$$

Розкладаючи визначник по елементах останнього стовпця, одержимо

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x) & \dots & y'_n(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} y^{(n)} -$$

$$-\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x) & \dots & y'_n(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)}(x) & y_2^{(n-2)}(x) & \dots & y_n^{(n-2)}(x) \\ y_1^{(n)}(x) & y_2^{(n)}(x) & \dots & y_n^{(n)}(x) \end{vmatrix} y^{(n-1)} + \dots = 0.$$

Порівнюючи з рівнянням $a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = 0,$

одержимо, що

$$\frac{a_1(x)}{a_0(x)} = -\frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x) & \dots & y'_n(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)}(x) & y_2^{(n-2)}(x) & \dots & y_n^{(n-2)}(x) \\ y_1^{(n)}(x) & y_2^{(n)}(x) & \dots & y_n^{(n)}(x) \end{vmatrix}}{W[y_1, y_2, \dots, y_n]}.$$

Але оскільки

$$\frac{d}{dx}W[y_1, y_2, \dots, y_n] = \begin{vmatrix} y'_1(x) & y'_2(x) & \dots & y'_n(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x) & \dots & y'_n(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} +$$

$$+\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y''_1(x) & y''_2(x) & \dots & y''_n(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} + \dots +$$

$$+\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x) & \dots & y'_n(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)}(x) & y_2^{(n-2)}(x) & \dots & y_n^{(n-2)}(x) \\ y_1^{(n)}(x) & y_2^{(n)}(x) & \dots & y_n^{(n)}(x) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x) & \dots & y'_n(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)}(x) & y_2^{(n-2)}(x) & \dots & y_n^{(n-2)}(x) \\ y_1^{(n)}(x) & y_2^{(n)}(x) & \dots & y_n^{(n)}(x) \end{vmatrix},$$

то, підставивши в попередній вираз, одержимо

$$-\frac{a_1(x)}{a_0(x)}=\frac{\frac{d}{dx}W\left[y_1,y_2,\ \dots\ ,y_n\right]}{W\left[y_1,y_2,\ \dots\ ,y_n\right]}$$

Розділимо змінні

$$-\frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx=\frac{dW\left[y_1,y_2,\ \dots\ ,y_n\right]}{W\left[y_1,y_2,\ \dots\ ,y_n\right]}.$$

Проінтегрувавши, одержимо

$$\ln W_1[y_1(x),\ \dots\ ,y_n(x)]-\ln W_1[y_1(x_0),\ \dots\ ,y_n(x_0)]=$$
$$=-\int_{x_0}^{x}\frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx,$$

або

$$W\left[y_1(x),y_2(x),\ \dots\ ,y_n(x)\right]=$$
$$=W\left[y_1(x),y_2(x),\ \dots\ ,y_n(x)\right]e^{-\int_{x_0}^{x}\frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx}.$$

Отримана формула називається формулою Остроградського - Ліувілля. Зокрема, якщо рівняння має вид

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\ \dots\ +p_n(x)y=0,$$

то формула запишеться у вигляді

$$W\left[y_1(x),y_2(x),\ \dots\ ,y_n(x)\right]=$$
$$=W\left[y_1(x_0),y_2(x_0),\ \dots\ ,y_n(x_0)\right]e^{-\int_{x_0}^{x}p_1(x)dx}.$$

3.1.5. Формула Абеля

Розглянемо застосування формули Остроградського - Ліувіля до рівняння 2-го порядку

$$y''+p_1(x)y'+p_2(x)y=0.$$

Нехай $y_1(x)$ - один з розв'язків. Тоді

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y \\ y_1'(x) & y' \end{vmatrix}=C_2e^{-\int p_1(x)dx}.$$

Розкривши визначник, одержимо

$$y'y_1(x)-yy_1'(x)=C_2e^{-\int p_1(x)dx}.$$

Розділивши на $y_1^2(x)$, запишемо

$$\frac{y'y_1(x)-yy_1'(x)}{y_1^2(x)}=C_2\frac{1}{y_1^2(x)}e^{-\int p_1(x)dx},$$

або

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{y_1(x)}\right)=C_2\frac{1}{y_1^2(x)}e^{-\int p_1(x)dx}.$$

Проінтегрувавши, одержимо

$$\frac{y}{y_1(x)} = C_2 \int \frac{1}{y_1^2(x)} e^{-\int p_1(x)dx} dx + C_1.$$

Остаточно

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 \left\{ y_1(x) \int \frac{1}{y_1^2(x)} e^{-\int p_1(x)dx} dx \right\}.$$

Отримана формула називається формулою Абеля. Вона дозволяє по одному відомому розв'язку знайти загальний розв'язок однорідного лінійного рівняння другого порядку.

3.1.7. Лінійні однорідні рівняння зі сталими коефіцієнтами

Розглянемо лінійні однорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0 .$$

Розв'язок будемо шукати у вигляді $y = e^{\lambda x}$. Продиференціювавши, одержимо $y' = \lambda e^{\lambda x}, \; y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}, \; \ldots \; y^{(n)} = \lambda^n e^{\lambda x}$. Підставивши $y, y', \ldots, y^{(n)}$ в диференціальне рівняння, отримаємо

$$\lambda^{(n)} e^{\lambda x} + a_1 \lambda^{(n-1)} e^{\lambda x} + \ldots + a_n e^{\lambda x} = 0 .$$

Скоротивши на $e^{\lambda x}$, одержимо характеристичне рівняння

$$\lambda^{(n)} + a_1 \lambda^{(n-1)} + \ldots + a_n = 0 .$$

Алгебраїчне рівняння n-го степеня має n- коренів. У залежності від їхнього вигляду будемо мати різні розв'язки.

1) Нехай $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ - дійсні і різні. Тоді функції $e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \ldots, e^{\lambda_n x}$ є розв'язками й оскільки всі λ_i різні, то $e^{\lambda_i x}$ - розв'язки лінійно незалежні, тобто $\left\{e^{\lambda_i x}\right\}_{i=\overline{1,n}}$ фундаментальна система розв'язків. Загальним розв'язком буде лінійна комбінація $y = \sum_{i=1}^{n} C_i e^{\lambda_i x}$.

2) Нехай маємо комплексно спряжені корені $\lambda = p + iq, \; \overline{\lambda} = p - iq$. Їм відповідають розв'язки $e^{(p+iq)x}, e^{(p-iq)x}$. Розкладаючи їх по формулі Ейлера, одержимо:

$$e^{(p+iq)x} = e^{px} e^{iqx} = e^{px} \cos qx + i e^{px} \sin qx = u(x) + iv(x),$$
$$e^{(p-iq)x} = e^{px} e^{-iqx} = e^{px} \cos qx - i e^{px} \sin qx = u(x) - iv(x).$$

І, як випливає з властивості 4, функції $u(x)$ й $v(x)$ будуть окремими розв'язками. Таким чином, кореням $\lambda = p + iq, \; \overline{\lambda} = p - iq$ відповідають два лінійно незалежних розв'язки $u = e^{px} \cos qx, \;\; v = e^{px} \sin qx$. Загальним розв'язком, що відповідає цим двом кореням, буде $y = C_1 e^{px} \cos qx + C_2 e^{px} \sin qx$.

3) Нехай λ - кратний корінь, кратності k, тобто

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k, \; k \le n \; .$$

а) Розглянемо випадок $\lambda = 0$. Тоді характеристичне рівняння

$$\lambda^{(n)} + a_1\lambda^{(n-1)} + \dots + a_n = 0$$

вироджується в рівняння

$$\lambda^{(n)} + a_1\lambda^{(n-1)} + \dots + a_{n-k}\lambda^{\kappa} = 0 .$$

Диференціальне рівняння, що відповідає цьому характеристичному, запишеться у вигляді $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-k} y^{(k)} = 0$. Неважко бачити, що частковими, лінійно незалежними розв'язками цього рівняння, будуть функції $1, x, x^2, \dots, x^{k-1}$. Загальним розв'язком, що відповідає кореню λ кратності k, буде лінійна комбінація цих функцій

$$y = C_1 + C_2 x + \dots + C_k x^{k-1} .$$

б) Нехай $\lambda = v \ne 0$ - корінь дійсний. Зробивши заміну $y = e^{vx} z$, на підставі властивості 2 лінійних рівнянь після підстановки знову одержимо лінійне однорідне диференціальне рівняння $z^{(k)} + b_1 z^{(k-1)} + \dots + b_k z = 0$. Причому, оскільки $y_i(x) = ^{\lambda_i x}$, а $z_i(x) = e^{\mu_i x}$, то показники $\lambda_i, \; \mu_i$ зв'язані співвідношенням $\lambda_i = v_i + \mu_i$. Звідси кореню $\lambda = v$ кратності k відповідає корінь $\mu = 0$ кратності k. Як випливає з попереднього пункту, кореню $\mu = 0$ кратності k відповідає загальний розв'язок вигляду $z = C_1 + C_2 x + \dots, + C_k x^{k-1}$.

З огляду на те, що $y = e^{vx} z$, одержимо, що кореню $\lambda = v$ кратності k відповідає розв'язок

$$y = C_1 e^{vx} + C_2 x e^{vx} + \dots + C_k x^{k-1} e^{vx} .$$

в) Нехай характеристичне рівняння має корені $\lambda = p + iq, \; \overline{\lambda} = p - iq$ кратності k. Проводячи аналогічні викладки одержимо, що їм відповідають лінійно незалежні розв'язки

$$\begin{gathered} e^{px}\cos qx, \; xe^{px}\cos qx, \; \dots, x^{k-1}e^{px}\cos qx; \\ e^{px}\sin qx, \; xe^{px}\sin qx, \; \dots, x^{k-1}e^{px}\sin qx. \end{gathered}$$

І загальним розв'язком, що відповідає цим кореням буде

$$\begin{aligned} y = {} & C_1 e^{px}\cos qx + C_2 x e^{px}\cos qx + \dots + C_k x^{k-1} e^{px}\cos qx + \\ & + C_{k+1} e^{px}\sin qx + C_{k+2} x e^{px}\sin qx + \dots + C_{2k} x^{k-1} e^{px}\sin qx. \end{aligned}$$

3.2. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння

Загальний вигляд лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь наступний

$a_0(x) y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \dots + a_n(x) y = b(x)$.

3.2.1. Властивості розв'язків лінійних неоднорідних рівнянь. Загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння

Властивість 1. Якщо $y_0(x)$ - розв'язок лінійного однорідного рівняння, $y_1(x)$- розв'язок неоднорідного рівняння, то $y = y_0(x) + y_1(x)$ буде розв'язком лінійного неоднорідного диференціального рівняння.

Дійсно, нехай $y_0(x)$ і $y_1(x)$ - розв'язки відповідно однорідного і неоднорідного рівнянь, тобто

$$\begin{aligned}
&a_0(x)y_0^{(n)}(x) + a_1(x)y_0^{(n-1)}(x) + \ ... \ + a_n(x)y_0(x) \equiv 0, \\
&a_0(x)y_1^{(n)}(x) + a_1(x)y_1^{(n-1)}(x) + \ ... \ + a_n(x)y_1(x) \equiv b(x).
\end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned}
&a_0(x)[y_0(x) + y_1(x)]^{(n)} + a_1(x)[y_0(x) + y_1(x)]^{(n-1)} + \ ... \\
&+ a_n(x)[y_0(x) + y_1(x)] = [a_0(x)y_0^{(n)}(x) + a_1(x)y_0^{(n-1)}(x) + \ ... \\
&+ a_n(x)y_0(x)] + [a_0(x)y_1^{(n)}(x) + a_1(x)y_1^{(n-1)}(x) + \ ... \\
&+ a_n(x)y_1(x)] \equiv b(x),
\end{aligned}$$

тобто $y = y_0(x) + y_1(x)$ - розв'язок неоднорідного диференціального рівняння.

Властивість 2 (*принцип суперпозиції*). Якщо $y_i(x),\ i = \overline{1,n}$ - розв'язки лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ ... \ + a_n(x)y = b_i(x)\ ,\ i = \overline{1,m}\ ,$$

то $y = \sum\limits_{i=1}^{m} C_i y_i(x)$ з довільними сталими C_i буде розв'язком лінійного неоднорідного рівняння

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ ... \ + a_n(x)y = \sum_{i=1}^{m} C_i b_i(x).$$

Дійсно, нехай $y_i(x)$- розв'язки відповідних неоднорідних рівнянь, тобто

$$a_0(x)y_i^{(n)}(x) + a_1(x)y_i^{(n-1)}(x) + \ ... \ + a_n(x)y_i(x) \equiv b_i(x)$$

Склавши лінійну комбінацію з рівнянь і їхніх правих частин з коефіцієнтами C_i одержимо

$$\sum_{i=1}^{m} C_i \left[a_0(x)y_i^{(n)}(x) + a_1(x)y_i^{(n-1)}(x) + \ ... \ + a_n(x)y_i(x)\right] \equiv \sum_{i=1}^{m} C_i b_i(x)$$

або, перегрупувавши, запишемо

$$\begin{aligned}
&a_0(x)\left[\sum_{i=1}^{m} C_i y_i(x)\right]^{(n)} + a_1(x)\left[\sum_{i=1}^{m} C_i y_i(x)\right]^{(n-1)} + \ ... \\
&+ a_n(x)\left[\sum_{i=1}^{m} C_i y_i(x)\right] \equiv \sum_{i=1}^{m} C_i b_i(x),
\end{aligned}$$

що і було потрібно довести.

Властивість 3. Якщо комплексна функція $y = u(x) + iv(x)$ з дійсними елементами є розв'язком лінійного неоднорідного рівняння з комплексною правою частиною $b(x) = f(x) + ip(x)$**,** то дійсна частина $u(x)$ є розв'язком рівняння з правою частиною $f(x)$**,** а уявна $v(x)$ є розв'язком рівняння з правою частиною $p(x)$.

Дійсно, як випливає з умови,

$$\begin{aligned} &a_0(x)[u(x) + iv(x)]^{(n)} + a_1(x)[u(x) + iv(x)]^{(n-1)} + \ ... \\ &+ a_n(x)[u(x) + iv(x)] \equiv f(x) + ip(x). \end{aligned}$$

Розкривши дужки, одержимо

$$\begin{aligned} &[a_0(x)u^{(n)}(x) + a_1(x)u^{(n-1)}(x) + \ ... \\ &+ a_n(x)u(x)] + i[a_0(x)v^{(n)}(x) + a_1(x)v^{(n-1)}(x) + \ ... \\ &+ a_n(x)v(x)] = f(x) + ip(x). \end{aligned}$$

А комплексні вирази дорівнюють між собою тоді і тільки тоді, коли дорівнюють окремо дійсні та уявні частини, тобто

$$\begin{aligned} &a_0(x)u^{(n)}(x) + a_1(x)u^{(n-1)}(x) + \ ... \ + a_n(x)u(x) \equiv f(x), \\ &a_0(x)v^{(n)}(x) + a_1(x)v^{(n-1)}(x) + \ ... \ + a_n(x)v(x) \equiv p(x), \end{aligned}$$

що і було потрібно довести.

Теорема. Загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння складається з загального розв'язку лінійного однорідного рівняння і частинного розв'язку неоднорідного рівняння.

Доведення. Нехай $y_{одн} = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x)$ - загальний розв'язок однорідного рівняння, а $y_{неодн}(x)$ частинний розв'язок неоднорідного рівняння.

Тоді, як випливає з властивості I розв'язків неоднорідних рівнянь, $y = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x) + y_{неодн}(x)$, буде розв'язком неоднорідного рівняння. Покажемо, що цей розв'язок загальний, тобто вибором коефіцієнтів C_i можна розв'язати довільну задачу Коші $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$, ... , $y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$.

Дійсно, оскільки $y_{одн} = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x)$ загальний розв'язок однорідного рівняння, то $y_1(x), y_2(x), \ ... \ , y_n(x)$ лінійно незалежні, а отже визначник Вронського $W[y_1, y_2, \ ... \ y_n] \neq 0$. Звідси, неоднорідна система лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + \ ... \ + C_n y_n(x_0) = y_0 - y_{неодн}(x_0) \\ C_1 y'_1(x_0) + C_2 y'_2(x_0) + \ ... \ + C_n y'_n(x_0) = y'_0 - y'_{неодн}(x_0) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \ ... \ + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} - y_{неодн}^{(n-1)}(x_0). \end{cases}$$

має єдиний розв’язок для довільних наперед обраних значень $y_0, y_0^{'}, \ldots, y_0^{(n-1)}$. Нехай розв’язком системи буде $C_1^0, C_2^0, \ldots, C_n^0$. Тоді, як випливає з вигляду системи, функція $y=\sum_{i=1}^{n} C_i^0 y_i(x)+y_{неодн}(x)$ є розв’язком поставленому задачі Коші.

Як випливає з теореми для знаходження загального розв’язку лінійного неоднорідного рівняння треба шукати загальний розв’язок однорідного рівняння, тобто будь-які n - лінійно незалежні розв’язки і якийсь частинний розв’язок неоднорідного рівняння. Розглянемо три методи побудови частинного розв’язку лінійного неоднорідного рівняння.

3.2.2 Метод варіації довільної сталої побудови частинного розв’язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння

Метод варіації довільної сталої полягає в тому, що розв’язок неоднорідного рівняння шукається в такому ж вигляді, як і розв’язок однорідного, але сталі $C_i, i=\overline{1,n}$ вважаються невідомими функціями. Нехай загальний розв’язок лінійного однорідного рівняння

$$a_0(x)y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+a_n(x)y=0$$

записано у вигляді $y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\ldots+C_ny_n(x)$.

Розв’язок лінійного неоднорідного рівняння

$$a_0(x)y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+a_n(x)y=b(x)$$

шукаємо у вигляді $y=C_1(x)y_1(x)+C_2(x)y_2(x)+\ldots+C_n(x)y_n(x)$, де $C_i(x),\ i=\overline{1,n}$ - невідомі функції. Оскільки підбором n - функцій необхідно задовольнити одному рівнянню, тобто одній умові, то $n-1$ умову можна накласти довільно. Розглянемо першу похідну від записаного розв’язку

$$y'=\sum_{i=1}^{n} C_i(x)y_i^{'}(x)+\sum_{i=1}^{n} C_i^{'}(x)y_i(x)$$

і зажадаємо, щоб $\sum_{i=1}^{n} C_i^{'}(x)y_i(x)=0$. Розглянемо другу похідну

$$y''=\sum_{i=1}^{n} C_i(x)y_i^{''}(x)+\sum_{i=1}^{n} C_i^{'}(x)y_i^{'}(x)$$

і зажадаємо, щоб $\sum_{i=1}^{n} C_i^{'}(x)y_i^{'}(x)=0$. Продовжимо процес взяття похідних до $(n-1)$-ї

$$y^{(n-1)}=\sum_{i=1}^{n} C_i(x)y_i^{(n-1)}(x)+\sum_{i=1}^{n} C_i^{'}(x)y_i^{(n-2)}(x)$$

і зажадаємо, щоб $\sum_{i=1}^{n} C_i^{'}(x)y_i^{(n-2)}(x)=0$. На цьому $(n-1)$ - умова вичерпалася. І для n-ї похідної справедливо

$$y^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} C_i(x) y_i^{(n)}(x) + \sum_{i=1}^{n} C_i^{'}(x) y_i^{(n-1)}(x) .$$

Підставимо взяту функцію та її похідні в неоднорідне диференціальне рівняння

$$a_0(x)\left[\sum_{i=1}^{n} C_i(x) y_i^{(n)}(x)\right] + a_0(x)\left[\sum_{i=1}^{n} C_i^{'} y_i^{(n-1)}(x)\right] + \ ...$$
$$+ a_1(x)\left[\sum_{i=1}^{n} C_i\, y_i^{(n-1)}(x)\right] + \ ... \ + a_n(x)\left[\sum_{i=1}^{n} C_i(x) y_i(x)\right] = b(x).$$

Оскільки $y = \sum_{i=1}^{n} C_i(x) y_i(x)$ - розв'язок однорідного диференціального рівняння, то після скорочення одержимо n-у умову

$$\left[\sum_{i=1}^{n} C_i^{'} y_i^{(n-1)}(x)\right] = \frac{b(x)}{a_0(x)}.$$

Додаючи перші $(n-1)$ - умови, одержимо систему

$$\begin{cases} C_1^{'} y_1(x) + C_2^{'} y_2(x) + \ ... \ + C_n^{'} y_n(x) = 0 \\ \text{...} \\ C_1^{'} y_1^{(n-2)}(x) + C_2^{'} y_2^{(n-2)}(x) + \ ... \ + C_n^{'} y_n^{(n-2)}(x) = 0 \\ C_1^{'} y_1^{(n-1)}(x) + C_2^{'} y_2^{(n-1)}(x) + \ ... \ + C_n^{'} y_n^{(n-1)}(x) = \dfrac{b(x)}{a_0(x)}. \end{cases}$$

Оскільки визначником системи є визначник Вронського і він відмінний від нуля, то система має єдиний розв'язок

$$C_1(x) = \int \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2(x) & \text{.................} & y_n(x) \\ \text{............................} & & & \\ 0 & y_2^{(n-2)}(x) & \text{... ....} & y_n^{(n-2)}(x) \\ \dfrac{b(x)}{a_0(x)} & y_2^{(n-1)}(x) & ... & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}}{W[y_1, y_2, \ ... \ , y_n]} dx, \ ... \ ,$$

$$C_n(x) = \int \frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & ... & y_{n-1}(x) & 0 \\ \text{...........................} & & & & \\ y_1^{(n-2)}(x) & y_2^{(n-2)}(x) & .... & y_{n-1}^{(n-2)}(x) & 0 \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & ... & y_{n-1}^{(n-1)}(x) & \dfrac{b(x)}{a_0(x)} \end{vmatrix}}{W[y_1, y_2, \ ... \ , y_n]} dx.$$

І загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння запишеться у вигляді

$$y = \overline{C_1}\, y_1(x) + \overline{C_2}\, y_2(x) + \ ... \ + \overline{C_n}\, y_n(x) + y_{неодн}(x),$$

де $\overline{C_i}$ - довільні сталі, а

$$y_{неодн} = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x) + \ ... \ + C_n(x) y_n(x) .$$

Якщо розглядати диференціальне рівняння другого порядку

$$a_0(x)y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=b(x)$$

і загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд $y_{одн}(x)=C_1xy_1(x)+C_2y_2(x)$, то частинний розв'язок неоднорідного має вигляд $y_{неодн}(x)=C_1(x)xy_1(x)+C_2(x)y_2(x)$. І для знаходження функцій $C_1(x),C_2(x)$ маємо систему

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x)+C_2'(x)y_2(x)=0 \\ C_1'(x)y_1(x)+C_2'(x)y_2(x)=\dfrac{b(x)}{a_0(x)}. \end{cases}$$

Звідси

$$C_1(x)=\int \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2(x) \\ \dfrac{b(x)}{a_0(x)} & y_2'(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}}dx,\ C_2(x)=\int \frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & 0 \\ y_1'(x) & \dfrac{b(x)}{a_0(x)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}}dx.$$

І одержуємо $y_{неодн}(x)=C_1(x)y_1(x)+C_2(x)y_2(x)$ з обчисленими функціями $C_1(x)$ і $C_2(x)$.

3.2.3. Метод фундаментальних функцій Коші

Нехай $y=K(x,s)$ - розв'язок однорідного диференціального рівняння, що задовольняє умовам

$$K(s,s)=K_x'(s,s)=\ \dots\ =K_x^{(n-2)}(s,s)=0,\ K_x^{(n-1)}(s,s)=1.$$

Тоді функція

$$y(x)=\int_{x_0}^{x}K(x,s)\frac{b(s)}{a_0(s)}ds$$

буде розв'язком неоднорідного рівняння, що задовольняє початковим умовам $y(x_0)=y'(x_0)=\ \dots\ =y^{(n-1)}(x_0)=0$. Дійсно, розглянемо похідні від функції $y(x)$:

$$y'(x)=\int_{x_0}^{x}K_x'(x,s)\frac{b(s)}{a_0(s)}ds+K_x(x,x)\frac{b(x)}{a_0(x)}.$$

І, оскільки $K(x,x)=0$, то $y'=\int_{x_0}^{x}K_x'(x,s)\dfrac{b(s)}{a_0(s)}ds$. Аналогічно

$$y''(x)=\int_{x_0}^{x}K_x''(x,s)\frac{b(s)}{a_0(s)}ds+K_x'(x,x)\frac{b(x)}{a_0(x)}=\int_{x_0}^{x}K_x''(x,s)\frac{b(s)}{a_0(s)}ds.$$

………………………………………………

$$y^{(n-1)}(x)=\int_{x_0}^{x}K_x^{(n-1)}(x,s)\frac{b(s)}{a_0(s)}ds+K_x^{(n-2)}(x,x)\frac{b(x)}{a_0(x)}=$$
$$=\int_{x_0}^{x}K_x^{(n-1)}(x,s)\frac{b(s)}{a_0(s)}ds.$$

$$y^{(n)}(x)=\int_{x_0}^{x}K_x^{(n)}(x,s)\frac{b(s)}{a_0(s)}ds+K_x^{(n-1)}(x,x)\frac{b(x)}{a_0(x)}$$

І, оскільки $K_x^{(n-1)}=1$, то

$$y^{(n)}=\int_{x_0}^{x}K_x^{(n)}(x,s)\frac{b(s)}{a_0(x)}ds+\frac{b(x)}{a_0(x)}.$$

Підставивши функцію $y(x)$ і її похідні у вихідне диференціальне рівняння, одержимо

$$a_0(x)\left[\int_{x_0}^{x}K_x^{(n)}(x,s)\frac{b(s)}{a_0(s)}ds+\frac{b(x)}{a_0(x)}\right]+a_1(x)\left[\int_{x_0}^{x}K_x^{(n-1)}(x,s)\frac{b(s)}{a_0(s)}ds\right]+$$
$$a_n(x)\left[\int_{x_0}^{x}K_x(x,s)\frac{b(s)}{a_0(s)}ds\right]=$$
$$\int_{x_0}^{x}\left[a_0(x)K_x^{(n)}(x,s)+a_1(x)K_x^{(n-1)}(x,s)+\ \dots\ +a_n(x)K(x,s)\right]\frac{b(s)}{a_0(s)}ds+b(x)=b(x).$$

Оскільки $K(x,s)$ - є розв'язком лінійного однорідного рівняння і, отже ,

$$a_0(x)K_x^{(n)}(x,s)+a_1(x)K_x^{(n-1)}(x,s)+\ \dots\ +a_n(x)K(x,s)\equiv 0.$$

У такий спосіб показано, що $y(x)=\int_{x_0}^{x}K(x,s)\frac{b(s)}{a_0(s)}ds$ - є розв'язком лінійного неоднорідного рівняння.

Підставляючи $x=x_0$ в значення $y(x),\ y'(x),\ \dots\ ,\ y^{(n)}(x)$ одержимо, що

$$y(x_0)=y^{'}(x_0)=\ \dots\ =y^{(n-1)}(x_0)=0\,.$$

Для знаходження функції Коші $K(x,s)$ (інтегрального ядра) можна використати такий спосіб. Якщо $y_1(x),y_2(x),...,y_n(x)$ лінійно незалежні розв'язки однорідного рівняння, то загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд

$y_{одн}(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+...+C_ny_n(x)$. Оскільки $K(x,s)$ є розв'язком однорідного рівняння, то його слід шукати у вигляді

$$K(x,s)=C_1(s)y_1(x)+C_2(s)y_2(x)+...+C_n(s)y_n(x)\,.$$

Відповідні початкові умови мають вигляд

$$K(s,s)=0\ \rightarrow\ C_1(s)y_1(s)+C_2(s)y_2(s)+...+C_n(s)y_n(s)=0$$

$$K_x^{'}(s,s)=0\ \rightarrow\ C_1(s)y_1^{'}(s)+C_2(s)y_2^{'}(s)+...+C_n(s)y_n^{'}(s)=0$$

....

$$K_x^{n-2}(s,s)=0\ \rightarrow\ C_1(s)y_1^{(n-2)}(s)+C_2(s)y_2^{(n-2)}(s)+...+C_n(s)y_n^{(n-2)}(s)=0$$

$$K_x^{n-1}(s,s)=1 \;\to\; C_1(s)y_1^{(n-1)}(s)+C_2(s)y_2^{(n-1)}(s)+\ldots+C_n(s)y_n^{(n-1)}(s)=0\,.$$

Звідси

$$C_1(s)=\int\frac{\begin{vmatrix}0 & y_2(s) & \ldots\ldots\ldots\ldots & y_n(s)\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & y_2^{(n-2)}(s) & \ldots\ldots & y_n^{(n-2)}(s)\\ 1 & y_2^{(n-1)}(s) & \ldots\ldots & y_n^{(n-1)}(s)\end{vmatrix}}{W\left[y_1(s),y_2(s),\;\ldots\;,y_n(s)\right]}ds,$$

$$C_2(s)=\int\frac{\begin{vmatrix}y_1(s) & 0 & \ldots & y_n(s)\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ y_1^{(n-2)}(s) & 0 & \ldots\ldots & y_n^{(n-2)}(s)\\ y_1^{(n-1)}(s) & 1 & \ldots\ldots & y_n^{(n-1)}(s)\end{vmatrix}}{W\left[y_1(s),y_2(s),\;\ldots\;,y_n(s)\right]}ds.$$

$$C_n(s)=\int\frac{\begin{vmatrix}y_1(s) & y_2(s) & \ldots & y_{n-1}(s) & 0\\ \ldots & \ldots & & & \\ y_1^{(n-2)}(s) & y_2^{(n-2)}(s) & \ldots\ldots & y_{n-1}^{(n-2)}(s) & 0\\ y_1^{(n-1)}(s) & y_2^{(n-1)}(s) & \ldots\ldots & y_{n-1}^{(n-1)}(s) & 1\end{vmatrix}}{W\left[y_1(s),y_2(s),\;\ldots\;,y_n(s)\right]}ds.$$

І ядро $K(x,s)$ має вигляд

$$K(x,s)=C_1(s)y_1(x)+C_2(s)y_2(x)+\ldots+C_n(s)y_n(x)$$

з одержаними функціями $C_1(s),C_2(s),\ldots,C_n(s)$.

Якщо розглядати диференціальне рівняння другого порядку

$$a_0(x)y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=b(x)\,,$$

то функція $K(x,s)$ має вигляд

$$K(x,s)=C_1(s)y_1(x)+C_2(s)y_2(x)\,,$$

де

$$C_1(s)=\frac{\begin{vmatrix}0 & y_2(s)\\ 1 & y_2'(s)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}y_1(s) & y_2(s)\\ y_1'(s) & y_2'(s)\end{vmatrix}}\,,\;\; C_2(s)=\frac{\begin{vmatrix}y_1(s) & 0\\ y_1'(s) & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}y_1(s) & y_2(s)\\ y_1'(s) & y_2'(s)\end{vmatrix}}\,.$$

Звідси

$$K(x,s)=\frac{\begin{vmatrix}0 & y_2(s)\\ 1 & y_2'(s)\end{vmatrix}y_1(x)+\begin{vmatrix}y_1(s) & 0\\ y_1'(s) & 1\end{vmatrix}y_2(x)}{W\left[y_1(s),y_2(s)\right]}=$$

$$=\frac{y_1(s)y_2(x)-y_1(x)y_2(s)}{W\left[y_1(s),y_2(s)\right]}\,.$$

3.2.4. Метод невизначених коефіцієнтів

Якщо лінійне диференціальне рівняння є рівнянням з сталими коефіцієнтами, а функція $b(x)$ спеціального виду, то частинний розв’язок можна знайти за допомогою методу невизначених коефіцієнтів.

1) Нехай $b(x)$ має вид многочлена, тобто

$$b(x) = A_0x^s + A_1x^{s-1} + \ldots + A_{s-1}x + A_s .$$

а) Розглянемо випадок, коли характеристичне рівняння не має нульового кореня, тобто $\lambda \neq 0$. Частинний розв’язок неоднорідного рівняння шукаємо вигляді:

$$y_{неодн} = B_0x^s + B_1x^{s-1} + \ldots + B_{s-1}x + B_s ,$$

де $B_0, \ldots, B_s$ - невідомі сталі. Тоді

$$\begin{aligned}
&y'_{неодн} = sB_0x^{s-1} + (s-1)B_1x^{s-2} + \ldots + B_{s-1},\\
&y''_{неодн} = s(s-1)B_0x^{s-2} + (s-1)(s-2)B_1x^{s-3} + \ldots + 2\cdot 1\cdot B_{s-2},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Підставляючи у вихідне диференціальне рівняння, одержимо

$$\begin{aligned}
&a_0[\ldots] + \ldots + a_{n-2}[s(s-1)B_0x^{s-2} + (s-1)(s-2)B_1x^{s-3} + \ldots + 2\cdot 1\cdot B_{s-1}] +\\
&+ a_{n-1}[sB_0x^{s-1} + (s-1)B_1x^{s-2} + \ldots + B_{s-1}] + a_n[B_0x^s + B_1x^{s-1} + \ldots + B_s] =\\
&= A_0x^s + A_1x^{s-1} + \ldots + A_{s-1}x + A_s .
\end{aligned}$$

Прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях x запишемо:

$$\begin{aligned}
&x^s \quad a_nB_0 = A_0\\
&x^{s-1} \quad a_nB_1 + sa_{n-1}B_0 = A_1\\
&x^{s-2} \quad a_nB_2 + (s-1)a_{n-1}B_1 + s(s-1)a_{n-2}B_0 = A_2\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Оскільки характеристичне рівняння не має нульового кореня, то $a_n \neq 0$. Звідси одержимо

$$B_0 = \frac{1}{a_n}A_0,\ B_1 = \frac{1}{a_n}\left[A_1 - sa_{n-1}B_0\right],\ \ldots .$$

б) Розглянемо випадок, коли характеристичне рівняння має нульовий корінь кратності r. Тоді диференціальне рівняння має вигляд

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-2}y^{(r)} = A_0x^s + A_1x^{s-1} + \ldots + A_s .$$

Зробивши заміну $y^{(r)} = z$ одержимо диференціальне рівняння

$$a_0z^{(n-r)} + a_1z^{(n-r-1)} + \ldots + a_{n-r}z = A_0x^s + A_1x^{s-1} + \ldots + A_s ,$$

характеристичне рівняння якого вже не має нульового кореня, тобто повернемося до попереднього випадку. Звідси частинний розв’язок шукається у вигляді

$$z_{неодн} = \overline{B}_0\, x^s + \overline{B}_1\, x^{s-1} + \ldots + \overline{B}_s .$$

Проінтегрувавши його r -разів, одержимо, що частинний розв'язок вихідного однорідного рівняння має вигляд

$$y_{неодн} = (B_0x^s + B_1x^{s-1} + \ ...\ + B_s)x^r.$$

2) Нехай $b(x)$ має вигляд $b(x) = e^{px}(A_0x^s + A_1x^{s-1} + \ ...\ + A_s)$.

а) Розглянемо випадок, коли p - не є коренем характеристичного рівняння. Зробимо заміну

$$\begin{aligned}&y = e^{px}z,\ y' = pe^{px}z + e^{px}z' = e^{px}(pz + z'),\\&y'' = pe^{px}(pz + z') + e^{px}(pz' + z'') = e^{px}(p^2z + 2pz' + z''),\ ...\\&y^{(n)} = e^{px}(p^nz + np^{n-1}z' + \ ...\ + z^{(n)}).\end{aligned}$$

Підставивши отримані вирази у вихідне диференціальне рівняння, одержимо

$$e^{px}[B_0z^{(n)} + B_1z^{(n-1)} + \ ...\ + B_nz] = e^{px}[A_0x^s + A_1x^{s-1} + \ ...\ + A_s].$$

де B_i - сталі коефіцієнти, що виражаються через a_i і p. Скоротивши на e^{px} , одержимо рівняння

$B_0z^{(n)} + B_1z^{(n-1)} + \ ...\ + B_nz = A_0x^s + A_1x^{s-1} + \ ...\ + A_s.$

Причому, оскільки p - не є коренем характеристичного рівняння, то після заміни $y = e^{px}z$ **,** отримане диференціальне рівняння не буде мати коренем характеристичного рівняння $\mu = 0$. Таким чином, повернулися до випадку I а). Частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді

$$z_{неодн} = B_0x^s + B_1x^{s-1} + \ ...\ + B_s.$$

А частинний розв'язок вихідного неоднорідного диференціального рівняння у вигляді:

$$y_{неодн} = e^{px}(B_0x^s + B_1x^{s-1} + \ ...\ + B_s).$$

б) Розглянемо випадок, коли p - корінь характеристичного рівняння кратності r. Це значить, що після, заміни $y = e^{px}z$ і скорочення на e^{px}, вийде диференціальне рівняння, що має коренем характеристичного рівняння, число $\mu = 0$ кратності r, тобто

$$B_0z^{(n)} + B_1z^{(n-1)} + \ ...\ + B_{n-r}z^{(r)} = A_0x^s + A_1x^{s-1} + \ ...\ + A_s.$$

Як випливає з пункту I б) частинний розв'язок шукається у вигляді

$$z_{неодн} = (B_0x^s + B_1x^{s-1} + \ ...\ + B_s)x^r,$$

а частинний розв'язок вихідного неоднорідного диференціального рівняння у вигляді

$$y_{неодн} = e^{px}(B_0x^s + B_1x^{s-1} + \ ...\ + B_s)x^r.$$

3) Нехай $b(x)$ має вигляд:

$$b(x) = e^{px}[P_s(x)\cos qx + Q_l(x)\sin qx],$$

де $P_s(x), Q_r(x)$ - многочлени степеня s і l, відповідно, і, наприклад , $l \le s$. Використовуючи формулу Ейлера, перетворимо вираз до вигляду:

$$b(x) = e^{(p+iq)x} R_s(s) + e^{(p-iq)x} T_s(x),$$

де $R_s(x),\ T_s(x)$ - многочлени степеня не вище, ніж s . Використовуючи властивості 2 , 3 розв’язків неоднорідних диференціальних рівнянь, а також випадки 2 а) , б) знаходження частинного розв’язку лінійних неоднорідних рівнянь, одержимо, що частинний розв’язок шукається у вигляді:

$$\begin{aligned} a)\ y_{неодн} &= e^{px}[(A_0x^s + A_1x^{s-1} + \ ... \ + A_s)\cos qx + \\ &+ (B_0x^s + B_1x^{s-1} + \ ... \ + B_s)\sin qx], \end{aligned}$$

якщо $p \pm iq$ - не є коренем характеристичного рівняння:

$$\begin{aligned} б)\ y_{неодн} &= e^{px}[(A_0x^s + A_1x^{s-1} + \ ... \ + A_s)\cos qx + \\ &+ (B_0x^s + B_1x^{s-1} + \ ... \ + B_s)\sin qx]x^r, \end{aligned}$$

якщо $p \pm iq$ - є коренем характеристичного рівняння кратності r .

4. Системи диференціальних рівнянь

4.1. Основи математичної теорії

Співвідношення вигляду

$$\begin{cases} F_1(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \ ... \ \dot{x}_n, x_1, x_2, \ ... \ , x_n; t) = 0 \\ F_2(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \ ... \ \dot{x}_n, x_1, x_2, \ ... \ , x_n; t) = 0 \\ .... \\ F_n(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \ ... \ \dot{x}_n, x_1, x_2, \ ... \ , x_n; t) = 0 \end{cases}$$

називається системою n-звичайних диференціальних рівнянь першого порядку.

Якщо система розв’язана відносно похідних і має вигляд

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, \ ... \ , x_n, t) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, \ ... \ , x_n, t) \\ .... \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, x_2, \ ... \ , x_n, t) \end{cases}$$

то вона називається системою в нормальній формі.

Визначення. Розв’язком системи диференціальних рівнянь називається набір n неперервно диференційованих функцій $x_1(t),\ ... \ , x_n(t)$ тотожно задовольняючих кожному з рівнянь системи.

У загальному випадку розв'язок системи залежить від n - довільних сталих і має вигляд $x_1(t,C_1, \dots ,C_n), \dots ,x_n(t,C_1, \dots ,C_n)$ і задача Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь першого порядку ставиться в такий спосіб. Потрібно знайти розв'язок, що задовольняє початковим умовам (умовам Коші)**:** $x_1(t_0)=x_1^0, \dots ,x_n(t_0)=x_n^0$ **.**

Визначення 4.1.2. Розв'язок $x_1(t,C_1, \dots ,C_n), \dots ,x_n(t,C_1, \dots ,C_n)$ називається загальним, якщо за рахунок вибору сталих $C_1, \dots, C_n$ можна розв'язати довільну задачу Коші.

Для систем звичайних диференціальних рівнянь досить важливим є поняття інтеграла системи. В залежності від гладкості (тобто диференційованості) можна розглядати два визначення інтеграла.

Визначення 4.1.3. 1. Функція $F(x_1,x_2, \dots ,x_n,t)$ стала уздовж розв'язків системи, називається інтегралом системи.

2. Функція $F(x_1,x_2, \dots ,x_n,t)$ повна похідна, якої в силу системи тотожно дорівнює нулю, називається інтегралом системи.

Для лінійних рівнянь існує поняття лінійної залежності і незалежності розв'язків. Для нелінійних рівнянь (систем рівнянь) аналогічним поняттям є функціональна незалежність.

Визначення 4.1.4. Інтеграли $F_1(x_1,x_2, \dots ,x_n,t)$, $F_1(x_1,x_2, \dots ,x_n,t)$, $F_2(x_1,x_2, \dots ,x_n,t)$, $\dots$, $F_n(x_1,x_2, \dots ,x_n,t)$ називаються функціонально незалежними, якщо не існує функції n-змінних $\Phi(z_1,\dots, z_n)$ такої, що $\Phi(F_1(x_1,x_2, \dots ,x_n,t), \dots ,F_n(x_1,x_2, \dots ,x_n,t)) \equiv 0.$

Теорема. Для того щоб інтеграли $F_1(x_1,x_2, \dots ,x_n,t), F_2(x_1,x_2, \dots ,x_n,t)$,$\dots F_n(x_1,x_2, \dots ,x_n,t)$ системи звичайних диференціальних рівнянь були функціонально незалежними, необхідно і достатньо, щоб визначник Якобі був відмінний від тотожного нуля, тобто

$$\frac{D(F_1,F_2, \dots ,F_n)}{D(x_1,x_2, \dots ,x_n)} \neq 0.$$

Визначення 4.1.5. Якщо $F(x_1,x_2, \dots ,x_n,t)$ інтеграл системи диференціальних рівнянь, то рівність $F(x_1,x_2, \dots ,x_n,t)=C$ називається першим інтегралом.

Визначення 4.1.6. Сукупність n- функціонально незалежних інтегралів називається загальним інтегралом системи диференціальних рівнянь.

Власне кажучи загальний інтеграл - це загальний розв'язок системи диференціальних рівнянь у неявному вигляді.

Теорема (*існування та єдиності розв'язку задачі Коші*). Щоб система диференціальних рівнянь, розв'язаних відносно похідної, мала єдиний розв'язок, що задовольняє умовам Коші: $x_1(t_0)=x_1^0,\ x_2(t_0)=x_2^0, \dots ,\ x_n(t_0)=x_n^0$ досить, щоб:

1) функції $f_1, f_2, \ldots, f_n$ були неперервними по змінним $x_1, x_2, \ldots, x_n, t$ в околі точки $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, t_0$;

2) функції $f_1, f_2, \ldots, f_n$ задовольняли умові Ліпшиця по аргументах $x_1, x_2, \ldots, x_n$ у тому ж околі.

Зауваження. Умова Ліпшиця можна замінити більш грубою, але умовою, що перевіряється легше, існування обмежених частинних похідних, тобто

$$\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_i}\right| \le M,\ i, j = 1,2, \ldots, n.$$

4.1.1. Геометрична інтерпретація розв'язків системи диференціальних рівнянь

Назвемо $n+1$ - вимірний простір змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n, t$ розширеним фазовим простором R^{n+1}. Тоді розв'язок $x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), \ldots, x_n = x_n(t)$ визначає в просторі R^{n+1} деяку криву, що називається інтегральною кривою. Загальний розв'язок (чи загальний інтеграл) визначає сім'ю інтегральних кривих, що всюди щільно заповнюють деяку область $D \subset R^n$ (область існування та єдиності розв'язків). Задача Коші ставиться як виділення із сім'ї інтегральних кривих, окремої кривої, що проходить через задану початкову точку $M(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, t_0) \in D$.

4.1.2. Фізична інтерпретація розв'язків

Рух в багатовимірному просторі. В евклідовому просторі R^n змінних $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ розв'язок $x_1 = x_1(t),\ x_2 = x_2(t), \ldots, x_n = x_n(t)$ визначає закон руху по деякій траєкторії в залежності від часу t. При такій інтерпретації функції $f_1, f_2, \ldots, f_n$ є складовими швидкості руху, простір зміни перемінних називається фазовим простором, система динамічної, а крива, по якій відбувається рух $x_1 = x_1(t),\ x_2 = x_2(t), \ldots, x_n = x_n(t)$ - фазовою траєкторією. Фазова траєкторія є проекцією інтегральної кривої на фазовий простір.

До слова, одним рухом механічним не слід обмежувати. Під рухом можна розглядати і молекулярний транспорт в багатокомпонентних середовищах, дифузію наночастинок, масоперенесенні в пористих середовища та ін.

4.1.3. Зведення одного диференціального рівняння вищого порядку до системи рівнянь першого порядку

Нехай маємо диференціальне рівняння

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}, \ \dots \ , \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}).$$

Розглянемо заміну змінних

$$x \Rightarrow t, \ y \Rightarrow x_1, \ \frac{dy}{dx} \Rightarrow x_2, \ \dots \ , \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} \Rightarrow x_n \ .$$

Тоді одержимо систему рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n \\ \dot{x}_n = f(t, x_1, x_2, \ \dots \ , x_n) \end{cases}$$

4.1.4. Зведення системи диференціальних рівнянь до одного рівняння вищого порядку

Нехай маємо систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, \ \dots \ , x_n, t) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, \ \dots \ , x_n, t) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, x_2, \ \dots \ , x_n, t) \end{cases}$$

і заданий її розв'язок $x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), \ \dots \ , x_n = x_n(t)$. Якщо цей розв'язок підставити в перше рівняння, то вийде тотожність і її можна диференціювати

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = \frac{\partial f_1}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial x_i} \frac{dx_i(t)}{dt}.$$

Підставивши замість $\frac{dx_i(t)}{dt}$ їх значення, одержимо

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = \frac{\partial f_1}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial x_i} f_i = F_2(t, x_1, x_2, \ \dots \ , x_n).$$

Знову диференціюємо це рівняння й одержимо

$$\frac{d^3 x_1}{dt^3} = \frac{\partial F_2}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_2}{\partial x_i} \frac{dx_i(t)}{dt} = \frac{\partial F_2}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_2}{\partial x_i} f_i =$$
$$= F_3(t, x_1, x_2, \ \dots \ , x_n).$$

Продовжуючи процес далі, одержимо

$$\frac{d^{n-1} x_1}{dt^{n-1}} = F_{n-1}(t, x_1, x_2, \ \dots \ , x_n).$$

$$\frac{d^n x_1}{dt^n} = F_n(t, x_1, x_2, \ \dots \ , x_n).$$

Таким чином, маємо систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2, \ \dots \ , x_n, t) \\ \dfrac{d^2 x_1}{dt^2} = F_2(x_1, x_2, \ \dots \ , x_n, t) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{d^{n-1} x_1}{dt^{n-1}} = F_{n-1}(x_1, x_2, \ \dots \ , x_n, t) \\ \dfrac{d^n x_1}{dt^n} = F_n(x_1, x_2, \ \dots \ , x_n, t). \end{cases}$$

Припустимо, що $\dfrac{D(f_1, F_2, \ \dots \ , F_{n-1})}{D(x_2, x_3, \ \dots \ , x_n)} \neq 0.$ Тоді систему перших $(n-1)$ - рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2, \ \dots \ , x_n, t) \\ \dfrac{d^2 x_1}{dt^2} = F_2(x_1, x_2, \ \dots \ , x_n, t) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{d^{n-1} x_1}{dt^{n-1}} = F_{n-1}(x_1, x_2, \ \dots \ , x_n, t) \end{cases}$$

можна розв'язати відносно останніх $(n-1)$ змінних $x_2, x_3, \ \dots \ , x_n$ і одержати

$$\begin{cases} x_2 = \phi_2(t, x_1, \dfrac{dx_1}{dt}, \ \dots \ , \dfrac{d^{n-1} x_1}{dt^{n-1}}) \\ x_3 = \phi_3(t, x_1, \dfrac{dx_1}{dt}, \ \dots \ , \dfrac{d^{n-1} x_1}{dt^{n-1}}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = \phi_n(t, x_1, \dfrac{dx_1}{dt}, \ \dots \ , \dfrac{d^{n-1} x_1}{dt^{n-1}}). \end{cases}$$

Підставивши одержані вирази в останнє рівняння, запишемо

$$\frac{d^n x_1}{dt^n} = F_n(t, x_1, \phi_2(t, x_1, \frac{dx_1}{dt}, \ \dots \ , \frac{d^{n-1} x_1}{dt^{n-1}}), \ \dots \ ,$$
$$\phi_n(t, x_1, \frac{dx_1}{dt}, \ \dots \ , \frac{d^{n-1} x_1}{dt^{n-1}})).$$

Або, після перетворень

$$\frac{d^n x_1}{dt^n} = \Phi(t, x_1, \frac{dx_1}{dt}, \ \dots \ , \frac{d^{n-1} x_1}{dt^{n-1}}),$$

одержимо одне диференціальне рівняння n -го порядку.

У загальному випадку, одержимо, що система диференціальних рівнянь першого порядку

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, \; \dots \; , x_n, t) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, \; \dots \; , x_n, t) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, x_2, \; \dots \; , x_n, t) \end{cases}$$

зводиться до одного рівняння n-го порядку

$$\frac{d^n x_1}{dt^n} = \Phi(t, x_1, \frac{dx_1}{dt}, \; \dots \; , \frac{d^{n-1}x_1}{dt^{n-1}}).$$

і

і системи $(n-1)$ рівнянь зв'язку

$$\begin{cases} x_2 = \phi_2(t, x_1, \frac{dx_1}{dt}, \; \dots \; , \frac{d^{n-1}x_1}{dt^{n-1}}) \\ x_3 = \phi_3(t, x_1, \frac{dx_1}{dt}, \; \dots \; , \frac{d^{n-1}x_1}{dt^{n-1}}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = \phi_n(t, x_1, \frac{dx_1}{dt}, \; \dots \; , \frac{d^{n-1}x_1}{dt^{n-1}}). \end{cases}$$

Зауваження. Було зроблене припущення, що $\frac{D(f_1, F_2, \; \dots \; , F_{n-1})}{D(x_2, x_3, \; \dots \; , x_n)} \neq 0.$. Якщо ця умова не виконана, то можна зводити до рівняння щодо інших змінних, наприклад відносно x_2.

4.1.5. Комбінації, що інтегруються

Визначення. Комбінацією, що інтегрується, називається диференціальне рівняння, отримане шляхом перетворень із системи, диференціальних рівнянь, але яке вже можна легко інтегрувати.

$d\Phi(t, x_1, x_2, \; \dots \; , x_n) = 0$.

Одна комбінація, що інтегрується, дає можливість одержати одне кінцеве рівняння

$\Phi(t, x_1, x_2, \; \dots \; , x_n) = C$,

іяке є першим інтегралом системи.

Геометрично перший інтеграл являє собою n-вимірну поверхню в $(n+1)$-вимірному просторі, що цілком складається з інтегральних кривих

Якщо знайдено k-комбінацій, що інтегруються, то одержуємо k перших інтегралів

$$\begin{cases} \Phi_1(t, x_1, x_2, \; \dots \; , x_n) = C_1 \\ \Phi_2(t, x_1, x_2, \; \dots \; , x_n) = C_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \Phi_k(t, x_1, x_2, \; \dots \; , x_n) = C_k. \end{cases}$$

І, якщо інтеграли незалежні, то хоча б один з визначників $\dfrac{D(\Phi_1,\Phi_2,\ \dots\ ,\Phi_k)}{D(x_{i_1},x_{i_2},\ \dots\ ,x_{i_k})}\neq 0$.

Звідси з системи можна виразити k - невідомих функцій $x_{i_1},x_{i_2},\ \dots\ ,x_{i_k}$ через інші і підставивши їх у вихідну систему, понизити порядок до $(n-k)$- рівнянь. Якщо $n=k$ і всі інтеграли незалежні, то одержимо загальний інтеграл системи.

Особливо поширеним засобом знаходження комбінацій, що інтегруються, є використання систем у симетричному вигляді.

Систему диференціальних рівнянь, що записана в нормальній формі

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = f_1(x_1,x_2,...,x_n,t) \\ \dot{x}_2(t) = f_2(x_1,x_2,...,x_n,t) \\ .... \\ \dot{x}_n(t) = f_n(x_1,x_2,...,x_n,t) \end{cases}$$

можна переписати у вигляді

$$.\ \frac{dx_1}{f_1(x_1,x_2,...,x_n,t)} = \frac{dx_2}{f_2(x_1,x_2,...,x_n,t)} = ... = \frac{dx_n}{f_n(x_1,x_2,...,x_n,t)} = \frac{dt}{1}.$$

При такій формі запису всі змінні $x_1,x_2,...,x_n,t$ рівнозначні. Система диференціальних рівнянь, що записана у вигляді

$$\frac{dx_1}{X_1(x_1,x_2,...,x_n)} = \frac{dx_2}{X_2(x_1,x_2,...,x_n)} = ... = \frac{dx_n}{X_n(x_1,x_2,...,x_n)},$$

називається системою у симетричному вигляді.

При знаходженні комбінацій, що інтегруються, найбільш часто використовується властивість “пропорційності”. А саме, для систем в симетричному вигляді справедлива рівність

$$\frac{dx_1}{X_1(x_1,x_2,...,x_n)} = \frac{dx_2}{X_2(x_1,x_2,...,x_n)} = ... = \frac{dx_n}{X_n(x_1,x_2,...,x_n)} =$$

$$= \frac{k_1dx_1 + k_2dx_2 + ... + k_ndx_n}{k_1X_1(x_1,x_2,...,x_n) + k_2X_2(x_1,x_2,...,x_n) + ... + k_nX_n(x_1,x_2,...,x_n)}.$$

4.2. Основи математичної теорії систем лінійних диференціальних рівнянь

Система диференціальних рівнянь, що записана у вигляді

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \ \dots \ + a_{1n}(t)x_n + f_1(t) \\ \dot{x}_2 = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \ \dots \ + a_{2n}(t)x_n + f_2(t) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dot{x}_n = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \ \dots \ + a_{nn}(t)x_n + f_n(t), \end{cases}$$

називається лінійною неоднорідною системою диференціальних рівнянь.

Система диференціальних рівнянь вигляду

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \ \dots \ + a_{1n}(t)x_n \\ \dot{x}_2 = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \ \dots \ + a_{2n}(t)x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dot{x}_n = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \ \dots \ + a_{nn}(t)x_n \end{cases}$$

називається лінійною однорідною системою диференціальних рівнянь. Якщо ввести векторні позначення

і

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \ f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \dots \\ f_n(t) \end{pmatrix}, \ A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) \ a_{12}(t) \ \dots a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) \ a_{22}(t) \ \dots a_{2n}(t) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}(t) \ a_{n2}(t) \ \dots a_{nn}(t) \end{bmatrix},$$

то лінійну неоднорідну систему можна переписати у вигляді

$$\dot{x} = A(t)x + f(t),$$

а лінійну однорідну систему у вигляді

$$\dot{x} = A(t)x\,.$$

Якщо функції $a_{ij}(t),\ f_i(t),\ i, j = \overline{1,n}$ неперервні в околі точки $(x_0, t_0) = (x_1^0, x_2^0,\ \dots\ , x_n^0, t_0)$, то виконані умови теореми існування та єдиності розв’язку задачі Коші, і існує єдиний розв’язок

$$x_1 = x_1(t),\ x_2 = x_2(t),\ \dots\ , x_n = x_n(t),$$

системи рівнянь, що задовольняє початковим даним

$$x_1(t_0) = x_1^0,\ x_2(t_0) = x_2^0,\ \dots\ , x_n(t_0) = x_n^0.$$

4.2.1. Властивості розв'язків лінійних однорідних систем

Властивість 4.2.1. Якщо вектор $x(t)=\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$ є розв'язком лінійної однорідної системи, то

і $Cx(t)=\begin{pmatrix} Cx_1(t) \\ Cx_2(t) \\ \dots \\ Cx_n(t) \end{pmatrix}$, де C - стала скалярна величина, також є розв'язком цієї системи.

Дійсно, за умовою

$$\dot{x}(t)-A(t)x(t)\equiv 0\,.$$

Але тоді і

$$\frac{d}{dt}\left[Cx(t)\right]-A(t)\left[Cx(t)\right]=C\left[\dot{x}(t)-A(t)x(t)\right]\equiv 0$$

оскільки дорівнює нулю вираз в дужках. Тобто $Cx(t)$ є розв'язком однорідної системи.

Властивість 4.2.2. Якщо дві векторні функції $x_1=\begin{pmatrix} x_{11}(t) \\ x_{21}(t) \\ \dots \\ x_{n1}(t) \end{pmatrix}, x_2=\begin{pmatrix} x_{12}(t) \\ x_{22}(t) \\ \dots \\ x_{n2}(t) \end{pmatrix}$ є розв'язками однорідної системи, то і їхня сума також буде розв'язком однорідної системи.

Дійсно, за умовою

$$\dot{x}_1(t)-A(t)x_1(t)\equiv 0 \;\text{ і }\; \dot{x}_2(t)-A(t)x_2(t)\equiv 0$$

Але тоді і

$$\frac{d}{dt}\left[x_1(t)+x_2(t)\right]-A(t)\left[x_1(t)+x_2(t)\right]=$$
$$\left[\dot{x}_1(t)-A(t)x_1(t)\right]+\left[\dot{x}_2(t)-A(t)x_2(t)\right]\equiv 0,$$

тому що дорівнюють нулю вираз в дужках, тобто $x_1(t)+x_2(t)$ є розв'язком однорідної системи.

Властивість 4.2.3. Якщо вектори $x_1(t)=\begin{pmatrix} x_{11}(t) \\ x_{21}(t) \\ \dots \\ x_{n1}(t) \end{pmatrix}$, … , $x_n(t)=\begin{pmatrix} x_{1n}(t) \\ x_{2n}(t) \\ \dots \\ x_{nn}(t) \end{pmatrix}$ є розв'язками однорідної системи, та і їхня лінійна комбінація з довільними коефіцієнтами також буде розв'язком однорідної системи.

Дійсно, за умовою

$$\dot{x}_i(t) - A(t)x_i(t) \equiv 0,\ i = \overline{1,n}.$$

Але тоді і

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_{i=1}^{n} C_i x_i(t)\right] - A(t)\left[\sum_{i=1}^{n} C_i x_i(t)\right] = \sum_{i=1}^{n} C_i\left[\dot{x}_i(t) - A(t)x_i(t)\right] \equiv 0,$$

тому що дорівнює нулю кожний з доданків, тобто $\sum_{i=1}^{n} C_i x_i(t)$ є розв'язком однорідної системи.

Властивість 4.2.4. Якщо комплексний вектор з дійсними елементами $u(t) + iv(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ ... \\ u_n(t) \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} v_1(t) \\ ... \\ v_n(t) \end{pmatrix}$ є розв'язком однорідної системи, то окремо дійсна та уявна частини є розв'язками системи.

Дійсно за умовою

$$\frac{d}{dt}[u(t) + iv(t)] - A(t)[u(t) + iv(t)] \equiv 0.$$

Розкривши дужки і зробивши перетворення, одержимо

$$[\dot{u}(t) - A(t)u(t)] + i[\dot{v}(t) - A(t)v(t)] \equiv 0.$$

А комплексний вираз дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли дорівнюють нулю дійсна і уявна частини, тобто

$$\dot{u}(t) - A(t)u(t) \equiv 0,\ \dot{v}(t) - A(t)v(t) \equiv 0,$$

що і було потрібно довести.

Визначення 4.2.1. Вектори $x_1(t) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) \\ x_{21}(t) \\ ... \\ x_{n1}(t) \end{pmatrix}$, $x_2(t) = \begin{pmatrix} x_{12}(t) \\ x_{22}(t) \\ ... \\ x_{n2}(t) \end{pmatrix}$, … , $x_n(t) = \begin{pmatrix} x_{1n}(t) \\ x_{2n}(t) \\ ... \\ x_{nn}(t) \end{pmatrix}$

називаються лінійно залежними на відрізку $t \in [a,b]$, якщо існують не всі рівні нулю сталі $C_1, C_2, \ ...\ , C_n$, такі, що $C_1x_1(t) + C_2x_2(t) + \ ...\ + C_nx_n(t) \equiv 0$ при $t \in [a,b]$.

Якщо тотожність справедлива лише при $C_i = 0,\ i = \overline{1,n}$, то вектори лінійно незалежні.

Визначення 4.2.2. Визначник, що складається з векторів $x_1(t), x_2(t),\ ...\ , x_n(t)$, тобто

$$W[x_1,\ ...\ , x_n] = \begin{vmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & ... & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & ... & x_{2n}(t) \\ .... & & & \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & ... & x_{nn}(t) \end{vmatrix}$$

називається визначником Вронського.

Теорема 4.2.1. Якщо векторні функції $x_1(t), \dots, x_n(t)$ лінійно залежні, то визначник Вронського тотожно дорівнює нулю.

Доведення. За умовою існують не всі рівні нулю $C_1, C_2, \dots, C_n$, такі, що $C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t) + \dots + C_n x_n(t) \equiv 0$ при $t \in [a,b]$. Розписавши за координатами, одержимо

$$\begin{cases} C_1 x_{11}(t) + C_2 x_{12}(t) + \dots + C_n x_{1n}(t) \equiv 0 \\ C_1 x_{21}(t) + C_2 x_{22}(t) + \dots + C_n x_{2n}(t) \equiv 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ C_1 x_{n1}(t) + C_2 x_{n2}(t) + \dots + C_n x_{nn}(t) \equiv 0 \end{cases}.$$

Однорідна система має ненульовий розв'язок $C_1, C_2, \dots, C_n$ тоді і тільки тоді, коли визначник дорівнює нулю, тобто

$$W[x_1, \dots, x_n] = \begin{vmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \dots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \dots & x_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{vmatrix} \equiv 0, \; t \in [a,b] \; .$$

Теорема 4.2.2. Якщо розв'язки $x_1(t), \dots, x_n(t)$- лінійної однорідної системи лінійно незалежні, то визначник Вронського не дорівнює нулю в жодній точці $t \in [a,b]$.

Доведення. Нехай, від супротивного, існує точка $t_0 \in [a,b]$ і $W[x_1(t_0), \dots, x_n(t_0)] = 0$.

Тоді система однорідних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} C_1 x_{11}(t_0) + C_2 x_{12}(t_0) + \dots + C_n x_{1n}(t_0) = 0 \\ C_1 x_{21}(t_0) + C_2 x_{22}(t_0) + \dots + C_n x_{2n}(t_0) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ C_1 x_{n1}(t_0) + C_2 x_{n2}(t_0) + \dots + C_n x_{nn}(t_0) = 0 \end{cases}$$

має ненульовий розв'язок $C_1^0, C_2^0, \dots, C_n^0$. Розглянемо лінійну комбінацію розв'язків з отриманими коефіцієнтами

$$x(t) = C_1^0 x_1(t) + C_2^0 x_2(t) + \dots + C_n^0 x_n(t) \, .$$

Відповідно до властивості 4, ця комбінація буде розв'язком. Крім того, як випливає із системи алгебраїчних рівнянь, для отриманих $C_1^0, C_2^0, \dots, C_n^0$: $x(t_0) \equiv 0$, $t_0 \in [a,b]$. Але розв'язком, що задовольняють таким умовам, є $x \equiv 0$. І в силу теореми існування та єдиності ці два розв'язки збігаються, тобто $x(t) \equiv 0$ при $t \in [a,b]$, або

$$C_1^0 x_1(t) + C_2^0 x_2(t) + \ \dots\ + C_n^0 x_n(t) \equiv 0,$$

або розв'язки $x_1(t),\ \dots\ , x_n(t)$ лінійно залежні, що суперечить умові теореми.

Таким чином, $W[x_1,\ \dots\ , x_n] \neq 0$ у жодній точці $t \in [a,b]$, що і було потрібно довести.

Теорема 4.2.3. Для того щоб розв'язки $x_1(t),\ \dots\ , x_n(t)$ були лінійно незалежні, необхідно і достатньо, щоб $W[x_1(t),\ \dots\ , x_n(t)] \neq 0$ у жодній точці $t \in [a,b]$.

Доведення. Випливає з попередніх двох теорем.

Теорема 4.2.4. Загальний розв'язок лінійної однорідної системи представляється у вигляді лінійної комбінації n - лінійно незалежних розв'язків.

Доведення. Як випливає з властивості 3, лінійна комбінація розв'язків також буде розв'язком. Покажемо, що цей розв'язок загальний, тобто завдяки вибору коефіцієнтів $C_1,\ \dots\ , C_n$ можна розв'язати будь-яку задачу Коші $x(t_0) = x_0$ або в координатній формі:

$$x_1(t_0) = x_1^0,\ \dots\ , x_n(t_0) = x_n^0 .$$

Оскільки розв'язки $x_1(t),\ \dots\ , x_n(t)$ лінійно незалежні, то визначник Вронського відмінний від нуля. Отже, система алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} C_1 x_{11}(t_0) + C_2 x_{12}(t_0) + \ \dots\ + C_n x_{1n}(t_0) = x_1^0 \\ C_1 x_{21}(t_0) + C_2 x_{22}(t_0) + \ \dots\ + C_n x_{2n}(t_0) = x_2^0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ C_1 x_{n1}(t_0) + C_2 x_{n2}(t_0) + \ \dots\ + C_n x_{nn}(t_0) = x_n^0 \end{cases}$$

має єдиний розв'язок $C_1^0, C_2^0,\ \dots\ , C_n^0$.

Тоді лінійна комбінація

$$x(t) = C_1^0 x_1(t) + C_2^0 x_2(t) + \ \dots\ + C_n^0 x_n(t)$$

є розв'язком поставленої задачі Коші. Теорема доведена.

Властивість 1. Максимальне число незалежних розв'язків дорівнює кількості рівнянь.

Це випливає з теореми про загальний розв'язок системи однорідних рівнянь, тому що будь-який інший розв'язок може бути представлений у вигляді лінійної комбінації n лінійно незалежних розв'язків.

Визначення. Матриця, складена з будь-яких n- лінійно незалежних розв'язків, називається фундаментальною матрицею розв'язків системи.

Якщо лінійно незалежними розв'язками будуть

$$x_1=\begin{pmatrix} x_{11}(t)\\ x_{21}(t)\\ \dots\\ x_{n1}(t)\end{pmatrix},\ x_2=\begin{pmatrix} x_{12}(t)\\ x_{22}(t)\\ \dots\\ x_{n2}(t)\end{pmatrix},\ \dots,\ x_n=\begin{pmatrix} x_{1n}(t)\\ x_{2n}(t)\\ \dots\\ x_{nn}(t)\end{pmatrix},$$

то матриця

$$X(t)=\begin{pmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \dots & x_{1n}(t)\\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \dots & x_{2n}(t)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \dots & x_{nn}(t)\end{pmatrix}$$

буде фундаментальною матрицею розв’язків.

Як випливає з попередньої теореми загальний розв’язок може бути представлений у вигляді

$$x_{одн}(t)=\sum_{i=1}^{n}C_i x_i(t),$$

де C_i - довільні сталі. Якщо ввести вектор $C=\begin{pmatrix} C_1\\ C_2\\ \dots\\ C_n\end{pmatrix}$, то загальний розв’язок можна записати у вигляді $x_{одн}(t)=X(t)C$

4.2.2. Формула Якобі

Нехай $x_1(t), \dots, x_n(t)$ - лінійно незалежні розв’язки однорідної системи, $W[x_1, \dots, x_n]$ - визначник Вронського. Обчислимо похідну визначника Вронського:

$$\frac{d}{dt}W[x_1, \dots, x_n]=\frac{d}{dt}\begin{vmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \dots & x_{1n}(t)\\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \dots & x_{2n}(t)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \dots & x_{nn}(t)\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{d}{dt}\begin{vmatrix} x_{11}(t) & x_{21}(t) & \dots & x_{n1}(t)\\ x_{12}(t) & x_{22}(t) & \dots & x_{n2}(t)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ x_{1n}(t) & x_{2n}(t) & \dots & x_{nn}(t)\end{vmatrix}=$$

$$
=\begin{vmatrix} x'_{11}(t) & x_{21}(t) & \dots & x_{n1}(t) \\ x'_{12}(t) & x_{22}(t) & \dots & x_{n2}(t) \\ \dots\dots & & & \\ x'_{1n}(t) & x_{2n}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{11}(t) & x'_{21}(t) & \dots & x_{n1}(t) \\ x_{12}(t) & x'_{22}(t) & \dots & x_{n2}(t) \\ \dots\dots & & & \\ x_{1n}(t) & x'_{2n}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{vmatrix} + \dots +
$$

$$
+\begin{vmatrix} x_{11}(t) & x_{21}(t) & \dots & x'_{n1}(t) \\ x_{12}(t) & x_{22}(t) & \dots & x'_{n2}(t) \\ \dots\dots & & & \\ x_{1n}(t) & x_{2n}(t) & \dots & x'_{nn}(t) \end{vmatrix}.
$$

Оскільки для похідних виконується співвідношення:

$$
\begin{cases} x'_{11}(t) = \alpha_{11}x_{11}(t) + \alpha_{12}x_{12}(t) + \dots + \alpha_{1n}x_{1n}(t) \\ x'_{12}(t) = \alpha_{11}x_{21}(t) + \alpha_{12}x_{22}(t) + \dots + \alpha_{1n}x_{2n}(t) \\ \dots\dots\dots\dots \\ x'_{1n}(t) = \alpha_{11}x_{n1}(t) + \alpha_{12}x_{n2}(t) + \dots + \alpha_{1n}x_{nn}(t), \end{cases}
$$

$$
\begin{cases} x'_{21}(t) = \alpha_{21}x_{11}(t) + \alpha_{22}x_{21}(t) + \dots + \alpha_{2n}x_{n1}(t) \\ x'_{22}(t) = \alpha_{21}x_{12}(t) + \alpha_{22}x_{22}(t) + \dots + \alpha_{2n}x_{n2}(t) \\ \dots\dots\dots\dots \\ x'_{2n}(t) = \alpha_{21}x_{1n}(t) + \alpha_{22}x_{2n}(t) + \dots + \alpha_{2n}x_{nn}(t), \end{cases}
$$

$$
\dots\dots\dots\dots\dots\dots
$$

$$
\begin{cases} x'_{n1}(t) = \alpha_{n1}x_{11}(t) + \alpha_{n2}x_{21}(t) + \dots + \alpha_{nn}x_{n1}(t) \\ x'_{n2}(t) = \alpha_{n1}x_{12}(t) + \alpha_{n2}x_{22}(t) + \dots + \alpha_{nn}x_{n2}(t) \\ \dots\dots\dots\dots \\ x'_{nn}(t) = \alpha_{n1}x_{1n}(t) + \alpha_{n2}x_{2n}(t) + \dots + \alpha_{nn}x_{nn}(t), \end{cases}
$$

то після підстановки одержимо:

$$
\frac{d}{dt}W[x_1, \dots, x_n] = \begin{vmatrix} \alpha_{11}x_{11}(t) + \alpha_{12}x_{12}(t) + \dots + \alpha_{1n}x_{1n}(t) & x_{21}(t) & \dots & x_{n1}(t) \\ \alpha_{11}x_{21}(t) + \alpha_{12}x_{22}(t) + \dots + \alpha_{1n}x_{2n}(t) & x_{22}(t) & \dots & x_{n2}(t) \\ \dots\dots\dots\dots & & & \\ \alpha_{11}x_{n1}(t) + \alpha_{12}x_{n2}(t) + \dots + \alpha_{1n}x_{nn}(t) & x_{2n}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{vmatrix} +
$$

$$
+\begin{vmatrix} x_{11}(t) & \alpha_{21}x_{11}(t) + \alpha_{22}x_{21}(t) + \dots + \alpha_{2n}x_{n1}(t) & \dots & x_{n1}(t) \\ x_{12}(t) & \alpha_{21}x_{12}(t) + \alpha_{22}x_{22}(t) + \dots + \alpha_{2n}x_{n2}(t) & \dots & x_{n2}(t) \\ \dots\dots\dots\dots & & & \\ x_{1n}(t) & \alpha_{21}x_{1n}(t) + \alpha_{22}x_{2n}(t) + \dots + \alpha_{2n}x_{nn}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{vmatrix} + \dots +
$$

$$
+\begin{vmatrix} x_{11}(t) & \dots & x_{n-1\,1}(t) & \alpha_{n1}x_{11}(t) + \alpha_{n2}x_{21}(t) + \dots + \alpha_{nn}x_{n1}(t) \\ x_{12}(t) & \dots & x_{n-1\,2}(t) & \alpha_{n1}x_{12}(t) + \alpha_{n2}x_{22}(t) + \dots + \alpha_{nn}x_{n2}(t) \\ \dots\dots\dots\dots & & & \\ x_{1n}(t) & \dots & x_{n-1\,n}(t) & \alpha_{n1}x_{1n}(t) + \alpha_{n2}x_{2n}(t) + \dots + \alpha_{nn}x_{nn}(t). \end{vmatrix}
$$

Розкривши кожний з визначників, і з огляду на те, що визначники з однаковими стовпцями дорівнюють нулю, одержимо:

$$\frac{d}{dt}W[x_1, \ \dots \ , x_n] = a_{11}\begin{vmatrix} x_{11}(t) & x_{21}(t) & \dots & x_{n1}(t) \\ x_{12}(t) & x_{22}(t) & \dots & x_{n2}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{1n}(t) & x_{2n}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{vmatrix} +$$

$$+a_{22}\begin{vmatrix} x_{11}(t) & x_{21}(t) & \dots & x_{n1}(t) \\ x_{12}(t) & x_{22}(t) & \dots & x_{n2}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{1n}(t) & x_{2n}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{vmatrix} + \ \dots \ + a_{nn}\begin{vmatrix} x_{11}(t) & x_{21}(t) & \dots & x_{n1}(t) \\ x_{12}(t) & x_{22}(t) & \dots & x_{n2}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{1n}(t) & x_{2n}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{vmatrix} =$$

$$= (a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn})\begin{vmatrix} x_{11}(t) & x_{21}(t) & \dots & x_{n1}(t) \\ x_{12}(t) & x_{22}(t) & \dots & x_{n2}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{1n}(t) & x_{2n}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{vmatrix} =$$

$$= SpA \cdot \begin{vmatrix} x_{11}(t) & x_{21}(t) & \dots & x_{n1}(t) \\ x_{12}(t) & x_{22}(t) & \dots & x_{n2}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{1n}(t) & x_{2n}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{vmatrix} = SpA \cdot W[x_1, \ \dots \ , x_n], \quad SpA = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \ .$$

Або

$$\frac{d}{dt}W[x_1, \ \dots \ , x_n] = SpA \cdot W[x_1, \ \dots \ , x_n].$$

Розділивши змінні, одержимо:

$$\frac{dW[x_1, \ \dots \ , x_n]}{W[x_1, \ \dots \ , x_n]} = SpA \cdot dt \ .$$

Проінтегруємо в межах $t_0 \le s \le t$,

$$\ln W[x_1(t), \ \dots \ , x_n(t)] - \ln W[x_1(t_0), \ \dots \ , x_n(t_0)] = \int_{t_0}^{t} SpAdt \ ,$$

або

$$W[x_1(t), \ \dots \ , x_n(t)] = W[x_1(t_0), \ \dots \ , x_n(t_0)]e^{\int_{t_0}^{t} SpAdt} .$$

Взагалі кажучи, доведення проводилося в припущенні, що система рівнянь може залежати від часу, тобто

$$W[x_1(t), \ \dots \ , x_n(t)] = W[x_1(t_0), \ \dots \ , x_n(t_0)]e^{\int_{t_0}^{t} SpA(t)dt} .$$

Отримана формула називається формулою Якобі.

4.3. Системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь з сталими коефіцієнтами

Система диференціальних рівнянь вигляду

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ \dots \ + a_{1n}x_n \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ \dots \ + a_{2n}x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dot{x}_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ \dots \ + a_{nn}x_n, \end{cases}$$

де $a_{ij},\ i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,n}$ - сталі величини, називається лінійною однорідною системою з сталими коефіцієнтами. У матричному вигляді вона записується:

$$\dot{x} = Ax\ .$$

4.3.1. Розв'язування систем однорідних рівнянь з сталими коефіцієнтами методом Ейлера

Розглянемо один з методів побудови розв'язку систем з сталими коефіцієнтами.
Розв'язок системи шукаємо у вигляді вектора

$$x(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1 e^{\lambda x} \\ \alpha_2 e^{\lambda x} \\ \dots \\ \alpha_n e^{\lambda x} \end{pmatrix}.$$

Підставивши в систему диференціальних рівнянь, одержимо

$$\begin{cases} \alpha_1\lambda e^{\lambda x} = a_{11}\alpha_1\lambda e^{\lambda x} + a_{12}\alpha_2\lambda e^{\lambda x} + \ \dots \ + a_{1n}\alpha_n\lambda e^{\lambda x} \\ \alpha_2\lambda e^{\lambda x} = a_{21}\alpha_1\lambda e^{\lambda x} + a_{22}\alpha_2\lambda e^{\lambda x} + \ \dots \ + a_{2n}\alpha_n\lambda e^{\lambda x} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_n\lambda e^{\lambda x} = a_{n1}\alpha_1\lambda e^{\lambda x} + a_{n2}\alpha_2\lambda e^{\lambda x} + \ \dots \ + a_{nn}\alpha_n\lambda e^{\lambda x} \end{cases}$$

Скоротивши на $e^{\lambda x} \neq 0$, і перенісши всі члени вправо, запишемо

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ \dots \ + a_{1n}\alpha_n = 0 \\ a_{21}\alpha_1 + (a_{22} - \lambda)\alpha_2 + \ \dots \ + a_{2n}\alpha_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \ \dots \ + (a_{nn} - \lambda)\alpha_n = 0 \end{cases}$$

Отримана однорідна система лінійних алгебраїчних рівнянь має розв'язок тоді і тільки тоді, коли її визначник дорівнює нулю, тобто

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda_1 & a_{12}\alpha_2 & a_{1n}\alpha_n \\ a_{21}\alpha_1 & a_{22}-\lambda & a_{2n}\alpha_n \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ a_{n1}\alpha_1 & a_{n2}\alpha_2 & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0 .$$

Це рівняння, може бути записаним у векторно-матричній формі

$$\det(A-\lambda E)=0$$

і воно називається характеристичним (чи віковим) рівнянням. Розкриємо його

$$\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + \dots + p_{n-1}\lambda + p_n = 0 .$$

Алгебраїчне рівняння n-го ступеня має n-коренів. Розглянемо різні випадки.

1. Всі корені характеристичного рівняння $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ (власні числа матриці A) дійсні і різні. Підставляючи їх по черзі в систему алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda_i)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \dots + a_{1n}\alpha_n = 0 \\ a_{21}\alpha_1 + (a_{22}-\lambda_i)\alpha_2 + \dots + a_{2n}\alpha_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \dots + (a_{nn}-\lambda_i)\alpha_n = 0 \end{cases}$$

одержуємо відповідні ненульові розв'язки системи:

$$\alpha^1 = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 \\ \alpha_2^1 \\ \dots \\ \alpha_n^1 \end{pmatrix}, \quad \alpha^2 = \begin{pmatrix} \alpha_1^2 \\ \alpha_2^2 \\ \dots \\ \alpha_n^2 \end{pmatrix}, \quad \dots \quad , \alpha^n = \begin{pmatrix} \alpha_1^n \\ \alpha_2^n \\ \dots \\ \alpha_n^n \end{pmatrix}$$

що є власними векторами, які відповідають власним числам λ_i, $i=\overline{1,n}$.

У такий спосіб одержимо n- розв'язків

$$x_1(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 e^{\lambda_1 x} \\ \alpha_2^1 e^{\lambda_1 x} \\ \dots \\ \alpha_n^1 e^{\lambda_1 x} \end{pmatrix}, \quad x_2(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1^2 e^{\lambda_2 x} \\ \alpha_2^2 e^{\lambda_2 x} \\ \dots \\ \alpha_n^2 e^{\lambda_2 x} \end{pmatrix}, \quad \dots \quad , x_n(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1^n e^{\lambda_n t} \\ \alpha_2^n e^{\lambda_n t} \\ \dots \\ \alpha_n^n e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \dots$$

Причому оскільки $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ - різні а $\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^n$ - відповідні їм власні вектори, то розв'язки $x_1(t), \dots, x_n(t)$ - лінійно незалежні, і загальний розв'язок системи має вигляд

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i x_i(t) .$$

Або у векторно – матричній формі запису

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 e^{\lambda_1 t} & \alpha_1^2 e^{\lambda_2 t} & \dots & \alpha_1^n e^{\lambda_n t} \\ \alpha_2^1 e^{\lambda_1 t} & \alpha_2^2 e^{\lambda_2 t} & \dots & \alpha_2^n e^{\lambda_n t} \\ \dots & & & \\ \alpha_n^1 e^{\lambda_1 t} & \alpha_n^2 e^{\lambda_2 t} & \dots & \alpha_n^n e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \dots \\ C_n \end{pmatrix},$$

де $C_1,\ \dots\ ,C_n$ - довільні сталі.

2. Нехай $\lambda = p \pm iq$ пара комплексно спряжених коренів. Візьмемо один з них, наприклад $\lambda = p + iq$. Комплексному власному числу відповідає комплексний власний вектор:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 + is_1 \\ r_2 + is_2 \\ \dots\dots\dots \\ r_n + is_n \end{pmatrix}$$

і, відповідно, розв'язок:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (r_1 + is_1)e^{(p+iq)t} \\ (r_2 + is_2)e^{(p+iq)t} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (r_n + is_n)e^{(p+iq)t} \end{pmatrix}.$$

Використовуючи залежність $e^{(p+iq)t} = e^{pt}(\cos qt + i\sin qt)$, перетворимо розв'язок до вигляду

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (r_1 + is_1)e^{pt}(\cos qt + i\sin qt) \\ (r_2 + is_2)e^{pt}(\cos qt + i\sin qt) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (r_n + is_n)e^{pt}(\cos qt + i\sin qt) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} e^{pt}(r_1\cos qt - s_1\sin qt) \\ e^{pt}(r_2\cos qt - s_2\sin qt) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ e^{pt}(r_n\cos qt - s_n\sin qt) \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} e^{pt}(r_1\sin qt + s_1\cos qt) \\ e^{pt}(r_2\sin qt + s_2\cos qt) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ e^{pt}(r_n\sin qt + s_n\cos qt) \end{pmatrix} =$$

$= u(t) + iv(t)$.

І, як випливає з властивості 4 розв'язків однорідних систем, якщо комплексна функція $u(t) + iv(t)$ дійсного аргументу є розв'язком однорідної системи, то окремо дійсна і уявна частини також будуть розв'язками, тобто комплексним власним числам $\lambda_{1,2} = p \pm iq$ відповідають лінійно незалежні розв'язки

$$u(t)=\begin{pmatrix} e^{pt}(r_1\cos qt - s_1\sin qt) \\ e^{pt}(r_2\cos qt - s_2\sin qt) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ e^{pt}(r_n\cos qt - s_n\sin qt) \end{pmatrix},\ v(t)=\begin{pmatrix} e^{pt}(r_1\cos qt + s_1\sin qt) \\ e^{pt}(r_2\cos qt + s_2\sin qt) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ e^{pt}(r_n\cos qt + s_n\sin qt) \end{pmatrix}.$$

3. Якщо характеристичне рівняння має кратний корінь λ кратності γ, тобто $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_\gamma=\lambda$, то розв'язок системи рівнянь має вигляд

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (\alpha_1^1+\alpha_1^2 t+\ \ldots\ +\alpha_1^\gamma t^{\gamma-1})e^{\lambda t} \\ (\alpha_2^1+\alpha_2^2 t+\ \ldots\ +\alpha_2^\gamma t^{\gamma-1})e^{\lambda t} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (\alpha_n^1+\alpha_n^2 t+\ \ldots\ +\alpha_n^\gamma t^{\gamma-1})e^{\lambda t} \end{pmatrix}.$$

Підставивши його у вихідне диференціальне рівняння і прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях, одержимо $\gamma\cdot n$ - рівнянь, що містять $\gamma\cdot n$ -невідомих. Тому що корінь характеристичного рівняння λ має кратність γ, то ранг отриманої системи $\gamma n-\gamma=\gamma(n-1)$. Уводячи γ довільних сталих $C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_\gamma$ і розв'язуючи систему, одержимо

$\alpha_i^j=\alpha_i^j(C_1,C_2,\ \ldots\ ,C_\gamma)$, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,\gamma}$.

4.3.2. Розв'язок систем однорідних рівнянь зі сталими коефіцієнтами матричним методом

Досить універсальним методом розв'язку лінійних однорідних систем з сталими коефіцієнтами є матричний метод. Він полягає в наступному. Розглядається лінійна система з сталими коефіцієнтами, що записана у векторно-матричному вигляді

$$\dot{x}(t)=Ax,\ x\in R^n .$$

Робиться невироджене перетворення $x=Sy,\ y\in R^n,\ \det S\neq 0$, де вектор y - нова невідома векторна функція. Тоді рівняння прийме вигляд

$$S\dot{y}=ASy \text{ або } \dot{y}=S^{-1}ASy .$$

Для довільної матриці A завжди існує неособлива матриця S, що приводить її до жорданової форми, тобто $S^{-1}AS = \Lambda$, де Λ - жорданова форма матриці A. І система диференціальних рівнянь прийме вигляд

$$\dot{y} = \Lambda y,\ y \in R^n .$$

Складемо характеристичне рівняння матриці A

$$\det(A - \lambda E) = 0 \ \text{, або} \quad \lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + ... + p_{n-1}\lambda + p_n = 0 .$$

Алгебраїчне рівняння n - го ступеня має n коренів. Розглянемо різні випадки.

1. Нехай $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ - дійсні різні числа. Тоді матриця Λ має вигляд:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 0....0 \\ 0\lambda_2....0 \\ .... \\ 0\ \ 0.....\lambda_n \end{bmatrix}.$$

І перетворена система диференціальних рівнянь розпадається на n - незалежних рівнянь

$$\dot{y}_1 = \lambda_1 y_1,\ \dot{y}_2 = \lambda_2 y_2,\ ...,\ \dot{y}_n = \lambda_n y_n .$$

Розв'язуючи кожне окремо, отримаємо

$$y_1 = C_1 e^{\lambda_1 t}, y_2 = C_2 e^{\lambda_2 t}, ..., y_n = C_n e^{\lambda_n t} .$$

Або в матричному вигляді

$$y = e^{\Lambda t}C, \quad \text{де } e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t}\, 0\ ...\ \ 0 \\ 0\ \ e^{\lambda_2 t} ...\ 0 \\ 0\ \ 0\ \ ...\ e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}, C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ ... \\ C_n \end{pmatrix}.$$

Звідси розв'язок вихідного рівняння має вигляд $x = Se^{\Lambda t}C$. Для знаходження матриці S треба розв'язати матричне рівняння

$$S^{-1}AS = \Lambda \ \text{ або } \ AS = SA,$$

де Λ - жорданова форма матриці A. Якщо матрицю S записати у вигляді

$$S = \begin{bmatrix} \alpha_1^1\alpha_1^2...\alpha_1^n \\ \alpha_2^1\alpha_2^2...\alpha_2^n \\ .... \\ \alpha_n^1\alpha_n^2...\alpha_n^n \end{bmatrix},$$

то для кожного з стовпчиків $s_i^T = (\alpha_1^i\alpha_2^i...\alpha_n^i)$, матричне рівняння перетвориться до

$$As_i = \lambda_i s_i ,\ i = \overline{1,n} .$$

Таким чином, у випадку різних дійсних власних чисел матриця S являє собою набір n - власних векторів, що відповідають різним власним числам.

2. Нехай $\lambda_{1,2} = p \pm iq$ - комплексний корінь. Тоді відповідна клітка Жордана має вигляд

$$\Lambda_{1,2}=\begin{bmatrix} p & q \\ -q & p \end{bmatrix},$$

а перетворена система диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = py_1 + qy_2 \\ \dot{y}_2 = -qy_1 + py_2. \end{cases}$$

Неважко перевірити, що розв'язок отриманої системи диференціальних рівнянь має вигляд

$$y_1 = c_1 e^{pt}\cos qt + c_2 e^{pt}\sin qt,\; y_2 = -c_1 e^{pt}\sin qt + c_2 e^{pt}\cos qt.$$

Або в матричному вигляді

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} e^{pt}\cos qt & e^{pt}\sin qt \\ -e^{pt}\sin qt & e^{pt}\cos qt \end{bmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, комплексно-спряженим власним числам $\lambda_{1,2} = p \pm iq$ відповідає розв'язок

$$y = e^{\Lambda t}C, \text{ де } e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} e^{pt}\cos qt & e^{pt}\sin qt \\ -e^{pt}\sin qt & e^{pt}\cos qt \end{bmatrix}.$$

3. Нехай λ- кратний корінь, кратності $m \le n$, тобто $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_m = \lambda$ і йому відповідають $r \le m$ лінійно незалежних векторів. Тоді клітка Жордана, що відповідає цьому власному числу, має вигляд:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda 0 \ldots 0 \mid 0 \ldots 0 \\ 0 \lambda \ldots 0 \mid 0 \ldots 0 \\ \ldots\ldots \ldots \mid \ldots\ldots \\ 0, \ldots \lambda \mid 0 \ldots 0 \\ ------- \\ 0 \ldots 0 \mid \lambda 1 \ldots 0 \\ 0 \ldots 0 \mid 0 \lambda \ldots 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 00 \ldots 0 \mid 00 . \lambda \end{bmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} r \\ \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} m-r \end{matrix}$$

І перетворена підсистема, що відповідає власному числу λ, розпадається не дві підсистеми

$$\dot{y}_1 = \Lambda_1 y_1,\; y_1 \in R^r,\; \dot{y}_2 = \Lambda_2 y_2, y_2 \in R^{m-r}.$$

$$\Lambda_1 = \begin{bmatrix} \lambda 0 \ldots 0 \\ 0 \lambda \ldots 0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ 00 \ldots \lambda \end{bmatrix}, \Lambda_2 = \begin{bmatrix} \lambda 1 \ldots 0 \\ 0 \lambda \ldots 0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ 00 \ldots \lambda \end{bmatrix}.$$

Розв'язок першої знаходиться з використанням зазначеного в першому пункті підходу. Розглянемо другу підсистему. Запишемо її в координатному вигляді

$$\begin{cases} \dot{y}_{21} = \lambda y_{21} + y_{22} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dot{y}_{2,m-r-1} = \lambda y_{2,m-r-1} + y_{2,m-r} \\ \dot{y}_{2,m-r} = \lambda y_{2,m-r}. \end{cases}$$

Розв'язок останнього рівняння цієї підсистеми має вигляд

$$y_{2,m-r} = c_{2,m-r} e^{\lambda t}.$$

Підставимо його в передостаннє рівняння. Одержуємо:

$$\dot{y}_{2,m-r-1} = \lambda y_{2,m-r-1} + c_{2,m-r} e^{\lambda t}.$$

Загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння має вигляд суми загального розв'язку однорідного і частинного розв'язку неоднорідних рівнянь, тобто

$$y_{2,m-r-1} = y^{o}_{2,m-r-1} + \overline{y}_{2,m-r-1}.$$

Загальний розв'язок однорідного має вигляд: $y^{o}_{2,m-r-1} = c_{2,m-r-1} e^{\lambda t}$.

Частинний розв'язок неоднорідного шукаємо методом невизначених коефіцієнтів у вигляді

$$\overline{y}_{2,m-r-1} = Ate^{\lambda t},$$

де A - невідома стала. Підставивши в неоднорідне рівняння, одержимо

$$Ae^{\lambda t} + A\lambda te^{\lambda t} = A\lambda te^{\lambda t} + c_{2,m-r-1} e^{\lambda t}.$$

Звідси $A = c_{2,m-r-1}$ і загальний розв'язок неоднорідного рівняння має вигляд

$$y_{2,m-r-1} = c_{2,m-r-1} e^{\lambda t} + c_{2,m-r} te^{\lambda t}.$$

Піднявшись ще на один крок нагору одержимо

$$y_{2,m-r-2} = c_{2,m-r-2} e^{\lambda t} + c_{2,m-r-1} te^{\lambda t} + c_{2,m-r} \frac{1}{2!} e^{\lambda t}.$$

Продовжуючи процес далі, маємо

$$y_{2,1} = c_{2,1} e^{\lambda t} + c_{2,2} te^{\lambda} + \ldots + c_{2,m-r} \frac{t^{m-r-1}}{(m-r-1)!} e^{\lambda t}.$$

Або у векторно - матричному вигляді

$$y_2(t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} \; te^{\lambda t} \ldots . \dfrac{t^{m-r-1}}{(m-r-1)!} e^{\lambda t} \\ 0 \quad e^{\lambda t} \ldots . \dfrac{t^{m-r-2}}{(m-r-2)!} e^{\lambda t} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 0 \quad 0 \dots\dots\dots\dots e^{\lambda t} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} c_{21} \\ c_{22} \\ \ldots . \\ c_{2,m-r} \end{pmatrix}. .$$

Додавши першу підсистему, одержимо

$$y_m = \begin{bmatrix} e^{\Lambda_1 t} \ \Xi_{12} \\ \Xi_{21} \ e^{\Lambda_2 t} \end{bmatrix} C_m, \quad e^{\Lambda_1 t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} \ 0...0 \\ 0 \ e^{\lambda t}...0 \\ .... \\ 0\ 0......e^{\lambda t} \end{bmatrix},$$

$$e^{\Lambda_2 t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} \ te^{\lambda t}....\frac{t^{m-r-1}}{(m-r-1)!}e^{\lambda t} \\ 0 \quad e^{\lambda t} \ ....\frac{t^{m-r-2}}{(m-r-2)!}e^{\lambda t} \\ .... \\ 0 \quad 0...........e^{\lambda t} \end{bmatrix}, \quad C_m = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_{22} \\ .... \\ c_m \end{pmatrix}.$$

Для останніх двох випадків матриця S знаходиться як розв’язок матричного рівняння

$$AS = S\Lambda .$$

4.4. Лінійні неоднорідні системи диференціальних рівнянь

Система диференціальних рівнянь, що записана у вигляді:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \ ... \ + a_{1n}(t)x_n + f_1(t) \\ \dot{x}_2 = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \ ... \ + a_{2n}(t)x_n + f_2(t) \\ .... \\ \dot{x}_n = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \ ... \ + a_{nn}(t)x_n + f_n(t), \end{cases}$$

чи у векторно-матричному вигляді

$$\dot{x} = A(t)x + f(t)$$

називається системою лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь.

4.4.1. Властивості розв’язків лінійних неоднорідних систем

Властивість 1. Якщо вектор $\overline{x(t)} = \begin{pmatrix} \overline{x_1(t)} \\ \overline{x_2(t)} \\ ... \\ \overline{x_n(t)} \end{pmatrix}$ є розв'язком лінійної неоднорідної системи, а $x_0(t)=\begin{pmatrix} x_1^0(t) \\ \\ \dots \\ x_n^0(t) \end{pmatrix}$ розв'язком відповідної лінійної однорідної системи, то сума $\bar{x}(t)+x_0(t)$ - є розв'язком лінійної неоднорідної системи.

Дійсно, за умовою

$$\dot{\bar{x}}(t)-A(t)\bar{x}(t)\equiv f(t) \text{ і } \dot{x}_0(t)-A(t)\dot{x}_0(t)\equiv 0 .$$

Але тоді і

$$\frac{d}{dt}\left[\bar{x}(t)+x_0(t)\right]-A(t)\left[\bar{x}(t)+x_0(t)\right]=$$
$$\left[\frac{d}{dt}\bar{x}(t)-A(t)\bar{x}(t)\right]+\left[\frac{d}{dt}x_0(t)-A(t)x_0(t)\right]\equiv f(t),$$

тобто $\bar{x}(t)+x_0(t)$ є розв'язком неоднорідної системи.

Властивість *2* **(***Принцип суперпозиції***).** Якщо вектори $x_i=\begin{pmatrix} x_{1i}(t) \\ x_{2i}(t) \\ \dots \\ x_{ni}(t) \end{pmatrix}$ $,i=\overline{1,n}$ є розв'язками лінійних неоднорідних систем

$\dot{x}=A(t)x+f_i(t)$, $i=\overline{1,n}$,

де $f_i(t)=\begin{pmatrix} f_{1i}(t) \\ \dots\dots \\ f_{ni}(t) \end{pmatrix}$**,** то вектор $x(t)=\sum_{i=1}^{n}C_ix_i(t)$**,** де C_i **-** довільні сталі буде розв'язком лінійної неоднорідної системи

$$\dot{x}=A(t)x+\sum_{i=1}^{n}C_if_i(t).$$

Дійсно, за умовою виконуються n - тотожностей

$$\dot{x}_i(t)-A(t)x_i(t)\equiv f_i(t).$$

Склавши лінійну комбінацію з лівих і правих частин, одержимо

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_{i=1}^{n}C_ix_i(t)\right]-A(t)\left[\sum_{i=1}^{n}C_ix_i(t)\right]=\sum_{i=1}^{n}C_i\left[\dot{x}_i(t)-A(t)x_i(t)\right]\equiv\sum_{i=1}^{n}C_if_i(t),$$

тобто лінійна комбінація $x(t)=\sum_{i=1}^{n}C_ix_i(t)$ буде розв'язком системи

$$\dot{x}=A(t)x+\sum_{i=1}^{n}C_if_i(t).$$

Властивість 3. Якщо комплексний вектор з дійсними елементами $x(t)=u(t)+iv(t)=\begin{pmatrix}u_1(t)\\ ...\\ u_n(t)\end{pmatrix}+i\begin{pmatrix}v_1(t)\\ ...\\ v_n(t)\end{pmatrix}$ є розв'язком неоднорідної системи $\dot{x}=A(t)x+f(t)$, де $f(t)=p(t)+iq(t)$, $p(t)=\begin{pmatrix}p_1(t)\\ ....\\ p_n(t)\end{pmatrix}$, $q(t)=\begin{pmatrix}q_1(t)\\ ....\\ q_n(t)\end{pmatrix}$, то окремо дійсна і уявна частини є розв'язками системи.

Дійсно, за умовою

$$\frac{d}{dt}[u(t)+iv(t)]-A(t)[u(t)+iv(t)]\equiv p(t)+iq(t).$$

Розкривши дужки і перетворивши, одержимо

$$[\dot{u}(t)-A(t)u(t)]+i[\dot{v}(t)-A(t)v(t)]\equiv p(t)+iq(t).$$

Але комплексні вирази рівні між собою тоді і тільки тоді, коли рівні дійсні та уявні частини, що і було потрібно довести.

Теорема (*про загальний розв'язок лінійної неоднорідної системи***).** Загальний розв'язок лінійної неоднорідної системи складається із суми загального розв'язку однорідної системи і якого-небудь частинного розв'язку неоднорідної системи.

Доведення. Нехай $x_0(t)=\sum_{i=1}^{n}C_i x_i(t)$ - загальний розв'язок однорідної системи і $\overline{x}(t)$ - частинний розв'язок неоднорідної. Тоді, як випливає з властивості 1, їхня сума $x(t)+\overline{x}(t)$ буде розв'язком неоднорідної системи.

Покажемо, що цей розв'язок загальний, тобто підбором сталих C_i, $i=\overline{1,n}$ можна розв'язати довільну задачу Коші

$$x_1(t_0)=x_1^0,\ x_2(t_0)=x_2^0,\ ...\ ,x_n(t_0)=x_n^0.$$

Оскільки $x_0(t)=\sum_{i=1}^{n}C_i x_i(t)$ - загальний розв'язок однорідного рівняння, то вектори $x_1(t),\ ...\ ,x_n(t)$ лінійно незалежні $W[x_1(t),\ ...\ ,x_n(t)]\neq 0$ і система алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases}C_1x_{11}(t_0)+C_2x_{12}(t_0)+\ ...\ +C_nx_{1n}(t_0)=x_1^0-\overline{x}_1(t_0)\\ C_1x_{21}(t_0)+C_2x_{22}(t_0)+\ ...\ +C_nx_{2n}(t_0)=x_2^0-\overline{x}_2(t_0)\\ ....\\ C_1x_{n1}(t_0)+C_2x_{n2}(t_0)+\ ...\ +C_nx_{nn}(t_0)=x_n^0-\overline{x}_n(t_0)\end{cases}$$

має єдине розв'язок $C_i^0, i=\overline{1,n}$. І лінійна комбінація $x(t)=\sum_{i=1}^{n}C_i^0 x_i(t)+\overline{x}(t)$ с отриманими сталими C_i^0, $i=\overline{1,n}$ є розв'язком поставленої задачі Коші.

4.4.2. Побудова частинного розв'язку неоднорідної системи методом варіації довільних сталих

Як випливає з останньої теореми, для побудови загального розв'язку неоднорідної системи потрібно розв'язати однорідну і яким-небудь засобом знайти частинний розв'язок неоднорідної системи. Розглянемо метод, який називається методом варіації довільної сталої.

Нехай маємо систему

$$\dot{x} = A(t)x + f(t)$$

і $x(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i x_i(t)$ - загальний розв'язок однорідної системи. Розв'язок неоднорідної будемо шукати в такому ж вигляді, але вважати C_i не сталими, а невідомими функціями, тобто $C_i = C_i(t)$ і $x_{неодн}(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i(t) x_i(t)$,чи в матричній формі

$$x_{неодн}(t) = X(t)C(t),$$

де $X(t)$ - фундаментальна матриця розв'язків, $C(t)$ - вектор з невідомих функцій. Підставивши в систему, одержимо

$$\frac{d}{dt} X(t) \cdot C(t) + X(t)\frac{dC(t)}{dt} = A(t)X(t)C(t) + f(t),$$

чи

$$\left[\frac{d}{dt} X(t) - A(t)X(t)\right] \cdot C(t) + X(t)\frac{dC(t)}{dt} = f(t).$$

Оскільки $X(t)$ - фундаментальна матриця, тобто матриця складена з розв'язків, то

$$\frac{d}{dt} X(t) - A(t)X(t) \equiv 0.$$

і залишається система рівнянь $X(t)C'(t) = f(t)$.

Розписавши покоординатно, одержимо:

$$\begin{cases} C'_1 x_{11}(t) + C'_2 x_{12}(t) + \ \dots \ + C'_n x_{1n}(t) = f_1(t) \\ C'_1 x_{21}(t) + C'_2 x_{22}(t) + \ \dots \ + C'_n x_{2n}(t) = f_2(t) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ C'_1 x_{n1}(t) + C'_2 x_{n2}(t) + \ \dots \ + C'_n x_{nn}(t) = f_n(t). \end{cases}$$

Оскільки визначником системи є визначник Вронського і він не дорівнює нулю, то система має єдиний розв'язок і функції $C_i(t)$ визначаються в такий спосіб

$$C_1(t) = \int \frac{\begin{vmatrix} f_1(t) & x_{12}(t) & x_{1n}(t) \\ f_2(t) & x_{22}(t) & x_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ f_n(t) & x_{n2}(t) & x_{nn}(t) \end{vmatrix}}{W[x_1(t),\ \dots\ , x_n(t)]} dt,$$

$$C_2(t) = \int \frac{\begin{vmatrix} x_{11}(t) & f_1(t) & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & f_2(t) & x_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{n1}(t) & f_n(t) & x_{nn}(t) \end{vmatrix}}{W[x_1(t),\ \dots\ , x_n(t)]} dt,$$

$$C_n(t) = \int \frac{\begin{vmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & f_1(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & f_2(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & f_n(t) \end{vmatrix}}{W[x_1(t),\ \dots\ , x_n(t)]} dt.$$

Звідси частинний розв’язок неоднорідної системи має вигляд

$$x_{неодн} = \sum_{i=1}^{n} C_i(t) x_i(t) .$$

Для лінійної неоднорідної системи на площині

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + f_1(t) \\ \dot{x}_2 = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + f_2(t) \end{cases}$$

метод варіації довільної сталої реалізується таким чином.

Нехай

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) \end{bmatrix}.$$

Фундаментальна матриця розв’язків однорідної системи. Тоді частинний розв’язок неоднорідної шукається у вигляді

$$\begin{cases} C'_1\, x_{11}(t) + C'_2\, x_{12}(t) = f_1(t) \\ C'_1\, x_{21}(t) + C'_2\, x_{22}(t) = f_2(t). \end{cases}$$

Звідси

$$C_1(t)=\int\frac{\begin{vmatrix} f_1(t) & x_{12}(t)\\ f_2(t) & x_{22}(t)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t)\\ x_{21}(t) & x_{22}(t0\end{vmatrix}}dt,\quad C_2(t)=\int\frac{\begin{vmatrix} x_{11}(t) & f_1(t)\\ x_{21}(t) & f_2(t)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t)\\ x_{21}(t) & x_{22}(t0\end{vmatrix}}dt.$$

Загальний розв’язок має вигляд

$$\begin{pmatrix} x_1(t)\\ x_2(t)\end{pmatrix}=\begin{bmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t)\\ x_{21}(t) & x_{22}(t)\end{bmatrix}\begin{pmatrix} C_1\\ C_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \bar{x}_1(t)\\ \bar{x}_2(t)\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} \bar{x}_1(t)\\ \bar{x}_2(t)\end{pmatrix}=\begin{bmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t)\\ x_{21}(t) & x_{22}(t)\end{bmatrix}\begin{pmatrix} C_1(t)\\ C_2(t)\end{pmatrix},$$

де C_1, C_2 - довільні сталі.

4.4.3. Побудова загального розв’язку неоднорідної системи рівнянь. Метод фундаментальних функцій Коші

Нехай $X(t,t_0)$- фундаментальна система, нормована при $t=t_0$ тобто $X(t_0,t_0)=E$, де E - одинична матриця. Загальний розв’язок однорідної системи має вигляд

$$x(t)=X(t,t_0)C.$$

Вважаючи C невідомою вектором-функцією і повторюючи викладення методу варіації довільної постійний, одержимо

$$X(t,t_0)C'(t)=f(t).$$

Звідси

$$\frac{dC(t)}{dt}=X^{-1}(t,t_0)f(t).$$

Проінтегруємо отриманий вираз

$$C(t)=C+\int_{t_0}^{t}X^{-1}(\tau,t_0)f(\tau)d\tau.$$

Тут C - вектор із сталих, що отриманий при інтегруванні системи. Підставивши у вихідний вираз, одержимо:

$$x(t)=X(t,t_0)\left[C+\int_{t_0}^{t}X^{-1}(\tau,t_0)f(\tau)d\tau\right]=X(t,t_0)C+$$
$$+\int_{t_0}^{t}X(t,t_0)X^{-1}(\tau,t_0)f(\tau)d\tau.$$

Якщо $X(t,t_0)$- фундаментальна матриця, нормована при $t=t_0$, то $X(t,t_0)=X(t)X^{-1}(t_0)$. Звідси

$$X(t,t_0)X^{-1}(\tau,t_0)=X(t)X^{-1}(t_0)\left[X(\tau)X^{-1}(t_0)\right]^{-1}=X(t)X^{-1}(\tau)=X(t,\tau).$$

Підставивши початкові значення $x(t_0)=x_0$ і з огляду на те, що $X(t_0,t_0)=E$, одержимо:

$$x(t)=X(t,t_0)x_0+\int_{t_0}^{t}X(t,t_0)X^{-1}(\tau,t_0)f(\tau)d\tau$$

- формулу Коші, загального розв'язку неоднорідного рівняння. Частинний розв'язок неоднорідного рівняння, що задовольняє нульовій початковій умові, має вид

$$x_{неодн}(t) = \int_{t_0}^{t} X(t,\tau)\, f(\tau) d\tau \,.$$

Якщо система з сталою матрицею A, то

$$X(t,t_0) = X(t-t_0),\;\; X(t,\tau) = X(t-\tau)\,.$$

І формула Коші має вигляд

$$x(t) = X(t-t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} X(t-\tau)\, f(\tau) d\tau \,.$$

4.4.4. Метод невизначених коефіцієнтів в побудові частинного розв'язку системи лінійних диференціальних рівнянь з сталими коефіцієнтами

Якщо система лінійних диференціальних рівнянь з сталими коефіцієнтами, а векторна функція $f(t)$ спеціального виду, то частинний розв'язок можна знайти методом невизначених коефіцієнтів. Доведення існування частинного розв'язку зазначеного виду аналогічно доведенню для лінійних рівнянь вищих порядків.

1) Нехай кожна з компонент вектора $f(x)$ є многочленом степеня не більш ніж s, тобто

$$\begin{pmatrix} f_1(t) \\ \ldots\ldots \\ f_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_0^1 t^s + A_1^1 t^{s-1} + \ldots + A_{s-1}^1 t + A_s^1 \\ A_0^2 t^s + A_1^2 t^{s-1} + \ldots + A_{s-1}^2 t + A_s^2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_0^n t^s + A_1^n t^{s-1} + \ldots + A_{s-1}^n t + A_s^n \end{pmatrix}.$$

а) Якщо характеристичне рівняння не має нульового кореня, тобто $\lambda_i \neq 0$, $i = \overline{1,n}$, то частинний розв'язок шукається в такому ж вигляді, тобто

$$\begin{pmatrix} x_1^{неод} \\ \ldots\ldots \\ x_n^{неод} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_0^1 t^s + B_1^1 t^{s-1} + \ldots + B_{s-1}^1 t + B_s^1 \\ B_0^2 t^s + B_1^2 t^{s-1} + \ldots + B_{s-1}^2 t + B_s^2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ B_0^n t^s + B_1^n t^{s-1} + \ldots + B_{s-1}^n t + B_s^n \end{pmatrix}.$$

б) Якщо характеристичне рівняння має нульовий корінь кратності r, тобто $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_r$, те частинний розв'язок шукається у вигляді многочлена степеня $s+r$, тобто

$$\begin{pmatrix} x_1^{неод} \\ \dots\dots \\ x_n^{неод} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_0^1 t^{s+r} + B_1^1 t^{s+r-1} + \dots + B_{s+r}^1 \\ B_0^2 t^{s+r} + B_1^2 t^{s+r-1} + \dots + B_{s+r}^2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ B_0^n t^{s+r} + B_1^n t^{s+r-1} + \dots + B_{s+r}^n \end{pmatrix}.$$

Причому перші $(s+1)n$- коефіцієнти B_i^j, $i=\overline{0,s}$, $j=\overline{1,n}$ знаходяться точно, а інші з точністю до сталих інтегрування $C_1, \dots, C_n$, що входять у загальний розв'язок однорідних систем.

2) Нехай $f(t)$ має вид

$$\begin{pmatrix} f_1(t) \\ \dots\dots \\ f_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{pt}(A_0^1 t^s + A_1^1 t^{s-1} + \dots + A_{s-1}^1 t + A_s^1) \\ e^{pt}(A_0^2 t^s + A_1^2 t^{s-1} + \dots + A_{s-1}^2 t + A_s^2) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ e^{pt}(A_0^n t^s + A_1^n t^{s-1} + \dots + A_{s-1}^n t + A_s^n) \end{pmatrix}.$$

а) Якщо характеристичне рівняння не має коренем значення p, тобто $\lambda_i \neq p$, $i=\overline{1,n}$, то частинний розв'язок шукається в такому ж вигляді, тобто

$$\begin{pmatrix} x_1^{неод} \\ \dots\dots \\ x_n^{неод} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{pt}(B_0^1 t^s + B_1^1 t^{s-1} + \dots + B_{s-1}^1 t + B_s^1) \\ e^{pt}(B_0^2 t^s + B_1^2 t^{s-1} + \dots + B_{s-1}^2 t + B_s^2) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ e^{pt}(B_0^n t^s + B_1^n t^{s-1} + \dots + B_{s-1}^n t + B_s^n) \end{pmatrix}.$$

б) Якщо p є коренем характеристичного рівняння кратності r, тобто $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_r = p$, то частинний розв'язок шукається у вигляді

$$\begin{pmatrix} x_1^{неод} \\ \dots\dots \\ x_n^{неод} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{pt}(B_0^1 t^{s+r} + B_1^1 t^{s+r-1} + \dots + B_{s+r}^1) \\ e^{pt}(B_0^2 t^{s+r} + B_1^2 t^{s+r-1} + \dots + B_{s+r}^2) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ e^{pt}(B_0^n t^{s+r} + B_1^n t^{s+r-1} + \dots + B_{s+r}^n) \end{pmatrix}.$$

І, як у попередньому пункті, перші $(s+1)n$- коефіцієнти B_i^j, $i=\overline{0,s}$, $j=\overline{1,n}$ знаходяться точно, а інші з точністю до сталої інтегрування $C_1, \dots, C_n$.

3) Нехай $f(t)$ має вигляд:

$$\begin{pmatrix} f_1(t) \\ \dots\dots \\ f_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{pt}(A_0^1 t^s + A_1^1 t^{s-1} + \ \dots\ + A_{s-1}^1 t \ + A_s^1)\cos qt \\ e^{pt}(A_0^2 t^s + A_1^2 t^{s-1} + \ \dots\ + A_{s-1}^2 t \ + A_s^2)\cos qt \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ e^{pt}(A_0^n t^s + A_1^n t^{s-1} + \ \dots\ + A_{s-1}^n t \ + A_s^n)\cos qt \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} e^{pt}(B_0^1 t^s + B_1^1 t^{s-1} + \ \dots\ + B_{s-1}^1 t \ + B_s^1)\sin qt \\ e^{pt}(B_0^2 t^s + B_1^2 t^{s-1} + \ \dots\ + B_{s-1}^2 t \ + B_s^2)\sin qt \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ e^{pt}(B_0^n t^s + B_1^n t^{s-1} + \ \dots\ + B_{s-1}^n t \ + B_s^n)\sin qt \end{pmatrix}.$$

а) Якщо характеристичне рівняння не має коренем значення $p \pm iq$, то частинний розв’язок шукається в такому ж вигляді, тобто

$$\begin{pmatrix} x_1^{неод} \\ \dots\dots \\ x_n^{неод} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{pt}(C_0^1 t^s + C_1^1 t^{s-1} + \ \dots\ + C_{s-1}^1 t \ + C_s^1)\cos qt \\ e^{pt}(C_0^2 t^s + C_1^2 t^{s-1} + \ \dots\ + C_{s-1}^2 t \ + C_s^2)\cos qt \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ e^{pt}(C_0^n t^s + C_1^n t^{s-1} + \ \dots\ + C_{s-1}^n t \ + C_s^n)\cos qt \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} e^{pt}(D_0^1 t^s + D_1^1 t^{s-1} + \ \dots\ + D_{s-1}^1 t \ + D_s^1)\sin qt \\ e^{pt}(D_0^2 t^s + D_1^2 t^{s-1} + \ \dots\ + D_{s-1}^2 t \ + D_s^2)\sin qt \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ e^{pt}(D_0^n t^s + D_1^n t^{s-1} + \ \dots\ + D_{s-1}^n t \ + D_s^n)\sin qt \end{pmatrix}.$$

б) Якщо $p \pm iq$ є коренем характеристичного рівняння кратності r, то частинний розв’язок має вигляд

$$\begin{pmatrix} x_1^{неод} \\ \dots\dots \\ x_n^{неод} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{pt}(C_0^1 t^{s+r} + C_1^1 t^{s+r-1} + \ \dots\ + C_{s+r}^1)\cos qt \\ e^{pt}(C_0^2 t^{s+r} + C_1^2 t^{s+r-1} + \ \dots\ + C_{s+r}^2)\cos qt \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ e^{pt}(C_0^n t^{s+r} + C_1^n t^{s+r-1} + \ \dots\ + C_{s+r}^n)\cos qt \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} e^{pt}(D_0^1 t^{s+r} + D_1^1 t^{s+r-1} + \ \dots\ + D_{s+r}^1)\sin qt \\ e^{pt}(D_0^2 t^{s+r} + D_1^2 t^{s+r-1} + \ \dots\ + D_{s+r}^2)\sin qt \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ e^{pt}(D_0^n t^{s+r} + D_1^n t^{s+r-1} + \ \dots\ + D_{s+r}^n)\sin qt \end{pmatrix}.$$

5. Диференціальні рівняння та математичне моделювання

5.1. Поняття про математичне моделювання

Під математичним моделюванням ми будемо розуміти метод дослідження процесів або явищ шляхом побудови їхніх математичних моделей і дослідження цих процесів. В основу методу покладемо адекватність між змінними складеного рівняння і досліджуваного процесу. Зрозуміло, що на практиці ці процеси не будуть абсолютно ідентичні. Але можна удосконалювати математичну модель, яка більш точно буде описувати цей процес. Треба пам’ятати, що в останньому випадку, як правило, математичні рівняння ускладнюються. А це означає, що їх моделювання на ЕОМ потребує більше часу.

Схема таких досліджень починається з постановки задачі і закінчується проведенням ефективного обчислювального експерименту. Її умови можна записати в такій формі:

а) постановка задачі;

б) побудова математичної моделі та перевірка її адекватності;

в) узагальнення та теоретичне дослідження даного класу задач;

г) розробка алгоритмічного забезпечення для розв'язування досліджуваних задач;

д) створення програмного забезпечення;

е) проведення обчислювального експерименту;

ж) впровадження цих результатів у виробництво.

Розглянемо питання використання диференціальних рівнянь в деяких предметних областях.

5.2. Застосування диференціальних рівнянь в екології та мікробіології

Екологія вивчає взаємовідношення людини і, взагалі, живих організмів з навколишнім середовищем. Основним об’єктом дослідження в екології є еволюція популяцій (сукупність одного виду рослин, тварин, чи мікроорганізмів, які населяють протягом тривалого часу певну територію).

Опишемо математично процес розмноження чи вимирання популяцій. Нехай $x(t)$ – кількісний стан популяції в момент t, A – число, яке відповідає кількості народжених, B – умираючих в одиницю часу. Тоді швидкість зміни координати $x(t)$ задається формулою

$$\frac{dx}{dt} = A - B \tag{1.1}$$

В (1.1) A і B можуть залежати від x. Наприклад,

$$A = ax,\ B = bx, \tag{1.2}$$

де a – коефіцієнт народжуваності, b – смертності.

Підставляючи (1.2) в (1.1), отримаємо

$$\frac{dx}{dt} = (a-b)x. \tag{1.3}$$

Розв’язок диференціального рівняння (1.3) запишемо у вигляді

$$x(t) = x_0 e^{(a-b)(t-t_0)}. \tag{1.4}$$

З розв’язку (1.4) видно, що при $a > b$ популяція виживаюча, а при $a < b$ – вимираюча.

Рівняння (1.3) в деяких випадках береться нелінійним

$$\frac{dx}{dt} = ax - bx^2 \ (a > 0, b > 0). \qquad (1.5)$$

Це рівняння Бернулі при $n = 2$ і його розв'язок можна записати в такому вигляді

$$x(t) = \frac{x_0 \frac{a}{b}}{x_0 + (\frac{a}{b} - x_0)e^{-a(t-t_0)}}. \qquad (1.6)$$

З формули (1.6) видно, що при $t \to \infty, x(t) \to \frac{a}{b}$. При цьому можливі випадки

$$\frac{a}{b} = x_0, \ \frac{a}{b} > x_0, \text{ та } \frac{a}{b} < x_0.$$

Рівняння (1.5) описує еволюцію популяцій деяких бактерій.

Можна говорити і про більш складні рівняння, системи рівнянь.

5.3. Математичні моделі типу «хижак-жертва»

Розглянемо більш детально двовидову модель, яка у свій час була побудована для виявлення коливань рибних уловів в Адріатичному морі.

Нехай $x(t)$ – число великих риб-хижаків, y – число малих риб-жертв в момент часу t. Тоді число риб-хижаків буде рости до того часу, поки у них буде їжа. Якщо корму не буде вистачати, то кількість риб-хижаків буде зменшуватися і тоді, починаючи з деякого моменту, буде рости число риб-жертв. Модель такого прикладу має вигляд

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -ax + bxy \\ \frac{dy}{dt} = cx - dxy \end{cases}, \qquad (1.7)$$

де a, b, c, d – додатні константи.

В (1.7) доданок bxy виражає залежність приросту великих риб від числа малих, $-dxy$ – зменшення числа малих риб від великих.

5.4. Приклади побудови математичних моделей. Моделі в космосі і аеронавтиці. Закони Кеплера руху планет

Згідно закону всесвітнього тяжіння два тіла, які знаходяться на віддалі r один від одного, і які мають маси m і M притягаються з силою

$$F = \gamma \frac{m \cdot M}{r^2}, \qquad (1.8)$$

де γ – константа тяжіння.

Опишемо рух планети з масою m навколо Сонця маси M. Вплив інших планет на них не будемо враховувати (Рис. 1.1).

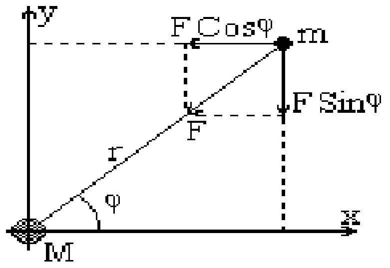

Рис. 1.1

Припустимо, що Сонце знаходиться в початку координат, а планета має положення $x(t), y(t)$ в момент часу t. Використавши другий закон Ньютона запишемо

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -FCos\varphi = -\gamma \dfrac{mM}{r^2} Cos\varphi \\ m\ddot{y} = -FSin\varphi = -\gamma \dfrac{mM}{r^2} Sin\varphi \end{cases}. \qquad (1.9)$$

Враховуючи, що $Cos\varphi = \dfrac{x}{r}, Sin\varphi = \dfrac{y}{r}, z = \sqrt{x^2 + y^2}$, і позначаючи $k = \gamma \cdot M$, прийдемо до системи

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\dfrac{kx}{(x^2 + y^2)^{\frac{2}{3}}} \\ \ddot{y} = -\dfrac{ky}{(x^2 + y^2)^{\frac{2}{3}}} \end{cases}. \qquad (1.10)$$

Без обмеження загальності візьмемо початкові умови:

$$x = a, y = 0, \dot{x} = 0, \dot{y} = V_0 \text{ при } t = 0. \qquad (1.11)$$

Перейдемо до полярних координат

$$x = rCos\varphi, y = rSin\varphi,$$

$$\begin{cases} \dot{x} = rCos\varphi - rSin\varphi \cdot \dot{\varphi} \\ \dot{y} = rSin\varphi - rCos\varphi \cdot \dot{\varphi} \end{cases},$$

$$\begin{cases} \ddot{x} = \ddot{r}Cos\varphi - 2\dot{r}Sin\varphi \cdot \dot{\varphi} - rSin\varphi \cdot \ddot{\varphi} - rCos\varphi \cdot \varphi^2 \\ \ddot{y} = \ddot{r}Sin\varphi - 2\dot{r}Cos\varphi \cdot \dot{\varphi} - rCos\varphi \cdot \ddot{\varphi} - rSin\varphi \cdot \varphi^2 \end{cases}.$$

Підставляючи отримані вирази в (1.10) будемо мати

$$\begin{cases} \left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right)Cos\varphi - \left(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}\right)Sin\varphi = -\dfrac{kCos\varphi}{r^2} \\ \left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right)Sin\varphi + \left(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}\right)Cos\varphi = -\dfrac{kSin\varphi}{r^2} \end{cases}.$$

Помножимо перше рівняння на $Cos\varphi$, друге на $Sin\varphi$ і складемо

$$4\ddot{r} - r\varphi^2 = -\frac{k}{r^2}. \tag{1.12}$$

Помножимо перше рівняння на $-Sin\varphi$, друге на $Cos\varphi$ і складемо

$$2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = 0. \tag{1.13}$$

Перепишемо у нових змінних умови (1.11)

$$r = a, \varphi = 0, \dot{r} = 0, \dot{\varphi} = \frac{V_0}{a}. \tag{1.14}$$

Рівняння (1.13) запишемо у вигляді

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = 0. \tag{1.15}$$

Звідси маємо:

$$r^2\dot{\varphi} = C_1. \tag{1.16}$$

Константа C_1 має цікаву геометричну інтерпретацію. З курсу математичного аналізу відомо, що площа сектора обчислюється за формулою

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{\varphi} r^2 d\varphi. \tag{1.17}$$

Звідки

$$dS = \frac{1}{2}r^2 d\varphi, \qquad \text{або } \frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\varphi}.$$

Вираз $\dfrac{dS}{dt}$ означає секторну швидкість. З (1.16) випливає, що вона є постійною. Це означає, що радіус-вектор “замітає” за рівні проміжки часу рівні площі.

Перший закон Кеплера: кожна із планет рухається по плоскій кривій відносно Сонця так, що радіус-вектор, який зв’язує Сонце і планету, “замітає” рівні площі за рівні проміжки часу.

Задачу Коші (1.12)-(1.14) можна розв’язати. Розв’язок має еліпсоїдальну форму, на основі цього робиться наступний висновок.

Другий закон Кеплера: траєкторії планет рухаються по еліпсам, в одному з фокусів яких знаходиться Сонце.

З аналізу траєкторій випливає таке твердження.

Третій закон Кеплера: квадрати періодів обертання планет пропорційні кубам великих осей їх орбіт.

5.5. Приклади побудови математичних моделей. Диференціальні рівняння в моделях типу «попит- пропозиція» в економічних дослідженнях

Попит і пропозиція – економічні категорії товарного виробництва. <u>Попит</u> – представлена на ринку потреба в товарах, пропозиція – продукт, який є на ринку чи може бути доставлений на нього.

Нехай $p(t)$ – ціна, наприклад, на фрукти, $\dfrac{dp}{dt}$ – тенденція формування ціни. Тоді, як попит так і пропозиція будуть функціями введених величин. Як показує практика, ці функції можуть бути різними. Часто попит q і пропозиція S задаються лінійними залежностями, наприклад

$$\begin{aligned} &q = 4p' - 2p + 39, \\ &S = 44p' + 2p - 1 \end{aligned}$$

залежностями. Для того, щоб попит відповідав пропозиції необхідно $(p = S)$

$$4p' - 2p + 39 = 44p' + 2p - 1.$$

Звідки

$$\begin{aligned} &40p' + 4p - 40 = 0, \\ &4dp = -4(p - 10), \\ &\frac{10dp}{p - 10} = -dt,\ p = ce^{-\frac{1}{10}t} + 10. \end{aligned} \tag{1.18}$$

Припустимо, що в момент $t = 0$ 1кг фруктів коштував $p(0) = 1$ крб. Тоді $1 = c - 10$, $c = -9$. Отже

$$p = -9e^{\frac{1}{10}t} + 10. \tag{1.19}$$

Це закон зміни ціни, щоб між попитом і пропозицією була рівновага.

5.6. Приклади побудови математичних моделей. Моделювання в фізиці і електротехніці. Диференціальне рівняння руху частинок в електромагнітних полях

Імпульс частинки:

$$\vec{p} = m\vec{V}$$

дорівнює зміні сили Лоренца, яка діє на неї

$$\frac{d}{dt}(m\vec{V}) = Ze(\vec{E} + [\vec{V}, \vec{B}]), \qquad (1.20)$$

де Z – зарядове число, e – заряд частинки, $\vec{E}$ – вектор напруженості прискорюючого поля, $\vec{B}$ – вектор магнітної індукції, $\vec{V}$ – вектор швидкості частинки,

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}, \vec{B} = \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}, \vec{V} = \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix},$$

$m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}} = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma m_0$ – динамічна маса, m_0 – маса спокою, $\gamma = \dfrac{m}{m_0}$ – приведена енергія частинки,

$$\left[\vec{V}, \vec{B}\right] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ V_x & V_y & V_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \left(V_y B_z - V_z B_y\right) i - \left(V_x B_z - V_z B_x\right) j + \left(V_x B_y - V_y B_x\right) k$$

– векторний добуток двох векторів.

З (1.20) маємо

$$m_0 \gamma \frac{d\vec{V}}{dt} + m_0 \vec{V} \frac{d\gamma}{dt} = Ze\left(\vec{E} + \left[\vec{V}, \vec{B}\right]\right). \qquad (1.21)$$

Рівняння (1.21) не враховує власного поля пучка (кулонівських сил). Систему (1.21) перепишемо в скалярній формі:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{Ze}{m_0\gamma}\left[E_x + \dfrac{dy}{dt}B_z - \dfrac{dz}{dt}B_y - \dfrac{m_0}{Ze}\dfrac{dx}{dt}\dfrac{d\gamma}{dt}\right] \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = \dfrac{Ze}{m_0\gamma}\left[E_y + \dfrac{dz}{dt}B_z - \dfrac{dx}{dt}B_z - \dfrac{m_0}{Ze}\dfrac{dy}{dt}\dfrac{d\gamma}{dt}\right] \\ \dfrac{d^2z}{dt^2} = \dfrac{Ze}{m_0\gamma}\left[E_z + \dfrac{dx}{dt}B_y - \dfrac{dy}{dt}B_x - \dfrac{m_0}{Ze}\dfrac{dz}{dt}\dfrac{d\gamma}{dt}\right] \end{cases}. \tag{1.22}$$

Визначимо

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{\vec{V}^T\vec{V}}{c^2}}} = -\frac{1}{2}\left(1-\frac{\vec{V}^T\vec{V}}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot (-2)\frac{\vec{V}^T}{c^2}\frac{d\vec{V}}{dt},$$

тобто

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{\gamma^3}{c^2}\vec{V}^T\left(\frac{Ze}{m_0}\left(\vec{E} + \left[\vec{V},\vec{B}\right]\right) - \frac{1}{\gamma}\vec{V}\frac{d\gamma}{dt}\right).$$

Так як $\vec{V}^T \cdot \left[\vec{V},\vec{B}\right] = 0$, то визначаємо $\dfrac{d\gamma}{dt}$

$$\frac{d\gamma}{dt}\left(1 + \frac{\gamma^2\vec{V}^T\vec{V}}{c^2}\right) = \frac{\gamma^2 Ze}{m_0c^2}\vec{V}^T \cdot \vec{E}\,.$$

Отже

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{Ze}{m_0c^2}\left(\frac{dx}{dt}E_x + \frac{dy}{dt}E_y + \frac{dz}{dt}E_z\right) \tag{1.23}$$

Підставляючи (1.23) в (1.22), отримаємо рівняння руху.

Але в ці складні рівняння ще входять компоненти електромагнітного поля, які визначаються рівняннями Максвела

$$\begin{cases} rot\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}, div\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \\ rot\vec{B} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \mu_0\vec{j}, div\vec{B} = 0 \end{cases}. \tag{1.24}$$

Тут ε_0, μ_0 – електрична і магнітна сталі, ρ – об’ємна густина заряду, $\vec{j}$ – вектор густини струму.

Система рівнянь (1.24) – це рівняння в частинних похідних з складними граничними умовами. Задача полягає не тільки в моделюванні рівнянь руху, а й в розрахунках оптимальних систем прискорюючих і фокусуючих заряджені частинки.

5.7. Деякі прикладні аспекти застосування диференціальних рівнянь в фундаментальних наукових дослідженнях

Біологічний аспект. Необхідно знайти залежність площі S молодого листка, що має форму круга, від часу t. Відомо, що швидкість зміни площі $\frac{dS}{dt}$ в момент t пропорційна площі листка, довжині його обводу та косинусу кута між падаючим на листок сонячним променем і вертикаллю листка. Маємо модель

$$\frac{dS}{dt} = k \cdot S \cdot S^{\frac{1}{2}} \cdot Cos\varphi(t), \tag{1.25}$$

де $\varphi(t) = at + b \geq 0$, a, b – const**,** $\varphi \leq \pi$, k – коефіцієнт пропорційності. Розв'язуючи рівняння (1.25), ми отримаємо таку залежність

$$S(t) = \left(c + \frac{k}{2a} \cdot Sin(at+b) \right)^{-2}, \tag{1.26}$$

c – довільна стала.

Математичний аспект. Обчислити невласний інтеграл

$$I(a) = \int_0^\infty e^{-x^2-2ax}dx, \tag{1.27}$$

залежний від параметра a.

Знайдемо похідну

$$\frac{dI}{da} = -2x\int_0^\infty e^{-x^2-2ax}dx = -(2x+2a)\int_0^\infty e^{-x^2-2ax}dx + 2a\int_0^\infty e^{-x^2-2ax}dx =$$

$$= +\int_0^\infty e^{-x^2-2ax}d(-x^2-2ax) + 2aI(a) = e^{-x^2-2ax}\Big|_0^\infty + 2aI(a) = 2aI(a) - 1.$$

Отримали диференціальне рівняння

$$\frac{dI}{da} = 2aI(a) - 1. \tag{1.28}$$

При цьому відомо

$$I(0) = \int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \tag{1.29}$$

Розв'язуючи задачу Коші (1.28),(1.29), отримаємо

$$I(a) = e^{a^2}\left[I(a) - \int_0^a e^{-t^2}dt \right] = e^{a^2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int_0^a e^{a^2-t^2}dt. \tag{1.30}$$

5.8. Побудова диференціальних рівнянь з заданими параметричними множини кривих

Припустимо, що задана одно параметрична множина кривих

$$\varphi\big(x, y(x), c\big) = 0. \tag{1.31}$$

Задача полягає в тому, щоб знайти диференціальне рівняння, розв'язками якого являються криві (1.31). Вважаючи, що функція (1.31) має повну похідну за x запишемо

$$\varphi'_x(x, y, c) + \varphi'_y(x, y, c)\frac{dy}{dx} = 0. \tag{1.32}$$

Тоді з (1.31) та (1.32) як з системи рівнянь, вилучаємо сталу c і отримаємо шукане диференціальне рівняння першого порядку.

Якщо ж задано n - параметричне сімейство кривих

$$\varphi\big(x, y(x), c_1, .., c_n\big) = 0, \tag{1.33}$$

то до (1.33) додаються такі співвідношення

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}\varphi(x, y, c_1, .., c_n) = \varphi'_x(x, y, c_1, .., c_n) + \varphi'_y(x, y, c_1, .., c_n)\frac{dy}{dx} = 0,\\
&\frac{d^2}{dx^2}\varphi(x, y, c_1, .., c_n) = \frac{d}{dx}\left[\varphi'_x(x, y, c_1, .., c_n) + \varphi'_y(x, y, c_1, .., c_n)\frac{dy}{dx}\right] =\\
&= \varphi''_{xx}(x, y, c_1, .., c_n) + 2\varphi''_{xy}(x, y, c_1, .., c_n)\frac{dy}{dx} + \varphi''_{yy}(x, y, c_1, .., c_n)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 +\\
&+ \varphi'_x(x, y, c_1, .., c_n)\frac{d^2y}{dx^2} = 0,\\
&\qquad\qquad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{d^n}{dx^n}\varphi(x, y, c_1, .., c_n) = \frac{d}{dx}\left[\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\varphi(x, y, c_1, .., c_n)\right] = 0.
\end{aligned} \tag{1.34}$$

З (1.33) та (1.34), як з системи рівнянь, кількість яких $(n+1)$, вилучаються сталі $c_1, c_2, ..., c_n$, а отримане таким чином співвідношення між $x, y, y', .., y^{(n)}$

$$F\big(x, y, y', .., y^{(n)}\big) = 0 \tag{1.35}$$

і буде шуканим диференціальним рівняння n - го порядку.

В (1.32) та (1.34) $\varphi'_x(\cdot), \varphi'_y(\cdot), \varphi''_{xx}(\cdot), \varphi''_{xy}(\cdot), \varphi''_{yy}(\cdot), -$ означають частинні похідні відповідних порядків за вказаними змінними. При цьому припускаємо, що такі похідні існують, тобто функції (1.32) та (1.34) є диференційовними відповідну кількість разів.

Аналогічно поступають і при складанні систем рівнянь.

Екзаменаційні питання з дисципліни «Диференціальні рівняння»

1. Диференціальні рівняння першого порядку.
2. Основні використовувані визначення теорії диференціальних рівнянь.
3.. Рівняння зі відокремлюваними змінними.
4. Рівняння, що зводяться до рівнянь з відокремлюваними змінними.
5. Однорідні диференціальні рівняння.
6. Рівняння, що зводяться до однорідних.
7. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку.
8. Рівняння Бернуллі.
9. Рівняння Рікатті.
10. Рівняння в повних диференціалах.
11. Множники інтегрування в рівняннях в повних диференціалах.
12. Диференціальні рівняння першого порядку, що не розв'язні відносно похідної.
13. Рівняння Клеро.
14. Частинні випадки рівнянь, що інтегруються в квадратурах.
16. Існування та єдиність розв'язків диференціальних рівнянь першого порядку.
17. Неперервна залежність та диференційованість диференціальних рівнянь першого порядку.
18. Особливі розв'язки диференціальних рівнянь першого порядку.
19. Диференціальні рівняння вищих порядків.
20. Загальні визначення. Існування та єдиність розв'язків рівнянь.
21. Диференціальні рівняння вищих порядків, що інтегруються в квадратурах.
22. Найпростіші випадки зниження порядку в диференціальних рівняннях вищих порядків.
23. Лінійні диференціальні рівняння вищих порядків.
24. Лінійні однорідні рівняння.
25. Властивості лінійних однорідних рівнянь.
26. Властивості розв'язків лінійних однорідних рівнянь.
27. Лінійна залежність і незалежність розв'язків.
28.Загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння вищого порядку.
29. Формула Остроградського – Ліувіля.
30. Формула Абеля.
31. Лінійні однорідні рівняння з сталими коефіцієнтами.
32. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння.
33. Властивості розв'язків лінійних неоднорідних рівнянь. Загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння.
34. Метод варіації довільної сталої побудови частинного розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння.
35. Метод фундаментальних функцій Коші для побудови розв'язку нелінійного однорідні рівняння з сталими коефіцієнтами.

34. Метод невизначених коефіцієнтів.
35. Системи диференціальних рівнянь.
36 Геометрична інтерпретація розв’язків системи диференціальних рівнянь.
37. Фізична інтерпретація розв’язків системи диференціальних рівнянь.
38. Зведення одного диференціального рівняння вищого порядку до системи рівнянь першого порядку.
39. Зведення системи диференціальних рівнянь до одного рівняння вищого порядку.
40. Комбінації, що інтегруються.
41. Основи математичної теорії систем лінійних диференціальних рівнянь.
42. Властивості розв’язків лінійних однорідних систем.
43. Формула Якобі.
43. Системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь з сталими коефіцієнтами.
44. Розв’язування систем однорідних рівнянь з сталими коефіцієнтами методом Ейлера.
45. Розв’язок систем однорідних рівнянь зі сталими коефіцієнтами матричним методом.
46. Лінійні неоднорідні системи диференціальних рівнянь.
47. Властивості розв’язків лінійних неоднорідних систем.
49. Побудова частинного розв’язку неоднорідної системи методом варіації довільних сталих.
50. Побудова загального розв’язку неоднорідної системи рівнянь. Метод фундаментальних функцій Коші.
51. Метод невизначених коефіцієнтів в побудові частинного розв’язку системи лінійних диференціальних рівнянь з сталими коефіцієнтами.
52. Диференціальні рівняння та математичне моделювання.
53. Поняття математичного моделювання.
54. Застосування диференціальних рівнянь в екології та мікробіології.
55. Математичні моделі типу «хижак-жертва».
56. Диференціальні рівняння для опису моделей окремих аеронавтики. Закони Кеплера руху планет.
57. Диференціальні рівняння в моделях типу «попит- пропозиція» в економічних дослідженнях.
58. Моделювання в фізиці і електротехніці.
59. Диференціальне рівняння руху частинок в електромагнітних полях.
60. Деякі прикладні аспекти застосування диференціальних рівнянь в фундаментальних наукових дослідженнях.
61. Диференціальні рівняння хімічних реакцій першого і другого порядку.
62. Побудова диференціальних рівнянь з заданими параметричними множини кривих.

Література

1. Альсевич Л.А., Черенкова Л.П. Практикум по дифференциальным уравнениям. - Минск, Вышейшая школа, 1990. - 318 с.

2. Гудименко Ф.С., Павлюк І.А, Волкова В.О. Збірник задач з діференціальних рівнянь. – Київ, Вища школа, 1972. -154 с.

3. Гутер Р.С., Ямпольский А.Р. Дифференциальные уравнения. -М., Высшая школа, 1976. - 304 с.

4. Еругин Н.П. Книга для чтения по общему курсу дифферен-циальных уравнений. - Минск, Наука и техника, 1970. - 371 с.

5. Зельдович Я.Б., Мышкис А.Д. Элементы прикладной математики. - М., Наука, 1967. - 646 с.

6. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. -М., Наука, 1971. - 576 с.

7. Карташев А.П., Рождественский Б. Л. Обыкновенные диф-ференциальные уравнения и основы вариационного исчисления. - М., Наука. 1976. - 256 с.

8. Ляшко І.І., Боярчук О.К., Гай Я.Г., Калайда О.Ф. Диференщальні рівняння. -Київ, Вища школа, 1981. - 504 с.

9. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных диф-ференциалъных уравнений. - М., Высшая школа, 1967. - 564 с.

10. Матвеев Н.М. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям. - М, Росвузиздат, 1962. - 291 с.

11. Мышкис А.Д. Математика для втузов. Специальные курсы. - М., Наука, 1971. - 632 с.

12. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений - М., Наука, 1970. - 279 с.

13. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М., Наука, 1970.-331 с.

14. Самойленко А.М., Перестюк Н.А., Кривошея С. А. Дифференциальные уравнения: примеры и задачи. - М., Высшая школа, 1989. - 384 с.

15. Самойленко А.Ф., Кривошея С.А., Перестюк М.О., Діференціальні рівняння у прикладах і задачах. - Київ, Вища школа, 1994. - 454 с.

16. Самойленко А.М., Перестюк М.О., Перестюк М.Ю. Диференціальні рівняння. - Київ, Либідь, 1994. - 360 с.

17. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. - М, Физматгиз, 1959. -468 с.

18. Тихонов А., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения. - М., Наука, 1985. - 231 с.

19. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. - М, Наука, 1985. -127 с.

20. Эльсгольц Л.З. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. - М, Наука, 1969. - 424 с.

21. Петрик М., Баб'юк М. Основи математичного моделювання в наукових дослідженнях.- Тернопіль: Підручники і посібники, 1998.- 120 с.

Навчально-методична література

М.Р. Петрик, О.Ю. Петрик, І.В. Бойко,

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ В НАУКОВО-ТЕХНІЧНИХ ДОСЛІДЖЕННЯХ

на основі високпродуктивних обчислень

(курс лекцій)

Навчально-методичний посібник

Комп’ютерне макетування та верстка Мудрик І.Я.

Формат 60х90/16. Обл. вид. арк. 2,27. Тираж 30 прим. Зам. № 2919.

Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя.
46001, м. Тернопіль, вул. Руська, 56.
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи ДК № 4226 від 08.12.11.