УДК 621.791.927.7
С. Дячук, М. Михайлишин
(Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя)

ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ ПРОЦЕСОМ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ З МІНІМАЛЬНОЮ ЕНЕРГІЄЮ

UDC 621.791.927.7
S. Dyachuk, M. Mykhailyshyn
(Ternopil I.Pulyu National Technical University, Ukraine)

EFFICIENT CONTROL OF THE HEAT CONDUCTION PROCESS USING MINIMUM ENERGY

Розглядається керований процес, який в області $Q=\{R_1\le r\le R_2, 0\le t\le \tau\}$ описується функцією $T(r,t)$, яка задовольняє всередині області рівнянню

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{w(r,t)}{\lambda},$$

початковим і граничним умовам

$$T=0 \text{ при } t=0,\ \frac{\partial T}{\partial r}-k_1T=0 \text{ при } r=R_1,\ \frac{\partial T}{\partial r}+k_2T=0 \text{ при } r=R_2.$$

Задача оптимального керування полягає в тому, щоб знайти $w(r,t)\epsilon L_2(Q)$ таку, при якій функціонал

$$I[w]=\int_{R_1}^{R_2}[T(r,\tau)-T_3(r)]^2rdr+\int_0^\tau\int_{R_1}^{R_2}w^2(r)rdrd\tau,$$

де $T_3(r)$ – задана функція, приймав найменше можливе значення.
Будується розширений функціонал задачі

$$I[w]+\int_0^\tau\int_{R_1}^{R_2}\tilde{T}(r,t)\left[\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}-\frac{1}{a^2}\frac{\partial T}{\partial t}+\frac{w(r,t)}{\lambda}\right]rdrd\tau,$$

з умови стаціонарності якого отримуємо спряжену задачу

$$\frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial \tilde{T}}{\partial r}-\frac{1}{a^2}\frac{\partial \tilde{T}}{\partial t}=0,$$

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial r}-k_1\tilde{T}=0 \text{ при } r=R_1,\ \frac{\partial \tilde{T}}{\partial r}+k_2\tilde{T}=0 \text{ при } r=R_2.$$

$$\tilde{T}(r,\tau)=2[T(r,\tau)-T_3(r)],\ w(r,t)=-\frac{1}{2\lambda}\tilde{T}(r,t).$$

Використовуючи метод Фур'є знайдено розв'язки спряженої та прямої задач і отримано оптимальний закон розподілу питомої потужності джерел

$$w(r,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2t_k\mu_k^2e^{a^2\mu_k^2(t-\tau)}}{1+2\mu_k^2-e^{-2a^2\mu_k^2\tau}}\tilde{R}_k(r),$$

де

$$\tilde{R}_k(r)=[k_2Y_0(\mu_kR_2)-\mu_kY_1(\mu_kR_2)]J_0(\mu_kr)-[k_2J_0(\mu_kR_2)-\mu_kJ_1(\mu_kR_2)](Y_0(\mu_kr),$$

$$t_k=\frac{1}{\|\tilde{R}_k\|^2}\int_{R_1}^{R_2}T_3(r)\,\tilde{R}_k(r)rdr,$$

μ_k –корені характеристичного рівняння

$$[k_2J_0(\mu R_2)-\mu J_1(\mu R_2)]\cdot[k_1Y_0(\mu R_1)-\mu Y_1(\mu R_1)]-$$
$$-[k_1J_0(\mu R_1)+\mu J_1(\mu R_1)]\cdot[k_2Y_0(\mu R_2)-\mu Y_1(\mu R_1)],$$

$$\|\tilde{R}_k\|^2=\frac{(\mu_k^2+k_2^2)[k_1J_0(\mu_kR_1)+\mu_kJ_1(\mu_kR_1)]^2-(\mu_k^2+k_1^2)[k_2J_0(\mu_kR_2)-\mu_kJ_1(\mu_kR_2)]^2}{\frac{\pi^2\mu_k^2}{2}[k_2J_0(\mu_kR_2)-\mu_kJ_1(\mu_kR_2)]^2}.$$

Знайдений оптимальний закон розподілу теплових джерел при індукційному нагріві деталей циліндричної форми.