

# Зсувне пластичне відшаровування жорсткого прямокутного включення

Василь Кривень  
кафедра математичних методів в інженерії  
Тернопільський національний технічний  
університет імені Івана Пулюя  
Тернопіль, Україна  
[kryvenv@gmail.com](mailto:kryvenv@gmail.com)

Андрій Бойко  
кафедра математичних методів в інженерії  
Тернопільський національний технічний  
університет імені Івана Пулюя  
Тернопіль, Україна  
[boyko.a111@gmail.com](mailto:boyko.a111@gmail.com)

Надія Крива  
кафедра математичних методів в інженерії  
Тернопільський національний технічний  
університет імені Івана Пулюя  
Тернопіль, Україна  
[Nadja.Kryva@gmail.com](mailto:Nadja.Kryva@gmail.com)

Наталя Блащак  
кафедра математичних методів в інженерії  
Тернопільський національний технічний  
університет імені Івана Пулюя  
Тернопіль, Україна  
[nblashchak@gmail.com](mailto:nblashchak@gmail.com)

## Plastic shear Exfoliation of rigid rectangular Inclusion

Vasyl Kryven  
Department of Mathematical Methods in Engineering  
Ternopil Ivan Puluj National Technical University  
Ternopil, Ukraine  
[kryvenv@gmail.com](mailto:kryvenv@gmail.com)

Andriy Boyko  
Department of Mathematical Methods in Engineering  
Ternopil Ivan Puluj National Technical University  
Ternopil, Ukraine  
[boyko.a111@gmail.com](mailto:boyko.a111@gmail.com)

Nadia Kriva  
Department of Mathematical Methods in Engineering  
Ternopil Ivan Puluj National Technical University  
Ternopil, Ukraine  
[Nadja.Kryva@gmail.com](mailto:Nadja.Kryva@gmail.com)

Natalia Blashchak  
Department of Mathematical Methods in Engineering  
Ternopil Ivan Puluj National Technical University  
Ternopil, Ukraine  
[nblashchak@gmail.com](mailto:nblashchak@gmail.com)

*Анотація* — Розв'язано задачу про пластичне відшарування жорсткого прямокутного включення в ідеально пружно-пластичному середовищі навантаженому на нескінченності зсувними зусиллями паралельними до горизонтальних сторін включення. Приймалося, що пластичні деформації зосереджені на границі включення в шарах нульової товщини, які починаються від його вершин. Знайдено довжини шарів пластичності і величину пластичного відшарування як функції прикладеного навантаження..

*Abstract* — Plastic peeling of the rigid rectangle inclusion in the ideal elastoplastic environment stressed by the shift efforts parallel to the horizontal inclusion sides problem is solved. Plastic deformation are adopted to be concentrate at the inclusion bounds in the zero width layers beginning from its tips. Plastic layers length and plastic peeling value (displacement rupture) at the inclusion tips are found a loading functions. It is shown that the total peeling of the horizontal inclusion sides occur under some loading and vertical sides don't peel.

**Ключові слова**—прямокутне включення, пластичне відшарування, аналітичний розв'язок, конформне відображення

**Keywords**—rectangular inclusion, plastic exfoliation, analytical solution, conformal mapping

### I. ВСТУП

Дослідження пластичних ефектів в околі концентраторів напружень – важлива проблема механіки. Її теоретичні дослідження стосуються насамперед тріщин (вирізів нульової товщини) [1] і безмежно тонких включень [2] – випадків коли можливе моделювання дефекту лінією розриву зміщення. Значно слабше представлено у літературі випадок включень і вирізів скінченної (ненульової) товщини [4, 5]. В роботі [3] для дослідження пластичних ефектів в околі вершини жорстких включень при антиплоскій деформації запропоновано модель пластичного відшарування за якою пластичні деформації вважаються локалізованими в тонких шарах вздовж границі пружна матриця – включення, які починаються із точок сингулярності поля пружних деформацій. Довжини шарів визначаються величиною прикладеного навантаження.

### II. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Дослідимо пластичне відшарування жорсткого прямокутного включення  $|x| \leq a; |y| \leq b$  (рис.1), яке знаходиться в безмежному ідеально пружнопластичному середовищі, коли саме середовище перебуває в стані антиплоскої деформації, спричиненому прикладеними у безмежно віддаленій точці зсувними зусиллями  $\tau_{xz} = 0; \tau_{yz} = \tau_\infty$ . Зони пластичного відшарування в околі кожної із вершин прямокутника складаються із двох

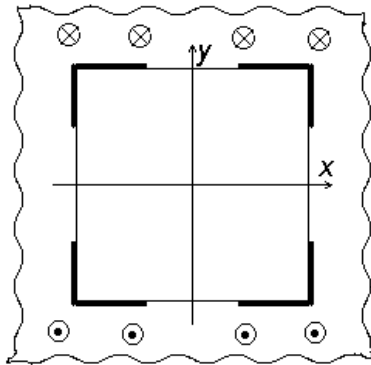


Рис. 1. Поперечний переріз тіла.

горизонтальних та вертикальних смуг (рис.1), довжини яких як функції  $\tau_\infty$  належить визначити. В результаті відшарування в смугах пластичності виникне розрив зміщення між точками середовища та включення, які спочатку (до прикладення навантаження) вважаємо ідеально зчепленими. Будемо також визначати

максимальний розрив зміщення як функцію прикладеного навантаження  $\tau_\infty$ .

Аналогічно як в роботах [4, 5] приведемо вище поставлену задачу до крайової задачі теорії функцій комплексної змінної  $\xi = x + iy$  для аналітичної області  $D = \{(x > a, y > 0) \cup (x > 0, y > b)\}$  (рис.2) функції  $\tau(\xi) = \tau_{yz}(x, y) + i\tau_{xz}(x, y)$ :

$$\begin{cases} \text{Im } \tau(\xi) = 0, & \xi = iy, \quad y > b; \\ \text{Im } \tau(\xi) = 0, & \xi = x + ib, \quad 0 < x < x_0, \quad (0 < x_0 \leq a); \\ |\tau(\xi)| = k, & \xi = x + ib, \quad x_0 \leq x \leq a; \\ \tau(\xi) = k, & \xi = a + iy, \quad y_0 \leq y \leq a, \quad (0 < y_0 \leq b); \\ \text{Re } \tau(\xi) = 0, & \xi = a + iy, \quad 0 < y < y_0; \\ \text{Im } \tau(\xi) = 0, & \xi = x, \quad x \geq a; \\ \lim_{\xi \rightarrow \infty} \tau(\xi) = \tau_\infty. \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{Im} \int_{x_0 + ib}^{a + iy_0} \tau(\xi) d\xi = 0, \quad x_0 \neq 0, \quad y_0 \neq 0. \quad (2)$$

де  $x_0, y_0$  – координати кінців горизонтального і вертикального пластичних шарів,  $k$  – границя текучості матеріалу середовища при зсуві.

Приведемо фізичний зміст умов (1). Перша і шоста є умовами симетрії поля переміщення  $w(x, y)$ : парності відносно осі ординат і непарності відносно осі абсцис. Друга і п'ята виражають відсутність зміщень в точках границі середовища – включення, в яких не досягнуто пластичного стану. Третя і четверта – умова неможливості в точках пластичних шарів. Сьома – наслідок задання поля напружень в околі безмежно віддаленої точки.

Кінцеві точки пластичних шарів перебувають в ідеальному механічному контакті із жорстким включенням, тому їх відносне зміщення рівне нулю. Ця вимога, однак, не є наслідком четвертої та п'ятої рівностей із (1) які забезпечують відсутність переміщень окремо на частинах горизонтальної і вертикальної сторін прямокутника, неохоплених зонами пластичності. Нульове зміщення кінцевих точок пластичних шарів забезпечує умова (2). Якщо при деякому навантаженні  $\tau_\infty = \tau_\infty^{kp}$   $x_0 = 0$  або  $y_0 = 0$ , то для  $\tau_\infty \geq \tau_\infty^{kp}$  умова (2) втрачає сенс, а довжина одного із шарів пластичності стає відомою.

Умовою пластичності є рівність  $|\tau(\xi)| = k$ . Тому  $|\tau(\xi)|$  не може досягати рівня  $k$  ніде за винятком точок пластичних шарів і ніде не може перевищувати цього рівня.

### III. ДОСЛІДЖЕННЯ І РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ

Функція  $\tau(\xi)$ , що є аналітичною в області  $D$  – першому квадранті комплексної площини  $\xi$  без

прямокутника  $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq b$ , внаслідок умов (1) конформно відображає область  $D$  на область  $G = \{\operatorname{Re} \tau > 0, \operatorname{Im} \tau > 0 \mid |\tau| > k\}$  (рис. 2).

Оскільки на границях областей  $D$  і  $G$  існують рівно дві пари  $A$  і  $E$  точок, афікси яких апіорі відомі, то за теоремою Рімана існує однопараметрична множина функцій  $\tau(\xi)$ , які реалізують потрібне відображення (рис. 2) і задовольняють умовам (1).

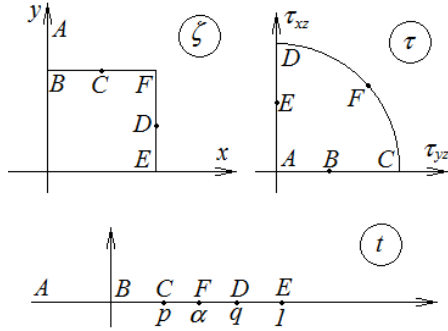


Рис. 2. Конформне відображення.

Далі покажемо, що відповідним вибором параметрів у функції  $\tau(\xi)$  можна добитись виконання також умови (2).

Потрібне відображення будуємо в параметричній формі шляхом уведення допоміжної комплексної площини  $t$  [3]:

$$\tau = \tau(t), \xi = \xi(t), (t \in H) \quad (3)$$

так, щоб областям  $D$  і  $G$  відповідала верхня півплощина  $H = \{\operatorname{Im} t > 0\}$  (рис.2), де  $p, \alpha, q, l$  – афікси точок  $C, P, D, E$ , а  $p, \alpha, q$  – поки невідомі параметри.

За таких умов відображення  $\xi(t)$  існує і єдине. Функцію  $\xi(t)$  подамо інтегралом Крістофеля –Шварца:

$$\xi(t) = ib + \frac{a}{\int_0^t f(t) dt} \int_0^t \frac{\sqrt{\eta - \alpha}}{\sqrt{\eta(\eta - 1)}} d\eta, \quad (4)$$

де  $f(t) = \sqrt{|\alpha - t| / (t(t - 1))}$ ,  $\alpha \in (0; 1)$  – дійсне число, що задовольняє рівнянню.

$$\int_{\alpha}^1 f(t) dt = \frac{b}{a} \int_0^{\alpha} f(t) dt. \quad (5)$$

Тут і далі під  $\sqrt{\eta - c}$  ( $c$  – дійсне) розуміємо гілку аналітичної функції із розрізом по променю дійсної осі  $(c, +\infty)$ , яка на верхньому березі розрізу приймає дійсні значення.

Тепер можна ввести параметр, вибір якого забезпечуватиме умову (2). Композицією елементарних відображень отримуємо:

$$\tau(t) = k \frac{\sqrt{1-p} \sqrt{t-q} - \sqrt{1-q} \sqrt{t-p}}{\sqrt{q-p} \sqrt{t-1}} \quad (6)$$

Якщо параметри  $p \in (0, \alpha)$ ,  $q \in (\alpha, 1)$  вибрати так, що

$$\tau_{\infty} = k \frac{\sqrt{1-p} - \sqrt{1-q}}{\sqrt{q-p}} \quad (7)$$

або

$$q = p \left( \frac{k^2 - \tau_{\infty}^2}{k^2 + \tau_{\infty}^2} \right)^2 + \frac{4k^2 \tau_{\infty}^2}{(k^2 + \tau_{\infty}^2)^2}, \quad (8)$$

то рівності (4), (6), (8) виражатимуть залежну від  $p \in (0, \alpha)$  сім'ю функцій  $\tau(\xi)$ , кожна з яких задовольняє умовам (1) як тільки число  $\alpha$  – корінь рівняння (5).

Оскільки  $\tau(\xi)$  аналітична в області  $D$ , і  $x_0 + iy_0 \in \bar{D}$ ,  $a + iy_0 \in \bar{D}$ , то в інтегралі (2) можна довільно вибрати шлях інтегрування  $\Gamma \in \bar{D}$ . Прийемо, що  $\Gamma$  ламана  $CPD$  (шлях співпадає із смугами пластичності). Тоді із (2) одержимо:

$$g_1 = g_2 \quad (9)$$

$$\text{де } g_1 = \frac{1}{\mu} \int_p^{\alpha} \operatorname{Im} \tau(t) |d\xi(t)|, g_2 = \frac{1}{\mu} \int_{\alpha}^q \operatorname{Re} \tau(t) |d\xi(t)|.$$

Тут  $\mu$  – модуль зсуву середовища,  $g_1, g_2$  – прирости розриву зміщень кінцевих та початкових точок відповідно горизонтального і вертикального пластичних шарів. Із формул (4), (6) знаходимо

$$g_1 = K \int_p^{\alpha} \frac{\sqrt{(t-p)(\alpha-t)}}{\sqrt{t(1-t)}} dt, g_2 = K \int_{\alpha}^q \frac{\sqrt{(t-\alpha)(q-t)}}{\sqrt{t(1-t)}} dt, \quad (10)$$

де  $K = k \sqrt{1-p} / \mu / \sqrt{q-p}$ .

Рівності (7) – (9) є системою рівнянь для знаходження параметрів  $p$  і  $q$  для заданого  $\tau_{\infty}$ . При фіксованому  $p$  величина  $g_1$  спадна, а  $g_2$  зростаюча функція аргумента  $q \in (\alpha, 1)$ . Оскільки  $g_1 = 0$  при  $q = 1$  і  $g_2 = 0$  при  $q = \alpha$ , то рівняння (7) – (9) мають єдиний розв'язок для всіх  $p \in (0, \alpha)$ . Оскільки  $g_1 = 0$  при  $q = 1$ , то  $q$  ні за якого  $0 < \tau_{\infty} < k$  не досягає значення 1, інакше не виконуватиметься умова (9). Це означає, що вертикальні смуги не зливаються при  $\tau_{\infty} < k$ . Горизонтальні смуги зливаються, якщо  $p = 0$ .

Відповідне значення  $q = q_{kp}$  знайдемо із (9):

$$\sqrt{1-q_{kp}} \int_0^{\alpha} \frac{\sqrt{(\alpha-t)}}{(1-t)} dt = \int_{\alpha}^{q_{kp}} \frac{\sqrt{(t-\alpha)(q_{kp}-t)}}{\sqrt{t(1-t)}} dt, \quad (11)$$

а навантаження із (7)

$$\tau_{\infty}^{kp} = k \frac{1 - \sqrt{1-q_{kp}}}{\sqrt{q_{kp}}} \quad (12)$$

$\tau_{\infty}^{kp}$  є функцією тільки через  $\alpha$  і, отже, визначається відношенням сторін прямокутника,  $\tau_{\infty}^{kp} < k$ .

Із формули (5) випливає, що  $\alpha \rightarrow 0$ , для дуже тонкого включення ( $b/a \rightarrow \infty$ ) і  $\alpha \rightarrow 1$  для дуже широкого  $\alpha \rightarrow 1$ . Тому із рівностей (11), (12) одержуємо, що  $\tau_{\infty}^{kp} \rightarrow 0$  коли  $b/a \rightarrow \infty$  і  $\tau_{\infty}^{kp} \rightarrow k$  коли  $b/a \rightarrow 0$ .

Для  $\tau_{\infty} \geq \tau_{\infty}^{kp}$  параметри

$$p = 0, q = 4k^2 \tau_{\infty}^2 / (k^2 + \tau_{\infty}^2)^2, \quad (13)$$

а довжини горизонтального  $d_1$  і вертикального  $d_2$  пластичних шарів визначаються формулами

$$d_1 = \frac{a}{\int_0^{\alpha} f(t) dt^p}, \quad d_2 = \frac{a}{\int_0^q f(t) dt^{\alpha}} \quad (14)$$

Таким чином визначення довжини шарів пластичного відшарування  $d_1, d_2$ , величини відшарування у вершині включення для заданого навантаження  $\tau_{\infty}$  зводиться до наступного. За заданим відношенням сторін прямокутника

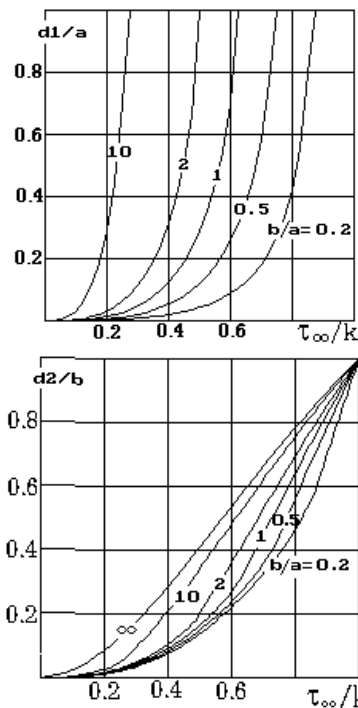


Рис.3. Довжини пластичних шарів як функції величини прикладеного навантаження.

визначаємо  $\alpha$  із рівняння (5), із (11), (12) знаходимо  $\tau_{\infty}^{kp}$  - навантаження при якому відбувається повне відшарування вздовж горизонтальних сторін. Якщо  $\tau_{\infty} < \tau_{\infty}^{kp}$  знаходимо параметри  $p$  і  $q$  розв'язавши систему (8), (9) а коли  $\tau_{\infty} \geq \tau_{\infty}^{kp}$  за формулами (13). Довжини шарів визначаємо

згідно формул (14), а величину відшарування по одній із формул (10).

Залежності довжини горизонтального шару  $d_1$ , вертикального  $d_2$  і у вершині прямокутника в залежності від величини навантаження  $\tau_{\infty}$  наведені на рисунку 3.

Величина міжфазного відшарування у пластичних шарах є зростаючою функцією віддалі від його кінця. Максимальне значення розриву досягається у вершині включення як до повного відшарування горизонтальної сторони так і у її відшаруваному стані.

#### IV. ВИСНОВКИ

Знайдено числово-аналітичний розв'язок задачі про пластичне відшарування жорсткого прямокутника. Визначені довжини шарів пластичного відшарування і максимального розриву зміщення, який досягається у вершині включення, як функції прикладеного навантаження. Показано, що при певному навантаженні  $\tau_{\infty} = \tau_{\infty}^{kp} < k$  настане повне відшарування горизонтальної сторони, вертикальні сторони повністю не відшаровуються.  $\tau_{\infty}^{kp}$  залежить від  $b/a$  і тим менше, чим більше  $b/a$ . Для тонких включень довжина вертикального шару і розрив зміщення у вершині є близькими до відповідних величин знайдених для безмежно тонкого включення.

Сформульовано і доведено загальну властивість розв'язків пружно-пластичних задач: границя розв'язку пружно-пластичної задачі при  $k \rightarrow \infty$  (границя текучості) співпадає із розв'язком пружної задачі.

#### ЛІТЕРАТУРА REFERENCES

- [1] Саврук М. П. Механіка руйнування та міцність матеріалів : довідн. посіб. / М.П. Саврук, А. Казберук ; за заг. ред. В. В. Панасюка ; Концентрація напружень у твердих тілах з вирізами. – Львів : СПОЛОМ, 2012. - 384 с. (78).
- [2] Сулим Г.Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями : монографія / Г.Т. Сулим. – Львів : Дослідно-видавничий центр НТШ, 2007. - 716 с.
- [3] Витвицкий П.М., Кривень В.А. Антиплоская упруго-пластическая деформация тела с жестким тонким включением // Докл. АН УССР. Сер.А. – 1979, №2. – С. 104-108
- [4] Кривень В.А. Пластичне відшарування жорсткого півбезмежного включення скінченної ширини під зсувним навантаженням за наявності міжфазних тріщин / В.А. Кривень, А.Р. Бойко // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2014. – Вип. 19. - С. 84-92.
- [5] Kryven' V.A. Initial stage of plastic exfoliation of a rectangular inclusion under conditions of one-sided contact with a medium / V.A Kryven', V. B. Valyashek // Journal of Mathematical Sciences. – 2010. - Vol. 171, No. 4. – P. 107-116.