МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ТЕРНОПІЛЬСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ІВАНА ПУЛЮЯ

Кафедра математичних методів в інженерії

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до практичних занять та самостійної роботи студентів
з дисципліни

«ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА»

галузі знань

12 « Інформаційні технології »

Тернопіль
2019

УДК 519(07)
М54

Укладачі:
Ясній О. П., докт. техн. наук, професор;
Гащин Н. Б., канд. техн. наук, доцент;
Крива Н. Р., старший викладач.

Рецензент:
Михайлишин М. С., канд. техн. наук, доцент.

Методичні вказівки розглянуто й затверджено на засіданні
методичного семінару кафедри математичних методів в інженерії
Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя.
Протокол № 3 від 15 жовтня 2019 р.

Схвалено та рекомендовано до друку на засіданні науково-методичної комісії
факультету комп'ютерних систем і програмної інженерії
Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя.
Протокол № 2 від 16 жовтня 2019 р.

М54 Методичні вказівки до практичних занять та самостійної роботи студентів з дисципліни «Дискретна математика» галузь знань 12 «Інформаційні технології» / Укладачі: Ясній О.П., Гащин П.Б., Крива Н.Р. – Тернопіль : Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя, 2019. – 40 с.

УДК 519(07)

ЗМІСТ

ВСТУП

Дисципліна «Дискретна математика» входить до складу дисциплін циклу природничо-наукової підготовки бакалаврів спеціальностей 123 «Комп'ютерна інженерія», 122 "Комп'ютерні науки та інформаційні технології і є однією з базових математичних дисциплін цього циклу.

Матеріал, який пропонується для вивчення дисципліни, складається з таких розділів: «Основи теорії множин»; «Комбінаторика»; «Булева алгебра»; «Елементи теорії графів ».

Для вивчення дисципліни «Дискретна математика» студент повинен мати знання математики в обсязі середньої школи і деякі основні поняття з розділів дисципліни з вищої математики.

У методичні вказівки з дисципліни «Дискретна математика» входить перелік літератури (підручники, навчальні посібники і монографії), яку можна використовувати для уточнення матеріалу або, за бажанням, для більш глибокого вивчення деяких теоретичних положень і практичних прикладів.

1. ОСНОВИ ТЕОРІЇ МНОЖИН

1.1. Приклади завдань

Завдання 1. Пояснити, чому $3 \in \{1, 2, 3, 4\}$, а $\{1, 2\} \notin \{\{1, 2, 3\}, \{2, 3\}, 1, 2\}$.

Розв'язок.

Множина $\{1, 2, 3, 4\}$ складається із чотирьох елементів, одним із яких є 3, тому записуємо $3 \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Множина $\{\{1, 2, 3\}, \{2, 3\}, 1, 2\}$ складається із чотирьох елементів: множини $\{1, 2, 3\}$, множини $\{2, 3\}$, об'єкта (елемента множини) 1 і об'єкта (елемента множини) 2. У складі цих елементів не існує множини $\{1, 2\}$, отже, $\{1, 2\} \notin \{\{1, 2, 3\}, \{2, 3\}, 1, 2\}$.

Завдання 2. Нехай задана множина $A = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24\}$. Описати цю множину за допомогою характеристичної властивості.

Розв'язок.

Множина A за допомогою характеристичної властивості записується так: $A = \{x \mid 0 < x \leq 24 \text{ і } x \text{ кратне } 3\}$.

Завдання 3. Довести, що множини $A=\{2, 5, 4, 2\}$ і $B=\{5, 4, 2\}$ рівні між собою.

Доведення.

Дві множини A і B рівні (тотожні) тоді й тільки тоді, коли кожний елемент A є елементом B і навпаки. Для даних множин ця умова виконується, отже, вони рівні між собою, тобто $A = B$.

Завдання 4. Довести, що порожня множина є підмножиною будь-якої множини.

Доведення.

Припустимо, що існує множина A така, що $\varnothing \not\subseteq A$. Це означає, що в $\varnothing$ є деякий елемент a, що не міститься в A. Але це неможливо, тому що $\varnothing$ не містить жодного елемента.

Завдання 5. Нехай $A=\{a,b,c,f,g,d\}$, $B=\{b,c,g,k,l\}$. Знайти $A\cup B$, $A\cap B$, $A\setminus B$, $A\Delta B$.

Розв'язок.

$A\cup B=\{a, b, c, f, g, d, k, l\}$, $A\cap B=\{b, c, g\}$, $A\setminus B=\{a, f, d\}$, $A\Delta B=(A\cup B)\setminus(A\cap B)=\{a, f, d, k, l\}$.

Завдання 6. Нехай $M_1=\{x \mid \sin x=1\}$, $M_2=\left\{x=\frac{\pi}{2}\pm 2\pi k\right\}$, де $k\in Z$. Довести, що $M_1=M_2$.

Розв'язок.

Крок 1. Покажемо, що $M_1\subseteq M_2$.

$$\forall x\in M_1 \Rightarrow \sin x=1 \Rightarrow x=\frac{\pi}{2}\pm 2\pi k,\ k\in Z \Rightarrow x\in M_2 \Rightarrow M_1\subseteq M_2.$$

Крок 2. Покажемо, що $M_2\subseteq M_1$.

$$\forall x\in M_2 \Rightarrow x=\frac{\pi}{2}\pm 2\pi k,\quad k\in Z \Rightarrow \sin x=1 \Rightarrow x\in M_1 \Rightarrow M_2\subseteq M_1.$$

За результатами виконання кроків 1 і 2 робимо висновок, що $M_1=M_2$.

Завдання 7. Довести, що $A=(A\cap B)\cup(A\setminus B)$, де A і B множини.

Розв'язок.

Крок 1. Покажемо, що $A\subseteq(A\cap B)\cup(A\setminus B)$

$\forall x\in A \Rightarrow (x\in A\ i\ x\in B)$ або $(x\in A\ i\ x\notin B) \Rightarrow x\in A\cap B$ або $x\in A\setminus B \Rightarrow$

$\Rightarrow x\in(A\cap B)\cup(A\setminus B) \Rightarrow A\subseteq(A\cap B)\cup(A\setminus B)$.

Крок 2. Покажемо, що $(A\cap B)\cup(A\setminus B)\subseteq A$

$\forall x\in(A\cap B)\cup(A\setminus B) \Rightarrow x\in A\cap B$ або $x\in A\setminus B \Rightarrow$

$\Rightarrow (x\in A\, i\ x\notin B)$ або $(x\in A\ i\ x\notin B) \Rightarrow x\in A\ i\ (x\in B$ або $x\notin B) \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in A$ i $(x \in B$ або $x \notin B) \Rightarrow x \in A \Rightarrow (A \cap B) \cup (A \setminus B) \subseteq A$

За результатами виконання кроків 1 і 2 робимо висновок, що $A = (A \cap B) \cup (A \setminus B)$.

Завдання 8. Довести справедливість тотожності $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Доведення.

Нехай $x \in A \cup (B \cap C)$, тоді $x \in A$ або $x \in B \cap C$. Якщо $x \in A$, то x належить об'єднанню A з будь-якою множиною, тобто $x \in A \cup B$ і $x \in A \cup C$, отже, x є елементом перетину множин $A \cup B$ і $A \cup C$, тобто $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Якщо $x \in B \cap C$, то $x \in B$ і $x \in C$, отже, $x \in A \cup B$ і $x \in A \cup C$, тобто і у цьому випадку x є елементом перетину тих же множин.

Таким чином, доведено $A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Аналогічно доводиться і співвідношення $A \cup (B \cap C) \supset (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Відповідно до визначення рівності множин приходимо до необхідної тотожності $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Завдання 9. Довести справедливість співвідношення $A \cup A = A$.

Доведення.

Співвідношення $A \cup A = A$ доводиться наступними перетвореннями з використанням тотожностей алгебри множин:

$$A \cup A = (A \cup A) \cap U = (A \cup A) \cap (A \cup \overline{A}) = A \cup (A \cap \overline{A}) = A \cup \varnothing = A.$$

Завдання 10. Вказати усі підмножини множини $A = \{\{1, 3\}, \{2, 3, 5\}, 4\}$.

Розв'язок.

Кількість підмножин можна обчислити за формулою 2^n, де n − кількість елементів множини A, отже, $2^3 = 8$. Перелічимо підмножини множини A:

$$\varnothing, \{\{1,3\}\}, \{\{2,3,5\}\}, \{4\}, \{\{1,3\}, \{2,3,5\}\}, \{\{1, 3\}, 4\}, \{\{2,3,5\}, 4\}, \{\{1,3\}, \{2,3,5\}, 4\}.$$

Завдання 11. Перелічити елементи декартового добутку двох множин: $X = \{1, 2, 3\}$ і $Y = \{0, 1\}$.

Розв'язок.

$$X \times Y = \{(1,0), (1,1), (2,0), (2,1), (3,1), (3,1)\};$$

$$Y \times X = \{(0,1), (0,2), (0,3), (1,1), (1,2), (1,3)\}.$$

Завдання 12. Нехай X – множина точок відрізка $[0, 1]$, а Y – множина точок відрізка $[1, 2]$. Визначити множину точок $X \times Y$.

Розв'язок.

$X \times Y$ є множиною точок квадрата $[0,1]\times[1,2]$ з вершинами у точках $(0,1),\ (0,2),\ (1,1),\ (1,2)$.

Завдання 13. Знайти область визначення та область значень відношень:

а) $\{(a,1), (a,2), (c,1), (c,2), (c,4), (d,5)\}$;

б) $\{(x,y) \mid x, y \in \mathrm{R}$ і $x = y^2\}$, де R – множина дійсних чисел.

Розв'язок.

Для а) область визначення відношення – це множина $\{a, c, d\}$, область значень – це множина $\{1, 2, 4, 5\}$; б) область визначення – це множина $\{x \mid x \in R$ і $x \geq 0\}$, область значень – R (множина дійсних чисел).

Завдання 14. Нехай задано множини $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$; $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ і таке відношення на цих множинах:

$R = \{ (x_1, y_1), (x_1, y_3), (x_2, y_1), (x_2, y_3), (x_2, y_4), (x_3, y_1), (x_3, y_2), (x_3, y_4), (x_4, y_3), (x_5, y_2), (x_5, y_4) \}$. Визначити фактор-множину $Y \setminus R$ і переріз відношення за підмножиною $B = \{x_2, x_3\}$.

Розв'язок.

Очевидно, $R(x_1) = \{y_1, y_3\}$; $R(x_2) = \{y_1, y_3, y_4\}$ та ін.

Випишемо переріз за всіма елементами множини X у такому вигляді:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$\{y_1, y_3\}$	$\{y_1, y_3, y_4\}$	$\{y_1, y_2, y_4\}$	$\{y_3\}$	$\{y_2, y_4\}$

Об'єднання множин другого рядка утворять фактор-множину $Y \setminus R = \{\{y_1, y_3\}, \{y_1, y_3, y_4\}, \{y_1, y_2, y_4\}, \{y_3\}, \{y_2, y_4\}\}$.

Об'єднання перерізів за елементами підмножини $B \subset X$ є перерізом $R(B)$ відношення R за підмножинами B, тобто $R(B) = \bigcup\limits_{x \in B} R(x)$.

Так, для $B = \{x_2, x_3\}$, $R(B) = \{y_1, y_2, y_3, y_4\} = R(x_2) \cup R(x_3)$.

Завдання 15. Нехай задана множина $A = \{\Pi, \Delta, \mathrm{O}, \Omega\}$ і нехай відношення $R \subseteq A \times A$ визначено у вигляді

$R = \{(\Pi,\Pi), (\Pi,\Delta), (\Pi,\Omega), (\Delta,\Pi), (\Omega,\Pi), (\Omega,\Omega), (\mathrm{O},\Omega), (\mathrm{O},\mathrm{O})\}$.

Чи є відношення R відношенням еквівалентності?

Розв'язок.

R не є рефлексивним, тобто $\Delta \in A$, але $(\Delta, \Delta) \notin R$.

R не є симетричним, оскільки $(\mathrm{O}, \Omega) \in R$, але $(\Omega, \mathrm{O}) \notin R$.

R не є антисиметричним, оскільки $(\Delta, \Pi) \in R$ і $(\Pi, \Delta) \in R$, але $\Delta \neq \Pi$.

R не є транзитивним, тому що $(\Delta, \Pi) \in R$ і $(\Pi, \Omega) \in R$, але $(\Delta, \Omega) \notin R$.

Отже, відношення R не є відношенням еквівалентності.

Завдання 16. Нехай $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, а $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Відношення $f \subseteq A \times B$ задане як $f = \{(-2,5), (-1,2), (0,1), (1,2), (2,5)\}$. Чи є таке відношення функцією?

Розв'язок.

Відношення f є функцією з A в B, тому що $f \subseteq A \times B$, і кожний з елементів A присутній як перший компонент упорядкованої пари з f рівно один раз.

Завдання 17. Нехай A і B – множина дійсних чисел, і функція $f: A \to B$ визначена як $f(x) = x^2$. Чи є функція сюр'єкцією, ін'єкцією й бієкцією?

Розв'язок.

Функція не є сюр'єктивною, оскільки не існує такого дійсного числа a, для якого $f(a) = -1$. Функція не є ін'єктивною, тому що $f(2) = f(-2)$, але $2 \neq -2$. Помітимо, якщо A і B – множина додатних дійсних чисел, тоді функція $f: A \to B$ є ін'єктивною і сюр'єктивною.

1.2. Завдання для самостійної роботи

Завдання 1. Опишіть словами кожну із множин:

а) $A = \{x \in N \mid x \text{ ділиться на 2 і } x \text{ ділиться на 3}\}$;

б) $A = \{x \mid x \in A \text{ і } x \in B\}$;

в) $A = \{x \mid x \in A \text{ і } x \notin B\}$.

Завдання 2. Перелічить елементи множини $\{x \mid x - \text{ціле і } x^2 < 100\}$.

Завдання 3. Перелічить елементи множини

$X = \{x \mid x - \text{голосна буква українсько го алфавіту}\}$.

Завдання 4. Опишіть множину $\{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$ за допомогою характеристичної властивості.

Завдання 5. Перелічить підмножини множини $\varnothing$.

Завдання 6. Перелічить підмножини множини $\{a, b, c, d\}$.

Завдання 7. Визначите кількість елементів у кожній множині:

а) $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$; б) $\{\{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$; в) $\{\varnothing, \{\varnothing\}, a, b, \{a, b\}, \{a, b, \{a, b\}\}\}$;

г); $\{1, 2, 3, \{1, 2, 3\}\}$; д) $\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$.

Завдання 8. Нехай множина перших 20 натуральних чисел – це універсум. Запишіть такі її підмножини: A – підмножина парних чисел; B – підмножина непарних чисел; C – підмножина квадратів чисел; D – підмножина простих чисел.

Завдання 9. Чи рівні між собою множини A і B (якщо ні, то чому?):

а) $A = \{2, 5, 4\}$, $B = \{5, 4, 2\}$;

б) $A = \{1, 2, 4, 2\}$, $B = \{1, 2, 4\}$;

в) $A = \{2, 4, 5\}$, $B = \{2, 4, 3\}$;

г) $A = \{1, \{2, 5\}, 6\}$, $B = \{1, \{5, 2\}, 6\}$;

д) $A = \{1, \{2, 5\}, 6\}$, $B = \{1, 2, 5, 6\}$.

Завдання 10. Доведіть, що $A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)$, де A і B – множини.

Завдання 11. Нехай $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $C = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, а $U = \{1, 2, 3, ..., 10\}$. Визначити множини: 1) $A \cup C$; 2) $A \cap B$; 3) $A \cup (B \cup C)$; 4) $(A \cap B) \cup C$; 5) $\overline{(A \cap B)}$; 6) $\overline{A} \cap \overline{B}$; 7) $A \Delta B$; 8) $A - B$.

Завдання 12. Чи існують такі множини A, B, C, що $A \cap B \neq \varnothing$, $A \cap C = \varnothing$, $(A \cap B) \setminus C = \varnothing$?

Завдання 13. Доведіть наступну рівність $(\overline{A} \cup B) \cap A = A \cap B$.

Завдання 14. Доведіть рівність $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Завдання 15. Доведіть за допомогою тотожних перетворень співвідношення: $A \setminus (A \setminus B) = B \setminus (B \setminus A)$; $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$. Результат перевірте за допомогою діаграм Ейлера-Венна.

Завдання 16. У якому відношенні перебувають множини A і B, якщо $A \setminus B = B \setminus A = \varnothing$?

Завдання 17. Покажіть справедливість тотожностей:

а) $\overline{A \cap \overline{B}} \cup B = \overline{A} \cup B$; б) $(A \cap B \cap C) \cup (\overline{A} \cap B \cap C) = B \cap C$.

Завдання 18. Виходячи з відношення приналежності, доведіть справедливість наступних виразів: а) $A \cup (B \setminus A) = A \cup B$; б) $A \cap (B \setminus A) = \varnothing$;

в) $A \setminus (A \cap B) = A \setminus B$; г) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

Завдання 19. Використовуючи діаграми Ейлера-Венна, покажіть рівність двох множин $(\overline{A \cup B}) = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Завдання 20. Для кожної з наведених нижче множин застосуйте діаграму Ейлера-Венна і заштрихуйте ті її частини, які зображають задані множини:

1) $A - B$; 2)$(\overline{A \cap B})$; 3) $(A \cup B) - A \cap B$; 4) $A \cup (B \cap C)$; 5) $(B - C) - A$;

6) $B - (A \cup C)$; 7) $(\overline{A \cap B \cap C})$.

Завдання 21. Знайдіть наступні множини: а) $\varnothing \cap \{\varnothing\}$; б) $\{\varnothing\} \cap \{\varnothing\}$; в) $\{\varnothing, \{\varnothing\}\} \setminus \varnothing$; г) $\{\varnothing, \{\varnothing\}\} \setminus \{\{\varnothing\}\}$.

Завдання 22. Знайти декартів добуток множин $X = \{\nabla, \infty, \sum\}$, $Y = \varnothing$ і $Z = \{a, b, c, d, e, f\}$.

Завдання 23. Нехай $B = \{x \in N \mid 1 < x < 4\}$ і $C = \{x \in N \mid x^2 - 4 = 0\}$, де N – множина натуральних чисел. З яких елементів складаються множини $B \times C$ і $C \times B$?

Завдання 24.

Задано дві множини $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ і $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ і визначено бінарне відношення $A = \{(x_1, y_2), (x_2, y_1), (x_2, y_2), (x_4, y_2), (x_4, y_3), (x_5, y_1), (x_5, y_3)\}$.

Для заданого відношення:

а) записати область визначення і область значень;

б) визначити переріз за кожним елементом з X;

в) визначити переріз за підмножинами $X_1 = \{x_1, x_4\}$ і $X_2 = \{x_2, x_3, x_5\}$;

г) записати матрицю і нарисувати граф;

д) визначити симетричне (обернене) відношення A^{-1}.

Завдання 25. Нехай X – множина студентів, Y – множина дисциплін. Відношення xAy, де $x \in X$ і $y \in Y$, означає «студент x вивчає дисципліну y». Опишіть словесно область визначення і область значення, переріз і обернене відношення.

Завдання 26. Задано відношення R_1 і відношення R_2 на множині $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ($R_1 \subset A^2$ і $R_2 \subset A^2$): $R_1 = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1)\}$; $R_2 = \{(1,1), (1,3), (1,4), (2,2), (2,3)\}$.

Знайти відношення $R_1 \cup R_2$, $R_1 \cap R_2$, $R_1 \setminus R_2$, $R_2 \setminus R_1$, $\overline{R_1}$, $\overline{R_2}$, $R_1 \times R_2$ і визначити їхню потужність.

Завдання 27. Нехай $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{6, 7, 8, 9\}$, $C = \{10, 11, 12, 13\}$, $D = \{\Omega, \Delta, \text{O}, *\}$ і нехай відношення $R \subseteq A \times B$, $S \subseteq B \times C$, $T \subseteq C \times D$ визначено таким чином: $R = \{(1,7), (4,6), (5,6), (2,8)\}$, $S = \{(6,10), (6,11), (7,10), (8,13)\}$, $T = \{(11, \Delta), (10, \Delta), (13, *), (12, \Omega), (13, \text{O})\}$. Визначити $S \circ R$, $S \circ S^{-1}$, $(T \circ S) \circ R$.

Завдання 28. Нехай $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, $P_1 \subseteq A \times B$, $P_2 \subseteq B^2$.

Задати відношення $P_1 = \{(b,2), (a,3), (b,1), (b,4), (c,1), (c,2), (c,4)\}$ і відношення $P_2 = \{(1,1), (1,2), (1,4), (2,2), (2,4), (3,3), (3,2), (3,4), (4,4)\}$ за допомогою графів, знайти матрицю оберненого відношення $(P_1 \circ P_2)^{-1}$. Перевірити за допомогою матриці відношення P_2, чи є воно рефлексивним, симетричним, антисиметричним, транзитивним.

Завдання 29. Показати, що задане бінарне відношення є рефлексивним, симетричним і не транзитивним: $P = \{(x, y) \mid x, y \in R,\ |x - y| \le 1\}$

Завдання 30. Нехай задана множина $A = \{a, b, c, d, e\}$, S, T, U, V − відношення на A, де

$S = \{(a,a), (a,b), (b,c), (b,d), (c,e), (e,d), (c,a)\}$;

$T = \{(a,b), (b,a), (b,c), (b,d), (e,e), (d,e), (c,b)\}$;

$U = \{(a,b), (a,a), (b,c), (b,b), (e,e), (b,a), (c,b), (c,c), (d,d), (a,c), (c,a)\}$;

$V = \{(a,b), (b,c), (b,b), (e,e), (b,a), (c,b), (d,d), (a,c), (c,a)\}$

Яке з відношень S, T, U, V є транзитивним? Яке з відношень S, T, U, V є антисиметричним?

Завдання 31. Нехай задана множина $A = \{a, b, c, d, e\}$. Опишіть відношення R, яке задане на множині A, що є рефлексивним і симетричним, але не є транзитивним.

Завдання 32.

Нехай $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ і нехай відношення $R \subseteq A \times A$ є множина $R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6), (1,2), (1,4), (2,1), (2,4), (3,5), (5,3), (4,1), (4,2)\}$. Показати, що відношення R є відношенням еквівалентності.

Завдання 33. Яке з наведених нижче відношень R є відношенням часткового порядку на множині $A = \{a, b, c, d\}$?

а) A − множина всіх людей, а відношення R визначене як xRy, якщо x старіше за y;

б) A − множина всіх громадян України, а відношення R визначене як xRy, якщо x має більший номер картки соціального страхування, ніж y;

в) A − множина цілих чисел, R визначено як xRy, якщо $x \ge 2y$.

Завдання 34. Задано відношення на множині цілих чисел Z: $P = \{(x, y) \mid x, y \in Z;\ (x - y) < 1;\ 0 \le x \le 2;\ 0 \le y \le 2\}$.

Перевірити, чи є це відношення частково впорядкованим.

Завдання 35. На множині прямих на площині розглянемо відношення перпендикулярності прямих. Визначити, чи буде це відношення відношенням еквівалентності на цій множині.

Завдання 36. На множині прямих на площині розглянемо відношення паралельності прямих. Визначити, чи буде це відношення відношенням еквівалентності на цій множині.

Завдання 37. Задано відношення:

а) $y^2 = x^2 + 4$; б) $y^3 = x^3 + 4$; в) $y = 5$; г) $y = \sqrt{x^2 - 2}$.

Які з наведених вище відношень є функціями, якщо x і y – дійсні числа, x належить області визначення, а y – області значень?

Завдання 38.

Нехай A – множина мешканців України. Указати, які з $f(x)$ можна вважати функціями, якщо вони означають: а) $f(x) =$ батько x; б) $f(x) =$ син x; в) $f(x) =$ брат x; г) $f(x) =$ чоловік x.

Завдання 39. Нехай $f \subseteq \mathrm{R} \times \mathrm{R}$, де R – множина дійсних чисел. Знайти область визначення та область значень функцій:

а) $f(x) = \sqrt{x-3}$; б) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$; в) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+4}$;

г) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-4}$; д) $f(x) = |x|$.

Завдання 40. Нехай X – множина неупорядкованих трійок (a, b, c) натуральних чисел. Відображення $f : X \to Y$ ставить у відповідність кожній трійці (a, b, c) суму $a + b + c$.

Записати прообраз для кожного з перших шести натуральних чисел.

Завдання 41. З’ясувати, які з наведених нижче функцій, у яких область визначення та область значень збігаються з дійсною числовою віссю, є ін’єктивними, сюр’єктивними, мають обернену функцію?

а) $f(x) = |x|$;

б) $f(x) = x^2 + 4$;

в) $f(x) = x^3 + 6$;

г) $f(x) = x + |x|$;

д) $f(x) = x(x-2)(x+2)$.

2. БУЛЕВІ ФУНКЦІЇ ТА ПЕРЕТВОРЕННЯ. НОРМАЛЬНІ ФОРМИ ЗОБРАЖЕННЯ БУЛЕВИХ ФУНКЦІЙ

2.1. Приклади завдань

Завдання 1. Визначити потужність множини двійкових слів (інтерпретацій), на яких визначена булева функція $y = f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$.

Розв'язок.

Кількість аргументів заданої булевої функції дорівнює 6 ($n = 6$). Потужність множини двійкових слів, на яких визначена булева функція $y = f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$, обчислюється за формулою $|B^n| = 2^n$.

Усього двійкових слів (інтерпретацій), на яких визначена булева функція $y = f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$, буде $|B^6| = 2^6 = 64$ слова.

Завдання 2. Визначити кількість булевих функцій, які залежать від 5-ти булевих змінних.

Розв'язок.

Число всіх булевих функцій, що залежать від n булевих змінних, дорівнює 2^{2^n}, отже, число всіх булевих функцій, що залежать від 5-ти булевих змінних $x_1, x_2, ..., x_5$, дорівнює $2^{2^n} = 2^{2^5} = 2^{32} = 4294967296$.

Завдання 3. Побудувати таблицю істинності булевої функції $f(x, y, z) = (x \sim y) \vee ((y \to x) \downarrow \bar{z})$ і визначити її порядковий номер.

Розв'язок.

Побудуємо таблицю істинності булевої функції $f(x, y, z) = U = (x \sim y) \vee ((y \to x) \downarrow \bar{z})$ (табл. 2.1). Скористаємося додатковими позначеннями $A = (x \sim y)$ і $B = (y \to x) \downarrow \bar{z}$. Отже, $U = A \vee B$.

Таблиця 2.1 – таблиця істинності булевої функції $f(x, y, z) = (x \sim y) \vee ((y \to x) \downarrow \bar{z})$

x	y	z	$A = (x \sim y)$	$(y \to x)$	$\bar{z}$	$B = (y \to x) \downarrow \bar{z}$	$U = A \vee B$
0	0	0	1	1	1	0	1
0	0	1	1	1	0	0	1
0	1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0
1	0	1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	0	0	1

Двійковий код, що відповідає значенням цієї функції, дорівнює 11010011 (останній стовпчик таблиці 2.1).

Двійкове число 11010011_2 в десятковій системі числення матиме вигляд:

$f(x,y,z)_{10} = 2^7 \cdot 1 + 2^6 \cdot 1 + 2^5 \cdot 0 + 2^4 \cdot 1 + 2^3 \cdot 0 + 2^2 \cdot 0 + 2^1 \cdot 1 + 2^0 \cdot 1 = 128 + 64 + 0 + {}$ $+ 16 + 0 + 0 + 2 + 1 = 192 + 19 = 211_{10}$.

Порядковий номер функції дорівнює 211_{10} .

Завдання 4. Побудувати таблицю істинності для бінарної функції $f(x,y)$ з порядковим номером 14.

Розв'язок.

Знайдемо двійкове число, що відповідає десятковому числу 14.

Запишемо це десяткове число як суму степенів числа 2, тобто $14_{10} = 8 + 4 + 2 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 1110_2$.

Таким чином, $f_{14}(x,y)$ відповідає двійковому числу 1110_2.

Побудуємо таблицю істинності, для цього запишемо отримане число в стовпчику значення функції таким чином, щоб молодший розряд знаходився у нижньому рядку.

Таблиця 2.2 – Таблиця істинності функції $f_{14}(x,y)$

x	y	$f_{14}(x,y)$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Завдання 5. Чи еквівалентні формули U і B, якщо $B = x \sim z$, а $U = (x \sim y) \vee ((y \to x) \downarrow \bar{z})$?

Розв'язок.

Побудуємо таблиці істинності для формули U (табл. 2.1) і формули B (табл. 2.3). Перевіримо еквівалентність формул за допомогою цих таблиць.

Таблиця 2.3 – Узагальнена таблиця істинності функцій, які реалізовано формулами U і B

x	y	z	B	U
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

Аналіз показав, що таблиці істинності функцій не збігаються (стовпці U і B різні), отже, формули нееквівалентні.

Завдання 6. Перевірити, чи справедливі наступні відношення:

а) $x \vee (y \sim z) = (x \vee y) \sim (x \vee z)$;

б) $x(y \sim z) = (xy) \sim (xz)$.

Розв'язок.

а) за допомогою еквівалентних перетворень перетворимо праву і ліву частину відношення $x \vee (y \sim z) = x \vee yz \vee \bar{y}\bar{z}$. Спочатку перетворимо ліву частину: $x \vee (y \sim z) = (x \vee y) \sim (x \vee z) = (x \vee y)(x \vee z) \vee \overline{(x \vee y)}\,\overline{(x \vee z)} =$

$= x \vee xz \vee xy \vee yz \vee \bar{x}\bar{y}\bar{x}\bar{z} = x \vee yz \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} = x \vee yz \vee \bar{y}\bar{z}$.

Ліва і права частина відношення виявилися рівними, отже, відношення справедливе.

б) перетворимо ліву частину відношення:

$x(y \sim z) = x(yz \vee \bar{y}\bar{z}) = xyz \vee x\bar{y}\bar{z} = x(yz \vee \bar{y}\bar{z})$.

Перетворимо праву частину відношення:

$(xy) \sim (xz) = xyxz \vee \overline{xy}\,\overline{xz} = xyz \vee (\bar{x} \vee \bar{y})(\bar{x} \vee \bar{z}) = xyz \vee \bar{x} \vee \bar{x}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y} \vee \bar{y}\bar{z} =$
$= xyz \vee \bar{x} \vee \bar{y}\bar{z} = \bar{x} \vee yz \vee \bar{y}\bar{z}$.

Результатом перетворення є $x(yz \vee \bar{y}\bar{z}) \neq \bar{x} \vee (yz \vee \bar{y}\bar{z})$. Це можна перевірити за допомогою таблиці істинності (табл. 2.4), позначивши $A = x(yz \vee \bar{y}\bar{z})$, $C = \bar{x} \vee (yz \vee \bar{y}\bar{z})$.

Таблиця 2.4 – Таблиця істинності функцій A і C

x	y	z	yz	$\bar{y}\bar{z}$	$yz \vee \bar{y}\bar{z}$	$A = x(yz \vee \bar{y}\bar{z})$	$C = \bar{x} \vee (yz \vee \bar{y}\bar{z})$
0	0	0	0	1	1	0	1
0	0	1	0	1	0	0	1
0	1	0	0	0	0	0	1
0	1	1	1	0	1	0	1
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0	0	0
1	1	0	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1

Стовпчики A і C різні, отже, відношення несправедливе.

Завдання 7. Знайти функцію, двоїсту функції $f(x, y, z)$, якщо відомо, що $f(x, y, z) = 1$ тільки на інтерпретаціях (001), (011), (111).

Розв'язок.

Побудуємо таблицю істинності функції $f(x,y,z)$ (табл. 2.5). Для стовпця значень функції $f(x,y,z)$ генеруємо набір протилежних (інверсних) значень (10101110). Записавши цей набір у зворотній послідовності, отримаємо, таким чином, стовпець значень двоїстої функції f^*.

Таблиця 2.5 – Таблиця істинності двоїстих функцій

x	y	z	$f(x,y,z)$	$f^*(x,y,z)$
0	0	0	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

Завдання 8. Знайти булеву функцію, яка є двоїстою до булевої функції $f = x \wedge (y \vee z \wedge (u \vee v))$.

Розв'язок.

Скориставшись правилом знаходження двоїстих формул булевої алгебри (принцип двоїстості), тобто, замінивши всі кон'юнкції на диз'юнкції, всі диз'юнкції на кон'юнкції, поставивши дужки, де необхідно, щоб порядок виконання операцій залишився таким, як був, знаходимо двоїсту булеву функцію $f^* = x \wedge (y \vee z \wedge (u \vee v))^* = x \vee y \wedge (z \vee u \wedge v)$.

Завдання 9. Булеві функції $f(x,y,z)$ і $g(x,y,z)$ задано таблицями істинності (табл. 2.6). Визначити, чи є дані булеві функції самодвоїстими.

Таблиця 2.6 – Таблиця істинності функцій $f(x,y,z)$ і $g(x,y,z)$

x	y	z	$f(x,y,z)$	$g(x,y,z)$
0	0	0	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	1	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	0	0
1	1	1	1	0

Розв'язок.

З таблиці 2.6 видно, що кожне значення булевої функції $f(x,y,z)$ є запереченням симетричного йому значення, наприклад: булева функція на інтерпретації $(0,0,0)$ дорівнює нулю, тобто $f(0,0,0)=0$, симетричне значення цієї функції на інтерпретації $(1,1,1)$ дорівнює одиниці, тобто $f(1,1,1)=1$.

Отже, функція $f(x,y,z)$ є самодвоїстою.

Для булевої функції $g(x,y,z)$ є такі значення функції, які не є рівними запереченню симетричних їм значень, наприклад: булева функція на інтерпретації $(0,0,0)$ дорівнює нулю, тобто $g(0,0,0)=0$, а симетричне значення цієї функції на інтерпретації $(1,1,1)$ теж дорівнює нулю, тобто $g(1,1,1)=0$.

Отже, функція $g(x,y,z)$ не є самодвоїстою.

Завдання 10. Записати диз'юнктивний розклад функції $f(x,y,z,t)=\overline{(x\wedge y\vee \overline{z})}\wedge t$ за змінними x, z.

Розв'язок.

Скористаємося теоремою про розклад булевих функцій за k змінними:

$$f(x,y,z,t)=\bigvee_{\sigma_1,\sigma_2} x^{\sigma_1}\wedge z^{\sigma_2}\wedge f(\sigma_1,y,\sigma_2,t)=x^0\wedge z^0\wedge f(0,y,0,t)\vee$$

$$\vee\, x^0\wedge z^1\wedge f(0,y,1,t)\vee x^1\wedge z^0\wedge f(1,y,0,t)\vee x^1\wedge z^1\wedge f(1,y,1,t)=$$

$$=\overline{x}\wedge\overline{z}\wedge f(0,y,0,t)\vee\overline{x}\wedge z\wedge f(0,y,1,t)\vee x\wedge\overline{z}\wedge f(1,y,0,t)\vee x\wedge z\wedge f(1,y,1,t)$$

Обчислимо:

$$f(0,y,0,t)=\overline{(0\wedge y\vee\overline{0})}\wedge t=0;$$

$$f(0,y,1,t)=\overline{(0\wedge y\vee\overline{1})}\wedge t=t;$$

$$f(1,y,0,t)=\overline{(1\wedge y\vee\overline{0})}\wedge t=0;$$

$$f(1,y,1,t)=\overline{(1\wedge y\vee\overline{1})}\wedge t=\overline{y}\wedge t.$$

Підставимо значення $f(0,y,0,t)$, $f(0,y,1,t)$, $f(1,y,0,t)$, $f(1,y,1,t)$ у формулу диз'юнктивного розкладу за змінним x, z:

$$f(x,y,z,t)=\overline{x}\wedge\overline{z}\wedge 0\vee\overline{x}\wedge z\wedge t\vee x\wedge\overline{z}\wedge 0\vee x\wedge z\wedge(\overline{y}\wedge t)=\overline{x}\wedge z\wedge t\vee x\wedge z\wedge\overline{y}\wedge t.$$

Завдання 11. Записати кон'юнктивний розклад функції $f(x,y,z)=xy\vee\overline{z}$ за змінною x.

Розв'язок.

Скористаємося теоремою про кон'юнктивний розклад булевої функції (за однією змінною):

$$f(x, y, z) = (x^{\bar{0}} \vee f(0, y, z)) \wedge (x^{\bar{1}} \vee f(1, y, z)) = (x \vee f(0, y, z)) \wedge (\bar{x} \vee f(1, y, z)) =$$

$$= (x \vee 0 \cdot y \vee \bar{z})(\bar{x} \vee 1 \cdot y \vee \bar{z}) = (x \vee \bar{z})(\bar{x} \vee y \vee \bar{z}).$$

Завдання 12. Представити у вигляді досконалої дизюнктивної нормальної форми і досконалої кон'юнктивної нормальної форми функцію

$f(x, y, z) = (x \oplus y) \to yz$.

Розв'язок.

Побудуємо таблицю істинності даної функції (табл. 2.7).

Таблиця 2.7 – Таблиця істинності функції $f(x, y, z) = (x \oplus y) \to yz$

x	y	z	$(x \oplus y)$	$\bar{y}\bar{z}$	$yz \vee \bar{y}\bar{z}$
0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	1
0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	0	0
1	1	0	0	0	1
1	1	1	0	1	1

ДДНФ ($f_{СДНФ}$) побудуємо на одиничних значеннях функції:

$$f_{СДНФ} = x^0 y^0 z^0 \vee x^0 y^0 z^1 \vee x^0 y^1 z^1 \vee x^1 y^1 z^0 \vee x^1 y^1 z^1 = \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}yz \vee xy\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{z}.$$

ДКНФ ($f_{СКНФ}$) побудуємо на нульових значеннях функції:

$$f_{СКНФ} = (x^{\bar{0}} \vee y^{\bar{1}} \vee z^{\bar{0}})(x^{\bar{1}} \vee y^{\bar{0}} \vee z^{\bar{0}})(x^{\bar{1}} \vee y^{\bar{0}} \vee z^{\bar{1}}) = (x \vee \bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee y \vee z)(\bar{x} \vee y \vee \bar{z}).$$

Завдання 13.

Записати конституенти нуля та одиниці, що відповідають інтерпретаціям булевої функції трьох змінних.

Розв'язок.

Конституента нуля і конституента одиниці булевої функції однозначно визначаються номерами відповідних їм інтерпретацій. Конституента нуля функції $f(x, y, z)$ є елементарною диз'юнкцією. Інтерпретація, що обертає в нуль дану елементарну диз'юнкцію, перетворює в нуль і функцію $f(x, y, z)$. Конституента одиниці функції $f(x, y, z)$ є елементарною кон'юнкцією. Інтерпретація, що обертає в одиницю дану елементарну кон'юнкцію, перетворює в одиницю і функцію $f(x, y, z)$.

Конституенти нуля і конституенти одиниці для функцій трьох змінних наведено в табл. 2.8.

Таблиця 2.8 – Конституенти нуля і конституенти одиниці для функцій трьох змінних $f(x, y, z)$

Номер інтерпре-тації	Інтерпретація			Конституента одиниці	Конституента нуля
	x	y	z		
0	0	0	0	$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$	$x \vee y \vee z$
1	0	0	1	$\bar{x}\bar{y}z$	$x \vee y \vee \bar{z}$
2	0	1	0	$\bar{x}y\bar{z}$	$x \vee \bar{y} \vee z$
3	0	1	1	$\bar{x}yz$	$x \vee \bar{y} \vee \bar{z}$
4	1	0	0	$x\bar{y}\bar{z}$	$\bar{x} \vee y \vee z$
5	1	0	1	$x\bar{y}z$	$\bar{x} \vee y \vee \bar{z}$
6	1	1	0	$xy\bar{z}$	$\bar{x} \vee \bar{y} \vee z$
7	1	1	1	xyz	$\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}$

Завдання 14.

За допомогою еквівалентних перетворень привести до ДНФ формулу $F = ((x \vee y\bar{z}t)((\bar{y} \vee t) \to x\bar{z}\bar{t}) \vee yz) \vee (\bar{x} \vee t)$.

Розв'язок.

$$F = ((x \vee y\bar{z}t)((\bar{y} \vee t) \to x\bar{z}\bar{t}) \vee yz) \vee (\bar{x} \vee t) = ((x \vee y\bar{z}t)(\overline{(\bar{y} \vee t)} \vee x\bar{z}\bar{t}) \vee yz) \vee (\bar{x} \vee t) =$$
$$= ((x \vee y\bar{z}t)(y\bar{t} \vee x\bar{z}\bar{t}) \vee yz) \vee \bar{x} \vee t = xy\bar{t} \vee x\bar{z}\bar{t} \vee yz \vee \bar{x} \vee t = t \vee xy \vee x\bar{z} \vee yz \vee \bar{x} =$$
$$= t \vee \bar{x} \vee y \vee \bar{z} \vee yz = \bar{x} \vee y \vee \bar{z} \vee t.$$

Завдання 15. Побудувати ДДНФ функції $f(x, y, z) = xy \vee \overline{(x(\bar{y} \vee z) \vee yz)}$, застосувавши правила перетворення довільної формули алгебри логіки до ДДНФ.

Розв'язок.

Скористаємося правилами перетворення довільної формули алгебри логіки до ДДНФ.

Перейдемо до заперечень змінних, застосувавши закон де Моргана:

$$x y \vee \overline{(x(\bar{y} \vee z) \vee y z)} = x y \vee \overline{(x(\bar{y} \vee z))}\;\overline{(y z)} = xy \vee (\bar{x} \vee \overline{(\bar{y} \vee z)})(\bar{y} \vee \bar{z}) =$$
$$= xy \vee (\bar{x} \vee (y\bar{z}))(\bar{y} \vee \bar{z}).$$

Побудуємо диз'юнктивну нормальну форму, скориставшись дистрибутивним законом, законами ідемпотентності й протиріччя:

$x\,y \vee (\bar{x} \vee (y\,\bar{z}))(\bar{y} \vee \bar{z}) = x\,y \vee (\bar{x}\,\bar{y} \vee y\,\bar{z}\bar{y} \vee \bar{x}\,\bar{z} \vee \bar{y}\,\bar{z}\,\bar{z}) = x\,y \vee \bar{x}\,\bar{y} \vee 0 \vee \bar{x}\,\bar{z} \vee y\,\bar{z} =$
$= xy \vee \bar{x}\bar{y} \vee \bar{x}\bar{z} \vee y\bar{z}$.

Булева функція залежить від трьох змінних, тому в елементарні кон’юнкції необхідно ввести відсутні змінні, застосувавши закон виключеного третього:

$$x\,y \vee \bar{x}\,\bar{y} \vee \bar{x}\,\bar{z} \vee y\,\bar{z} = x\,y(z \vee \bar{z}) \vee \bar{x}\,\bar{y}(z \vee \bar{z}) \vee \bar{x}(y \vee \bar{y})\bar{z} \vee (x \vee \bar{x})\,y\,\bar{z}.$$

Скориставшись дистрибутивним законом, розкриємо дужки і зведемо подібні для того, щоб одержати ДДНФ:

$$xyz \vee xy\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee xy\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z} = xyz \vee xy\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z}.$$

Одержана досконала диз’юнктивна нормальна форма заданої булевої функції: $f(x, y, z) = xyz \vee xy\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z}$.

Завдання 16. Скласти алгоритм переходу від таблиці істинності булевої функції до ДКНФ.

Розв’язок.

Для переходу від таблиці істинності булевої функції до ДКНФ можна скористатися наступним алгоритмом:

а) виділити у таблиці істинності булевої функції всі інтерпретації, на яких значення функції дорівнює нулю;

б) записати конституенти нуля, що відповідають відзначеним інтерпретаціям;

в) одержати ДКНФ функції за допомогою з’єднання операцією кон’юнкції записаних конституент нуля.

2.2. Завдання для самостійної роботи

Завдання 1. У скільки разів більше різних двійкових слів треба аналізувати для булевої функції $y = f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, ніж для булевої функції $y = f(x_1, x_2, x_3)$?

Завдання 2. У скільки разів більше можна побудувати булевих функцій, що залежать від 6-и змінних, ніж від 4-х змінних?

Завдання 3. Побудувати таблиці істинності наступних функцій і визначити їхній порядковий номер:

а) $f(x, y) = (x \sim y) \wedge (y \to x)$;

б) $f(x, y, z) = (x \wedge y) \oplus (x \wedge z) \oplus (y \wedge z)$;

в) $f(x, y, z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge \bar{z}) \vee (y \wedge z)$;

г) $f(x, y) = (x \downarrow y) \wedge (y \to x)$;

д) $f(x,y,z)=(x\wedge y)\vee(x\,|\,\overline{z})\vee(y\sim z)$.

Завдання 4. Перевірити за допомогою таблиць істинності, чи справедливі наступні співвідношення:

а) $x\vee(y\sim z)=(x\vee y)\sim(x\vee z)$;

б) $x\to(y\sim z)=(x\to y)\sim(x\to z)$;

в) $x\to(y\vee z)=(x\to y)\vee(x\to z)$;

г) $x\oplus(y\wedge z)=(x\oplus y)\wedge(x\oplus z)$;

д) $x\to(y\to z)=(x\to y)\to(x\to z)$.

Завдання 5. При $x_1=1$; $x_2=0$; $x_3=0$; $x_4=0$ знайдіть значення функцій $(x_1\vee x_2)\sim x_2\bar{x}_3$ і $x_1\bar{x}_2\to(x_2\sim x_3)$.

Завдання 6. Довести, що імплікація та еквіваленція може бути визначена через інші функції: $x_1\to x_2=\overline{x_1}\vee x_2$; $x_1\sim x_2=(x_1\vee\overline{x_2})(\overline{x_1}\vee x_2)$.

Завдання 7. Використовуючи основні еквівалентності, довести еквівалентність формул U і B, якщо $U=(x\to y)\to((x\overline{y})\oplus(x\sim\overline{y}))$, $B=(x\vee y)(\overline{x}\vee\overline{y})$.

Завдання 8. Знайти двоїсті формули до наступних функцій:

а) $(x\wedge(y\vee z))\vee\overline{x}\wedge\overline{y}$;

б) $x\wedge y\vee y\wedge z\vee x\wedge z$;

в) $x\overline{y}\vee x\vee y\vee zt$.

Завдання 9. Визначити, чи є наступні функції самодвоїстими:

а) $f(x,y)=(\overline{x}\vee y)\wedge(\overline{y}\vee x)$;

б) $f(x,y,z)=(\overline{x}\wedge\overline{y})\vee(x\wedge z)\vee(\overline{y}\wedge\overline{z})$;

в) $f(x,y)=x\vee\overline{(x\wedge y)}$.

Завдання 10. Спростити за допомогою законів булевої логіки наведені нижче вирази. Потім за допомогою таблиць істинності порівняти отримані вирази із заданими:

а) $(x\vee(\overline{t}\wedge y))\wedge((\overline{x}\wedge(\overline{y}\vee t))\vee z))\vee\overline{z}\vee(x\vee(y\wedge\overline{t}))$;

б) $((\overline{y}\vee\overline{z})\wedge(x\vee y))\vee(t\wedge\overline{z})\vee(((\overline{y}\wedge\overline{x})\vee z)\wedge(x\vee y))$;

в) $((x\vee z)\wedge(x\vee t))\wedge(((z\vee(z\wedge y))\wedge\overline{z})\vee\overline{x})$.

Завдання 11. Булеву функцію $f(x,y,z)$ визначено таким чином: вона дорівнює 1 при $x=1$, або, якщо y і z приймають різні значення, а значення змінної x менше значення змінної z. В інших випадках функція дорівнює 0.

Скласти таблицю істинності функції $f(x, y, z)$ і записати множину $Q = \{(xyz) \mid (xyz) \in \mathrm{R}^3$ і $f(x, y, z) = 1\}$.

Завдання 12. Знайти диз’юнктивний розклад наступних булевих функцій за змінними x, z:

а) $(\bar{x} \vee (z \vee yz))(z \vee x\bar{z} \vee \bar{y})$;

б) $((x \vee y)(\bar{y} \vee \bar{z}) \vee (\bar{z} \vee x)) \vee (\bar{x} \vee z)$;

в) $(x \vee \bar{z})(\bar{x}t \vee yt \vee \bar{x}\bar{t} \vee y\bar{t})(x \vee z)$.

Завдання 13. Знайти кон’юнктивний розклад наступних булевих функцій за змінними x, z:

а) $(x \vee \bar{z} \vee y)(x\bar{y} \vee \bar{x}\bar{y} \vee z)(x \vee \bar{y})$;

б) $((y \vee z)(t \vee y\bar{z})) \vee \bar{t}\bar{x} \vee ((z \vee y)(\bar{t} \vee \bar{z})$;

в) $yt \vee ((z \vee \bar{t})(\bar{x} \vee z)(\bar{t} \vee \bar{z})(x \vee \bar{z})) \vee \bar{y}t$.

Завдання 14. Записати диз’юнктивний розклад булевої функції $f(x, y, z, t) = \overline{(x \wedge y \vee \bar{z})} \wedge (t \vee x)$ за змінною x.

Завдання 15. Записати конституенти нуля та одиниці булевої функції, що відповідають інтерпретаціям функції чотирьох змінних.

Завдання 16. За допомогою еквівалентних перетворень привести до ДНФ наступні формули: а) $F = (x \vee y\bar{z})(x \vee z)$; б) $F = (x \to y) \oplus (xy \vee z)$.

Завдання 17. Представити у вигляді ДДНФ і ДКНФ наступні функції:

а) $\sigma_f = (10001110)$, де σ_f – стовпець значень функції з таблиці істинності; б) $\sigma_f = (01100110)$; в) $f(x, y, z) = (x \to y) \oplus z$; г) $f(x, y) = (x \downarrow y)(x \to y)$; д) $f(x, y, z, t) = ((x \to y) \oplus z) \wedge \bar{t}$; е) $f_{201}(x, y, z)$.

Завдання 18. Скласти алгоритм переходу від таблиці істинності булевої функції до ДДНФ даної функції.

Завдання 19. За допомогою перетворень виду $A = Ax \vee A\bar{x}$, $A \vee A = A$ перейти від заданої ДНФ $f(x_1, x_2, x_3) = x_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 x_3$ до ДДНФ.

Завдання 20. Записати ДДНФ для функції $f(x_1, x_2, x_3)$, що має нульові значення на всіх непарних двійкових наборах.

Завдання 22. Нехай функція $f(x, y, z)$ задана таким чином: $f(x, y, z) = 0$, якщо $y = 1$ або $y < z$, а інакше $f(x, y, z) = 1$. За допомогою таблиці істинності функції записати множину Q_f таку, що $Q_f = \{\sigma \mid \sigma \in \mathrm{R}^3$ і $f(\sigma) = 0\}$ і записати ДКНФ і ДДНФ даної функції.

3. ТЕОРІЯ ГРАФІВ

3.1. Приклади завдань

Завдання 1. Декілька осіб (більше двох) приймають участь у шаховому турнірі в одне коло. У деякий момент виявилося, що тільки двоє шахістів зіграли однакову кількість партій. Довести, що тоді є або тільки один учасник, який не зіграв жодної партії, або тільки один, який зіграв усі партії.

Розв'язок.

Мовою теорії графів задачу можна сформулювати наступним чином. У графі з n ($n > 2$) вершинами тільки дві вершини мають однакові степені. Довести, що є або лише одна вершина степеня 0, або лише одна степеня n-1. Розглянемо всі можливі заперечення цього твердження. Якщо припустити, що немає вершин степеня як 0, так і n–1, то n вершин мають степені від 1 до n–2, тобто, серед них є або дві пари вершин, або три вершини з однаковими степенями, що суперечить умові. Отже, вершини степеня 0 або степеня n–1 є. Одночасно таких бути не може. Якщо є дві вершини степеня 0, то залишається n–2 вершин з попарно різними степенями від 1 до n–3, а це неможливо. Так само неможливо, що при двох вершин степеня n–1 решта n–2 вершин мають попарно різні степені від 2 до n-2.

Завдання 2. 29 команд проводять футбольний турнір в одне коло. Довести, що в будь-який момент знайдеться команда, яка зіграла парну кількість матчів.

Розв'язок.

Мовою теорії графів задача виглядає так: довести, що у будь-якому графі з 29 вершинами знайдеться вершина парного степеня. Враховуючи, що 29 – непарне число, і кількість вершин, степінь яких непарний парна, то знайдеться хоч одна вершина парного степеня.

Завдання 3. Чи існує повний граф, кількість ребер якого дорівнює

(а) 15; (б) 18; (в) 199…900…0 (k дев'яток і k нулів)?

Розв'язок.

а) Кількість ребер повного графа з n вершинами дорівнює $n(n-1)/2$. Рівняння $n(n-1)/2 = 15$ має корені 6 і –5. Отже, існує повний граф із 6 вершинами, кількість ребер у якому дорівнює 15.

б) Рівняння $n(n-1)/2 = 18$ не має натуральних коренів, тому такий повний граф не існує.

в) Розглянемо рівняння $n(n-1) = 2 \cdot 199\ldots900\ldots0 = 200\ldots0 \cdot 199\ldots9$ (k нулів і k дев'яток). Число у правій частині цього рівняння можна подати у вигляді $2 \cdot 10^k(2 \cdot 10^k - 1)$, тобто $n = 2 \cdot 10^k$. Отже, такий повний граф існує й має $2 \cdot 10^k$ вершин.

Завдання 4. Визначити, чи існує граф із шістьма вершинами, степені яких дорівнюють:

а) 1, 1, 2, 3, 4, 4 б) 0, 0, 2, 3, 3, 4.

Розв'язок.

а) Такий граф не існує, тому що сума степенів усіх його вершин непарна.

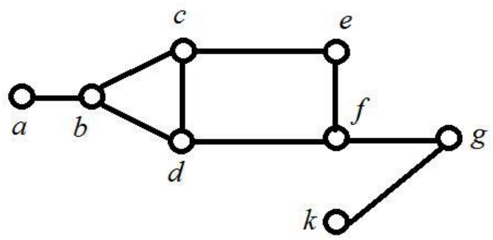
б) Граф із такими степенями вершин не існує. За умовою він має дві ізольовані вершини, отже, максимальне значення степеня для будь-якої з решти чотирьох вершин – 3, в такому графі не може бути вершини зі степенем 4.

Завдання 5. Як визначити степінь певної вершини графа G за його матрицею суміжності A?

Розв'язок.

Степінь вершини v із номером i дорівнює сумі елементів i-го рядка матриці A, оскільки ця сума визначає кількість вершин, суміжних із вершиною v.

Завдання 6. Для даного графа побудувати матрицю відстаней. Знайти центр, радіус та діаметр графа.



Розв'язок.

Матриця відстаней має вигляд:

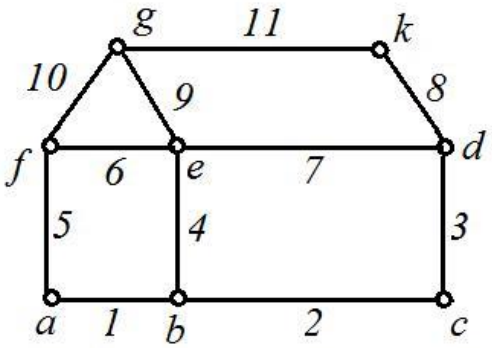
	a	b	c	d	e	f	g	k
a	0	1	2	2	3	3	4	5
b	1	0	1	1	2	2	3	4
c	2	1	0	1	1	1	2	3
d	2	1	1	0	2	1	2	3
e	3	2	1	2	0	1	2	3
f	3	2	1	1	1	0	1	2
g	4	3	2	2	2	1	0	1
k	5	4	3	3	3	2	1	0

Для того, щоб визначити центр, знайдемо максимальну відстань від кожної з вершин графа. Скористаємося отриманою матрицею відстаней:

$l(a)=5,\ l(b)=4,\ l(c)=3,\ l(d)=3,\ l(e)=3,\ l(f)=3,\ l(g)=4,\ l(k)=5.$

Найменша максимальна відстань від вершин c, d, e, f, отже, центр графа – множина вершин $\{c, d, e, f\}$. $R(G) = 3$, $D(G) = 5$.

Завдання 7. **За**дано граф



Визначити степені вершин графа. Задати граф матрицями інцидентності, суміжності, списком ребер.

Розв'язок.

Знайдемо степені всіх вершин графа:

$deg(a) = 2$; $deg(b) = 3$; $deg(c) = 2$; $deg(d) = 3$; $deg(e) = 4$; $deg(f) = 3$; $deg(g) = 3$; $deg(k) = 2$.

$\sum deg\ v_i = 2+3+2+3+4+3+3+2 = 22 = 2 \cdot 11$

Матриця інцидентності має вигляд:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
a	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
b	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
c	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
d	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0
e	0	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0
f	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0
g	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1
k	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1

Матриця суміжності має вигляд:

	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*k*
a	0	1	0	0	0	1	0	0
b	1	0	1	0	1	0	0	0
c	0	1	0	1	0	0	0	0
d	0	0	1	0	1	0	0	1
e	0	1	0	1	0	1	1	0
f	1	0	0	0	1	0	1	0
g	0	0	0	0	1	1	0	0
k	0	0	0	1	0	0	1	0

Список ребер має вигляд:

Ребро		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Вершина	п	a	b	c	b	a	f	d	d	e	f	k
	к	b	c	d	e	f	e	e	k	g	g	g

3.2. Завдання для самостійної роботи

Завдання 1. Нехай маємо множину *V*, що містить 3 документи. Побудувати граф для відношення $a \in A$, що характеризує належність документа а множині *A*, де *A* пробігає всі підмножини множини *V*.

Завдання 2. Нехай задано граф $G = (V, E)$:

а) $V = \{1,2,3,4\}$, $E = \{(1,3),(2,3),(3,4),(4,1),(4,2)\}$;

б) $V = \{a,b,c,d,e\}$,$E = \{(a,d),(b,c),(b,e),(c,e),(d,b),(d,e),(e,a)\}$;

в) $V = \{1,2,3\}$, $E = \{(1,2),(1,3),(2,3)\}$;

Побудувати діаграму, матриці суміжності та інцидентності для кожного із заданих графів.

Завдання 3. Довести, що в будь-якому графі $G =(V, E\ )$ $\sum\limits_{v \in V} \delta(v) = 2|E|$.

Завдання 4. Скільки ребер у графі з n вершинами, якщо всі його вершини мають степінь 2?

Завдання 5. Довести, що в будь-якому графі кількість вершин, степінь яких непарний, є парною.

Завдання 6. Нехай у графі G з n вершинами і m ребрами є p вершин степеня t, а всі інші вершини мають степінь $t+1$. Довести, що $p = (t+1)\,n - 2m$.

Завдання 7. У певному товаристві з n осіб кожен є знайомим з k і тільки k іншими особами. Чи можливе таке товариство для

а) $n = 5$, $k = 2$; б) $n = 5$, $k = 3$.

Завдання 8. Довести, що у будь-якому графі з n вершинами ($n \geq 2$) завжди знайдуться принаймні дві вершини з однаковими степенями.

Завдання 9. Побудуйте граф із п’ятьма вершинами, в якому тільки дві вершини мають однакові степені.

Завдання 10. У графі з п’ятьма вершинами тільки дві вершини мають однакові степені. Чи можуть обидві ці вершини мати степінь 0 або степінь 4?

Завдання 11. Дано підмножину кісток доміно, серед яких відсутні дублі. Указати умови, за яких з цих кісток можна скласти єдиний неперервний ланцюжок за правилами гри в доміно. Чи відрізняється відповідь, якщо кістки можуть повторюватися?

Завдання 12. Довести, що в довільному графі G із шістьма вершинами завжди знайдуться три вершини, які є або попарно суміжними, або попарно несуміжними. (Це математичне формулювання відомої задачі: довести, що серед будь-яких шести осіб знайдеться або три особи, що попарно знайомі між собою, або три особи, попарно незнайомі).

Завдання 13. Чи існує граф із шістьма вершинами, степені яких дорівнюють

а) 2,3,3,4,4,4; б) 2,2,2,4,5,5?

Відповідь обґрунтувати.

Завдання 14. Довести, що всі ізоморфні графи мають однакову кількість вершин і однакову кількість ребер.

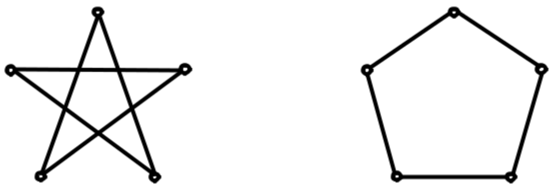
Завдання 15. Довести, що в ізоморфних графів кількість вершин степеня k однакова для довільного k ($k \geq 0$).

Завдання 16. Довести, що у випадку, коли для деякого k ($k \geq 0$) кількості вершин степеня k в графах G_1 і G_2 різні, графи G_1 і G_2 неізоморфні.

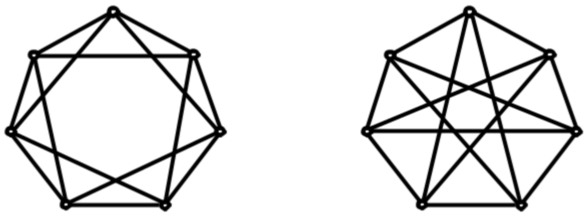
Завдання 17. Довести, що в ізоморфних графів кількість простих циклів довжини l однакова для довільного l.

Завдання 18. Довести, що пари графів, зображені на рисунку, є ізоморфними.

а)



б)



Завдання 19. Перевірити, чи є ізоморфними графи G_1 і G_2, задані своїми матрицями суміжності A_1 і A_2.

$$A_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Завдання 20. Довести, що графи G_1 і G_2 ізоморфні тоді і тільки тоді, коли матрицю суміжності (матрицю інцидентності) одного з цих графів можна одержати з матриці суміжності (матриці інцидентності) іншого за допомогою відповідних перестановок рядків і стовпчиків.

Завдання 21. На рисунку зображено граф G.

а) Знайти всі ланцюги, що ведуть із вершини v_1 у v_{12}.

б) Знайти всі прості ланцюги, що ведуть із вершини v_1 у v_{12}.

в) Знайти ланцюг, що веде з вершини v_1 у v_{12} і містить усі вершини графа G.

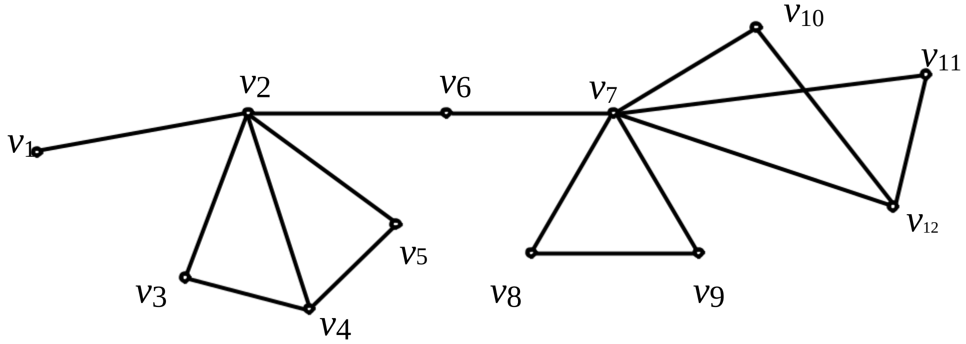
г) Чи існує в графі G простий ланцюг, що веде з вершини v_1 у v_{12} і містить усі вершини графа G?

д) Знайти маршрут у графі G, який веде з v_1 у v_{12} і не є ланцюгом.

е) Знайти маршрут у графі G, який веде з v_1 у v_{12}, містить усі вершини графа G і не є ланцюгом.

є) Знайти який-небудь цикл у графі G.

ж) Знайти всі прості цикли графа G.



Завдання 22. Для графа G, зображеного на рисунку, визначити:

а) відстані $d\,(v_1,v_{12})$, $d\,(v_2,v_8)$, $d\,(v_{10},v_{11})$;

б) ексцентриситети всіх вершин;

в) діаметр $D(G)$;

г) радіус $R(G)$;

д) центральні вершини;

е) центр.

Завдання 23. Знайти в графі K_5 цикли довжини

а) 3; б) 4; в) 5.

Які з цих циклів є простими?

Завдання 24. Чи існує в графі K_5 цикл довжини 9? Відповідь обґрунтувати.

Завдання 25. Довести, що будь-який ланцюг, який веде з вершини v у вершину w ($v \neq w$) містить простий ланцюг, що веде з v у w.

Завдання 26. Спростувати таке твердження: якщо деякий ланцюг, що веде з вершини v у вершину w, проходить через вершину u ($u \neq v$ і $u \neq w$), то цей ланцюг містить простий ланцюг, що веде з v у w і проходить через u.

Завдання 27. Довести, що коли для довільних трьох різних вершин v, w і u в графі G існують ланцюги, один з яких веде з v у w, а другий – із w в u, тоді в графі G є ланцюг, що веде з v в u.

Завдання 28. Спростувати таке твердження: якщо в графі G для деяких трьох різних вершин v, w і u існують прості ланцюги, один із яких веде з v у w, а другий – із w в u, то в графі G є простий ланцюг, що веде з v в u і проходить через w.

Завдання 29. Довести, що будь-який найкоротший ланцюг, що веде з вершини v у вершину w ($v \neq w$), є простим ланцюгом.

Завдання 30. Довести, що довільний цикл містить простий цикл.

Завдання 31. Довести, що коли в графі G тільки дві вершини v і w мають непарні степені, тоді ці вершини є зв'язаними в графі G.

Завдання 32. Чому дорівнюють діаметр і радіус

а) повного графа K_n; б) повного двочасткового графа $K_{n,m}$?

Завдання 33. Визначити хроматичне число

а) повного графа K_n;

б) повного двочасткового графа $K_{n,m}$;

в) довільного двочасткового графа;

г) простого цикла довжини $2k$;

д) простого цикла довжини $2k+1$, $k \in N$.

Завдання 34. Навести приклади графа, який є ейлеровим, але не є гамільтоновим, а також гамільтонового графа, який не є ейлеровим.

Завдання 35. Довести, що для довільного орграфа $G = (V,E)$ виконується

а) $\sum\limits_{v \in V} \delta^+(v) = |E|$; б) $\sum\limits_{v \in V} \delta^+(v) = \sum\limits_{v \in V} \delta^-(v)$.

Завдання 36. Чи існує орграф із трьома вершинами, в якого півстепені виходу вершин дорівнюють 2, 2 і 0, а відповідні півстепені заходу – 2, 1 і 1?

Завдання 37. Визначити для зв'язного дводольного графа з n вершинами найменшу та найбільшу можливу кількість ребер.

Завдання 38. Нехай $G = (V,E)$ зв'язний граф, який не є повним графом. Довести, що в G існують три такі вершини u, v та w, що $(u,v) \in E$ і $(v,w) \in E$, однак $(u,w) \notin E$.

Завдання 39. Довести, що діаметр графа G дорівнює 1 тоді і тільки тоді, коли граф G повний.

Завдання 40. Обґрунтувати такий спосіб знаходження центральних вершин заданого дерева T. Обираємо довільну кінцеву вершину й знаходимо одну з найвіддаленіших від неї вершин – вершину v (очевидно, що вершина v є також кінцевою). Далі знаходимо вершину w, найбільш віддалену від v; будуємо простий ланцюг L із v у w. Це найдовший простий ланцюг у дереві T. Якщо довжина L парна, то середня вершина в L – єдина центральна вершина дерева T. Якщо ж довжина L непарна, то обидві вершини середнього ребра в L є центральними для дерева T.

4. КОМБІНАТОРИКА

4.1. Приклади завдань

Завдання 1. Задано множину {1,2,3,4,5,6,7}. Побудуйте 10 розміщень по 4 елементи із цієї множини, лексикографічно наступних після 4517.

Розв'язок.

Знаходимо у розміщенні 4517 перше справа число, яке можна збільшити за допомогою чисел, що знаходяться справа від нього, або ж чисел {2, 3, 6}, яких немає у розміщенні.

Число 7 не підходить, бо є найбільшим. Отже, ми збільшуємо число "1" яке можна змінити на одне з чисел {2, 3, 6, 7}. На місце 1-ці ставимо найменше з цих чисел, яке більше від неї. Отримуємо, що перші 3 числа є 452. На місце 7 ставимо найменше з чисел, які не входять в розміщення, тобто "1". В результаті отримуємо розміщення чисел 4521, яке є лексикографічно наступною після 4517.

Повторюємо попередні дії: останнє число, яке можна збільшити – це "1", яку ми збільшуємо на одне з доступних чисел {3, 6, 7}, тобто "3", і в результаті ми отримуємо 4523. Аналогічно отримуємо наступні числа: 4526 та 4527.

Оскільки останнє число в розміщенні "7" збільшувати уже не можна, то збільшуємо попереднє число "2" на найменше, яке водночас є більше "2", решту чисел впорядковуємо у висхідному порядку (числа з множини), отримуємо наступне розміщення 4531.

Продовжуючи процес, отримуємо 4532, 4536, 4537, 4561, 4562.

Завдання 2. Задано множину {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}. Побудуйте 5 сполучень без повторень по 4 елементи лексикографічно наступних після {1, 4, 5, 6}.

Розв'язок.

Сполучення будемо подавати без дужок, для спрощення запису, тобто {1, 4, 5, 6} будемо подавати як 1456, пам'ятаючи, що цифри можуть бути лише у висхідному порядку.

Побудуємо наступне лексикографічне сполучення після 1456. Очевидно, що його можна отримати, збільшивши останній елемент, і отримати 1457.

При отриманні наступного лексикографічного сполучення після 1457, останнє число збільшити не можна (бо 7 є найбільшим числом у вихідній множині). Тому ми збільшуємо друге число справа, тобто "5". Отримуємо перші три числа перестановки – 146. Оскільки порядок у перестановці повинен бути висхідним, то на останнє місце ми повинні поставити число, більше за "6", тому наступна перестановка рівна 1467.

Побудуємо наступне лексикографічне сполучення після 1467. Останнє число збільшити не можна, тому переходимо до "6". "6" також збільшувати не можна, бо отримаємо перші три числа перестановки 147, і тоді останнє число має бути більше “7”. Тоді переходимо до наступного числа “4”. Його можна збільшити до “5”, а наступні числа мають бути у висхідному порядку, з чого випливає, що наступна перестановка може бути лише 1567.

Виходячи з попередніх міркувань, у наступному сполученні можна збільшувати лише останній елемент, тобто першим елементом перестановки буде “2”. Наступні числа будуємо у висхідному порядку, і отримаємо 2345.

Завдання 3. Для роботи над програмним проектом потрібно відібрати групу з 7 програмістів з двадцяти. Скількома способами можна це зробити? Скількома способами можна скласти список з семи програмістів із двадцяти?

Скількома способами можна роздати цим програмістам 7 різних завдань? Скількома способами можна розділити відповідальність між програмістами за підтримку роботи проекту, щоб троє відповідали за написання Unit-тестів, двоє за постійну інтеграцію проекту і двоє за постачання проміжних версій клієнту?

Відомо, що керівник проекту за результатами роботи проекту надіслав 5 різних листів з інструкціями окремим програмістам. Скількома способами він міг це зробити, якщо жоден адресат не отримав більше одного листа? Скількома способами він міг це зробити, якщо кожному адресату він міг відіслати кілька листів?

Розв’язок.

Вибірка групи семи програмістів з двадцяти не матиме повторів і порядку, отже, це сполучення без повторень і кількість способів рівна:

$$C_{20}^{7} = \frac{20!}{13! \cdot 7!} = 77520 .$$

Якщо складати список програмістів, то вибірка буде впорядкованою, тому скористаємось формулою розміщень без повторень:

$$A_{20}^{7} = \frac{20!}{13!} = 390700800 .$$

Для того, щоб обчислити кількість розподілу завдань, уявімо, що ми маємо фіксований список програмістів і навпроти кожного імені пишемо його завдання. Міняючи порядок завдань (але при цьому залишаючи порядок імен розробників сталим), отримуємо різні варіанти розподілу завдань. Таким чином, вибірки є впорядкованими, не містять повторень, і кожна з них включає усі елементи. Отже, це перестановка без повторень.

$$P_7 = 7! = 5040$$

Для того, щоб обчислити кількість розподілу додаткових ролей, скористаємось попередніми міркуваннями. Таким чином, єдина відмінність із попереднім варіантом у тому, що у даному варіанті маємо перестановку з повтореннями:

$$P_7(3,2,2) = \frac{7!}{3!\cdot 2!\cdot 2!} = 210\ .$$

Обчислимо кількість способів розіслати листи. У даному випадку вибірка є розміщенням з усіх семи розробників проекту по п'ять чоловік. У випадку, якби лист був однаковий, то ми б мали сполучення, але різні листи ми надсилаємо різним людям, тому вибірка є розміщенням. Вибірка також не може бути перестановкою, бо листи розіслані тільки п'ятьом людям. В першому випадку всі адресати різні, тому розміщення не має повторень:

$$A_7^5 = \frac{7!}{2!} = 2520\ .$$

В другому випадку адресати можуть повторюватись, тому скористаємось формулою розміщень з повтореннями:

$$\tilde{A}_7^5 = 7^5 = 16807\ .$$

Завдання 4. Скількома способами можна вибрати дві пари карт (дві дами і два туза, дві двійки і два валети, тощо)? Вважати порядок карт несуттєвим.

Розв'язок.

Для того, щоби обчислити кількість способів, побудуємо послідовність дій, якими можна отримати дві пари.

1) Вибираємо значення (туз, двійка, трійка і т.д.) для двох пар, тобто визначаємо, чи це будуть тузи і трійки, дами і валети, чи інші пари. На цьому кроці ми ще не обираємо мастей карт.

2) Потім обираємо масті для одної з пар.

3) Обираємо масті для другої з пар.

Усі дії є послідовними, тому визначимо кількість способів, якими можна зробити кожну з цих дій, і, за правилом добутку, перемножимо знайдені числа.

Обчислимо кількість способів, якими можна виконати першу дію. У колоді з 52 карт усіх значень є 13 (туз, двійка, трійка і т.д.). Обрані два значення повинні бути різні, бо інакше отримаємо чотири однакові карти замість двох пар. Окрім того, порядок карт не важливий, отже, потрібно скористатись формулою для сполучення без повторень. Ми обираємо 2 значення з 13, тому першу дію можна здійснити C_{13}^2 способами.

Обчислимо кількість способів, якими можна виконати другу дію. У картах є чотири масті і нема двох однакових карт. Тому обрані масті будуть різними (не буде повторень). Порядок карт не важливий, отже знову потрібно скористатись формулою для сполучення без повторень. Ми обираємо 2 значення з 4, тому першу дію можна здійснити C_4^2 способами.

Аналогічно третю дію можна здійснити C_4^2 способами.

Отже усі дії, згідно правила добутку, можна зробити

$$C_{13}^2 \cdot C_4^2 \cdot C_4^2 = \frac{13 \cdot 12}{2 \cdot 1} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 2808 \text{ способами.}$$

Завдання 5. Скільки різних рядків можна утворити зі слова misspelled, використовуючи всі букви? Скільки таких рядків починаються літерою “і”?

Розв’язок.

Визначимо тип вибірки, який підходить для цієї задачі. Літери у нових рядках впорядковані тому, що різне їх розміщення дає різні рядки. Також у рядках будуть повторення, але повторення літери “s” буде точно два рази, як і літер “e” та “l”. Отже, це не розміщення з повтореннями, а перестановка з повтореннями.

Отже, кількість таких рядків рівна

$$P(2,2,2,1,1,1,1) = \frac{10!}{2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} == \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 ... \cdot 1}{2 \cdot 2 \cdot 2} = 453600$$

Якщо літера “і” стоїть на першому місці, то її не беремо до уваги у перестановці, тому кількість перестановок

$$P(2,2,2,1,1,1) = \frac{9!}{2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} == \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 ... \cdot 1}{2 \cdot 2 \cdot 2} = 45360$$

Завдання 6. У розкладі $\left(\sqrt[3]{a} + \sqrt{a^{-5}}\right)^{34}$ знайти член, що не залежить від a.

Розв’язок.

Скористаємось формулою розкладу бінома Ньютона:

$$\left(\sqrt[3]{a} + \sqrt{a^{-5}}\right)^{34} = \sum_{k=0}^{34} C_n^k \left(\sqrt[3]{a}\right)^k \left(\sqrt{a^{-5}}\right)^{34-k}$$

У члені розкладу бінома Ньютона, що не залежить від значення a, сума степенів параметра a повинна скоротитись і стати рівною нулю.

$$\left(\sqrt[3]{a}\right)^k \left(\sqrt{a^{-5}}\right)^{34-k} = a^{\frac{k}{3}} a^{\frac{-5(34-k)}{2}} = a^0 = 1$$

Звідси знайдемо потрібний нам член розкладу k. Випишемо рівність для степенів:

$$\frac{k}{3} + \frac{-5(34-k)}{2} = 0,$$

звідси:

$$\frac{2k - 15(34-k)}{6} = 0$$

$$17k = 510;$$

$$k = 30.$$

Отже, якщо вважати, що при $k = 0$ розкладі бінома знаходиться перший член, при $k = 1$ – другий і т.д, то при $k = 30$ знаходиться 31 член розкладу.

Обчислимо, чому він рівний:

$$C_{34}^{30} a^{\frac{30}{3}} a^{\frac{-5(34-4)}{2}} = C_{34}^{30} a^{10-10} = C_{34}^{30}$$

Шуканий член розкладу є 31 по порядку і рівний C_{34}^{30}.

Завдання 7. У розкладі $(x+y)^n$ коефіцієнт четвертого члена дорівнює 969. Знайти *n*.

Розв'язок.

Якщо вважати, що при $k = 0$ розкладі бінома знаходиться перший член, при $k = 1$ – другий і т.д, то коефіцієнт четвертого члена дорівнює

$$C_n^3 = \frac{n!}{3!(n-3)!} = \frac{(n-3)!(n-2)(n-1)n}{6(n-3)!} = \frac{(n-2)(n-1)n}{6}.$$

Оскільки він дорівнює 969, то:

$$(n-2)(n-1)n = 969 \cdot 6 = 5814.$$

Щоби не розв'язувати кубічне рівняння $n^3 + 3n^2 + 2n - 5814 = 0$ можна знайти три послідовних натуральних числа, добуток яких рівний 5814. Одним варіантом є розклад на цілі множники числа 5814. Але це ще простіше зробити, взявши корінь кубічний з числа 5814, щоб приблизно визначити *n*, а далі методом перебору визначити його точніше.

$$\sqrt[3]{5814} \approx 17{,}9814.$$

Перебравши варіанти $n = 19, 18, 17$, отримуємо що:

$$(n-2)(n-1)n = 17 \cdot 18 \cdot 19 = 5814$$

Отже $n = 19$.

Завдання 8. Скільки щонайменше має бути людей, щоб принаймні четверо з них народилися в однаковий день тижня та однакового числа?

Розв'язок.

Щоб визначити скільки щонайменше варіантів може бути, помножимо кількість днів у тижні на кількість днів в місяці (31), отримаємо 217 – кількість можливих днів народжень у різні дні тижня та числа.

Отже, зібравши 217 людей, ми не можемо гарантувати, що серед них двоє народились в один день тижня та те саме число. Але, якщо людей є 218, то принаймні двоє таких людей є у цій групі.

Аналогічно, при найгіршому варіанті, зібравши $217 \cdot 3 = 651$ людину, ми не можемо гарантувати, що принаймні четверо людей народилися в однаковий день тижня та однакового числа. Згідно принципу Діріхле, якщо запросити ще на одну людину, то таких людей буде щонайменше четверо. Отже, має бути щонайменше 652 людей.

4.2. Завдання для самостійної роботи

Завдання 1. Нехай M={1, 2, 3, 4, 5}. Навести всі розміщення та сполучення без повторень з елементів множини M по 3 елементи.

Завдання 2. Розмістити наведені перестановки елементів множини {1, 2, 3, 4, 5, 6} у лексикографічному порядку: 456321, 231564, 132456, 156423, 165432, 543216, 541236, 314562, 341526, 654312, 432561, 653412.

Завдання 3. Знайти лексикографічно наступну для кожної з перестановок: 54123; 1432; 12453; 45231; 6714235; 31528764.

Завдання 4. За допомогою алгоритму побудови лексикографічно наступної перестановки записати перші 10 розміщень з 6 по 4 елементи множини {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

Завдання 5. Виписати всі розміщення без повторень по два елементи та розміщення з повтореннями по два елементи множини {1, 2, 3, 4}. Виписати всі сполучення з повтореннями по два елементи цієї ж множини.

Завдання 6. Виписати всі сполучення без повторень по три елементи множини {1, 2, 3, 4, 5}.

Завдання 7. Виписати всі сполучення з повтореннями по три елементи множини {1, 2, 3, 4, 5}.

Завдання 8. Обчислити кількість перестановок множини {a, b, c, d, e}, які закінчуються буквою d і починаються літерою b.

Завдання 9. Скількома способами можна визначити призові місця (перше, друге, третє) у забігу 10 коней?

Завдання 10. Скількома способами можна поселити 12 студентів у 4 кімнати гуртожитку, поселяючи їх по троє в кожній?

Завдання 11. У групі n чоловіків і n жінок. Скількома способами їх можна вишикувати в шеренгу так, щоб чергувалися чоловік і жінка?

Завдання 12. Дано множину M={1, 2, 3, …, 19, 20}. Скільки існує розміщень без повторень з елементів множини M по чотири елементи, які містять:

а) число 13;

б) водночас числа 13 і 14;

в) водночас числа 13, 14 і 17;

г) водночас числа 13, 14, 17 і 20;

д) чотири послідовні числа у висхідному порядку;

е) три послідовні числа у висхідному порядку?

Завдання 13. Скількома способами можна розсадити п’ять осіб за круглим столом?

Завдання 14. Скількома способами з 28 кісток доміно можна утворити пару кісток, які можна докласти одна до другої за правилами доміно?

Завдання 15. Скількома способами можна розсадити за круглим столом п'ятьох чоловіків і п'ятьох жінок, щоб двоє чоловіків не сиділи поруч?

Завдання 16. Із цифр 1, 2, 3, 4, 5, не повторюючи їх, склали всі п'ятицифрові числа. Скільки серед них чисел, які:

а) починаються цифрою 3;

б) не починаються цифрою 5;

в) починаються з 54?

Завдання 17. Дано натуральні числа від 1 до 25. Скількома способами можна вибрати з них два числа так, щоб їх сума була парним числом? Три числа? Чотири?

Завдання 18. Скількома способами можна поставити на полицю 9 книжок:

а) якщо серед них є один тритомник, усі томи якого мають стояти поруч у довільному порядку;

б) щоб усі томи тритомника стояли поруч за зростанням номерів томів?

Завдання 19. Скільки учасників у шаховому турнірі, якщо відомо, що кожний учасник зіграв із кожним із решти, а всього відбулося 210 партій?

Завдання 20. Скількома способами з колоди 52 карт можна вийняти 10 карт, щоб серед них були такі:

а) точно один туз;

б) принаймі один туз;

в) не менше двох тузів?

Завдання 21. Скількома способами можна вибрати пару однакових карт (дві дами, два туза, тощо) із колоди 36 карт? Три однакові карти? Три карти однієї масті?

Завдання 22. Скільки різних рядків із п'яти літер можна утворити з алфавіту, який має 26 літер, якщо повторення дозволені?

Завдання 23. Скільки різних рядків можна утворити зі слова MISSISSIPPI, використовуючи всі букви? Скільки таких рядків починаються та закінчуються літерою S? У скількох таких рядках усі чотири букви S стоять поруч?

Завдання 24. Множина містить 10 елементів. Знайти кількість підмножин цієї множини, що містять більше одного елемента.

Завдання 25. Скільки бітових рядків можна утворити з семи нулів і чотирьох одиниць?

Завдання 26. Скільки бітових рядків можна утворити з одинадцяти нулів і трьох одиниць, якщо кожний рядок обов'язково має починатися з одиниці та після кожної одиниці має бути принаймні два нулі?

Завдання 27. Побудувати розклад:

а) $(x+y)^5$; *б*) $(x-y)^5$; *в*) $(x+y)^6$; *г*) $(x-y)^6$.

Завдання 28. Визначити коефіцієнти у розкладі $(x-y)^9$ при x^2y^7, x^4y^5, x^7y^2.

Завдання 29. Визначити п'ятий член розкладу бінома $\left(\frac{a}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{a}\right)^n$, якщо відношення коефіцієнта третього члена до коефіцієнта другого члена дорівнює 11/2. Члени бінома пронумеровано від 1 до n + 1.

Завдання 30. У розкладі бінома $(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})^n$ коефіцієнт третього члена дорівнює 28. Визначити середній член розкладу.

Завдання 31. Визначити найменше значення показника n у розкладі $(1+x)^n$, за якого відношення двох сусідніх коефіцієнтів дорівнює 7/15.

Завдання 32. У розкладі бінома $(\sqrt[3]{a}+\sqrt{a^{-1}})^{15}$визначити член, який не залежить від *a*.

Завдання 33. Скільки раціональних членів міститься в розкладі $(\sqrt{2}+\sqrt[4]{3})^{100}$?

Завдання 34. У розкладі бінома $\left(a\sqrt[5]{a/3}-b/\sqrt[7]{a^3}\right)^n$ визначити член, що містить a^3, якщо сума біноміальних коефіцієнтів на непарних місцях у розкладі дорівнює 2048.

Завдання 35. За якого значення n коефіцієнти другого, третього та четвертого членів розкладу бінома $(x+y)^n$ утворюють арифметичну прогресію?

Завдання 36. Нехай *M* – скінченна множина. Довести, що підмножин множини *M* із парною кількістю елементів стільки, скільки й підмножин із непарною кількістю елементів.

Завдання 37. Довести біноміальну теорему алгебрично за допомогою математичної індукції.

Завдання 38. Довести, що $C_n^r = P(r, n-r)$.

Завдання 39. Записати розклад $(x+y+z)^4$.

Завдання 40. Знайти коефіцієнт при $x^3y^2z^5$ у розкладі $(x+y+z)^{10}$.

Завдання 41. Знайти кількість членів (доданків) у розкладі $(x_1+x_2+...+x_k)^n$.

Завдання 42. Скільки потрібно запросити людей, аби щонайменше шість із них народилися під одним і тим самим знаком зодіаку?

Завдання 43. Скільки має бути людей, щоб принаймні двоє з них народилися в один і той самий день тижня та в один і той самий місяць (можливо, у різні роки)?

Завдання 44. Позначимо *M* як множину з десяти натуральних чисел, які не перевищують 50. Довести, що є принаймні дві різні п'ятиелементні підмножини множини *M* такі, що суми їх елементів рівні.

Завдання 45. Скільки елементів містить об'єднання п'яти множин, якщо кожна з них містить 10000 елементів, кожна пара – 1000 спільних елементів, кожна трійка – 100, кожна четвірка – 10 спільних елементів і один елемент належить усім п'яти множинам?

Завдання 46. Скільки розв'язків має рівняння $x_1 + x_2 + x_3 = 11$, якщо x_1, x_2, x_3 – невід'ємні цілі числа, менші, ніж 6?

Завдання 47. Знайти кількість розв'язків рівняння $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 17$, якщо x_1, x_2, x_3, x_4 – цілі числа такі, що $x_1 \le 3$, $x_2 \le 4$, $x_3 \le 5$, $x_4 \le 8$.

Завдання 48. Знайти кількість розв'язків наведених нижче рівнянь у невід'ємних цілих числах:

а) $x_1 + x_2 + x_3 = 15$;

б) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 17$;

в) $x_1 + x_2 + x_3 = 15$ за умови $x_1 \ge 2, x_2 \ge 4, x_3 \ge 5$.

Завдання 49. Нехай x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 – невід'ємні цілі числа. Знайти кількість розв'язків рівняння $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 14$, за наступних умов:

а) $x_1 \ge 1$;

б) $x_j \ge 2$ для $j = 1, 2, 3, 4, 5$;

в) $0 \le x_1 \le 10$;

г) $0 \le x_1 \le 3, 1 \le x_2 \le 4, x_3 \ge 5$.

Завдання 50. Знайти кількість розв'язків нерівності $x_1 + x_2 + x_3 \le 15$ у невід'ємних цілих числах.

Знайти кількість додатних цілих чисел, менших за 1 000 000, сума цифр яких дорівнює 19.

Завдання 51. Знайти кількість додатних цілих чисел, менших за 1 000 000, що мають точно одну цифру 9, і сума їхніх цифр дорівнює 13.

Завдання 52. Із цифр 1, 2, 3, 4, 5, не повторюючи їх, склали всі п'ятицифрові числа. Скільки серед них чисел, які:

а) починаються цифрою 3;

б) не починаються цифрою 5;

в) починаються з 54?

Завдання 53. Скількома способами можна поставити на полицю 9 книжок якщо серед них є один тритомник, усі томи якого мають стояти поруч у довільному порядку;

Завдання 54. Скількома способами можна розкласти 28 різних предметів в чотири різних ящики , так, щоб у кожному ящику було по 7 предметів?

Завдання 55. Скількома способами можна покласти 28 різних листівок в 4 однакових конверта так, щоб в кожному конверті лежало по 7 листівок.

Завдання 56. Ліфт, ц якому знаходиться 9 пасажирів , може зупинятися на десяти поверхах. Пасажири виходять групами по дві, три і чотири людини. Скількома способами це може статися ?

Завдання 57. Дванадцятьом учням видано два варіанти контрольної роботи. Скількома способами їх можна посадити у два ряди, щоб поруч не було однакових варіантів, а у тих, хто сидить один за одним був один і той же варіант?

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Кривий С. Л. Дискретна математика : вибрані питання / С. Л. Кривий. – К.: Вид. дім «Києво-Могилянська акад.», 2007.
2. Кривий С. Л. Збірник задач з дискретної математики : вибрані питання / С. Л. Кривий, О. М. Ходзинський. – К. : Бізнесполіграф, 2008.
3. Трохимчук Р. М. Дискретна математика / Р. М. Трохимчук. – К. : Вид. дім «Персонал», 2010.
4. Трохимчук Р. М. Збірник задач і вправ з дискретної математики / Р. М. Трохимчук. – К. : ВПЦ «Київ. ун-т», 2008.
5. Трохимчук Р. М. Збірник задач і вправ з теорії множин і відношень : навч. посіб. / Р. М. Трохимчук. – К. : ВПЦ «Київ. ун-т», 2012.
6. Хромой Я. В. Математична логіка / Я. В. Хромой. – К. : Вища шк., 1983.
7. Хромой Я. В. Збірник задач і вправ з математичної логіки / Я. В. Хромой. – К. : Вища шк., 1978.
8. Нікітченко М. С. Прикладна логіка / М. С. Нікітченко, С. С. Шкільняк. – К. : ВПЦ «Київ. ун-т», 2013.
9. Нікітченко М. С. Математична логіка та теорія алгоритмів / М. С. Нікітченко, С. С. Шкільняк. – К. : ВПЦ «Київ. ун-т», 2008.
10. Бондаренко М. Ф. Збірник тестових завдань з дискретної математики / М. Ф. Бондаренко, Н. В. Білоус, І. Ю. Шубін. – Харків: ХТУРЕ, 2000. – 156 с.