МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ТЕРНОПІЛЬСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ІВАНА ПУЛЮЯ

Кафедра вищої математики

Практичні заняття
із
ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

Частина 1: лінійна алгебра

ТЕРНОПІЛЬ
2014 р.

УДК 517.2
ББК 22.161.6
Г12

Укладач
Г. В. Габрусєв

Рецензент
Лотоцький В. А.,
к.ф.-м.н., доц., зав. каф. математики
і методики її навчання ТНПУ ім. В. Гнатюка

Затверджено на засіданні кафедри вищої математики.
Протокол № 8 від «27» лютого 2014 р.

Схвалено та рекомендовано до друку науково-методичною радою
Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя.
Протокол № 6 від «13» березня 2014 р.

Г12 Г.В. Габрусєв. Практичні заняття із вищої математики (частина 1 : лінійна алгебра) – Тернопіль : Вид-во ТНТУ імені Івана Пулюя, 2014. – 37 с.

ЗМІСТ

Тема 1. Матриці та дії над ними. Визначники другого та третього порядків, їх властивості та обчислення.

Транспонуванням матриці A називається операція над матрицею, при якій її рядки замінюються відповідними стовпцями. Транспоновану матрицю позначають A^T.

Задача 1. Дано матрицю $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. Знайти A^T.

Розв'язання. $A^T=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$.

Добутком матриці A на число λ називається матриця того ж розміру що й матриця A, елементи якої дорівнюють добутку відповідних елементів матриці A на число λ.

Задача 2. Знайти матрицю $-3A$, якщо $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 4 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. $-3A=\begin{pmatrix} 3 & -6 & -3 \\ -9 & 6 & -12 \\ 9 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Додати можна тільки матриці однакового розміру.

Сумою двох матриць A та B називається матриця того ж розміру, елементи якої дорівнюють сумі відповідних елементів матриць A та B.

Задача 3. Знайти матрицю $A+B$, якщо $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. $A+B=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 6 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Задача 4. Знайти матрицю $C=3A-2B^T$, якщо $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. $3A=\begin{pmatrix} 6 & 9 & 12 \\ 3 & -6 & 0 \end{pmatrix}$, $2B^T=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -6 & 4 & 10 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 4 & 13 & 12 \\ 9 & -10 & -10 \end{pmatrix}$.

Множити можна тільки такі матриці A та B, які задовольняють умову: кількість стовпців першої матриці A дорівнює кількості стовпців другої матриці B. $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{pmatrix}$.

Добуток матриці A та B (позначається AB) називається матриця C розміру $m\times p$, елементи якої обчислюються за правилом: $c_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\dots+a_{in}b_{nj}$, $i=1,2,\dots,m$; $j=1,2,\dots,p$.

Задача 5. Дано матриці $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 2 & 3\\ 1 & -1\end{pmatrix}$. Знайти добутки AB та BA.

Розв’язання.

$$AB=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 2 & 3\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1(-1)+2\cdot 2+3\cdot 1 & 1\cdot 0+2\cdot 3(-1)\\ -1(-1)+0\cdot 2+2\cdot 1 & -1\cdot 0+0\cdot 3+2(-1)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-1+4+3 & 0+6-3\\ 1+0+2 & 0+0-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 3\\ 3 & -2\end{pmatrix}.$$

$$BA=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 2 & 3\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\cdot 1+0(-1) & -1\cdot 2+0\cdot 0 & -1\cdot 3+0\cdot 2\\ 2\cdot 1+3(-1) & 2\cdot 2+3\cdot 0 & 2\cdot 3+3\cdot 2\\ 1\cdot 1+(-1)(-1) & 1\cdot 2-1\cdot 0 & 1\cdot 3-1\cdot 2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-1+0 & -2+0 & -3+0\\ 2-3 & 4+0 & 6+6\\ 1+1 & 2-0 & 3-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -2 & -3\\ -1 & 4 & 12\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

Задача 6. Дано матриці $A=\begin{pmatrix}3\\ 4\\ 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & -2 & 3\end{pmatrix}$. Знайти добутки AB та BA.

Розв’язання.

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}3\\ 4\\ 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & -2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15 & -6 & 9\\ 20 & -8 & 12\\ 10 & -4 & 6\end{pmatrix};$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}5 & -2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ 4\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15-8+6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13\end{pmatrix}.$$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$, то можна обчислити степені матриці: $A^1 = A$, $A^2 = A\cdot A$, $A^3 = A\cdot A\cdot A$ і т. д.

Задача 7. Дано функцію $f(x) = x^2 - 3x + 4$. Знайти $f(A)$, якщо $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. $f(A) = A^2 - 3A + 4E$, де E - одинична матриця другого порядку: $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$A^2=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3\cdot 3-1\cdot 2 & 3(-1)-1\cdot 1 \\ 2\cdot 3+1\cdot 2 & 2(-1)+1\cdot 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}, \qquad 3A=\begin{pmatrix} 9 & -3 \\ 6 & 3 \end{pmatrix},$$

$$4E=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$f(A)=\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 9 & -3 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Визначником другого порядку називається число, яке обчислюється за правилом: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Задача 8. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -5 \end{vmatrix}$.

Розв'язання. $\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = 3(-5)-(-4)\cdot 1 = -15+4 = -11.$

Задача 9. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} a^2-ab+b^2 & a-b \\ a^2+ab+b^2 & a+b \end{vmatrix}$.

Розв’язання.

$$\begin{vmatrix} a^2-ab+b^2 & a-b \\ a^2+ab+b^2 & a+b \end{vmatrix} = \left(a^2-ab+b^2\right)\left(a+b\right)-\left(a^2+ab+b^2\right)\left(a-b\right)=a^3+b^3-\left(a^3-b^3\right)=2b^3$$

.

Визначником третього порядку називається число, яке обчислюється за правилом:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Задача 10. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix}$.

Розв’язання.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 1\cdot1\cdot5+\left(-2\right)\left(-5\right)\cdot4+3\cdot2\cdot1-1\cdot1\cdot4-\left(-2\right)\cdot3\cdot5-\left(-5\right)\cdot2\cdot1=$$

$$=5+40+6-4+30+10=87.$$

Задача 11. Використовуючи властивості визначників, обчислити визначник $\Delta = \begin{vmatrix} \cos 2\alpha & \cos^2\alpha & \sin^2\alpha \\ \cos 2\beta & \cos^2\beta & \sin^2\beta \\ \cos 2\gamma & \cos^2\gamma & \sin^2\gamma \end{vmatrix}$.

Розв'язання. Від елемента другого стовпця віднімаємо відповідні елементи третього стовпця, визначник при цьому не зміниться.

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos 2\alpha & \cos^2\alpha - \sin^2\alpha & \sin^2\alpha \\ \cos 2\beta & \cos^2\beta - \sin^2\beta & \sin^2\beta \\ \cos 2\gamma & \cos^2\gamma - \sin^2\gamma & \sin^2\gamma \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos 2\alpha & \cos 2\alpha & \sin^2\alpha \\ \cos 2\beta & \cos 2\beta & \sin^2\beta \\ \cos 2\gamma & \cos 2\gamma & \sin^2\gamma \end{vmatrix} = 0,$$

оскільки визначник має два однакових стовпці.

Задача 12. Використовуючи властивості визначників і теорему про розклад визначника за елементами деякого рядка або стовпця, обчислити визначник $\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$.

Розв'язання. Якщо до першого стовпця додати подвоєний третій, а від другого стовпця відняти портоєний третій, то в третьому рядку визначника буде два нулі. Після цього можна застосувати теорему про розклад визначника за елементами цього рядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} 8 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 8 & -5 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} = -56 + 25 = -31$$

Тема 2. Обчислення визначників вищих порядків. Обернена матриця. Ранг матриці

Визначники n-го порядку ($n > 3$) мають такі ж властивості, як і визначники другого та третього порядків. Використовуючи ці властивості та теорему про розклад визначника за елементами деякого рядка або стовпця, обчислення такого визначника зводять до знаходження визначника меншого порядку.

Задача 1. Обчислити визначник четвертого порядку
$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання. Додамо до другого рядка третій, а до першого рядка – потроєний третій. Отримаємо в третьому стовпці три нулі.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 20 & 9 & 0 & 4 \\ 8 & 3 & 0 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 20 & 9 & 4 \\ 8 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot 3 \begin{vmatrix} 10 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -5 \end{vmatrix} = 6(-50 + 6 + 16 - 4 - 20 + 60) = 6 \cdot 8 = 48.$$

Задача 2. Обчислити визначник п'ятого порядку $\Delta=\begin{vmatrix}2&1&0&0&0\\1&2&1&0&0\\0&1&2&1&0\\0&0&1&2&1\\0&0&0&1&2\end{vmatrix}$.

Розв'язання. Від першого стовпця віднімемо подвоєний другий рядок тоді в першому рядку буде чотири нулі.

$$\Delta=\begin{vmatrix}0&1&0&0&0\\-3&2&1&0&0\\-2&1&2&1&0\\0&0&1&2&1\\0&0&0&1&2\end{vmatrix}=1\cdot\left(-1\right)^{1+2}\begin{vmatrix}-3&1&0&0\\-2&2&1&0\\0&1&2&1\\0&0&1&2\end{vmatrix}.$$

В отриманому визначнику четвертого порядку до першого стовпця додамо потроєний другий стовпець.

$$\Delta=-\begin{vmatrix}0&1&0&0\\4&2&1&0\\3&1&2&1\\0&0&1&2\end{vmatrix}=-1\cdot\left(-1\right)^{1+2}\begin{vmatrix}4&1&0\\3&2&1\\0&1&2\end{vmatrix}=16-4-6=6.$$

Нехай A – квадратна матриця n-го порядку:

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&...&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&...&a_{2n}\\....&....&...&....\\a_{n1}&a_{n2}&...&a_{nn}\end{pmatrix}.$$

Означення. Матриця A^{-1} називається оберненою до матриці A, якщо $AA^{-1}=A^{-1}A=E$, де E – одинична матриця n-го порядку.

Якщо матриця A не вироджена, тобто визначник матриці $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$, то вона має обернену матрицю A^{-1}, яка обчислюється

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

де A_{ij} – алгебраїчні доповнення елементів a_{ij} визначника матриці A.

Задача 3. Знайти матрицю A^{-1}, обернену до матриці $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. $\det A = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -4 + 12 = 8$.

Матриця A не вироджена, тому має обернену матрицю A^{-1}. Знаходимо алгебраїчні доповнення всіх елементів даної матриці:

$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot (-2) = -2$; $A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 3 = -3$;

$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot (-4) = 4$; $A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 2 = 2$.

Складемо обернену матрицю

$$A^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{8} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Задача 4. Знайти матрицю A^{-1}, обернену до матриці $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

Розв'язання.

$$\det A=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & 1 & -3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 4 \\ 5 & -9 & 2 \end{vmatrix}=1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -9 & 2 \end{vmatrix}=32.$$

Оскільки $\det A\neq 0$. То задана матриця має обернену. Обчислюємо алгебраїчні доповнення всіх елементів матриці A.

$$A_{11}=\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}=-13;\quad A_{12}=-\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -3 \end{vmatrix}=14;\quad A_{13}=\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}=-17;$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}=5;\quad A_{22}=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{vmatrix}=2;\quad A_{23}=-\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}=9;$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}=6;\quad A_{32}=-\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=-4;\quad A_{33}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=-2.$$

Отже,

$$A^{-1}=\frac{1}{32}\begin{pmatrix} -13 & 5 & 6 \\ 14 & 2 & -4 \\ -17 & 9 & -2 \end{pmatrix}.$$

Нехай задано матрицю A розміру $m \times n$. Виберемо в матриці A k рядків та k стовпців, де $1 \le k \le \min(m,n)$.

Означення. Визначник порядку k, складений з елементів, які стоять на перетині вибраних рядків і стовпців, називається мінором k-го порядку матриці A.

Означення. Рангом матриці A називається найбільший з порядків її мінорів, які не дорівнюють нулю.

Ранг матриці не змінюється, якщо над матрицею виконувати елементарні перетворення:

а) множення всіх елементів даного рядка (стовпця) матриці на одне і те саме число, не рівне нулю;

б) додавання до елементів деякого рядка (стовпця) відповідних елементів іншого рядка (стовпця), помножених на одне і те саме число;

в) перестановку місцями рядків (стовпців) матриці.

Задача 5. Знайти ранг $r(A)$ матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 2 & 3 & -2 & -1 \\ 4 & -1 & 4 & -9 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. Виконаємо над матрицею A елементарні перетворення:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 2 & 3 & -2 & -1 \\ 4 & -1 & 4 & -9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 7 & -8 & 7 \\ 0 & 7 & -8 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 7 & -8 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Оскільки в отриманій матриці є мінори прядку 2, які не дорівнюють нулю, наприклад, $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = 7$, а всі мінори третього порядку дорівнюють нулю, то $r(A) = 2$.

Задача 6. Знайти ранг $r(B)$ матриці

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 4 & 3 \\ 2 & -3 & 8 & 3 \\ 3 & -4 & 10 & 5 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Виконаємо над матрицею B елементарні перетворення:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 4 & 3 \\ 2 & -3 & 8 & 3 \\ 3 & -4 & 10 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В отриманій матриці є не рівні нулю мінори третього порядку, наприклад, $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 4$, а всі мінори четвертого порядку дорівнюють нулю.

Тому $r(B) = 3$.

Тема 3. Розв'язування систем лінійних рівнянь за формулами Крамера, матричним способом та методом Гаусса

Розглянемо систему n лінійних рівнянь з n невідомими. Нехай $n=3$.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \tag{1}$$

Якщо визначник системи $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$, то система має єдиний розв'язок, який знаходиться за формулами Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta},$$

де $\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$, $\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$.

Аналогічно розв'язують системи при $n > 3$.

Задача 1. Розв'язати систему за формулами Крамера:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -2, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = -3. \end{cases}$$

Розв'язання.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 6 + 6 - 6 - 27 - 1 + 8 = -14;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -2 & -2 & 3 \\ 3 & 3 & -1 \\ -3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -12 - 6 - 9 + 27 + 12 + 2 = 14;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 6 + 6 - 18 - 27 + 8 - 3 = -28;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -9 + 4 - 18 + 18 - 12 + 3 = -14.$$

$$x_1 = \frac{14}{-14} = -1,\ x_2 = \frac{-28}{-14} = 2,\ x_3 = \frac{-14}{-14} = 1.$$

Запишемо систему (1) в матричній формі

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Система (1) набуде вигляду:

$$AX = B. \qquad (2)$$

Якщо $\Delta = \det A \neq 0$, то матриця A має обернену матрицю A^{-1}.

Розв’язок системи отримаємо у вигляді:

$$X = A^{-1}B. \qquad (3)$$

Задача 2. Розв’язати попередню систему рівнянь матричним способом.

Розв’язання. Введемо позначення:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & 3 & -1\\ 3 & -1 & 2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-2\\ 3\\ -3\end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}.$$

Оскільки $\Delta=\det A=-14$, то матриця A має обернену матрицю A^{-1}. Знайдемо A^{-1}.

$$A_{11}=\begin{vmatrix}3 & -1\\ -1 & 2\end{vmatrix}=5;\ A_{12}=-\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & 2\end{vmatrix}=-7;\ A_{13}=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & -1\end{vmatrix}=-11;$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}-2 & 3\\ -1 & 2\end{vmatrix}=1;\ A_{22}=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 3 & 2\end{vmatrix}=-7;\ A_{23}=-\begin{vmatrix}1 & -2\\ 3 & -1\end{vmatrix}=-5;$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}-2 & 3\\ 3 & -1\end{vmatrix}=-7;\ A_{32}=-\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\end{vmatrix}=7;\ A_{33}=\begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & 3\end{vmatrix}=7.$$

$$A^{-1}=-\frac{1}{14}\begin{pmatrix}5 & 1 & -7\\ -7 & -7 & 7\\ -11 & -5 & 7\end{pmatrix}.$$

За формулою (3) отримуємо розв’язок системи

$$X=-\frac{1}{14}\begin{pmatrix}5 & 1 & -7\\ -7 & -7 & 7\\ -11 & -5 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\ 3\\ -3\end{pmatrix}=-\frac{1}{14}\begin{pmatrix}-10+3+21\\ 14-21-21\\ 22-15-21\end{pmatrix}=-\frac{1}{14}\begin{pmatrix}14\\ -28\\ -14\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}.$$

Отже, $x_1=-1,\ x_2=2,\ x_3=1$.

Метод Гаусса полягає в послідовному вилученні невідомих і ґрунтується на елементарних перетвореннях системи рівнянь. Елементарні перетворення системи лінійних рівнянь відповідають елементарним перетворенням матриці за умови, що вони виконуються лише над рядками матриці.

Задача 3. Розв'язати систему рівнянь методом Гауса:

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2, \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5, \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3. \end{cases}$$

Розв'язання. Виконаємо елементарні перетворення над рядками розширеної матриці системи

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 & 4 & 2 \\ 7 & -4 & 1 & 3 & 5 \\ 5 & 7 & -4 & -6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Перший рядок помножимо на 7 і віднімемо від потроєного другого рядка, потім перший рядок помножимо на 5 і віднімемо від потроєного третього. Отримаємо розширену матрицю еквівалентної системи:

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 23 & -11 & -19 & 1 \\ 0 & 46 & -22 & -38 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 23 & -11 & -19 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Останню матрицю ми одержали, віднявши від третього рядка попередньої матриці її подвоєний другий рядок. Таким чином задана система еквівалентна системі, третє рівняння якої має вигляд:

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = -3.$$

Оскільки $0 \neq -3$, то задана система несумісна.

Задача 4. Розв’язати систему рівнянь методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -3, \\ x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0, \\ -x_1 + 4x_2 + x_3 = 3, \\ 3x_1 + x_2 - 13x_3 = -6. \end{cases}$$

Розв’язання. Від другого рядка віднімемо перший, до третього рядка додамо другий, а від третього рядка віднімемо потроєний перший:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -3 \\ 1 & 3 & -5 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -13 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -3 \\ 0 & 5 & -2 & 3 \\ 0 & 7 & -4 & 3 \\ 0 & 7 & -4 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -3 \\ 0 & 5 & -2 & 3 \\ 0 & 7 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Другий рядок помножимо на 7, третій помножимо на -5 і додамо отримані рядки; отримаємо:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -3 \\ 0 & 5 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -3 \\ 0 & 5 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отже, задана система еквівалентна системі трикутного вигляду

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -3, \\ 5x_2 - 2x_3 = 3, \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

і має єдиний розв’язок.

$x_3 = 1;\ 5x_2 = 2x_3 + 3;\ x_2 = 1;$

$x_1 = 2x_2 + 3x_3 - 3;\ x_1 = 2.$

Таким чином, $x_1 = 2;\ x_2 = 1;\ x_3 = 1.$

Задача 5. Розв’язати систему рівнянь методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 1, \\ x_1 + 3x_2 - 13x_3 + 22x_4 = -1, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 4. \end{cases}$$

Розв’язання. Від другого рядка розширеної матриці системи віднімемо перший, від третього рядка віднімемо потроєний перший, а від четвертого – віднімемо подвоєний перший рядок:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & -13 & 22 & -1 \\ 3 & 5 & 1 & -2 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & -7 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -10 & 17 & -2 \\ 0 & -1 & 10 & -17 & 2 \\ 0 & -1 & 10 & -17 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -10 & 17 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задана система еквівалентна системі трапецієподібного вигляду

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 1, \\ x_2 - 10x_3 + 17x_4 = -2 \end{cases}$$

і має безліч розв’язків.

З останньої системи знаходимо

$x_2 = 10x_3 - 17x_4 - 2$,

$x_1 = -17x_3 + 29x_4 + 5$.

Невідомі x_3, x_4 можуть приймати довільні значення, тому покладемо: $x_3 = C_1, x_4 = C_2$.

Отже, розв’язки заданої системи мають вигляд:

$x_1 = 5 - 17C_1 + 29C_2$,

$x_2 = -2 + 10C_1 - 17C_2$,

$x_3 = C_1, x_4 = C_2$, де C_1 та C_2 – довільні дійсні числа.

Тема 4. Теорема Кронекера-Капеллі. Однорідна система лінійних рівнянь

Розглянемо систему m лінійних рівнянь з n невідомими. Відповідь на запитання про існування розв'язків такої системи дає теорема Кронекера-Капеллі: для того, щоб система m лінійних рівнянь з n невідомими була сумісною, необхідно і достатньо, щоб ранг її основної матриці дорівнював рангу розширеної матриці.

При цьому, якщо ранг основної матриці дорівнює рангу розширеної матриці і дорівнює кількості невідомих, то система має єдиний розв'язок, а якщо ранг основної матриці дорівнює рангу розширеної матриці, але менший від кількості невідомих, то система має безліч розв'язків.

Задача 1. Дослідити на сумісність систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - 5x_4 = 4, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 1, \\ 6x_1 - x_2 + 4x_3 - 11x_4 = 6. \end{cases}$$

Розв'язання. Визначимо ранги основної та розширеної матриць системи. Запишемо розширену матрицю $\bar{A}$ системи і відокремимо вертикальною прямою елементи основної матриці A від вільних членів системи.

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -5 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 6 & -1 & 4 & -11 & 6 \end{array} \right).$$

Віднімемо від другого рядка матриці $\bar{A}$ перший, а від третього рядка – потроєний перший рядок:

$$\bar{A} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -5 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & -6 \end{array} \right).$$

Віднімемо від третього рядка отриманої матриці її другий рядок:

$$\overline{A} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -5 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right).$$

Ранг матриці A дорівнює 2, а ранг розширеної матриці $\overline{A}$ дорівнює 3, оскільки найвищий порядок не рівних нулю мінорів матриці A дорівнює 2, а матриці $\overline{A}$ – дорівнює 3.

Отже, задана система несумісна.

Задача 2. Дослідити на сумісність систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5. \end{cases}$$

Розв'язання. Знайдемо ранги основної та розширеної матриць системи:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 14 \\ 2 & 3 & -1 & 5 \end{array}\right).$$

Віднімемо від другого та третього рядків перший, а від четвертого – подвоєний перший рядок:

$$\overline{A} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 11 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right).$$

Віднімемо від третього рядка четвертий рядок, а потім від одержаного третього рядка віднімемо другий рядок, помножений на 4:

$$\bar{A} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Останню матрицю ми отримали переставляючи місцями рядки попередньої матриці.

Таким чином, ранг основної матриці A дорівнює рангу розширеної матриці $\bar{A}$ і дорівнює 3. Тому система сумісна. Оскільки число невідомих також дорівнює 3, то система має єдиний розв'язок.

Для знаходження рангів ми виконували елементарні перетворення лише над рядками основної та розширеної матриць системи. Тому одержали розширену матрицю еквівалентної системи:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3, \\ x_2 - x_3 = -1 \\ \quad x_3 = 3. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, отримаємо розв'язок заданої системи лінійних рівнянь:

$$x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3.$$

Розглянемо однорідну систему m лінійних рівнянь з n невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0, \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = 0, \end{cases}$$

Ця система завжди сумісна, бо завжди має нульовий розв'язок: $x_1 = 0, x_2 = 0, ..., x_n = 0$.

Якщо ранг основної матриці A системи дорівнює кількості невідомих, то однорідна система має єдиний розв'язок (нульовий); якщо ранг матриці A менший від кількості невідомих, то однорідна система має безліч розв'язків.

Нехай $m = n$. Для того, щоб однорідна система n рівнянь з n невідомими мала ненульові розв'язки, необхідно і достатньо, щоб визначник цієї системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

Задача 3. Розв'язати однорідну систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Визначник системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & -4 \end{vmatrix} = -4 + 9 + 30 - 9 - 24 + 5 = 7 \neq 0,$$

Тому система має єдиний розв'язок:

$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$.

Задача 4. Розв’язати однорідну систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 - 3x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Розв’язання. Визначник системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 4 & -2 & -3 & -1 \\ 2 & -4 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 3 & -3 & -1 & 0 \\ 3 & -3 & -1 & 0 \\ 3 & -3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 .$$

Тому система має безліч розв’язків.

Застосуємо метод Гаусса.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & -3 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 3 & -3 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 3 & -3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отримали систему рівнянь, яка еквівалентна заданій системі.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

З цієї системи знаходимо

$$x_3 = 3x_1 - 3x_2 ,$$

$$x_4 = -5x_1 + 7x_2 .$$

Отже, розв’язки заданої однорідної системи мають вигляд:

$x_1 = C_1;\ x_2 = C_2;\ x_3 = 3C_1 - 3C_2;\ x_4 = -5C_1 + 7C_2$, де C_1, C_2 – довільні дійсні числа.

Задача 5. Розв'язати однорідну систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + 6x_2 + 5x_3 = 0, \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Застосуємо метод Гаусса. Вилучимо x_1 з усіх рівнянь, крім першого:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 5 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 4 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отримали систему рівнянь, яка еквівалентна заданій:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

З цієї системи знаходимо:

$$x_2 = -\frac{2}{3}x_3, \; x_1 = -\frac{1}{3}x_3.$$

Отже, система має безліч розв'язків:

$x_1 = -\dfrac{C_1}{3}$, $x_2 = -\dfrac{2C_1}{3}$, $x_3 = C_1$, де C_1 – довільне дійсне число.

Завдання розрахункової роботи

ВАРІАНТ № 1

1. Обчислити визначники:

а) $\begin{vmatrix} a-b & a \\ -2b & a-b \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 6 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 7 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 4 & 8 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$.

2. Дано матриці: $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, $F=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 6 & -1 & 1 \end{pmatrix}$,

$G=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 7 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $L=\begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$, E – одинична. Виконати дії: а) $4A-2B^T+E$; б) $7FG$; в) $L^T F$.

3. Знайти $f(A)$, якщо $f(x)=4x^2-1$ а) $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, б) $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Знайти ранг матриці A, якщо $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -5 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

5. Розв’язати лінійну систему: а) за формулами Крамера; б) матричним методом; в) методом Гаусса (Жордана-Гаусса):

$$\begin{aligned} &-x_1-x_2+3x_3=-3, \\ &5x_1-x_2+x_3=-1, \\ &-2x_1+x_3=-1. \end{aligned}$$

6. Використовуючи метод Гаусса, розв’язати системи рівнянь:

а) $\begin{aligned} &2x_1+5x_2-x_3-x_4=0, \\ &-3x_1+x_2-4x_3+x_4=7, \\ &x_1-x_2+x_3-3x_4=1, \\ &-3x_1-4x_2+4x_4=5; \end{aligned}$ б) $\begin{aligned} &x_1+x_2+x_3+x_4=7, \\ &-2x_1-x_2-x_3+2x_4=5, \\ &4x_1+4x_2+x_3=-2. \end{aligned}$

7. Розв’язати лінійні однорідні системи:

а) $\begin{aligned} &2x_1-3x_2+x_3=0, \\ &3x_1+4x_2-x_3=0, \\ &x_1+x_2-6x_3=0, \end{aligned}$ б) $\begin{aligned} &-2x_1-x_2-x_3+3x_4=0, \\ &x_1+x_2-2x_3-4x_4=0, \\ &3x_1+2x_2+5x_4=0. \end{aligned}$

ВАРІАНТ № 2

1. Обчислити визначники:

а) $\begin{vmatrix} tg\alpha & 1 \\ -1 & tg\alpha \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

2. Дано матриці: $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix}$,

$G = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 4 & -3 \end{pmatrix}$, E – одинична. Виконати дії: а) $5A^T - 4(C+E)$; б) $2DG + C^2$; в) $3C^T K^T$.

3. Знайти $f(A)$, якщо $f(x) = x^2 - 3x + 2$ і а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$, б)

$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 7 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

4. Знайти ранг матриці A, якщо $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 7 & -3 \\ 6 & -3 & -21 & 9 \\ -4 & 2 & 14 & -2 \end{pmatrix}$.

5. Розв'язати лінійну систему: а) за формулами Крамера; б) матричним методом; в) методом Гаусса (Жордана-Гаусса):

$$\begin{aligned} &3x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 1, \\ &5x_1 + 9x_2 + x_3 = 6, \\ &x_2 + 3x_3 = 3. \end{aligned}$$

6. Використовуючи метод Гаусса, розв'язати системи рівнянь:

а) $\begin{aligned} &10x_1 - 9x_2 + x_3 - 3x_4 = 2, \\ &-x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ &3x_1 - 7x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ &x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 5; \end{aligned}$ б) $\begin{aligned} &-3x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0, \\ &3x_1 + x_2 + x_3 - 4x_4 = -2, \\ &x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 7. \end{aligned}$

7. Розв'язати лінійні однорідні системи:

а) $\begin{aligned} &2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ &-2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0, \\ &x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \end{aligned}$ б) $\begin{aligned} &-4x_1 - 3x_2 + 5x_3 + x_4 = 0, \\ &x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ &2x_1 - x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0. \end{aligned}$

ВАРІАНТ № 3

1. Обчислити визначники:

а) $\begin{vmatrix} a^2-ab+b^2 & b^2 \\ b & a+b \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 7 \\ -1 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 12 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 & 7 \\ 2 & 11 & 1 & -1 \\ 9 & 6 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

2. Дано матриці: $D=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $G=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $F=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$,

$L=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Виконати дії: а) $D+2G^T$; б) $3GD+L^2$; в) $G^T F$.

3. Знайти $f(A)$, якщо $f(x)=3x^2-2x+11$ і а) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, б)

$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Знайти ранг матриці A, якщо $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Розв'язати лінійну систему: а) за формулами Крамера; б) матричним методом; в) методом Гаусса (Жордана-Гаусса):

$$x_1+2x_2-x_3=4,$$
$$2x_1+x_2+2x_3=6,$$
$$-2x_1+3x_2+2x_3=6.$$

6. Використовуючи метод Гаусса, розв'язати системи рівнянь:

а) $\begin{aligned} x_1+x_2-3x_3+4x_4&=2, \\ 2x_1-x_2-3x_3+x_4&=3, \\ x_1+x_2-x_3+x_4&=3, \\ 3x_1+3x_2-4x_3-x_4&=1; \end{aligned}$ б) $\begin{aligned} x_1+x_2-x_3-x_4+x_5&=3, \\ 2x_1-3x_2+x_3+x_4+5x_5&=2, \\ 3x_1-3x_2+5x_4-x_5&=1. \end{aligned}$

7. Розв'язати лінійні однорідні системи:

а) $\begin{aligned} 3x_1-4x_2+x_3&=0, \\ 7x_1-x_2-x_3&=0, \\ 4x_1+x_2+x_3&=0, \end{aligned}$ б) $\begin{aligned} x_1-x_2+3x_3+x_4&=0, \\ 2x_1-3x_2+x_3-x_4&=0, \\ -x_1-x_2-x_3+2x_4&=0. \end{aligned}$

ВАРІАНТ № 4

1. Обчислити визначники:

а) $\begin{vmatrix} 1 & \sin\alpha \\ \sin\alpha & 1 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 7 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 7 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & 4 & 9 \end{vmatrix}$.

2. Дано матриці: $A=\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$,

$G=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$, $K=\begin{pmatrix} 7 & 1 \end{pmatrix}$, E – одинична. Виконати дії: а)

$\left(A+2C\right)^T - E$; б) DGA; в) $3KA^T$.

3. Знайти $f(A)$, якщо $f(x)=7x^3+2$ і а) $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, б)

$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Знайти ранг матриці A, якщо $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 9 & -20 \\ 1 & -11 & 2 & 13 \\ 9 & -15 & 8 & 5 \end{pmatrix}$.

5. Розв’язати лінійну систему: а) за формулами Крамера; б) матричним методом; в) методом Гаусса (Жордана-Гаусса):

$$\begin{aligned} &3x_1+2x_2+5x_3=10, \\ &2x_1+2x_2+x_3=5, \\ &3x_1-x_2-x_3=1. \end{aligned}$$

6. Використовуючи метод Гаусса, розв’язати системи рівнянь:

а) $\begin{aligned} &2x_1+3x_2-x_3-x_4=1, \\ &-x_1-x_2+4x_3-3x_4=7, \\ &x_1+x_2+3x_3+2x_4=11, \\ &3x_1+4x_2+2x_3+x_4=0; \end{aligned}$ б) $\begin{aligned} &6x_1+3x_2-x_3-x_4=0, \\ &x_1-7x_2+4x_3=-5. \end{aligned}$

7. Розв’язати лінійні однорідні системи:

а) $\begin{aligned} &3x_1+2x_2+x_3=0, \\ &-2x_1-x_2-x_3=0, \\ &3x_1+x_2+x_3=0, \end{aligned}$ б) $\begin{aligned} &5x_1-3x_2+x_3+x_4=0, \\ &2x_1+2x_2+x_3-x_4=0, \\ &x_1-x_2-x_3+5x_4=0. \end{aligned}$

ВАРІАНТ № 5

1. Обчислити визначники:

а) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \\ 7 & -1 & 5 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 7 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 3 \\ 6 & 5 & 4 & -2 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$.

2. Дано матриці: $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 9 & 1 \end{pmatrix}$,

$G=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $F=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $K=\begin{pmatrix} -3 & -1 \end{pmatrix}$. Виконати дії: а) $3B-(A+B)^T$; б) $2DG-AB$; в) KDF .

3. Знайти $f(A)$, якщо $f(x)=x^3+5$ і а) $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, б) $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Знайти ранг матриці A, якщо $A=\begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Розв'язати лінійну систему: а) за формулами Крамера; б) матричним методом; в) методом Гаусса (Жордана-Гаусса):

$$\begin{aligned} &5x_1-7x_2+x_3=6, \\ &3x_1+x_2+x_3=4, \\ &-x_1-x_2+2x_3=1. \end{aligned}$$

6. Використовуючи метод Гаусса, розв'язати системи рівнянь:

а) $\begin{aligned} &-x_1-2x_2+7x_3-x_4=0, \\ &2x_1-3x_2+4x_3=6, \\ &-11x_1+x_2+x_3-x_4=-1, \\ &x_1-5x_2+11x_3-x_4=20; \end{aligned}$ б) $\begin{aligned} &x_1-x_2-x_3=16, \\ &-2x_1+x_2+5x_3=7. \end{aligned}$

7. Розв'язати лінійні однорідні системи:

а) $\begin{aligned} &x_1+x_2-x_3=0, \\ &10x_1-3x_2=0, \\ &-x_1+2x_2+2x_3=0, \end{aligned}$ б) $\begin{aligned} &2x_1+3x_2-4x_3+3x_4=0, \\ &x_1+x_2-3x_3-x_4=0, \\ &-3x_1-2x_2+x_3+x_4=0. \end{aligned}$

ВАРІАНТ № 6

1. Обчислити визначники:

а) $\begin{vmatrix} a+b & 2a \\ b & a+b \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 8 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 4 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 6 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

2. Дано матриці: $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$,

$G = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $L = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$, E – одинична. Виконати дії:

а) $3C - 8B^T + E$; б) FGD; в) $L^T G$.

3. Знайти $f(A)$, якщо $f(x) = x^3 - 7$ і а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Знайти ранг матриці A, якщо $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \\ 3 & 5 & 7 & 0 \end{pmatrix}$.

5. Розв’язати лінійну систему: а) за формулами Крамера; б) матричним методом; в) методом Гаусса (Жордана-Гаусса):

$$\begin{aligned} -x_1 - x_2 + 5x_3 &= 2, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= -4, \\ 3x_1 + 5x_2 &= -8. \end{aligned}$$

6. Використовуючи метод Гаусса, розв’язати системи рівнянь:

а) $\begin{aligned} -3x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 &= 5, \\ -2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 &= 7, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 &= 2, \\ -2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 5x_4 &= 1; \end{aligned}$ б) $\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 7, \\ x_1 + x_3 &= 2. \end{aligned}$

7. Розв’язати лінійні однорідні системи:

а) $\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 &= 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 0, \\ 3x_1 - 4x_2 - 3x_3 &= 0, \end{aligned}$ б) $\begin{aligned} -3x_1 - 5x_2 + 3x_3 - 6x_4 &= 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 7x_4 &= 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 &= 0. \end{aligned}$

ВАРІАНТ № 7

1. Обчислити визначники:

а) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 4 & 1 & -1 & -4 \\ 7 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$.

2. Дано матриці: $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

$G=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $L=\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $F=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, E – одинична. Виконати дії:

а) $B-(A+E)^T$; б) $3GD-2F^2$; в) FL.

3. Знайти $f(A)$, якщо $f(x)=-2x^2+7x+5$ і а) $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, б)

$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Знайти ранг матриці A, якщо $A=\begin{pmatrix} 3 & 3 & -4 & -3 \\ 0 & 6 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Розв'язати лінійну систему: а) за формулами Крамера; б) матричним методом; в) методом Гаусса (Жордана-Гаусса):

$$\begin{aligned} 3x_1+2x_2+2x_3&=2, \\ 4x_1+x_2-x_3&=1, \\ x_1+3x_2+8x_3&=3. \end{aligned}$$

6. Використовуючи метод Гаусса, розв'язати системи рівнянь:

а) $\begin{aligned} 3x_1+5x_2-x_3-x_4&=2, \\ x_1+x_2-3x_3-x_4&=11, \\ 2x_1-x_2-x_3-x_4&=0, \\ 3x_1-4x_3-2x_4&=3; \end{aligned}$ б) $\begin{aligned} 7x_1+2x_2-x_3+x_4&=-3, \\ x_1-x_2+4x_3+6x_4&=2. \end{aligned}$

7. Розв'язати лінійні однорідні системи:

а) $\begin{aligned} 3x_1+2x_2-x_3&=0, \\ -x_1-x_2+3x_3&=0, \\ 2x_1+x_2+4x_3&=0, \end{aligned}$ б) $\begin{aligned} 7x_1+2x_2+x_3-x_4&=0, \\ x_1+x_2-2x_3-x_4&=0, \\ -x_1-x_2+2x_3+3x_4&=0. \end{aligned}$

ВАРІАНТ № 8

1. Обчислити визначники:

а) $\begin{vmatrix} a^2+b^2 & b^2 \\ -b^2 & a^2-b^2 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 18 & 6 & -1 \end{vmatrix}$.

2. Дано матриці: $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$,

$D=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $G=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$, $L=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, E – одинична. Виконати дії:

а) $3A-2B^T+E$; б) $DG-2C^2$; в) $2DL$.

3. Знайти $f(A)$, якщо $f(x)=x^2-4x+3$ і а) $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, б)

$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Знайти ранг матриці A, якщо $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & 2 \\ 3 & 7 & -2 & 5 \\ -1 & 5 & -3 & 13 \end{pmatrix}$.

5. Розв’язати лінійну систему: а) за формулами Крамера; б) матричним методом; в) методом Гаусса (Жордана-Гаусса):

$$\begin{aligned} &2x_1+5x_2-3x_3=4, \\ &3x_1+x_2-4x_3=0, \\ &2x_1+x_2+x_3=4. \end{aligned}$$

6. Використовуючи метод Гаусса, розв’язати системи рівнянь:

а) $\begin{aligned} &2x_1+2x_2-x_3+x_4=5, \\ &x_1-x_2+3x_3-x_4=0, \\ &2x_1-3x_2+4x_3=0, \\ &3x_1+2x_2+x_3+x_4=2; \end{aligned}$ б) $\begin{aligned} &2x_1+3x_2-3x_3+x_4=0, \\ &x_1+x_2-x_3-x_4=2, \\ &3x_1-x_2+x_4=5. \end{aligned}$

7. Розв’язати лінійні однорідні системи:

а) $\begin{aligned} &2x_1+x_2-x_3=0, \\ &3x_1-x_2-x_3=0, \\ &x_1+4x_2+5x_3=0, \end{aligned}$ б) $\begin{aligned} &x_1+x_2-3x_3+7x_4=0, \\ &3x_1+x_2-x_3+4x_4=0, \\ &4x_1+2x_2+x_3-3x_4=0. \end{aligned}$

ВАРІАНТ № 9

1. Обчислити визначники:

а) $\begin{vmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 7 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 6 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 7 & -1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$.

2. Дано матриці: $B = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$,

$G = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 0 & 8 \end{pmatrix}$, $L = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -3 \\ -5 & 7 & 1 \end{pmatrix}$, E – одинична.

Виконати дії: а) $2B^T - 3C$; б) $F(5E - GD)$; в) $K^T L^T$.

3. Знайти $f(A)$, якщо $f(x) = 5x^3 + 1$ і а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, б)

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Знайти ранг матриці A, якщо $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 & 7 \\ 5 & 2 & 3 & 7 \\ 9 & 7 & 2 & 6 \end{pmatrix}$.

5. Розв'язати лінійну систему: а) за формулами Крамера; б) матричним методом; в) методом Гаусса (Жордана-Гаусса):

$$-2x_1 - 2x_2 + x_3 = 4,$$
$$x_1 + x_2 - 5x_3 = -2,$$
$$3x_1 - x_2 + 7x_3 = -2.$$

6. Використовуючи метод Гаусса, розв'язати системи рівнянь:

а) $\begin{aligned} 3x_1 - 5x_2 + x_3 - x_4 &= 5, \\ -x_1 - x_2 + 3x_3 - 4x_4 &= 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 6x_3 &= -1, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 - 4x_4 &= -1; \end{aligned}$ б) $\begin{aligned} 7x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 &= 7, \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 + x_4 &= 3, \\ -x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 &= 0. \end{aligned}$

7. Розв'язати лінійні однорідні системи:

а) $\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 &= 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 0, \end{aligned}$ б) $\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= 0, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 5x_4 &= 0, \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 &= 0. \end{aligned}$

ВАРІАНТ № 10

1. Обчислити визначники:

а) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 7 & 1 & 5 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & 1 \\ -2 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

2. Дано матриці: $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix}$,

$G = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, E – одинична.

Виконати дії: а) $2B - E + 3C^T$; б) $(F - 2E)G - D^T$; в) $2BK^T$.

3. Знайти $f(A)$, якщо $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ і а) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, б)

$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$.

4. Знайти ранг матриці A, якщо $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 8 \\ 1 & -1 & 2 & 4 \\ 3 & 7 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

5. Розв'язати лінійну систему: а) за формулами Крамера; б) матричним методом; в) методом Гаусса (Жордана-Гаусса):

$$\begin{aligned} -3x_1 - 2x_2 + x_3 &= -5, \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 2, \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 &= 0. \end{aligned}$$

6. Використовуючи метод Гаусса, розв'язати системи рівнянь:

а) $\begin{aligned} -3x_1 - 2x_2 + 4x_3 + x_4 &= 9, \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= 3, \\ -2x_1 - 2x_2 - x_3 &= 0, \\ x_1 + x_2 + x_4 &= -5; \end{aligned}$ б) $\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 5x_4 &= 3, \\ -3x_1 - 3x_2 - 3x_3 + x_4 &= 7, \\ x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 &= 2. \end{aligned}$

7. Розв'язати лінійні однорідні системи:

а) $\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 &= 0, \\ -x_1 - x_2 - x_3 + x_4 &= 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 &= 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 &= 0. \end{aligned}$ б) $\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 &= 0, \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 &= 0, \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 &= 0. \end{aligned}$