

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ТЕРНОПІЛЬСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ІВАНА ПУЛЮЯ**

Кафедра вищої математики

**Практичні заняття
із
ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ**

Частина 3: аналітична геометрія

**ТЕРНОПІЛЬ
2014 р.**

УДК 517.2
ББК 22.161.6
Г12

Укладач
Г. В. Габрусєв

Рецензент
Лотоцький В. А.,
к.ф.-м.н., доц., зав. каф. математики
і методики її навчання ТНПУ ім. В. Гнатюка

Затверджено на засіданні кафедри вищої математики.
Протокол № 8 від «27» лютого 2014 р.

Схвалено та рекомендовано до друку науково-методичною радою
Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя.
Протокол № 6 від «13» березня 2014 р.

Г12 Г.В. Габрусєв. Практичні заняття із вищої математики (частина 3 :
аналітична геометрія) – Тернопіль : Вид-во ТНТУ імені Івана Пулюя,
2014. – 59 с.

© Габрусєв Г. В.
© Вид-во ТНТУ імені Івана Пулюя, 2014

ЗМІСТ

Тема 1. Лінії на площині та їх рівняння. Пряма лінія на площині. Різні види рівнянь прямої. Кут між двома прямими. Відстань від точки до прямої.....	4
Тема 2. Лінії другого порядку. Коло. Еліпс і гіпербола, їх канонічні рівняння та властивості	9
Тема 3. Парабола, її канонічне рівняння і властивості. Зведення загального рівняння кривої другого порядку до канонічного виду	14
Тема 4. Задання ліній в полярних координатах. Параметричне задання ліній	19
Тема 5. Поверхня та її рівняння. Площина. Різні види рівнянь площини. Кут між двома площинами. Відстань від точки до площини.....	22
Тема 6. Пряма лінія в просторі. Різні види рівнянь прямої в просторі. Кут між двома прямими	26
Тема 7. Пряма і площина	30
Тема 8. Поверхні другого порядку.....	35
Завдання розрахункової роботи.....	40
<i>ВАРІАНТ № 1</i>	<i>40</i>
<i>ВАРІАНТ № 2</i>	<i>42</i>
<i>ВАРІАНТ № 3</i>	<i>44</i>
<i>ВАРІАНТ № 4</i>	<i>46</i>
<i>ВАРІАНТ № 5</i>	<i>48</i>
<i>ВАРІАНТ № 6</i>	<i>50</i>
<i>ВАРІАНТ № 7</i>	<i>52</i>
<i>ВАРІАНТ № 8</i>	<i>54</i>
<i>ВАРІАНТ № 9</i>	<i>56</i>
<i>ВАРІАНТ № 10</i>	<i>58</i>

Тема 1. Лінії на площині та їх рівняння. Пряма лінія на площині. Різні види рівнянь прямої. Кут між двома прямими. Відстань від точки до прямої

Задача 1. Скласти рівняння лінії, сума квадратів відстаней кожної точки якої до точок $A(-1;0)$ і $B(1;0)$ дорівнює 4.

Розв'язання. Нехай точка $M(x;y)$ лежить на лінії, тоді за умовою $AM^2 + BM^2 = 4$. Оскільки $AM^2 = (x+1)^2 + y^2$, $BM^2 = (x-1)^2 + y^2$, то $(x+1)^2 + y^2 + (x-1)^2 + y^2 = 4$, звідки після спрощень дістаємо шукане рівняння: $x^2 + y^2 = 1$.

Задача 2. Скласти рівняння лінії, кожна точка якої розміщена від точки $A(1;2)$ в два рази даліше, ніж від точки $B(-2;0)$.

Розв'язання. Позначимо змінну точку лінії через $M(x;y)$, тоді за умовою $AM = 2BM$, тобто

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} = 2\sqrt{(x+2)^2 + y^2}.$$

Перетворюючи це рівняння, отримаємо

$$3x^2 + 3y^2 + 18x + 4y + 11 = 0.$$

Задача 3. Знайти кут між прямими $3x - 4y + 1 = 0$ і $5x - 12y + 3 = 0$.

Розв'язання. За формулою $\cos \varphi = \frac{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$ маємо

$$\cos \varphi = \frac{3 \cdot 5 + (-4) \cdot (-12)}{\sqrt{3^2 + (-4)^2} \sqrt{5^2 + (-12)^2}} = \frac{15 + 48}{5 \cdot 13} = \frac{63}{65} \approx 0,96, \quad \varphi = \arccos 0,96.$$

Задача 4. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $(-8; 1)$ паралельно до прямої $2x - y + 7 = 0$.

Розв'язання. Приведемо задане рівняння до вигляду: $y = 2x - 7$, отже, кутовий коефіцієнт прямої $k = 2$.

Оскільки шукана і задана прямі паралельні, то їхні кутові коефіцієнти рівні між собою, тому, отримаємо $y - 1 = 2(x + 8)$ або $y - 2x - 17 = 0$.

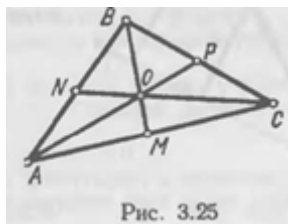
Задача 5. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M_1(2; -1)$ перпендикулярно до прямої $4x + 2y - 5 = 0$.

Розв'язання. Приведемо задане рівняння до вигляду $y = kx + b$; $y = -2x + \frac{5}{2}$. Отже, кутовий коефіцієнт заданої прямої $k = -2$. Оскільки шукана і задана прямі перпендикулярні, то кутовий коефіцієнт k_1 шуканої прямої знаходимо з умови перпендикулярності прямих: $k_1 = -\frac{1}{k}$, тобто

$$k_1 = \frac{1}{2}.$$

Рівняння шуканої прямої запишемо у вигляді: $y - y_1 = k_1(x - x_1)$, тобто $y + 1 = \frac{1}{2}(x - 2)$ або $x - 2y - 4 = 0$.

Задача 6. Медіани BM і CN (рис. 3.25) трикутника ABC лежать на прямих $x + y = 3$ і $2x + 3y = 1$, а точка $A(1;1)$ – вершина трикутника. Скласти рівняння прямої BC .



Розв'язання. Розв'язуючи систему рівнянь $\begin{cases} x + y = 3; \\ 2x + 3y = 1, \end{cases}$ знаходимо точку перетину медіан: $O(8; -5)$. З відношення $\frac{AO}{OP} = \frac{2}{1} = \lambda$ і формул для знаходження координат точки поділу відрізка у відношенні λ одержимо координати точки P : $8 = \frac{1 + 2x_P}{1 + 2}$, $-5 = \frac{1 + 2y_P}{1 + 2}$; $x_P = \frac{23}{2}$, $y_P = -8$. Оскільки точки B і C лежать на заданих прямих, то їхні координати задовольняють задані рівняння. Точка P ділить відрізок BC навпіл, отже, маємо систему рівнянь

$$\frac{x_B + x_C}{2} = \frac{23}{2}; \frac{y_B + y_C}{2} = -8; x_B + y_B = 3; 2x_C + 3y_C = 1,$$

звідки $x_C = 11$, $y_C = -7$. Пряма BC проходить через точки $P\left(\frac{23}{2}; -8\right)$ і

$C(11; -7)$, тому за формулою $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$ дістанемо $\frac{x - 23/2}{11 - 23/2} = \frac{y + 8}{-7 + 8}$

або $2x + y - 15 = 0$.

Задача 7. Знайти точку Q , яка симетрична до точки $P(-2;4)$ відносно прямої, що проходить через $M_1(1;5)$ і $M_2(2;2)$.

Розв'язання. Симетричні точки P і Q лежать на перпендикулярі до прямої M_1M_2 на однаковій відстані від неї.

Складемо рівняння прямої M_1M_2 у вигляді: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$;

$$\frac{x-1}{2-1} = \frac{y-5}{2-5}, \text{ тобто } 3x + y - 8 = 0.$$

Кутовий коефіцієнт прямої M_1M_2 $k_1 = -3$. Кутовий коефіцієнт перпендикулярної до неї прямої $k_2 = -\frac{1}{k_1} = \frac{1}{3}$. Рівняння перпендикуляра

знайдемо за формулою: $y - 4 = \frac{1}{3}(x + 2)$ або $x - 3y + 14 = 0$.

Знайдемо тепер точку N перетину прямої M_1M_2 з перпендикуляром, розв'язуючи систему рівнянь:
$$\begin{cases} 3x + y - 8 = 0; \\ x - 3y + 14 = 0. \end{cases}$$
 Отримаємо $x = 1, y = 5$, тобто $N(1;5)$.

Точка N є серединою відрізка PQ . Координати точок N, P, Q зв'язані формулами:

$$x_N = \frac{x_P + x_Q}{2}, y_N = \frac{y_P + y_Q}{2}.$$

Отже, $1 = \frac{-2 + x_Q}{2}, 5 = \frac{4 + y_Q}{2}$, звідки одержуємо $x_Q = 4, y_Q = 6$, тобто $Q(4;6)$.

Задача 8. Знайти площу квадрата, дві сторони якого лежать на прямих $4x - 3y - 10 = 0$ і $8x - 6y + 15 = 0$.

Розв'язання. Оскільки задані прямі паралельні, то довжину d сторони квадрата можна знайти як відстань від довільної точки однієї прямої до другої прямої.

Знайдемо яку-небудь точку на першій прямій. Нехай, наприклад, $x = 1$, тоді $4 \cdot 1 - 3y - 10 = 0$, звідки $y = -2$. Отже, точка $M_0(1; -2)$ належить першій прямій.

За формулою $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ знайдемо відстань від точки M_0 до другої прямої:

$$d = \frac{|8 \cdot 1 - 6 \cdot (-2) + 15|}{\sqrt{8^2 + (-6)^2}} = \frac{7}{2}.$$

$$\text{Площа квадрата } S = d^2 = \frac{49}{4}.$$

Задача 9. Дано трикутник з вершинами $A(-3; 0), B(3; -2), C(1; 4)$. Знайти довжину перпендикуляра опущеного з вершини C на медіану, проведену з вершини B .

Розв'язання. Точка D перетину медіани зі стороною AC ділить відрізок AC навпіл. Тому $x_D = \frac{-3+1}{2} = -1$; $y_D = \frac{0+4}{2} = 2$.

Складемо рівняння медіани BD як прямої, що проходить через точки $B(3; -2)$ і $D(-1; 2)$: $\frac{x-3}{-1-3} = \frac{y+2}{2+2}$. Отримаємо $x + y - 1 = 0$. Довжина перпендикуляра, опущеного з точки C на медіану, дорівнює відстані від точки $C(1; 4)$ до прямої $x + y - 1 = 0$, тобто $d = \frac{|1+4-1|}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$.

Тема 2. Лінії другого порядку. Коло. Еліпс і гіпербола, їх канонічні рівняння та властивості

Задача 1. Написати рівняння кола, якщо точки $A(-1;4)$ і $B(3;2)$ є кінцями його діаметра.

Розв'язання. Нехай $O_1(a;b)$ – центр кола. Тоді $AO_1 = O_1B$, тому за формулами (25) (векторна алгебра) маємо

$$a = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-1+3}{2} = 1, \quad b = 3$$

Оскільки радіус кола $R = AO_1 = \sqrt{5}$, то за формулою $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ отримаємо шукане рівняння: $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 5$.

Задача 2. Знайти центр і радіус кола $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 23 = 0$.

Розв'язання. Згрупуємо доданки із змінною x та змінною y і доповнимо одержані вирази до повних квадратів

$$x^2 + 4x + y^2 - 6y - 23 = 0,$$

або

$$(x^2 + 4x + 4) - 4 + (y^2 - 6y + 9) - 9 - 23 = 0,$$

звідки

$$(x+2)^2 + (y-3)^2 = 36.$$

Отже, точка $(-2;3)$ – центр кола, а $R = 6$ – його радіус.

Задача 3. Показати, що рівняння $x^2 + y^2 + 6x - 6y + 19 = 0$ не визначає ніякого геометричного об'єкта.

Розв'язання. Перетворимо рівняння

$$(x^2 + 6x + 9) - 9 + (y^2 - 6y + 9) - 9 + 19 = 0$$

$$\text{або } (x+3)^2 + (y-3)^2 = -1.$$

Оскільки сума невід'ємних чисел не може бути від'ємним числом, то задане рівняння не задовольняють координати жодної точки площини Oxy .

Задача 4. Арка має форму дуги кола. Знайти довжину l дуги арки, якщо її проліт і підйом відповідно дорівнюють $2a$ і b . (Підйом арки дорівнює відношенню її висоти до прольоту.)

Розв'язання. Введемо систему координат Oxy так, як показано на рис. 3.43, де арка MPN – дуга кола, $MO = ON$, $OP = h = 2ab$. В обраній системі координат точки M, P і N мають координати $M(-a; 0)$, $P(0; 2ab)$, $N(a; 0)$. Нехай $O_1(0; y_0)$ і R відповідно центр і радіус кола, тоді його рівняння має вигляд

$$x^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

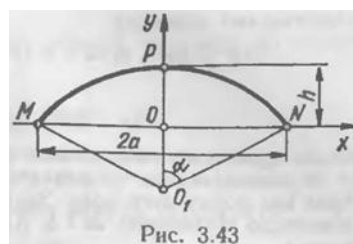


Рис. 3.43

Оскільки коло проходить через точки P і N , то

$$(2ab - y_0)^2 = R^2; \quad a^2 + y_0^2 = R^2,$$

звідки

$$R = \frac{(4b^2 + 1)a}{4b}; \quad y_0 = \frac{(4b^2 - 1)a}{4b}.$$

Знайдемо центральний кут $2\alpha = \angle MO_1N$, на який спирається дуга арки.

Маємо

$$\cos \alpha = \frac{|y_0|}{R} = \frac{|4b^2 - 1|}{4b^2 + 1}, \text{ тому } 2\alpha = 2\arccos \frac{|4b^2 - 1|}{4b^2 + 1},$$

отже,

$$l = 2R\alpha = \frac{(4b^2 + 1)a}{2b} \arccos \frac{|4b^2 - 1|}{4b^2 + 1}.$$

Задача 5. Скласти канонічне рівняння еліпса, який проходить через точки $M_1(3;2)$ і $M_2\left(4;\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$, якщо фокуси його лежать на осі Ox симетрично відносно початку координат.

Розв'язання. За умовою координати заданих точок задовольняють рівняння $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$:

$$\frac{16}{a^2} + \frac{8}{9b^2} = 1, \quad \frac{9}{a^2} + \frac{4}{b^2} = 1.$$

Розв'язуючи цю систему рівнянь, знаходимо $a^2 = 18$ і $b^2 = 8$. Отже, шукане рівняння має вигляд

$$\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{8} = 1.$$

Задача 6. Скласти канонічне рівняння еліпса, фокуси якого розміщені на осі Ox симетрично відносно початку координат, якщо відстань між фокусами дорівнює 14, а ексцентриситет дорівнює $7/9$.

Розв'язання. Оскільки $2c = 14$, то $c = 7$. З формул $\varepsilon = \frac{c}{a}$ і $a^2 - c^2 = b^2$ одержуємо, що $a = 9$ і $b^2 = 32$. Отже, шукане рівняння має вигляд

$$\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{32} = 1.$$

Задача 7. Скласти канонічне рівняння гіперболи, фокуси якої розміщені на осі Ox симетрично відносно початку координат, якщо дійсна вісь дорівнює 6, а ексцентриситет $\varepsilon = \frac{5}{3}$.

Розв'язання. Оскільки $2a = 6$, то $a = 3$. З формул $b^2 = c^2 - a^2$ і $\varepsilon = \frac{c}{a}$ знаходимо, що $b = 4$.

Шукане рівняння має вигляд $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$.

Задача 8. Знайти відстань фокуса гіперболи $x^2 - 8y^2 = 8$ від її асимптоти.

Розв'язання. Запишемо канонічне рівняння даної гіперболи:

$$\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{1} = 1,$$

звідки $a = \sqrt{8}, b = 1$ – півосі гіперболи, тому згідно з формулою $y = \frac{b}{a}x$ рівняння асимптоти має вигляд $x - y\sqrt{8} = 0$.

З формули $b^2 = c^2 - a^2$ знаходимо, що $c = 3$, тому $F_1(-3;0)$ і $F_2(3;0)$ – фокуси гіперболи.

За формулою $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ обчислюємо відстань d від фокуса F_1 (або, що те саме, фокуса F_2) до знайденої асимптоти: $d = 1$.

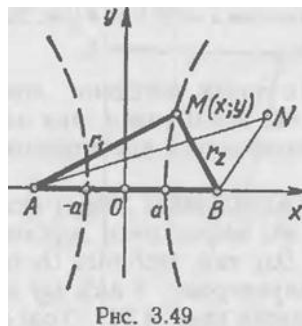


Рис. 3.49

Задача 9. На прямолінійному відрізку залізниці розташовано станції A і B , відстань між якими l . Від заводу N йдуть прямі автомагістралі NA і NB , причому $NB < NA$. Вантаж із заводу N на станцію A можна транспортувати або по автомагістралі NB , а звідти залізницею (перший шлях), або безпосередньо по автомагістралі NA (другий шлях). При цьому тариф (вартість перевезення 1 т вантажу на 1 км) залізницею і автотранспортом становить відповідно m і n ($n > m$), а розвантаження-завантаження однієї тонни коштує k . Визначити зону впливу станції B , тобто множини точок, з яких дешевше доставити вантаж в A першим шляхом, ніж другим.

Введемо систему координат Oxy так, як показано на рис. 3.49, де $AO = OB$. Знайдемо рівняння множини точок $M(x; y)$, для яких обидва шляхи «однаково вигідні», тобто таких, що вартість доставки вантажу $S_1 = r_2 n + k + lm$ першим шляхом дорівнює вартості $S_2 = r_1 n$ доставки вантажу другим шляхом

$$r_2 n + k + lm = r_1 n, \quad (AM = r_1, BM = r_2).$$

З цієї умови одержимо

$$r_1 - r_2 = \frac{k + lm}{n} = \text{const}.$$

Отже, множиною точок, в яких $S_1 = S_2$, є права вітка гіперболи

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

де $a = \frac{lm + k}{2n}$, $b = \frac{1}{2} \sqrt{l^2 - 4a^2}$. Для точок площини, які лежать справа від цієї вітки, $S_1 < S_2$, тобто вигіднішим є перший шлях, а для точок, які лежать зліва, – другий шлях.

Таким чином, права вітка гіперболи обмежує зону впливу станції B , а ліва – станції A .

Тема 3. Парабола, її канонічне рівняння і властивості. Зведення загального рівняння кривої другого порядку до канонічного виду

Задача 1. Дослідити взаємне розміщення параболи $y^2 = x$ і прямої $x + y - 2 = 0$.

Розв'язання. Розв'язуючи систему рівнянь $\begin{cases} y^2 = x; \\ x + y - 2 = 0, \end{cases}$ знаходимо розв'язки $(4; -2)$ і $(1; 1)$. Це означає, що пряма перетинає параболу в точках $M_1(4; -2)$, $M_2(1; 1)$.

Задача 2. В параболу $x^2 = y\sqrt{3}$ вписано рівносторонній трикутник так, що одна з вершин його збігається з вершиною параболи. Знайти сторону трикутника.

Розв'язання. Нехай точка $A(x_0; y_0)$ – одна з вершин трикутника. Тоді іншими його вершинами будуть точки $B(-x_0; y_0)$ і $O(0; 0)$. Оскільки трикутник рівносторонній, то $AB = AO = BO$, звідки $2x_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$. Розв'язуючи це рівняння разом з рівнянням $x_0^2 = y_0\sqrt{3}$, знаходимо $x_0 = 3$. Отже, сторона трикутника дорівнює $2x_0 = 6$.

Задача 3. Парабола з вершиною в початку координат проходить через точку $A(-2; -3)$ і симетрична відносно осі Ox . Скласти її рівняння, знайти фокус і рівняння директриси.

Розв'язання. Канонічне рівняння параболи в цьому випадку має вигляд: $y^2 = -2px$. Оскільки точка $A(-2; -3)$ лежить на параболі, то її координати задовольняють це рівняння: $(-3)^2 = -2p(-2)$, тобто $9 = 4p$,
 $p = \frac{9}{4}$.

Отже, рівняння параболи $y^2 = -\frac{9}{2}x$.

Координати фокуса $F\left(-\frac{p}{2}; 0\right)$, рівняння директриси $x = \frac{p}{2}$, тобто $F\left(-\frac{9}{8}; 0\right)$, рівняння директриси $x = \frac{9}{8}$.

Задача 4. Скласти рівняння параболи, фокус якої міститься в точці $F(3; 1)$, а директрисою є пряма $y = -2$.

Розв'язання. Нехай $M(x; y)$ – довільна точка параболи. За означенням параболи, ця точка рівновіддалена від фокуса та директриси параболи, тобто

$$\sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2} = |y+2|.$$

Спростимо одержане рівняння.

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 2y + 1 = y^2 + 4y + 4 \text{ або } 6y = x^2 - 6x + 6.$$

Задача 5. Встановити, що рівняння $16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y - 161 = 0$ визначає гіперболу. Знайти її центр і півосі.

Розв'язання. Виділимо повні квадрати відносно x та y :

$$16(x^2 - 4x) - 9(y^2 + 6y) - 161 = 0;$$

$$16(x^2 - 4x + 4 - 4) - 9(y^2 + 6y + 9 - 9) - 161 = 0;$$

$$16(x - 2)^2 - 64 - 9(y + 3)^2 + 81 - 161 = 0;$$

$$16(x - 2)^2 - 9(y + 3)^2 = 144;$$

$$\frac{(x - 2)^2}{9} - \frac{(y + 3)^2}{16} = 1.$$

Врахувавши формули паралельного перенесення, дійдемо висновку, що задане рівняння визначає гіперболу з центром у точці $O_1(2; -3)$ і півосями $a = 3, b = 4$, осі симетрії якої паралельні до координатних осей (рис. 3.50).

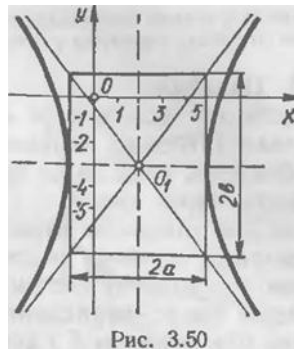


Рис. 3.50

Задача 6. Встановити, що рівняння $4x^2 + 9y^2 + 8x - 54y + 49 = 0$ визначає еліпс. Знайти його центр та півосі.

Розв'язання. Виділимо повні квадрати відносно x і y :

$$4(x^2 + 2x) + 9(y^2 - 6y) + 49 = 0;$$

$$4(x^2 + 2x + 1 - 1) + 9(y^2 - 6y + 9 - 9) + 49 = 0;$$

$$4(x + 1)^2 - 4 + 9(y - 3)^2 - 81 + 49 = 0;$$

$$4(x+1)^2 + 9(y-3)^2 = 36;$$

$$\frac{(x+1)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{4} = 1.$$

Враховуючи формули паралельного перенесення, одержуємо, що задане рівняння визначає еліпс, осі симетрії якого паралельні до координатних осей, центр міститься в точці $O_1(-1;3)$, півосі $a=3, b=2$.

Задача 7. Звести до канонічного вигляду рівняння парабол: а)
 $y = 9x^2 - 6x + 2;$

б) $x = -4y^2 + y.$

Розв'язання.

а) $y = 9x^2 - 6x + 2.$

Виділимо повний квадрат відносно x .

$$y = 9\left(x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} - \frac{1}{9}\right) + 2;$$

$$y = 9\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + 1; \quad y - 1 = 9\left(x - \frac{1}{3}\right)^2;$$

$$\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}(y - 1).$$

Отже, вершина параболи міститься в точці $O_1\left(\frac{1}{3};1\right)$, параметр $p = \frac{1}{18}$.

Виконаємо паралельне перенесення осей координат, взявши за новий початок точку $O_1\left(\frac{1}{3};1\right)$. Застосуємо формули перетворення координат:

$X = x - \frac{1}{3}, Y = y - 1.$ Відносно нових осей координат рівняння параболи

матиме вигляд: $X^2 = \frac{1}{9}Y.$

б) $x = -4y^2 + y.$

Виділимо повний квадрат відносно y .

$$x = -4 \left(y^2 - \frac{1}{4}y + \frac{1}{64} - \frac{1}{64} \right);$$

$$x = -4 \left(y - \frac{1}{8} \right)^2 + \frac{1}{16}; \quad x - \frac{1}{16} = -4 \left(y - \frac{1}{8} \right)^2;$$

$$\left(y - \frac{1}{8} \right)^2 = -\frac{1}{4} \left(x - \frac{1}{16} \right).$$

Отже, вершина параболи міститься в точці $O_1 \left(\frac{1}{16}; \frac{1}{8} \right)$, параметр $p = \frac{1}{8}$.

Якщо виконати паралельне перенесення осей координат, взявши за новий початок точку $O_1 \left(\frac{1}{16}; \frac{1}{8} \right)$, і застосувати формули перетворення координат:

$X = x - \frac{1}{16}$, $Y = y - \frac{1}{8}$, то відносно нових осей координат рівняння параболи

набуває вигляду: $Y^2 = -\frac{1}{4}X$.

Тема 4. Задання ліній в полярних координатах. Параметричне задання ліній

Задача 1. Довести, що полярне рівняння $\rho = \frac{16}{5 - 3\cos\varphi}$ визначає еліпс.

Знайти півосі цього еліпса.

Розв'язання. Використовуючи формули $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}$, перейдемо від заданого рівняння до рівняння в прямокутній системі координат:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{16}{5 - 3\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}}.$$

Далі маємо

$$5\sqrt{x^2 + y^2} - 3x = 16, \quad 25(x^2 + y^2) = 256 + 96x + 9x^2,$$

$$16(x - 3)^2 + 25y^2 = 400, \quad \frac{(x - 3)^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

Враховуючи формули паралельного перенесення, робимо висновок, що останнє рівняння визначає еліпс з центром у точці $(3; 0)$ і півосями $a = 5$ і $b = 4$.

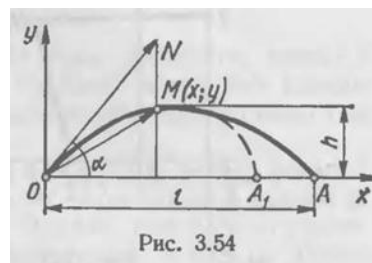
Задача 2. Яку криву визначає полярне рівняння $\rho = \frac{8}{2 - \sqrt{2}\cos\varphi}$?

Розв'язання. Привівши дане рівняння до вигляду $\rho = \frac{4}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\varphi}$,

одержимо $p = 4$, $\varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$. Отже, задана лінія є еліпс.

Знайдемо його півосі. Оскільки, $p = 4 = \frac{b^2}{a}$ і $\varepsilon^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{1}{2}$, то $a = 8$ і $b = 4\sqrt{2}$.

Задача 3. Струмінь води витікає з конічної насадки з швидкістю v_0 під кутом α до горизонту. Нехтуючи опором повітря, скласти рівняння струменя відносно прямокутної системи координат Oxy , вважаючи, що струмінь міститься в площині Oxy , точка O збігається з вихідним отвором насадки, а вісь Ox проходить горизонтально в напрямі польоту струменя (рис. 3.54). Знайти дальність польоту l , висоту підйому h і кут, при якому дальність польоту найбільша.



Розв'язання. Виділимо в струмені води частинку одиничної маси. Якби на неї не діяла сила тяжіння, то за час t вона пройшла б шлях, який дорівнює модулю вектора $\overrightarrow{ON} = (v_0 t \cos \alpha; v_0 t \sin \alpha)$, де v_0 – початкова швидкість частинки.

Під дією сили тяжіння частинка за той же час t пройде шлях, що дорівнює довжині дуги OM . Оскільки сила тяжіння напрямлена вертикально вниз, то радіус-вектор частинки має вигляд

$$\overrightarrow{OM} = (x; y) = \left(v_0 t \cos \alpha; v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2} \right), \text{ де } g \text{ – прискорення сили тяжіння.}$$

Рівняння

$$\begin{cases} x = v_0 t \cos \alpha; \\ y = v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}, \end{cases}$$

– це параметричні рівняння траєкторії польоту частинки. Виключивши параметр t , дістанемо $y = ax - bx^2$, де $a = tg \alpha$; $b = \frac{g}{2v_0^2} \sec^2 \alpha$.

Таким чином, траєкторія руху частинки, а отже, і весь струмінь мають форму параболи. Дальність польоту струменя дістанемо з його рівняння при $y = 0$, а висоту підйому – при $x = \frac{l}{2}$:

$$l = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}, \quad h = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}.$$

Дальність польоту найбільша, якщо $\alpha = 45^\circ$.

Задача 4. Кривошип OA (рис. 3.57) обертається навколо точки O із сталою кутовою швидкістю ω і приводить у рух повзун B за допомогою шатуна AB , причому $OA = AB = a$. Скласти рівняння траєкторії середньої точки M шатуна.

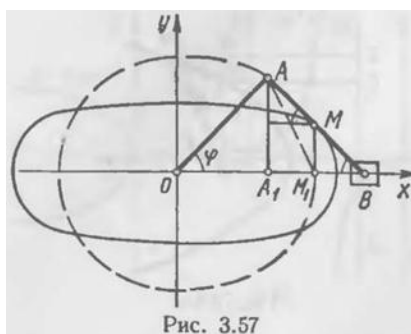


Рис. 3.57

Розв'язання. Нехай $M(x; y)$ – середня точка шатуна AB , $\varphi = \angle AOB$, тоді

$$x = OA_1 + A_1M_1 = OA \cos \varphi + \frac{1}{2}OA \cos \varphi = \frac{3}{2}a \cos \varphi;$$

$$y = MM_1 = MB \sin \varphi = \frac{1}{2}a \sin \varphi.$$

Оскільки $\varphi = \omega t$, то

$$x = \frac{3}{2}a \cos \omega t; \quad y = \frac{1}{2}a \sin \omega t,$$

де t – час. Отже, траєкторією середньої точки шатуна є еліпс. Вилучивши параметр t , отримаємо його канонічне рівняння:

$$\frac{x^2}{\frac{9}{4}a^2} + \frac{y^2}{\frac{1}{4}a^2} = 1.$$

Тема 5. Поверхня та її рівняння. Площина. Різні види рівнянь площини. Кут між двома площинами. Відстань від точки до площини

Задача 1. Скласти рівняння геометричного місця точок, рівновіддалених від точок $A(1; -1; 2)$ і $B(0; -2; 3)$.

Розв'язання. Нехай точка $M(x; y; z)$ лежить на заданій поверхні. Тоді за умовою $AM = BM$, тобто

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2} = \sqrt{(x-0)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2},$$

звідки після спрощень одержимо шукане рівняння $2x + 2y - 2z + 7 = 0$.

Задача 2. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M(1; 2; 3)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n} = (-1; -3; 1)$.

Розв'язання. Шукане рівняння знаходимо за формулою $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$:

$$-1 \cdot (x - 1) + (-3) \cdot (y - 2) + 1 \cdot (z - 3) = 0,$$

або

$$x + 3y - z - 4 = 0.$$

Задача 3. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(-3; 4; 5)$ перпендикулярно до осі Oy .

Розв'язання. Орт $\vec{j} = (0; 1; 0)$ перпендикулярний до площини, тому його можна розглядати як нормальний вектор. Отже, шукане рівняння має вигляд

$$0 \cdot (x+3) + 1 \cdot (y-4) + 0 \cdot (z-5) = 0 \text{ або } y = 4.$$

Задача 4. Написати загальне рівняння площини, що проходить через точки $M_1(1;2;3)$, $M_2(-1;0;2)$, $M_3(-2;1;0)$.

Розв'язання. Підставимо координати точок у рівняння

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0:$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ -2 & -2 & -1 \\ -3 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 0.$$

Розкладемо визначник за елементами першого рядка:

$$(x-1) \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} - (y-2) \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} + (z-3) \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Обчислюючи визначники другого порядку, знаходимо шукане рівняння:

$$(x-1)5 - (y-2)3 + (z-3)(-4) = 0 \text{ або } 5x - 3y - 4z + 13 = 0.$$

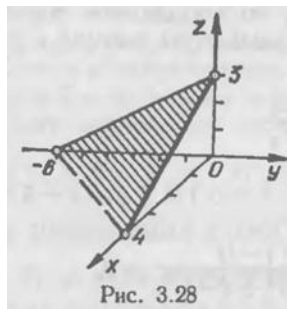
Задача 5. Побудувати площину $3x - 2y + 4z - 12 = 0$.

Розв'язання. Запишемо задане рівняння у відрізках на осях. Для цього перенесемо у праву частину вільний член і поділимо на нього обидві частини рівняння:

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{-6} + \frac{z}{3} = 1,$$

звідки $a = 4, b = -6, c = 3$.

Знаючи відрізки, які відтинає площина на осях координат, легко побудувати площину (рис. 3.28).



Задача 6. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_1(1; -3; 2)$ паралельно до площини $4x - 3y + 2z + 6 = 0$.

Розв'язання. Рівняння площини, яка проходить через точку $M_1(x_1; y_1; z_1)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n}(A; B; C)$, має вигляд:

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0, \quad \text{тобто}$$

$$A(x - 1) + B(y + 3) + C(z - 2) = 0.$$

За умовою паралельності шуканої та заданої площин маємо:

$$\frac{A}{4} = \frac{B}{-3} = \frac{C}{2}.$$

Тому можна прийняти: $A = 4, B = -3, C = 2$.

Рівняння шуканої площини отримаємо у вигляді:

$$4(x - 1) - 3(y + 3) + 2(z - 2) = 0 \quad \text{або} \quad 4x - 3y + 2z - 17 = 0.$$

Задача 7. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_1(3; -1; -5)$ перпендикулярно до площин $3x - 2y + 2z + 7 = 0$ і $5x - 4y + 3z + 1 = 0$.

Розв'язання. Очевидно, що за нормальний вектор \vec{n} шуканої площини можна взяти векторний добуток нормальних векторів $\vec{n}_1 = (3; -2; 2)$ і $\vec{n}_2 = (5; -4; 3)$ заданих площин.

$$\vec{n} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -2 & 2 \\ 5 & -4 & 3 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}.$$

Застосовуючи рівняння площини, яка проходить через точку $M_1(3; -1; -5)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n} = (2; 1; -2)$, отримуємо:

$$2(x-3) + 1(y+1) - 2(z+5) = 0 \text{ або } 2x + y - 2z - 15 = 0.$$

Задача 8. Знайти висоту AH піраміди, заданої своїми вершинами $A(-1; 2; -1)$, $B(1; 0; 2)$, $C(0; 1; -1)$, $D(2; 0; -1)$.

Розв'язання. За формулою
$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$
 знаходимо

рівняння площини, що проходить через точки B, C, D :

$$\begin{vmatrix} x - 1 & y - 0 & z - 2 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 0,$$

звідки $3x + 6y + z - 5 = 0$.

Висоту AH знайдемо як відстань від точки $A(-1; 2; -1)$ до площини BCD за формулою $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$:

$$AH = \frac{3 \cdot (-1) + 6 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) - 5}{\sqrt{3^2 + 6^2 + 1^2}} = \frac{5}{\sqrt{46}}.$$

Тема 6. Пряма лінія в просторі. Різні види рівнянь прямої в просторі. Кут між двома прямими

Задача 1. Звести рівняння прямої $\begin{cases} x + y - z - 1 = 0; \\ 2x - y + 3z + 5 = 0 \end{cases}$ до канонічного вигляду.

Розв'язання. Знайдемо яку-небудь точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ на даній прямій. Для цього покладемо в обох рівняннях $x = 0$ і розв'яжемо систему

$$\begin{cases} y - z - 1 = 0; \\ -y + 3z + 5 = 0, \end{cases}$$

звідки $z = -2, y = -1$. Отже, точка $M_0(0; -1; -2)$ належить даній прямій.

Напрямний вектор \vec{s} знаходимо за формулою $\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$:

$$\vec{s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - 5\vec{j} - 3\vec{k}.$$

Канонічні рівняння заданої прямої мають вигляд $\frac{x}{2} = \frac{y+1}{-5} = \frac{z+2}{-3}$.

Задача 2. Дано трикутник з вершинами $M_1(-2; 5; -6)$, $M_2(4; 1; 0)$, $M_3(2; -1; 4)$. Скласти канонічні та параметричні рівняння медіани, проведеної з вершини M_3 .

Розв'язання. Ця медіана ділить сторону M_1M_2 навпіл в точці D .

Знайдемо координати точки D .

$$x = \frac{-2+4}{2} = 1, y = \frac{5+1}{2} = 3, z = \frac{-6+0}{2} = -3. \text{ Отже, } D(1;3;-3).$$

Застосувавши рівняння $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$, отримаємо

$$\frac{x-1}{2-1} = \frac{y-3}{-1-3} = \frac{z+3}{4+3} \text{ або } \frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z+3}{7}.$$

Це канонічні рівняння медіани.

Ввівши параметр t : $\frac{x-1}{1} = t, \frac{y-3}{-4} = t, \frac{z+3}{7} = t$, отримаємо

параметричні рівняння медіани

$$\begin{cases} x = t + 1, \\ y = -4t + 3, \\ z = 7t - 3. \end{cases}$$

Задача 3. Знайти кут φ між прямими $\begin{cases} 2x + y - z - 1 = 0; \\ 2x - y + 3z + 5 = 0 \end{cases}$ і $\begin{cases} x = 2t; \\ y = 2 - t; \\ z = -2 + 3t. \end{cases}$

Розв'язання. За формулами $\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$ і $x = x_0 + mt$,

$y = y_0 + nt$, $z = z_0 + pt$ знаходимо напрямні вектори даних прямих:
 $\vec{s}_1 = (2; -8; -4)$ і $\vec{s}_2 = (2; -1; 3)$.

Оскільки $\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 = 0$, то $\varphi = 90^\circ$.

Задача 4. При яких значеннях m_1 і n_2 прямі $\frac{x}{m_1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{4}$ і $\frac{x+1}{-1} = \frac{y+5}{n_2} = \frac{z+3}{-2}$ паралельні?

Розв'язання. З умови $\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$ маємо

$$\frac{m_1}{-1} = \frac{2}{n_2} = \frac{4}{-2}; \quad \frac{m_1}{-1} = -2, \quad \frac{2}{n_2} = -2,$$

звідки $m_1 = 2$, $n_2 = -1$.

Задача 5. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M_1(5; -1; -3)$ паралельно до прямої $\begin{cases} 2x + 3y + z - 6 = 0, \\ 4x - 5y - z + 2 = 0. \end{cases}$

Розв'язання. Знайдемо напрямний вектор \vec{s} заданої прямої за формулою

$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & -5 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = 2\vec{i} + 6\vec{j} - 22\vec{k}.$$

Напрямний вектор \vec{s}_1 шуканої прямої колінеарний до вектора \vec{s} , тому можна взяти $\vec{s}_1 = (1; 3; -11)$.

Канонічні рівняння шуканої прямої мають вигляд:

$$\frac{x-5}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+3}{-11}.$$

Задача 6. Довести, що прямі $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{-2}$ і $\frac{x+1}{1} = \frac{y+11}{2} = \frac{z+6}{1}$ перетинаються.

Розв'язання. Точка $M_1(1; -2; 0)$ лежить на першій прямій, а точка $M_2(-1; -11; -6)$ – на другій. Знайдемо мішаний добуток векторів $\overrightarrow{M_1M_2} = (-2; -9; -6)$, $\vec{s}_1 = (2; -1; -2)$ і $\vec{s}_2 = (1; 2; 1)$.

$$\overrightarrow{M_1M_2} \vec{s}_1 \vec{s}_2 = \begin{vmatrix} -2 & -9 & -6 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 18 - 24 - 6 + 18 - 8 = 0.$$

Оскільки ці вектори компланарні, то задані прямі лежать в одній площині.

Напрямні вектори \vec{s}_1 та \vec{s}_2 не колінеарні (їх координати не є пропорційними), тому прямі не є паралельними, тобто перетинаються.

Тема 7. Пряма і площина

Задача 1. Знайти точку перетину прямої $\frac{x-12}{4} = \frac{y-9}{3} = \frac{z-1}{1}$ і площини $3x + 5y - z - 2 = 0$.

Розв'язання. Запишемо параметричні рівняння заданої прямої, прирівнюючи кожне з трьох відношень до t :

$$x = 4t + 12, y = 3t + 9, z = t + 1.$$

Підставимо ці вирази в рівняння площини і знайдемо значення параметра t , яке відповідає точці перетину.

$$3(4t + 12) + 5(3t + 9) - (t + 1) - 2 = 0, \text{ звідки отримуємо } t = -3.$$

Шукана точка перетину прямої та площини має координати

$$x = 4(-3) + 12 = 0, y = 3(-3) + 9 = 0, z = -3 + 1 = -2.$$

Задача 2. Знайти проекцію B точки $A(5; 2; -1)$ на площину $2x - y + 3z + 23 = 0$.

Розв'язання. Нормальний вектор площини $\vec{n} = (2; -1; 3)$ буде напрямним вектором прямої AB , яка перпендикулярна до цієї площини. Тому канонічні рівняння прямої AB мають вигляд:

$$\frac{x-5}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{3}.$$

Запишемо параметричні рівняння прямої AB і знайдемо координати точки B – точки перетину прямої AB з даною площиною.

$$x = 2t + 5, y = -t + 2, z = 3t - 1;$$

$2(2t + 5) - (-t + 2) + 3(3t - 1) + 23 = 0$, звідки отримаємо $t = -2$. Це значення відповідає точці B . Тому $x_B = 2(-2) + 5 = 1, y_B = 2 + 2 = 4, z_B = 3(-2) - 1 = -7$, тобто $B(1; 4; -7)$.

Задача 3. Знайти точку Q , яка симетрична до точки $P(5;10;4)$ відносно прямої $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{5}$.

Розв'язання. Проекція N точки P на задану пряму є серединою відрізка PQ . Точка N є точкою перетину даної прямої з перпендикулярною до неї площиною, яка проходить через точку P .

Оскільки вектор $\vec{s} = (2;4;5)$ перпендикулярний до цієї площини, то її рівняння має вигляд:

$$2(x-5) + 4(y-10) + 5(z-4) = 0 \text{ або } 2x + 4y + 5z - 70 = 0.$$

Запишемо параметричні рівняння заданої прямої і знайдемо значення параметра t , яке відповідає точці N .

$$x = 2t + 1, y = 4t + 2, z = 5t + 3;$$

$$2(2t + 1) + 4(4t + 2) + 5(5t + 3) - 70 = 0, \text{ звідки одержимо } t = 1.$$

$$x_N = 2 \cdot 1 + 1 = 3; y_N = 4 \cdot 1 + 2 = 6; z_N = 5 \cdot 1 + 3 = 8, \text{ тобто } N(3;6;8).$$

Оскільки $x_N = \frac{x_P + x_Q}{2}$, $y_N = \frac{y_P + y_Q}{2}$, $z_N = \frac{z_P + z_Q}{2}$, то $x_Q = 2 \cdot 3 - 5 = 1$, $y_Q = 2 \cdot 6 - 10 = 2$, $z_Q = 2 \cdot 8 - 4 = 12$.

Отже, $Q(1;2;12)$.

Задача 4. Скласти рівняння проекції прямої $\begin{cases} 2x + 3y - 4z - 1 = 0, \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$ на площину $x + 3y - 4z - 5 = 0$.

Розв'язання. Складемо рівняння площини, яка проходить через задану пряму перпендикулярно до заданої площини. Для цього використаємо рівняння пучка площин, віссю якого є дана пряма.

$$2x + 3y - 4z - 1 + \lambda(x - y + 2z) = 0 \quad \text{або}$$

$$(2 + \lambda)x + (3 - \lambda)y + (-4 + 2\lambda)z - 1 = 0.$$

Знайдемо таке значення параметра λ , при якому будемо мати рівняння площини, яка перпендикулярна до площини $x + 3y - 4z - 5 = 0$. За умовою перпендикулярності двох площин одержимо:

$$1 \cdot (2 + \lambda) + 3 \cdot (3 - \lambda) - 4(-4 + 2\lambda) = 0; 10\lambda = 27; \lambda = \frac{27}{10}.$$

Рівняння шуканої площини має вигляд:

$$2x + 3y - 4z - 1 + \frac{27}{10}(x - y + 2z) = 0 \text{ або } 47x + 3y + 14z - 10 = 0.$$

Проекція заданої прямої на задану площину є лінією перетину площин $47x + 3y + 14z - 10 = 0$ і $x + 3y - 4z - 5 = 0$. Тому загальні рівняння цієї проекції мають вигляд:

$$\begin{cases} 47x + 3y + 14z - 10 = 0, \\ x + 3y - 4z - 5 = 0. \end{cases}$$

Задача 5. Скласти рівняння площини, яка проходить через дві паралельні прямі $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{1}$ і $\frac{x+1}{2} = \frac{y+3}{3} = \frac{z}{1}$.

Розв'язання. Точка $M_1(1;0;-2)$ лежить на першій прямій, точка $M_2(-1;-3;0)$ лежить на другій прямій, $\vec{s} = (2;3;1)$ – напрямний вектор заданих прямих. Нехай $M(x;y;z)$ – довільна точка шуканої площини. Вектори $\overline{M_1M} = (x-1; y; z+2)$, $\overline{M_1M_2} = (-2; -3; 2)$ і $\vec{s} = (2;3;1)$ компланарні і тому їх мішаний добуток дорівнює нулю:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z+2 \\ -2 & -3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Розкриваючи визначник, одержимо рівняння шуканої площини.

$$(x-1) \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (z+2) \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \text{ або } 3x - 2y - 3 = 0.$$

Задача 6. Знайти відстань між прямими $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{4} = \frac{z-5}{3}$ і $\frac{x}{5} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{2}$.

Розв'язання. Перевіримо, чи лежать задані прямі в одній площині.

Точка $M_1(1; -3; 5)$ лежить на першій прямій, точка $M_2(0; 2; -1)$ – на другій. Якщо вектори $\vec{s}_1 = (2; 4; 3)$, $\vec{s}_2 = (5; -1; 2)$, $\overrightarrow{M_1M_2} = (-1; 5; -6)$ компланарні, то задані прямі лежать в одній площині.

$$\vec{s}_1 \vec{s}_2 \overrightarrow{M_1M_2} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & -6 \end{vmatrix} = 12 - 8 + 75 - 3 - 20 + 120 = 176 \neq 0.$$

Оскільки ці вектори не компланарні, то задані прямі мимобіжні.

Через одну з прямих, наприклад другу, проведемо площину, паралельну до першої прямої. Шукана відстань між прямими дорівнює відстані від будь-якої точки першої прямої до одержаної площини.

Запишемо загальні рівняння другої прямої:

$$\begin{cases} \frac{x}{5} = \frac{y-2}{-1}, \\ \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{2} \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x + 5y - 10 = 0, \\ 2y + z - 3 = 0. \end{cases}$$

Застосуємо рівняння пучка площин, віссю якого є друга пряма.

$$x + 5y - 10 + \lambda(2y + z - 3) = 0 \text{ або } x + (5 + 2\lambda)y + \lambda z - 10 - 3\lambda = 0.$$

Щоб знайти потрібне значення параметра λ , використаємо умову паралельності прямої і площини:

$$2 \cdot 1 + 4(5 + 2\lambda) + 3\lambda = 0, \text{ звідки } \lambda = -2.$$

Рівняння площини, яка проходить через другу пряму паралельно до першої прямої, має вигляд:

$$x + (5 + 2(-2))y - 2z - 10 + 6 = 0 \text{ або } x + y - 2z - 4 = 0.$$

Шукану відстань обчислимо за формулою:

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \text{ де } x_1, y_1, z_1 - \text{координати точки } M_1.$$

$$d = \frac{|1 - 3 - 10 - 4|}{\sqrt{1 + 1 + 4}} = \frac{16}{\sqrt{6}}.$$

Тема 8. Поверхні другого порядку

Задача 1. Знайти рівняння поверхні, утвореної обертанням еліпса $x^2 + 4y^2 = 4, z = 0$ навколо осі Ox .

Розв'язання. У рівнянні еліпса треба залишити без зміни координату x , а замість координати y підставити в рівняння $\pm\sqrt{y^2 + z^2}$. Отримаємо:
 $x^2 + 4(y^2 + z^2) = 4$ або $\frac{x^2}{4} + y^2 + z^2 = 1$.

Задача 2

а). Скласти рівняння конічної поверхні з вершиною в точці $O(0;0;0)$ і з напрямною L , заданою рівняннями $\frac{X}{a^2} + \frac{Y}{b^2} = 1, Z = c$.

Розв'язання. Нехай $M(x; y; z)$ – довільна точка конічної поверхні, а $N(X; Y; Z)$ – точка перетину твірної OM і лінії L . Канонічні рівняння твірної OM мають вигляд $\frac{x}{X} = \frac{y}{Y} = \frac{z}{Z}$. Оскільки $Z = c$, то $X = c\frac{x}{z}, Y = c\frac{y}{z}$. Підставляючи ці значення X і Y в перше з рівнянь напрямної L , одержимо шукане рівняння:

$$\frac{c^2 x^2}{a^2 z^2} + \frac{c^2 y^2}{b^2 z^2} = 1, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

При $a = b$ напрямною L є коло $X^2 + Y^2 = a^2, Z = c$, а рівняння конічної поверхні має вигляд $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$. Ця поверхня називається *прямим круговим конусом* (рис. 3.63).

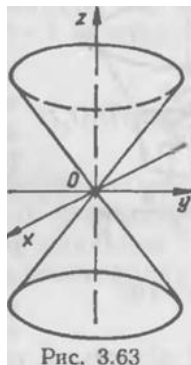


Рис. 3.63

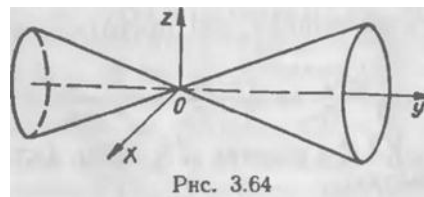


Рис. 3.64

б). Рівняння конічної поверхні, вершиною якої є точка $O(0;0;0)$, а напрямною – еліпс (рис. 3.64) $\frac{X^2}{9} + \frac{Z^2}{4} = 1, Y = 5$ має вигляд

$$\frac{x^2}{9} + \frac{z^2}{4} - \frac{y^2}{25} = 0.$$

Задача 3.

а). Знайти центр і радіус сфери, заданої рівнянням $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z - 11 = 0$.

Розв'язання. Виділяючи повні квадрати по x, y і z , запишемо задане рівняння у вигляді $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 25$. Отже, точка $O_1(-1; -2; 3)$ – центр сфери і $R=5$ – її радіус.

б). Рівняння $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z + 15 = 0$, або $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = -1$ не визначає жодного геометричного об'єкта.

Задача 4. Знайти центр і півосі еліпсоїда, заданого рівнянням

$$3x^2 + 4y^2 + 6z^2 - 6x + 16y - 36z + 37 = 0.$$

Розв'язання. Виділяючи повні квадрати відносно x, y, z , одержимо

$$3(x-1)^2 + 4(y+2)^2 + 6(z-3)^2 = 36 \text{ або } \frac{(x-1)^2}{12} + \frac{(y+2)^2}{9} + \frac{(z-3)^2}{6} = 1.$$

Отже, даний еліпсоїд має півосі: $a = 2\sqrt{3}, b = 3, c = \sqrt{6}$; його центр знаходиться в точці $O(1; -2; 3)$.

Задача 5. Знайти лінії перетину однопорожнинного гіперболоїда $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1$ площинами: а) Oxz ; б) Oxy ; в) $x = 4$.

Розв'язання.

а) Лінією перетину площини Oxz з даним гіперболоїдом є гіпербола

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1, y = 0, \text{ або } \frac{x^2}{4} - \frac{z^2}{16} = 1, y = 0.$$

б) Лінією перетину площини Oxy з даним гіперболоїдом є еліпс:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1, z = 0, \text{ або } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1, z = 0.$$

в) Лінія перетину площини $x = 4$ з даним гіперболоїдом є гіпербола:

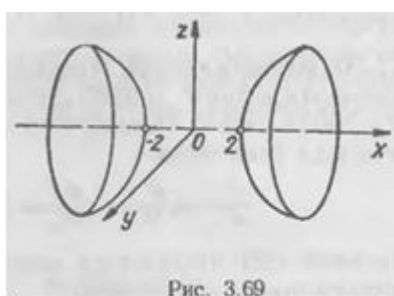
$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1, x = 4, \text{ або } \frac{y^2}{27} - \frac{z^2}{48} = -1, x = 4.$$

Задача 6. Скласти рівняння поверхні, утвореної обертанням гіперболи $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1, z = 0$ навколо осі абсцис, і визначити вид поверхні.

Розв'язання. Підставивши в рівняння гіперболи замість y вираз $\pm\sqrt{y^2 + z^2}$, маємо

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2 + z^2}{9} = 1, \text{ або } \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{9} - \frac{x^2}{4} = -1$$

Це рівняння двопорожнинного гіперболоїда обертання, який перетинає вісь Ox в точках $(2;0;0)$ і $(-2;0;0)$ (рис. 3.69).



Задача 7. Знайти точки перетину еліптичного параболоїда $z = \frac{x^2}{4} + y^2$ з прямою $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-10}{4}$.

Розв'язання. Запишемо параметричні рівняння даної прямої: $x = 2t + 2, y = -t - 1, z = 4t + 10$.

Підставимо вирази для x, y, z в рівняння параболоїда і знайдемо ті значення параметра, які відповідають точкам перетину:

$$4t + 10 = \frac{(2t + 2)^2}{4} + (-t - 1)^2; 4t + 10 = 2t^2 + 4t + 2; t_1 = -2, t_2 = 2.$$

Підставляючи знайдені значення параметра в параметричні рівняння прямої, знайдемо точки перетину: $M_1(-2;1;2)$ і $M_2(6;-3;18)$.

Задача 8. Знайти ті прямолінійні твірні гіперболічного параболоїда $z = \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4}$, які проходять через точку $A\left(4; 2; \frac{7}{9}\right)$.

Розв'язання. Запишемо задане рівняння у вигляді $z = \left(\frac{x}{3} - \frac{y}{2}\right)\left(\frac{x}{3} + \frac{y}{2}\right)$.

Складемо систему рівнянь $\begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{y}{2} = zk; \\ \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = \frac{1}{k}. \end{cases}$ Підставивши координати точки

A в перше рівняння системи, знайдемо $k = \frac{3}{7}$. Отже, пряма

$$\begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{y}{2} = \frac{3}{7}z; \\ \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = \frac{7}{3}. \end{cases} \text{ або } \begin{cases} 14x - 21y - 18z = 0; \\ 2x + 3y - 14 = 0 \end{cases}$$

є однією з тих твірних заданого параболоїда, яка проходить через точку A . Другу твірну знаходимо аналогічно з системи

$$\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = zk; \\ \frac{x}{3} - \frac{y}{2} = \frac{1}{k}. \end{cases}$$

Завдання розрахункової роботи

ВАРІАНТ № 1

1. Центр маси однорідного стержня знаходиться в точці $M(1,4)$. Один з його кінців в точці $P(-2,2)$. Визначити координати точки другого кінця цього стержня.
2. Дано вершини однорідної трикутної пластинки $A(-1,5)$, $B(3,-2)$, $C(4,-6)$. Визначити координати її центра маси.
Вказівка: Центр маси знаходиться в точці перетину медіан.
3. Задано рівняння прямої лінії $2x + y - 4 = 0$. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M(-6,1)$:
 - 1) паралельно до даної прямої;
 - 2) перпендикулярно до даної прямої;
 - 3) утворює кут 45° з даною прямою.
4. Знайти точку M , симетричну точці $P(8,-9)$ відносно прямої, яка проходить через точки $A(3,-4)$ і $B(-1,-2)$.
5. Дано вершини трикутника $A(4,-3)$, $B(10,5)$, $C(6,2)$. Потрібно: 1) скласти рівняння висоти, проведеної з вершини C і знайти її довжину; 2) знайти довжину перпендикуляра, опущеного з вершини B на медіану, яка проведена з вершини A ; 3) скласти рівняння бісектрис внутрішнього і зовнішнього кутів при вершині B ; 4) скласти рівняння перпендикуляра, опущеного з вершини C на бісектрису внутрішнього кута при вершині B .
6. Скласти рівняння сторін трикутника, знаючи дві його вершини $A(3,5)$ і $B(6,1)$ і точку перетину його медіан $M(4,0)$.
7. Скласти рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі абсцис, симетрично відносно початку координат, знаючи що:
 - 1) $a = 6$, $c = 3$;
 - 2) $c = 6$, $e = \frac{3}{5}$;
 - 3) $c = 4$, віддаль між директрисами рівна 10.
8. Привести рівняння кривої $4x^2 + 3y^2 - 8x + 12y + 4 = 0$ до простішого виду і побудувати криву.
9. Дано рівняння гіперболи $x^2 - 4y^2 = 16$. Потрібно: 1) визначити півосі; 2) знайти фокуси; 3) обчислити ексцентриситет; 4) написати рівняння асимптот і директрис; 5) написати рівняння спряженої

- гіперболи, обчислити її ексцентриситет і написати рівняння її директрис; б) побудувати обидві гіперболи.
10. Привести рівняння кривої $16x^2 - 9y^2 - 64x - 18y + 199 = 0$ до простішого виду і побудувати криву.
11. Задано рівняння параболи: 1) $y^2 - 10x - 2y - 19 = 0$;
2) $x^2 + 6x + 4y + 5 = 0$. Визначити координати вершини параболи, величину параметра P , скласти рівняння директриси і побудувати криву.
12. Скласти рівняння площини: 1) яка проходить через точку $M_1(2, -3, 1)$ перпендикулярно до вектора $\overline{M_1M_2}$; 2) яка проходить через точки $M_1(2, -3, 1)$ і $M_2(-2, 4, 5)$ паралельно осі OZ .
13. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(-1, 3, 4)$ паралельно площині, що проходить через точки $M_1(1, -2, -1)$, $M_2(3, -4, 5)$, $M_3(0, 1, -1)$.
14. Скласти рівняння площин, паралельних заданій площині і віддалених від неї на відстані d : $x - 2y + 2z - 4 = 0$; $d = 5$.
15. Дві грані куба лежать на площинах. Обчислити об'єм цього куба.
 $2x - 4y + 4z - 3 = 0$, $x - 2y + 2z - 4 = 0$.
16. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(-1, 4, 3)$ перпендикулярно до двох заданих площин $2x - y + 3z = 0$, $4x + 3y - z + 4 = 0$.
17. Дано вершини трикутника $M_1(2, 3, 1)$, $M_2(-6, 5, -3)$, $M_3(4, 5, -1)$. Скласти параметричне рівняння медіани, проведеної з вершини M_3 .
18. Скласти канонічне рівняння прямої, яка проходить через точку $M(2, 3, -5)$ паралельно до заданої прямої
$$\begin{cases} 3x - y + 2z - 7 = 0 \\ x + 3y - 2z + 3 = 0 \end{cases}$$
.
19. Дано рівняння руху точки $M(x, y, z)$. Визначити віддаль d , яку пройде ця точка за проміжок часу від $t_1 = 0$ до t_2 :
 $x = 5 + 7t$, $y = 1 - 6t$, $z = 2 + 6t$; $t_2 = 3$.
20. Скласти рівняння проєкції прямої на площину:
$$\begin{cases} x - 4y + 2z - 5 = 0 \\ 3x + y - z + 2 = 0, \end{cases} \quad 2x + 3y + z - 6 = 0.$$
21. Знайти точку Q , симетричну точці $P(-1, 3, -2)$ відносно площини $x - 2y + 3z - 1 = 0$
22. Знайти проєкцію точки $M(4, 2, -1)$ на пряму $\frac{x+4}{2} = \frac{y-1}{1} = -\frac{z}{4}$

ВАРІАНТ № 2

1. Центр маси однорідного стержня знаходиться в точці $M(4, -1)$. Один з його кінців в точці $P(-16, 2)$. Визначити координати точки K другого кінця цього стержня.
2. Дано вершини однорідної трикутної пластинки $A(4, 5)$, $B(6, -8)$, $C(2, 0)$. Визначити координати її центра маси.
Вказівка: Центр маси знаходиться в точці перетину медіан.
3. Задано рівняння прямої лінії $8x - 4y + 1 = 0$. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M(2, 3)$:
 - 1) паралельно до даної прямої;
 - 2) перпендикулярно до даної прямої;
 - 3) утворює кут 45° з даною прямою.
4. Знайти точку M , симетричну точці $P(1, -1)$ відносно прямої, яка проходить через точки $A(-4, -1)$ і $B(4, 3)$.
5. Дано вершини трикутника $A(-1, -4)$, $B(-4, 0)$, $C(4, 6)$. Потрібно: 1) скласти рівняння висоти, проведеної з вершини C і знайти її довжину; 2) знайти довжину перпендикуляра, опущеного з вершини B на медіану, яка проведена з вершини A ; 3) скласти рівняння бісектрис внутрішнього і зовнішнього кутів при вершині B ; 4) скласти рівняння перпендикуляра, опущеного з вершини C на бісектрису внутрішнього кута при вершині B .
6. В рівнобедреному прямокутному трикутнику дано координати вершини гострого кута $(5, 7)$ і рівняння протилежного катета $bx + 4y - 9 = 0$. Скласти рівняння двох інших сторін трикутника.
7. Скласти рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі абсцис, симетрично відносно початку координат, знаючи що:
 - 1) $c = 4$, $a = 7$;
 - 2) $c = 9$, $\varepsilon = \frac{3}{5}$;
 - 3) $c = 3$, віддаль між директрисами рівна 14.
8. Привести рівняння кривої $16x^2 + 25y^2 - 128x + 150y + 81 = 0$ до простішого виду і побудувати криву.
9. Дано рівняння гіперболи $4x^2 - 9y^2 + 36 = 0$. Потрібно: 1) визначити півосі; 2) знайти фокуси; 3) обчислити ексцентриситет; 4) написати рівняння асимптот і директрис; 5) написати рівняння спряженої гіперболи, обчислити її ексцентриситет і написати рівняння її директрис; 6) побудувати обидві гіперболи.

10. Привести рівняння кривої $x^2 - y^2 - 6x + 4y + 5 = 0$ до простішого виду і побудувати криву.
11. Задано рівняння параболи: 1) $x = y^2 + 6y$; 2) $y = 4x^2 - 8x + 7$
Визначити координати вершини параболи, величину параметра p , скласти рівняння директриси і побудувати криву.
12. Скласти рівняння площини: 1) яка проходить через точку $M_1 (-1, 4, -3)$ перпендикулярно до вектора $\overrightarrow{M_1 M_2}$; 2) яка проходить через точки $M_1 (-1, 4, -3)$ і $M_2 (2, 7, -8)$ паралельно осі OZ .
13. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_0 (4, -1, 3)$ паралельно площині, що проходить через точки $M_1 (2, 0, -1)$, $M_2 (-1, 4, -3)$, $M_3 (1, 1, -1)$.
14. Скласти рівняння площин, паралельних заданій площині і віддалених від неї на відстані d : $10x + 2y - 11z + 3 = 0$, $d = 3$.
15. Дві грані куба лежать на площинах. Обчислити об'єм цього куба $10x + 2y - 11z + 3 = 0$, $20x + 4y - 22z + 5 = 0$.
16. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_0 (3, -3, 2)$ перпендикулярно до двох заданих площин $3x - y + 4z - 3 = 0$, $x + 2y - 3z + 4 = 0$.
17. Дано вершини трикутника $M_1 (3, -4, 7)$, $M_2 (-5, 0, -1)$, $M_3 (-5, 1, 3)$. Скласти параметричні рівняння медіани, проведеної з вершини M_3 .
18. Скласти канонічне рівняння прямої, яка проходить через точку $M (1, 2, -2)$ паралельно до заданої прямої
$$\begin{cases} 2x - 3y + 4z - 1 = 0 \\ x + 2y - z + 3 = 0 \end{cases}$$
.
19. Дано рівняння руху точки $M (x, y, z)$. Визначити віддаль d , яку пройде ця точка за проміжок часу від $t_1 = 0$ до t_2 :
 $x = 7 - 6t$, $y = -1 + 6t$, $z = -4 + 7t$, $t_2 = 5$.
20. Скласти рівняння проєкцій прямої на площину:
$$\begin{cases} 2x + y - 3z - 2 = 0 \\ x - 2y - z + 1 = 0 \end{cases}, 2x - y - z + 4 = 0.$$
21. Знайти точку Q , симетричну точці $P (-2, 1, 1)$ відносно площини $x - 3y - 4z - 43 = 0$.
22. Знайти проєкцію точки $M (3, -4, -1)$ на пряму $\frac{x+3}{2} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z-2}{1}$.

ВАРІАНТ № 3

1. Центр маси однорідного стержня знаходиться в точці $M(5,6)$. Один з його кінців в точці $P(1,-3)$. Визначити координати точки K другого кінця цього стержня.
2. Дано вершини однорідної трикутної пластинки $A(2,-1)$, $B(5,3)$, $C(-1,-5)$. Визначити координати її центра маси.
Вказівка: Центр маси знаходиться в точці перетину медіан.
3. Задано рівняння прямої лінії $3x - y + 5 = 0$. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M(-1,1)$:
 - 1) паралельно до даної прямої;
 - 2) перпендикулярно до даної прямої;
 - 3) утворює кут 45° з даною прямою.
4. Знайти точку M , симетричну точці $P(-1,-5)$ відносно прямої, яка проходить через точки $A(-2,3)$ і $B(6,-1)$.
5. Дано вершини трикутника $A(-3,-2)$, $B(5,4)$, $C(2,0)$. Потрібно: 1) скласти рівняння висоти, проведеної з вершини C і знайти її довжину; 2) знайти довжину перпендикуляра, опущеного з вершини B на медіану, яка проведена з вершини A ; 3) скласти рівняння бісектрис внутрішнього і зовнішнього кутів при вершині B ; 4) скласти рівняння перпендикуляра, опущеного з вершини C на бісектрису внутрішнього кута при вершині B .
6. Скласти рівняння катетів прямокутного рівнобедреного трикутника, знаючи рівняння гіпотенузи $y = 3x + 5$, вершину прямого кута $(4,-1)$.
7. Скласти рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі абсцис, симетрично відносно початку координат, знаючи що:
 - 1) $b = \sqrt{15}$, $\varepsilon = \frac{7}{8}$;
 - 2) $a = 8$, віддаль між директрисами рівна 64 ;
 - 3) $\varepsilon = \frac{1}{4}$, віддаль між директрисами рівна 32.
8. Привести рівняння кривої $9x^2 + 50y^2 - 216x + 200y + 1471 = 0$ до простішого виду і побудувати криву.
9. Дано рівняння гіперболи $x^2 - 16y^2 + 16 = 0$. Потрібно: 1) визначити півосі; 2) знайти фокуси; 3) обчислити ексцентриситет; 4) написати рівняння асимптот і директрис; 5) написати рівняння спряженої гіперболи, обчислити її ексцентриситет і написати рівняння її директрис; 6) побудувати обидві гіперболи.

10. Привести рівняння кривої $9x^2 - 16y^2 + 90x + 32y - 367 = 0$ до простішого виду і побудувати криву.
11. Задано рівняння параболи: 1) $y^2 - 6x + 14y + 49 = 0$; 2) $x^2 + 6x - 4y + 13 = 0$. Визначити координати вершини параболи, величину параметра P , скласти рівняння директриси і побудувати криву.
12. Скласти рівняння площини: 1) яка проходить через точку $M_1(3, -2, 2)$ перпендикулярно до вектора $\overline{M_1M_2}$; 2) яка проходить через точки $M_1(3, -2, 2)$ і $M_2(5, -3, 4)$ паралельно осі OZ .
13. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(0, 1, -1)$ паралельно площині, що проходить через точки $M_1(2, -4, -3)$, $M_2(1, -2, 5)$, $M_3(2, 4, -1)$.
14. Скласти рівняння площин, паралельних заданій площині і віддалених від неї на відстані d : $6x - 6y - 7z + 1 = 0$, $d = 4$.
15. Дві грані куба лежать на площинах. Обчислити об'єм цього куба $12x - 12y - 14z + z = 0$, $6x - 6y - 7z + 1 = 0$.
16. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(1, -2, 4)$ перпендикулярно до двох заданих площин $x + 2y - z - 1 = 0$, $2x - y + 4z - 3 = 0$.
17. Дано вершини трикутника $M_1(-1, 5, -6)$, $M_2(5, 1, 0)$, $M_3(2, -7, 6)$. Скласти параметричне рівняння медіани, проведеної з вершини M_3 .
18. Скласти канонічне рівняння прямої, яка проходить через точку $M(-1, 4, -2)$ паралельно до заданої прямої $\begin{cases} x - 2y + 3z - 4 = 0 \\ 2x + y - 2z + 1 = 0 \end{cases}$.
19. Дано рівняння руху точки $M(x, y, z)$. Визначити віддаль d , яку пройде ця точка за проміжок часу від $t_1 = 0$ до t_2 :
 $x = 5 - 2t$, $y = -3 + 2t$, $z = 5 - t$, $t_2 = 7$
20. Скласти рівняння проєкцій прямої на площину:
 $\begin{cases} x + 2y - z - 1 = 0 \\ 2x - y + 2z - 4 = 0 \end{cases}$, $x - 2y + 4z - 5 = 0$.
21. Знайти точку Q , симетричну точці $P(3, -3, -1)$ відносно площини
 $x - 2y - 2z + 7 = 0$.
22. Знайти проєкцію точки $M(1, -2, 1)$ на пряму $\frac{x-2}{1} = \frac{y+4}{-2} = \frac{z-5}{4}$.

ВАРІАНТ № 4

1. Центр маси однорідного стержня знаходиться в точці $M(-3,2)$. Один з його кінців в точці $P(3,4)$. Визначити координати точки K другого кінця цього стержня.
2. Дано вершини однорідної трикутної пластинки $A(6,7)$, $B(-4,3)$, $C(1,2)$. Визначити координати її центра маси.
Вказівка: Центр маси знаходиться в точці перетину медіан.
3. Задано рівняння прямої лінії $6x + 2y - 3 = 0$. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M(-1,4)$:
 - 1) паралельно до даної прямої;
 - 2) перпендикулярно до даної прямої;
 - 3) утворює кут 45° з даною прямою.
4. Знайти точку M , симетричну точці $P(1,7)$ відносно прямої, яка проходить через точки $A(-7,5)$ і $B(3,-1)$.
5. Дано вершини трикутника $A(1,1)$, $B(6,-11)$, $C(2,-8)$. Потрібно: 1) скласти рівняння висоти, проведеної з вершини C і знайти її довжину; 2) знайти довжину перпендикуляра, опущеного з вершини B на медіану, яка проведена з вершини A ; 3) скласти рівняння бісектрис внутрішнього і зовнішнього кутів при вершині B ; 4) скласти рівняння перпендикуляра, опущеного з вершини C на бісектрису внутрішнього кута при вершині B .
6. Дано рівняння двох сторін квадрату $4x - 3y + 3 = 0$, $4x - 3y - 17 = 0$ і одна з його вершин $A(2,-3)$. Скласти рівняння двох інших сторін цього квадрату.
7. Скласти рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі абсцис, симетрично відносно початку координат, знаючи що:
 - 1) $b = \sqrt{11}$, $e = \frac{5}{6}$;
 - 2) $a = 6$, віддаль між директрисами рівна 36 ;
 - 3) $e = \frac{1}{2}$, віддаль між директрисами рівна 64.
8. Привести рівняння кривої $2x^2 + y^2 + 8y - 4 = 0$ до простішого виду і побудувати криву.
9. Дано рівняння гіперболи $4x^2 - 9y^2 - 25 = 0$. Потрібно: 1) визначити півосі; 2) знайти фокуси; 3) обчислити ексцентриситет; 4) написати рівняння асимптот і директрис; 5) написати рівняння спряженої гіперболи, обчислити її ексцентриситет і написати рівняння її директрис; 6) побудувати обидві гіперболи.

10. Привести рівняння кривої $9x^2 - 25y^2 - 18x - 100y - 316 = 0$ до простішого виду і побудувати криву.
11. Задано рівняння параболи: 1) $x^2 - 6y + 14x + 49 = 0$; 2) $x = 4y^2 - 8y + 7$. Визначити координати вершини параболи, величину параметра P , скласти рівняння директриси і побудувати криву.
12. Скласти рівняння площини: 1) яка проходить через точку $M_1(0, -3, 4)$ перпендикулярно до вектора $\overline{M_1M_2}$; 2) яка проходить через точки $M_1(0, -3, 4)$ і $M_2(-1, -5, 3)$ паралельно осі OZ .
13. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(-1, 3, 4)$ паралельно площині, що проходить через точки $M_1(2, -1, -1)$, $M_2(4, -5, 6)$, $M_3(2, 3, -1)$.
14. Скласти рівняння площин, паралельних заданій площині і віддалених від неї на відстані d : $2x - 9y + 6z - 4 = 0$, $d = 6$.
15. Дві грані куба лежать на площинах. Обчислити об'єм цього куба $2x - 9y + 6z - 14 = 0$, $4x - 18y + 12z - 3 = 0$.
16. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(2, 1, -1)$ перпендикулярно до двох заданих площин $x - 3y + z - 4 = 0$, $2x - y + z + 1 = 0$.
17. Дано вершини трикутника $M_1(-2, -1, 0)$, $M_2(2, -3, 4)$, $M_3(4, -1, -6)$. Скласти параметричне рівняння медіани, проведеної з вершини M_3 .
18. Скласти канонічне рівняння прямої, яка проходить через точку $M(-1, 3, 4)$ паралельно до заданої прямої $\begin{cases} x - 2y + z - 4 = 0 \\ 2x + 3y - 3z + 1 = 0 \end{cases}$.
19. Дано рівняння руху точки $M(x, y, z)$. Визначити віддаль d , яку пройде ця точка за проміжок часу від $t_1 = 0$ до t_2 :
 $x = -1 + 10t$, $y = 3 - 2t$, $z = 1 + 11t$, $t_2 = 4$.
20. Скласти рівняння проєкцій прямої на площину:
 $\begin{cases} x - 4y + z - 3 = 0 \\ 2x + 2y + z - 4 = 0 \end{cases}$, $x - 5y + 4z - 6 = 0$.
21. Знайти точку Q , симетричну точці $P(-3, 1, 2)$ відносно площини $3x - y + 4z - 50 = 0$.
22. Знайти проєкцію точки $M(4, 2, 1)$ на пряму $\frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-3}{-2}$.

ВАРІАНТ № 5

1. Центр маси однорідного стержня знаходиться в точці $M(2, -3)$. Один з його кінців в точці $P(4, 6)$. Визначити координати точки K другого кінця цього стержня.
2. Дано вершини однорідної трикутної пластинки $A(-5, 4)$, $B(3, 2)$, $C(-4, 3)$. Визначити координати її центра маси.
Вказівка: Центр маси знаходиться в точці перетину медіан.
3. Задано рівняння прямої лінії $21x - 7y + 2 = 0$. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M(-2, 1)$:
 - 1) паралельно до даної прямої;
 - 2) перпендикулярно до даної прямої;
 - 3) утворює кут 45° з даною прямою.
4. Знайти точку M , симетричну точці $P(-8, -8)$ відносно прямої, яка проходить через точки $A(3, -1)$ і $B(-7, 5)$.
5. Дано вершини трикутника $A(-1, -4)$, $B(8, 8)$, $C(4, 5)$. Потрібно: 1) скласти рівняння висоти, проведеної з вершини C і знайти її довжину; 2) знайти довжину перпендикуляра, опущеного з вершини B на медіану, яка проведена з вершини A ; 3) скласти рівняння бісектрис внутрішнього і зовнішнього кутів при вершині B ; 4) скласти рівняння перпендикуляра, опущеного з вершини C на бісектрису внутрішнього кута при вершині B .
6. Точка $A(5, -1)$ являється вершиною квадрату, одна з сторін якого лежить на прямій $4x - 3y - 7 = 0$. Скласти рівняння прямих, на яких лежать інші сторони квадрату.
7. Скласти рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі абсцис, симетрично відносно початку координат, знаючи що:
 - 1) $a = 5$, $c = 3$;
 - 2) $c = 12$, $e = \frac{3}{5}$;
 - 3) $c = 5$, віддаль між директрисами рівна 14.
8. Привести рівняння кривої $25x^2 + 16y^2 + 150x - 128y + 81 = 0$ до простішого виду і побудувати криву.
9. Дано рівняння гіперболи $25x^2 - 16y^2 - 400 = 0$. Потрібно: 1) визначити півосі; 2) знайти фокуси; 3) обчислити ексцентриситет; 4) написати рівняння асимптот і директрис; 5) написати рівняння спряженої гіперболи, обчислити її ексцентриситет і написати рівняння її директрис; 6) побудувати обидві гіперболи.

10. Привести рівняння кривої $25x^2 - 9y^2 + 100x + 18y + 316 = 0$ до простішого виду і побудувати криву.
11. Задано рівняння параболи: 1) $x^2 - 10y - 2x - 19 = 0$; 2) $x = -\frac{1}{4}y^2 + y$.
Визначити координати вершини параболи, величину параметра P , скласти рівняння директриси і побудувати криву.
12. Скласти рівняння площини: 1) яка проходить через точку $M_1 (-1, 3, -4)$ перпендикулярно до вектора $\overrightarrow{M_1 M_2}$; 2) яка проходить через точки $M_1 (-1, 3, -4)$ і $M_2 (-7, 5, 6)$ паралельно осі OZ .
13. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_0 (1, -3, -5)$ паралельно площині, що проходить через точки $M_1 (1, -3, 9)$, $M_2 (3, -5, -4)$,
 $M_3 (1, -2, 4)$.
14. Скласти рівняння площин, паралельних заданій площині і віддалених від неї на відстані d : $15x - 10y - 6z + 5 = 0$, $d = 4$.
15. Дві грані куба лежать на площинах. Обчислити об'єм цього куба $15x - 10y - 6z + 5 = 0$, $15x - 10y - 6z - 1 = 0$.
16. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_0 (1, -2, -3)$ перпендикулярно до двох заданих площин
 $2x + 2y - z + 1 = 0$, $x + y - 3z + 5 = 0$.
17. Дано вершини трикутника $M_1 (3, -5, 6)$, $M_2 (1, 1, 0)$, $M_3 (-2, 3, 2)$. Скласти параметричне рівняння медіани, проведеної з вершини M_3 .
18. Скласти канонічне рівняння прямої, яка проходить через точку $M (-1, 2, -4)$ паралельно до заданої прямої $\begin{cases} 2x - y + z - 4 = 0 \\ x + 3y - 2z + 5 = 0 \end{cases}$.
19. Дано рівняння руху точки $M (x, y, z)$. Визначити віддаль d , яку пройде ця точка за проміжок часу від $t_1 = 0$ до t_2 :
 $x = -4 + 2t$, $y = -1 - 9t$, $z = 5 + 6t$, $t_2 = 3$.
20. Скласти рівняння проєкцій прямої на площину:
 $\begin{cases} 3x - y - 2z + 1 = 0 \\ x + 2y - z - 3 = 0 \end{cases}$, $2x + 3y - z - 2 = 0$.
21. Знайти точку Q , симетричну точці $P (1, -1, -1)$ відносно площини $x + 4y - 3z + 26 = 0$.
22. Знайти проєкцію точки $M (-2, 1, 0)$ на пряму $\frac{x-4}{4} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z+3}{2}$.

ВАРІАНТ № 6

1. Центр маси однорідного стержня знаходиться в точці $M(1, -2)$. Один з його кінців в точці $P(2, 5)$. Визначити координати точки K другого кінця цього стержня.
2. Дано вершини однорідної трикутної пластинки $A(7, -8)$, $B(6, 5)$, $C(2, 6)$. Визначити координати її центра маси.
Вказівка: Центр маси знаходиться в точці перетину медіан.
3. Задано рівняння прямої лінії $21x + 3y - 4 = 0$. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M(3, -2)$:
 - 1) паралельно до даної прямої;
 - 2) перпендикулярно до даної прямої;
 - 3) утворює кут 45° з даною прямою.
4. Знайти точку M , симетричну точці $P(-8, 12)$ відносно прямої, яка проходить через точки $A(2, -3)$ і $B(-5, 1)$.
5. Дано вершини трикутника $A(3, 4)$, $B(-9, -5)$, $C(-6, -1)$. Потрібно: 1) скласти рівняння висоти, проведеної з вершини C і знайти її довжину; 2) знайти довжину перпендикуляра, опущеного з вершини B на медіану, яка проведена з вершини A ; 3) скласти рівняння бісектрис внутрішнього і зовнішнього кутів при вершині B ; 4) скласти рівняння перпендикуляра, опущеного з вершини C на бісектрису внутрішнього кута при вершині B .
6. Скласти рівняння сторін квадрату знаючи що, одна з його вершин $A(2, -4)$ і точка перетину діагоналей $M(5, 2)$.
7. Скласти рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі абсцис, симетрично відносно початку координат, знаючи що:
 - 1) $b = \sqrt{23}$, $e = \frac{11}{12}$;
 - 2) $a = 4$, віддаль між директрисами рівна 16 ;
 - 3) $e = \frac{1}{3}$, віддаль між директрисами рівна 18.
8. Привести рівняння кривої $x^2 + 2y^2 + 8x - 4 = 0$ до простішого виду і побудувати криву.
9. Дано рівняння гіперболи $9x^2 - 64y^2 - 576 = 0$. Потрібно: 1) визначити півосі; 2) знайти фокуси; 3) обчислити ексцентриситет; 4) написати рівняння асимптот і директрис; 5) написати рівняння спряженої гіперболи, обчислити її ексцентриситет і написати рівняння її директрис; 6) побудувати обидві гіперболи.

10. Привести рівняння кривої $5x^2 - 6y^2 + 10x - 12y - 31 = 0$ до простішого виду і побудувати криву.
11. Задано рівняння параболи: 1) $y^2 - 6x + 14y + 43 = 0$; 2) $y = \frac{1}{4}x^2 + x + 2$. Визначити координати вершини параболи, величину параметра P , скласти рівняння директриси і побудувати криву.
12. Скласти рівняння площини: 1) яка проходить через точку $M_1 (1, 2, -4)$ перпендикулярно до вектора $\overrightarrow{M_1 M_2}$; 2) яка проходить через точки $M_1 (1, 2, -4)$ і $M_2 (-3, 4, 5)$ паралельно осі OZ .
13. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_0 (-2, 4, 3)$ паралельно площині, що проходить через точки $M_1 (1, 1, -2)$, $M_2 (4, -1, 1)$, $M_3 (-2, 1, -3)$.
14. Скласти рівняння площин, паралельних до заданої площини і віддалених від неї на відстані d : $4x - 4y + 2z + 9 = 0$, $d = 7$.
15. Дві грані куба лежать на площинах. Обчислити об'єм цього куба $2x - 2y + z - 3 = 0$, $4x - 4y + 2z + 1 = 0$.
16. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_0 (-2, 1, 3)$ перпендикулярно до двох заданих площин $x - y + 2z - 4 = 0$, $2x + 2y - z + 5 = 0$.
17. Дано вершини трикутника $M_1 (-2, 3, 4)$, $M_2 (-2, 1, 4)$, $M_3 (3, -2, 5)$. Скласти параметричні рівняння медіани, проведеної з вершини M_3 .
18. Скласти канонічні рівняння прямої, яка проходить через точку $M (2, -3, 3)$ паралельно до заданої прямої $\begin{cases} x - 3y + 4z - 1 = 0 \\ 2x + 5y - z + 3 = 0 \end{cases}$.
19. Дано рівняння руху точки $M (x, y, z)$. Визначити віддаль d , яку пройде ця точка за проміжок часу від $t_1 = 0$ до t_2 : $x = -2 + 15t$, $y = 3 - 10t$, $z = -1 + 6t$, $t_2 = 3$.
20. Скласти рівняння проєкцій прямої на площину:
- $$\begin{cases} x - 3y + 4z - 2 = 0 \\ 2x + 4y - 3z + 3 = 0 \end{cases}, 3x - 2y - 2z + 1 = 0.$$
21. Знайти точку Q , симетричну точці $P (-1, 2, 3)$ відносно площини $4x + 2y - 3z + 67 = 0$.
22. Знайти проєкцію точки $M (-6, -5, 4)$ на пряму $\frac{x-1}{4} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+4}{-1}$.

ВАРІАНТ № 7

1. Центр маси однорідного стержня знаходиться в точці $M(-3,5)$. Один з його кінців в точці $P(2,4)$. Визначити координати точки K другого кінця цього стержня.
2. Дано вершини однорідної трикутної пластинки $A(3,9)$, $B(4,-11)$, $C(2,-1)$. Визначити координати її центра маси.
Вказівка: Центр маси знаходиться в точці перетину медіан.
3. Задано рівняння прямої лінії $4x + 2y - 3 = 0$. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M(-3,4)$:
 - 1) паралельно до даної прямої;
 - 2) перпендикулярно до даної прямої;
 - 3) утворює кут 45° з даною прямою.
4. Знайти точку M , симетричну точці $P(-1,-4)$ відносно прямої, яка проходить через точки $A(-7,3)$ і $B(-3,5)$.
5. Дано вершини трикутника $A(4,5)$, $B(-5,-7)$, $C(3,-1)$. Потрібно: 1) скласти рівняння висоти, проведеної з вершини C і знайти її довжину; 2) знайти довжину перпендикуляра, опущеного з вершини B на медіану, яка проведена з вершини A ; 3) скласти рівняння бісектрис внутрішнього і зовнішнього кутів при вершині B ; 4) скласти рівняння перпендикуляра, опущеного з вершини C на бісектрису внутрішнього кута при вершині B .
6. З точки $A(6,9)$ направлений промінь під кутом $\frac{\pi}{4}$ до прямої $y = 0,4x + 0,8$. Знайти рівняння променя, який відбивається цією прямою.
7. Скласти рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі абсцис, симетрично відносно початку координат, знаючи що:
 - 1) $c = 6$, $a = 10$;
 - 2) $b = 12$, $\varepsilon = \frac{5}{13}$;
 - 3) $b = 2$, віддаль між директрисами рівна 10.
8. Привести рівняння кривої $4x^2 + y^2 - 16x + 4y - 8 = 0$ до простішого виду і побудувати криву.
9. Дано рівняння гіперболи $9x^2 - 36y^2 - 324 = 0$. Потрібно: 1) визначити півосі; 2) знайти фокуси; 3) обчислити ексцентриситет; 4) написати рівняння асимптот і директрис; 5) написати рівняння спряженої гіперболи, обчислити її ексцентриситет і написати рівняння її директрис; 6) побудувати обидві гіперболи.

10. Привести рівняння кривої $x^2 - 4y^2 + 6x + 5 = 0$ до простішого виду і побудувати криву.
11. Задано рівняння параболи: 1) $y^2 + 4y - x + 8 = 0$, 2) $y = x^2 - 6x + 12$. Визначити координати вершини параболи, величину параметра P , скласти рівняння директриси і побудувати криву.
12. Скласти рівняння площини: 1) яка проходить через точку $M_1 (2, -4, 5)$ перпендикулярно до вектора $\overrightarrow{M_1 M_2}$; 2) яка проходить через точки $M_1 (2, -4, 5)$ і $M_2 (3, 7, 6)$ паралельно осі OZ .
13. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_0 (3, -5, 2)$ паралельно площині, що проходить через точки $M_1 (2, -4, 6)$, $M_2 (-3, 2, 4)$, $M_3 (-1, -2, 2)$.
14. Скласти рівняння площин, паралельних до заданої площини і віддалених від неї на відстані d : $22x + 4y - 20z - 11 = 0$, $d = 5$.
15. Дві грані куба лежать на площинах. Обчислити об'єм цього куба $7x - 6y + 6z - 2 = 0$, $7x - 6y + 6z + 3 = 0$.
16. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_0 (1, -2, 4)$ перпендикулярно до двох заданих площин $x + 2y + 3z - 1 = 0$, $4x - y - 2z - 3 = 0$.
17. Дано вершини трикутника $M_1 (1, -3, 5)$, $M_2 (1, -1, 1)$, $M_3 (2, -8, 9)$. Скласти параметричні рівняння медіани, проведеної з вершини M_3 .
18. Скласти канонічні рівняння прямої, яка проходить через точку $M (-1, 1, 3)$ паралельно до заданої прямої $\begin{cases} 2x - 4y + z - 7 = 0 \\ x + 3y - 2z + 1 = 0 \end{cases}$.
19. Дано рівняння руху точки $M (x, y, z)$. Визначити віддаль d , яку пройде ця точка за проміжок часу від $t_1 = 0$ до t_2 :
 $x = -3 + 2t$, $y = 2 - 6t$, $z = 3 + 3t$, $t_2 = 5$.
20. Скласти рівняння проєкцій прямої на площину:
 $\begin{cases} 2x - 3y + z - 4 = 0 \\ x + y - z - 3 = 0 \end{cases}$; $x + 5y - 4z + 3 = 0$.
21. Знайти точку Q , симетричну точці $P (2, -3, 1)$ відносно площини $2x - 3y + 4z + 12 = 0$.
22. Знайти проєкцію точки $M(3, 4, -2)$ на пряму $\frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-2}{-1}$.

ВАРІАНТ № 8

1. Центр маси однорідного стержня знаходиться в точці $M(2, -4)$. Один з його кінців в точці $P(3, 1)$. Визначити координати точки K другого кінця цього стержня.
2. Дано вершини однорідної трикутної пластинки $A(6, 5)$, $B(-4, 3)$, $C(4, 1)$. Визначити координати її центра маси. Вказівка: Центр маси знаходиться в точці перетину медіан.
3. Задано рівняння прямої лінії $6x - 3y + 1 = 0$. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M(4, -5)$:
 - 1) паралельно до даної прямої;
 - 2) перпендикулярно до даної прямої;
 - 3) утворює кут 45° з даною прямою.
4. Знайти точку M , симетричну точці $P(1, -8)$ відносно прямої, яка проходить через точки $A(-3, 5)$ і $B(-7, 3)$.
5. Дано вершини трикутника $A(2, 4)$, $B(5, 8)$, $C(-7, -1)$. Потрібно: 1) скласти рівняння висоти, проведеної з вершини C і знайти її довжину; 2) знайти довжину перпендикуляра, опущеного з вершини B на медіану, яка проведена з вершини A ; 3) скласти рівняння бісектрис внутрішнього і зовнішнього кутів при вершині B ; 4) скласти рівняння перпендикуляра, опущеного з вершини C на бісектрису внутрішнього кута при вершині B .
6. Точка $A(-1, 1)$ являється вершиною квадрату; одна з сторін якого лежить на прямій $8x - 6y + 3 = 0$. Скласти рівняння прямих, на яких лежать інші сторони цього квадрату.
7. Скласти рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі абсцис, симетрично відносно початку координат, знаючи що:
 - 1) $c = 5$, $a = 12$;
 - 2) $b = 4$, $\varepsilon = 0,6$;
 - 3). $\varepsilon = \frac{3}{4}$, віддаль між директрисами рівна $\frac{64}{3}$.
8. Привести рівняння кривої $50x^2 + 9y^2 + 200x - 216y + 1471 = 0$ до простішого виду і побудувати криву.
9. Дано рівняння гіперболи $4x^2 - y^2 - 16 = 0$. Потрібно: 1) визначити півосі; 2) знайти фокуси; 3) обчислити ексцентриситет; 4) написати рівняння асимптот і директрис; 5) написати рівняння спряженої гіперболи, обчислити її ексцентриситет і написати рівняння її директрис; 6) побудувати обидві гіперболи.

10. Привести рівняння кривої $3x^2 - y^2 + 12x - 4y - 4 = 0$ до простішого виду і побудувати криву.
11. Задано рівняння параболи: 1) $y = -\frac{1}{4}x^2 + x$; 2) $y^2 + x - 2y + 1 = 0$.
Визначити координати вершини параболи, величину параметра P , скласти рівняння директриси і побудувати криву.
12. Скласти рівняння площини: 1) яка проходить через точку $M_1 (-4, 5, 6)$ перпендикулярно до вектора $\overrightarrow{M_1 M_2}$; 2) яка проходить через точки $M_1 (-4, 5, 6)$ і $M_2 (-7, 8, 2)$ паралельно осі OZ .
13. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_0 (2, -2, 3)$ паралельно площині, що проходить через точки $M_1 (-3, 4, 5)$, $M_2 (-2, -3, 7)$, $M_3 (2, -1, 4)$.
14. Скласти рівняння площин, паралельних до заданої площини і віддалених від неї на відстані d : $4x - 12y + 6z - 5 = 0$, $d = 6$.
15. Дві грані куба лежать на площинах. Обчислити об'єм цього куба $16x - 12y + 15z - 1 = 0$, $16x - 12y + 15z + 4 = 0$.
16. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_0 (-3, 0, 5)$ перпендикулярно до двох заданих площин $2x - y - z + 4 = 0$, $3x + 4y - 5z + 1 = 0$.
17. Дано вершини трикутника $M_1 (-2, 4, -6)$, $M_2 (-4, 0, 2)$, $M_3 (-5, -2, 1)$. Скласти параметричні рівняння медіани, проведеної з вершини M_3 .
18. Скласти канонічні рівняння прямої, яка проходить через точку $M (2, 4, -6)$

паралельно до заданої прямої
$$\begin{cases} x + 3y - 4z + 2 = 0 \\ x - 2y - 2z - 3 = 0 \end{cases}$$

19. Дано рівняння руху точки $M (x, y, z)$. Визначити віддаль d , яку пройде ця точка за проміжок часу від $t_1 = 0$ до t_2 :
 $x = -4 + 5t$, $y = -3$, $z = -1 - 12t$, $t_2 = 6$.

20. Скласти рівняння проєкцій прямої на площину:

$$\begin{cases} 3x - 4y + 5z - 1 = 0 \\ 2x + y - z + 2 = 0 \end{cases} ; 3x - 6y + z - 2 = 0.$$

21. Знайти точку Q , симетричну точці $P (3, 5, -6)$ відносно площини $3x - 2y - 4z + 6 = 0$.

22. Знайти проєкцію точки $M (4, -1, 1)$ на пряму $\frac{x-2}{1} = \frac{y+4}{2} = \frac{z-5}{-1}$.

ВАРІАНТ № 9

1. Центр маси однорідного стержня знаходиться в точці $M(-1,-2)$. Один з його кінців в точці $P(-4,6)$. Визначити координати точки K другого кінця цього стержня.
2. Дано вершини однорідної трикутної пластинки $A(-4,3)$, $B(2,-1)$, $C(-1,4)$. Визначити координати її центра маси.
Вказівка: Центр маси знаходиться в точці перетину медіан.
3. Задано рівняння прямої лінії $18x + 3y - 2 = 0$. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M(-4,-1)$:
 - 1) паралельно до даної прямої;
 - 2) перпендикулярно до даної прямої;
 - 3) утворює кут 45° з даною прямою.
4. Знайти точку M , симетричну точці $P(3,2)$ відносно прямої, яка проходить через точки $A(2,6)$ і $B(4,-2)$.
5. Дано вершини трикутника $A(-8,-3)$, $B(-5,-1)$, $C(-1,4)$. Потрібно:
 - 1) скласти рівняння висоти, проведеної з вершини C і знайти її довжину;
 - 2) знайти довжину перпендикуляра, опущеного з вершини B на медіану, яка проведена з вершини A ;
 - 3) скласти рівняння бісектрис внутрішнього і зовнішнього кутів при вершині B ;
 - 4) скласти рівняння перпендикуляра, опущеного з вершини C на бісектрису внутрішнього кута при вершині B .
6. Дані рівняння двох сторін квадрату $3x - 4y + 9 = 0$, $3x - 4y - 11 = 0$ і одна з його вершин $A(1,-2)$. Скласти рівняння двох других сторін цього квадрату.
7. Скласти рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі абсцис, симетрично відносно початку координат, знаючи що:
 - 1) $c = 3$, $b = 4$;
 - 2) $e = \frac{3}{4}$, $a = 8$;
 - 3) $b = 1$, віддаль між директрисами рівна $\frac{8}{\sqrt{3}}$.
8. Привести рівняння кривої $x^2 + y^2 + 6x - 2y - 5 = 0$ до простішого виду і побудувати криву.
9. Дано рівняння гіперболи $x^2 - 16y^2 + 64 = 0$. Потрібно: 1) визначити півосі; 2) знайти фокуси; 3) обчислити ексцентриситет; 4) написати рівняння асимптот і директрис; 5) написати рівняння спряженої

гіперболи, обчислити її ексцентриситет і написати рівняння її директрис; б) побудувати обидві гіперболи.

10. Привести рівняння кривої $6x^2 - 5y^2 + 12x - 10y + 31 = 0$ до простішого виду і побудувати криву.

11. Задано рівняння параболи: 1) $x^2 - 6x - y + 7 = 0$; 2) $y^2 + 4y + 4x = 0$. Визначити координати вершини параболи, величину параметра P , скласти рівняння директриси і побудувати криву.

12. Скласти рівняння площини: 1) яка проходить через точку $M_1(4, -3, 7)$ перпендикулярно до вектора $\overline{M_1M_2}$; 2) яка проходить через точки $M_1(4, -3, 7)$ і $M_2(5, 6, -8)$ паралельно осі OZ .

13. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(1, -3, 4)$ паралельно площині, що проходить через точки $M_1(4, 2, -1)$, $M_2(7, -2, 3)$, $M_3(8, -1, 5)$.

14. Скласти рівняння площин, паралельних до заданої площини і віддалених від неї на відстані d : $5x + 12z - 3 = 0$, $d = 9$.

15. Дві грані куба лежать на площинах. Обчислити об'єм цього куба $6x - 18y + 9z - 4 = 0$, $6x - 18y + 9z + 1 = 0$.

16. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(-2, 1, 4)$ перпендикулярно до двох заданих площин $x - 3y + 4z - 5 = 0$, $x + 7y - 3z - 3 = 0$.

17. Дано вершини трикутника $M_1(2, -7, 6)$, $M_2(2, -1, 0)$, $M_3(-3, 4, 1)$. Скласти параметричні рівняння медіани, проведеної з вершини M_3 .

18. Скласти канонічні рівняння прямої, яка проходить через точку $M(5, -6, 7)$

паралельно до заданої прямої
$$\begin{cases} x - 4y - z - 1 = 0 \\ 2x + y + 3z - 12 = 0 \end{cases}$$

19. Дано рівняння руху точки $M(x, y, z)$. Визначити віддаль d , яку пройде ця точка за проміжок часу від $t_1 = 0$ до t_2 :

$$x = 5 + 4t, \quad y = -2 + 3t, \quad z = 3, \quad t_2 = 4.$$

20. Скласти рівняння проєкцій прямої на площину:

$$\begin{cases} x - 3y + 5z - 3 = 0 \\ 3x + 2y - z + 1 = 0 \end{cases}; \quad x - 3y - 2z + 1 = 0.$$

21. Знайти точку Q , симетричну точці $P(-1, 4, -3)$ відносно площини $2x + 2y - z + 9 = 0$.

22. Знайти проєкцію точки $M(-2, 1, -3)$ на пряму $\frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{1}$.

ВАРІАНТ № 10

1. Центр маси однорідного стержня знаходиться в точці $M(2,7)$. Один з його кінців в точці $P(3, 1)$. Визначити координати точки K другого кінця цього стержня.
2. Дано вершини однорідної трикутної пластинки $A(1,-5)$, $B(2,4)$, $C(3,-2)$. Визначити координати її центра маси. Вказівка: Центр маси знаходиться в точці перетину медіан.
3. Задано рівняння прямої лінії $5x+10y-4=0$. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M(-1,3)$:
 - 1) паралельно до даної прямої;
 - 2) перпендикулярно до даної прямої;
 - 3) утворює кут 45° з даною прямою.
4. Знайти точку M , симетричну точці $P(7,3)$ відносно прямої, яка проходить через точки $A(4,-2)$ і $B(2,6)$.
5. Дано вершини трикутника $A(3,0)$, $B(6,4)$, $C(2,1)$. Потрібно: 1) скласти рівняння висоти, проведеної з вершини C і знайти її довжину; 2) знайти довжину перпендикуляра, опущеного з вершини B на медіану, яка проведена з вершини A ; 3) скласти рівняння бісектрис внутрішнього і зовнішнього кутів при вершині B ; 4) скласти рівняння перпендикуляра, опущеного з вершини C на бісектрису внутрішнього кута при вершині B .
6. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку $A(2,-1)$ і утворює з віссю OX кут, в два рази більший кута, який утворює з віссю OX пряма $y = \frac{x}{3} + \frac{4}{3}$.
7. Скласти рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі абсцис, симетрично відносно початку координат, знаючи що:
 - 1) $c = 6$, $b = 4$;
 - 2) $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $b = 1$;
 - 3) $e = \frac{5}{13}$, віддаль між директрисами рівна $\frac{338}{5}$.
8. Привести рівняння кривої $x^2 + 4y^2 + 4x - 16y - 8 = 0$ до простішого виду і побудувати криву.
9. Дано рівняння гіперболи $25x^2 - 16y^2 + 1 = 0$. Потрібно: 1) визначити півосі; 2) знайти фокуси; 3) обчислити ексцентриситет; 4) написати рівняння асимптот і директрис; 5) написати рівняння

- спряженої гіперболи, обчислити її ексцентриситет і написати рівняння її директрис; б) побудувати обидві гіперболи.
10. Привести рівняння кривої $4x^2 - y^2 - 6y - 5 = 0$ до простішого виду і побудувати криву.
11. Задано рівняння параболи: 1) $x^2 + 4x + y - 8 = 0$; 2) $x = y^2 - 8y + 15$. Визначити координати вершини параболи, величину параметра P , скласти рівняння директриси і побудувати криву.
12. Скласти рівняння площини: 1) яка проходить через точку $M_1(5,6,8)$ перпендикулярно до вектора $\overline{M_1M_2}$; 2) яка проходить через точки $M_1(5,6,8)$, $M_2(-6,1,2)$ паралельно осі OZ .
13. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(-3,4,6)$ паралельно площині, що проходить через точки $M_1(2,3,1)$, $M_2(-1,2,5)$, $M_3(6,-4,1)$.
14. Скласти рівняння площин, паралельних до заданої площини і віддалених від неї на відстані d : $3x + 4y - 11 = 0$, $d = 4$.
15. Дві грані куба лежать на площинах. Обчислити об'єм цього куба $3x - 4y - 11 = 0$, $3x - 4y + 5 = 0$.
16. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(1,-2,-3)$ перпендикулярно до двох заданих площин $2x - 4y + 5z - 1 = 0$, $x - 3y - 4z + 5 = 0$.
17. Дано вершини трикутника $M_1(5,-4,3)$, $M_2(-1,2,1)$, $M_3(-2,3,4)$. Скласти параметричні рівняння медіани, проведеної з вершини M_3 .
18. Скласти канонічні рівняння прямої, яка проходить через точку $M(6,-4,3)$ паралельно до заданої прямої $\begin{cases} 2x - 3y - z - 3 = 0 \\ x + 4y + z - 1 = 0 \end{cases}$.
19. Дано рівняння руху точки $M(x, y, z)$. Визначити віддаль d , яку пройде ця точка за проміжок часу від $t_1 = 0$ до t_2 :
 $x = -2 + 16t$, $y = 3 - 12t$, $z = 1 - 15t$, $t_2 = 2$.
20. Скласти рівняння проєкцій прямої на площину:
 $\begin{cases} 2x - y + z - 3 = 0 \\ x + 2y - 2z - 1 = 0 \end{cases}$; $x - 2y - z + 4 = 0$.
21. Знайти точку Q , симетричну точці $P(1,3,-2)$ відносно площини $2x + y - 2z = 0$.
22. Знайти проєкцію точки $M(-2,2,-1)$ на пряму $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{1}$.