МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ТЕРНОПІЛЬСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ІВАНА ПУЛЮЯ

Кафедра вищої математики

Конспект лекцій
із
ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

Частина 1: лінійна алгебра

ТЕРНОПІЛЬ
2014 р.

УДК 517.2
ББК 22.161.6
Г12

Укладач
Г. В. Габрусєв

Рецензент
Лотоцький В. А.,
к.ф.-м.н., доц., зав. каф. математики
і методики її навчання ТНПУ ім. В. Гнатюка

Затверджено на засіданні кафедри вищої математики.
Протокол № 8 від «27» лютого 2014 р.

Схвалено та рекомендовано до друку науково-методичною радою
Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя.
Протокол № 6 від «13» березня 2014 р.

Г12 Г.В. Габрусєв. Конспект лекцій із вищої математики (частина 1 : лінійна алгебра) – Тернопіль : Вид-во ТНТУ імені Івана Пулюя, 2014. – 36 с.

ЗМІСТ

Тема 1: Визначники 4

1.1. Визначники другого і третього порядків та їх властивості 4

1.2. Розклад визначника за елементами рядка або стовпця 7

1.3. Поняття про визначники вищих порядків 9

Тема 2: Матриці 12

2.1. Основні означення 12

2.2. Дії над матрицями 13

2.3. Обернена матриця 17

2.4. Ранг матриці 20

Тема 3: Системи лінійних рівнянь 23

3.1. Основні означення 23

3.2. Розв'язування систем лінійних рівнянь за формулами Крамера 24

3.3. Матричний запис системи лінійних рівнянь і її розв'язування 27

3.4. Розв'язування систем лінійних рівнянь методом Гаусса 29

3.5. Однорідна система лінійних рівнянь 32

3.6. Критерій сумісності системи лінійних рівнянь 36

Тема 1: Визначники

1.1. Визначники другого і третього порядків та їх властивості

Вираз

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \qquad (1)$$

називається *визначником (детермінантом) другого порядку.*

Поняття «визначник» (від латинського determine – визначаю) ввів Готфрід Вільгельм Лейбніц – провідний німецький філософ, логік, математик, фізик, мовознавець та дипломат.

Вираз

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11} \qquad (2)$$

називається *визначником (детермінантом) третього порядку.*

Символи a_{ij} називаються елементами визначника, причому перший індекс i показує номер рядка, а другий індекс j – номер стовпця, на перетині яких стоїть даний елемент. Так, елемент a_{23} стоїть у другому рядку і третьому стовпці.

Елементи a_{11}, a_{22} у визначнику (1) і a_{11}, a_{22}, a_{33} у визначнику (2) складають головну діагональ визначника, а елементи a_{12}, a_{21} і a_{13}, a_{22}, a_{31} в тих самих визначниках – побічну діагональ.

Для обчислення визначника другого порядку потрібно від добутку елементів, що стоять на головній діагоналі, відняти добуток елементів, розміщених на побічній діагоналі.

Визначник третього порядку обчислюється за правилом трикутників: перші три доданки в правій частині формули (2) є добутками елементів, що стоять на головній діагоналі і в вершинах двох трикутників, у яких одна сторона паралельна головній діагоналі. Аналогічно утворюються доданки із знаком мінус, де за основу береться побічна діагональ.

Приклад. Обчислити визначники:

а) $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

За формулами (1) і (2) маємо:

а) $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2\cdot 5-(-4)\cdot 3 = 22$;

б) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$;

в) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2\cdot(-2)\cdot 3 + 5\cdot 2\cdot 4 + 3\cdot 1\cdot 1 - 1\cdot(-2)\cdot 4 - 1\cdot 2\cdot 2 - 3\cdot 5\cdot 3 = -10$.

Розглянемо (на прикладі визначників третього порядку) *основні властивості визначників.*

1. Визначник не зміниться, якщо його рядки замінити відповідними стовпцями:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Ця властивість доводиться безпосередньо перевіркою: достатньо розкрити обидва визначники за формулою (2). Властивість 1 встановлює рівноправність рядків і стовпців визначника. Тому всі подальші властивості справедливі і для рядків і для стовпців. Доводяться вони, як і властивість 1, перевіркою.

2. Якщо переставити місцями два рядки (стовпці), то визначник поміняє знак. Наприклад,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

3. Якщо один з рядків (стовпців) визначника складається тільки з нулів, то визначник дорівнює нулю. Наприклад,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

4. Якщо визначник має два однакових рядки (стовпці), то він дорівнює нулю. Наприклад,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a & b & c \\ a & b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a & a_{13} \\ b & b & a_{23} \\ c & c & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

5. Спільний множник, що міститься в усіх елементах одного рядка (стовпця), можна винести за знак визначника. Наприклад,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & ka_{33} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

6. Якщо у визначнику елементи двох рядків (стовпців) пропорційні, то визначник дорівнює нулю.

7. Якщо кожен елемент n-го рядка (n-го стовпця) є сума двох доданків, то такий визначник дорівнює сумі двох визначників, у одного з яких n-й рядок (n-й стовпець) складається з перших доданків, а у другого – з других; інші елементи усіх трьох визначників однакові. Наприклад,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} & a_{13} \\ a_{21} & b_{22} & a_{23} \\ a_{31} & b_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

8. Визначник не зміниться, якщо до елементів одного рядка (стовпця) додати відповідні елементи іншого рядка (стовпця), помножені на одне й те саме число. Наприклад,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} + ka_{13} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + ka_{23} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} + ka_{33} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

1.2. Розклад визначника за елементами рядка або стовпця

Нехай задано визначник третього порядку

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \quad (3)$$

Мінором M_{ij} елемента a_{ij} визначника називається визначник, який утворюється з даного визначника в результаті викреслювання i-го рядка та j-го стовпця. Наприклад, для визначника (3) мінорами елементів a_{23} і a_{32} є такі визначники:

$$M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}; \; M_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} називається його мінор, взятий зі знаком $(-1)^{i+j}$, тобто

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}. \quad (4)$$

Наприклад, якщо $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 5 & 4 & -3 \end{vmatrix}$, то $A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -5$.

Тепер сформулюємо і доведемо теореми про розклад визначника за елементами рядка (стовпця).

Теорема 1. *Визначник дорівнює сумі добутків елементів якого-небудь рядка (стовпця) на їх алгебраїчні доповнення.*

Покажемо, що для визначника (3) виконуються такі рівності:

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}; \qquad \Delta = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31};$$

$$\Delta = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}; \qquad \Delta = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}; \quad (5)$$

$$\Delta = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}; \qquad \Delta = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}.$$

Доведемо, наприклад, першу з них.

Розкриваючи визначник (3) за формулою (2) і групуючи доданки, що містять елементи першого рядка, маємо

$$\Delta = a_{11}\left(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}\right) + a_{12}\left(a_{31}a_{23} - a_{21}a_{33}\right) + a_{13}\left(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}\right).$$

За формулою (4) вирази у дужках, відповідно дорівнюють алгебраїчним доповненням A_{11}, A_{12}, A_{13}, тому

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}.$$

Аналогічно доводяться й інші рівності.

Запис визначника за будь-якою з формул (5) називають *розкладом визначника* за елементами відповідного рядка чи стовпця.

Приклад. Обчислити визначник $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix}$, розкладаючи його за елементами третього рядка.

За третьою з формул (5) маємо

$$\Delta = 3(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 4(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 9.$$

Такий самий результат дає формула (2).

Теорема 2. *Сума добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) визначника на їх алгебраїчні доповнення відповідних елементів іншого рядка (стовпця) дорівнює нулю.*

Розглянемо, наприклад, суму добутків елементів першого рядка визначника (3) на алгебраїчні доповнення елементів другого рядка:

$$a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} = -a_{11}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{13}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= -a_{11}\left(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}\right) + a_{12}\left(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}\right) - a_{13}\left(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}\right) = 0.$$

1.3. Поняття про визначники вищих порядків

Теорема 1 дає змогу ввести означення визначника довільного порядку. За означенням визначник n-го порядку дорівнює сумі добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) на їхні алгебраїчні доповнення. Можна довести, що всі розглянуті вище властивості визначників третього порядку справджуються для визначників будь-якого порядку.

Розглянемо, наприклад, визначник четвертого порядку

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

Цей визначник можна розкласти за елементами будь-якого рядка, наприклад першого:

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14}. \qquad (6)$$

Оскільки всі алгебраїчні доповнення A_{ij} у формулі (6) є визначники третього порядку, то цією формулою можна користуватись для обчислення визначника четвертого порядку. Але такий спосіб обчислення громіздкий: якщо для знаходження визначника четвертого порядку треба обчислювати чотири визначники третього порядку, то для знаходження визначника п’ятого порядку вже прийдеться обчислювати двадцять визначників третього порядку! Тому на практиці спочатку за допомогою властивості 8 перетворюють визначник так, щоб у деякому рядку чи стовпці всі елементи, крім одного, стали нулями. Розкладаючи тоді визначник згідно з теоремою за елементами цього рядка, дістанемо тільки один доданок, тому що всі інші доданки є добутками алгебраїчних доповнень на нуль.

Приклади

Обчислити визначники:

$$1)\ \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}; \qquad 2)\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 2 \\ -2 & -5 & 17 & -6 & -11 \\ 4 & 2 & 1 & 7 & 9 \\ 8 & 3 & 6 & 8 & 11 \end{vmatrix}.$$

1) У першому рядку перетворимо всі елементи, крім першого, на нулі. Для цього, залишаючи перший і другий стовпці без змін, до третього додамо перший, а до четвертого – перший, помножений на (-2). Тоді

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Розклавши цей визначник за елементами першого рядка, дістанемо

$$\Delta_1 = 1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -21.$$

2) У першому стовпці перетворимо всі елементи, крім другого, на нулі. Для цього, залишаючи другий рядок без змін, до першого рядка додамо другий, помножений на (-2), до третього – перший, до четвертого – перший, помножений на (-2), а до п'ятого – четвертий, помножений на (-2). Матимемо

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -5 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 20 & -2 & -6 \\ 0 & -12 & -5 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & -6 & -7 \end{vmatrix}.$$

Розкладемо цей визначник за елементами першого стовпця і винесемо за знак визначника спільний множник 2 з третього рядка і (–1) з четвертого:

$$\Delta_2 = 1\cdot(-1)^{2+1}\cdot 2\cdot(-1)\begin{vmatrix} 1 & -5 & 0 & 1 \\ 1 & 10 & -1 & -3 \\ 12 & 5 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & -6 & -7 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & -5 & -1 & -3 \\ 11 & 10 & 1 & 1 \\ 6 & -31 & -6 & -7 \end{vmatrix}.$$

Розклавши цей визначник за елементами першого рядка, дістанемо

$$\Delta_2 = 2 \cdot (-1)^{1+4} \cdot \begin{vmatrix} 4 & -5 & -1 \\ 11 & 10 & 1 \\ 6 & -31 & -6 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 4 & -5 & -1 \\ 15 & 5 & 0 \\ -18 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 150.$$

Тема 2: Матриці

2.1. Основні означення

Прямокутна таблиця чисел a_{ij}, $i=1,2,...,m$; $j=1,2,...,n$, складена з m рядків та n стовпців і записана у вигляді

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

називається *матрицею*. Поняття матриці вперше ввели англійські математики У. Гамільтон і Д. Келі. Коротко матрицю позначають так:

$$A=\left(a_{ij}\right),$$

де a_{ij} – елементи матриці, причому індекс i в елементі a_{ij} означає номер рядка, а j – номер стовпця, на перетині яких стоїть даний елемент.

Добуток числа рядків m на число стовпців n називають розміром матриці і позначають $m\times n$. Якщо хочуть вказати розмір $m\times n$ матриці A, то пишуть $A_{m\times n}$.

Матриця, в якої число рядків дорівнює числу стовпців, називається *квадратною*. Кількість рядків (стовпців) квадратної матриці називається її порядком. Матриця, у якої всього один рядок, називається матрицею-рядком, а матриця, у якої всього один стовпець, – матрицею-стовпцем. Дві матриці $A_{m\times n}=\left(a_{ij}\right)$ та $B_{m\times n}=\left(b_{ij}\right)$ називаються рівними, якщо вони однакових розмірів і мають рівні відповідні елементи: $a_{ij}=b_{ij}$. *Нульовою* називається матриця, у якої всі елементи дорівнюють нулю. Позначається така матриця буквою O. Як і в визначниках, в квадратних матрицях виділяють головну і побічну діагональ.

Квадратна матриця називається *діагональною*, якщо всі її елементи, крім тих, що знаходяться на головній діагоналі, дорівнюють нулю. Діагональна матриця, у якої кожен елемент головної діагоналі дорівнює одиниці, називається *одиничною* і позначається буквою E. Наприклад, одинична матриця третього порядку має вигляд

$$E=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Будь-якій квадратній матриці

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{pmatrix}$$

можна поставити у відповідність певне число, яке називається *визначником (детермінантом)* цієї матриці і позначається символом $\det A$. За означенням

$$\det A=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{vmatrix}.$$

Наприклад, якщо

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 3 & 5\end{pmatrix}, \text{ то } \det A=\begin{vmatrix}0 & 1\\ 3 & 5\end{vmatrix}=-3.$$

Прямокутна матриця розміру $m\times n$ $(n\neq m)$ визначника не має.

2.2. Дії над матрицями

1. Операція *додавання матриць* вводиться тільки для матриць однакового розміру. Сумою $C=A+B$ двох матриць $A_{m\times n}=\left(a_{ij}\right)$ і $B_{m\times n}=\left(b_{ij}\right)$ називається матриця $C_{m\times n}=\left(c_{ij}\right)=\left(a_{ij}+b_{ij}\right)$. Наприклад,

$$\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\\ 1 & 5 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 2 & 0\\ 1 & 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 4 & 3\\ 2 & 8 & 4\end{pmatrix}.$$

2. *Добутком матриці* $A_{m\times n}=\left(a_{ij}\right)$ *на число* k (або числа k на матрицю $A_{m\times n}$) називається матриця $B_{m\times n}=\left(ka_{ij}\right)$. Наприклад,

$$2\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & -3\end{pmatrix}\cdot 2=\begin{pmatrix}2 & 4 & 6\\ 0 & -2 & -6\end{pmatrix}.$$

3. *Різниця матриць* $A-B$ визначається як сума матриці A і матриці B, помноженої на -1:

$$A-B=A+\left(-1\right)B.$$

Справедливі такі властивості операцій:

а) $A+B=B+A$ – *комутативність відносно додавання матриць;*

б) $A+\left(B+C\right)=\left(A+B\right)+C$ – *асоціативність відносно додавання матриць*;

в) $A+O=A$; $A-A=O$ – *роль нульової матриці* в діях над матрицями така, як і числа нуль в діях над числами;

г) $\alpha\left(\beta A\right)=\left(\alpha\beta\right)A$ – *асоціативність відносно множення чисел;*

д) $\alpha\left(A+B\right)=\alpha A+\alpha B$ – *дистрибутивність множення на число відносно додавання матриць;*

е) $\left(\alpha+\beta\right)A=\alpha A+\beta A$ – *дистрибутивність множення на матрицю відносно додавання чисел.*

4. Операція *множення двох матриць* вводиться лише для узгоджених матриць. Матриця A називається *узгодженою з матрицею* B, якщо кількість стовпців першої матриці A дорівнює кількості рядків другої матриці B.

Якщо ця умова не виконується, тобто матриці неузгоджені, то множення таких матриць неможливе.

З узгодженості матриці A з B не випливає, взагалі кажучи, узгодженість матриці B з A.

Квадратні матриці одного порядку взаємно узгоджені.

Добутком $C = AB$ *матриці* $A_{m\times n} = \left(a_{ij}\right)$ *на матрицю* $B_{n\times k} = \left(b_{ij}\right)$ називається така матриця, у якої елемент c_{ij} дорівнює сумі добутків елементів i-го рядка матриці A на відповідні елементи j-го стовпця матриці B:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}\,;\; C = C_{m\times k} = \left(c_{ij}\right),$$

$$i = 1, 2, \ldots, m\,;\; j = 1, 2, \ldots, k\,.$$

Наприклад, щоб визначити елемент c_{24}, що стоїть в другому рядку і четвертому стовпці матриці $C = AB$, потрібно знайти суму добутків елементів другого рядка матриці A на відповідні елементи четвертого стовпця матриці B.

Приклад

Знайти матрицю $C = AB$, якщо:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$.

а) Матриця $A_{2\times 2}$ узгоджена з матрицею $B_{2\times 3}$, тому за означенням маємо

$$C = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2(-2) & 1\cdot 2 + 2\cdot 0 & 1\cdot 3 + 2(-1) \\ 0\cdot 1 + (-1)(-2) & 0\cdot 2 + (-1)\cdot 0 & 0\cdot 3 + (-1)(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

б) $C = AB = A_{2\times 1}B_{1\times 2} = \begin{pmatrix} 0\cdot 1 & 0\cdot 2 \\ -2\cdot 1 & -2\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$.

З правила множення матриць випливає, що завжди можна перемножити дві квадратні матриці одного порядку; в результаті дістанемо матрицю того самого порядку. Зокрема, квадратну матрицю можна помножити саму на себе, тобто піднести до квадрата; прямокутну неквадратну матрицю піднести до квадрата не можна.

Операція множення матриць не комутативна, тобто при множенні матриць не можна міняти місцями множники:

$AB \neq BA.$

Наприклад (перевірте):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ -5 & 17 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & -9 & 35 \\ 15 & -10 & 20 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для дій 1 – 4 над матрицями виконуються такі властивості (за умови, що вказані операції мають зміст):

а) $(AB)C = A(BC)$;

б) $(\alpha A)B = A(\alpha B) = \alpha(AB)$;

в) $(A+B)C = AC + BC$;

г) $C(A+B) = CA + CB$;

д) $A \cdot O = O \cdot A = O$;

е) $AE = EA = A$;

є) $\det(AB) = \det A \times \det B$.

2.3. Обернена матриця

Нехай A – квадратна матриця. Матриця A^{-1} називається *оберненою* до матриці A, якщо виконується умова

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E.$$

Квадратна матриця A називається *виродженою*, якщо $\det A = 0$, і *невиродженою*, якщо $\det A \neq 0$.

Теорема 3. *Для існування оберненої матриці A^{-1} необхідно і достатньо, щоб матриця A була невиродженою.*

Необхідність. Нехай обернена матриця A^{-1} існує, тоді $AA^{-1} = E$. Застосовуючи правило знаходження визначника добутку двох матриць, маємо $\det A \cdot \det A^{-1} = 1$, тому $\det A \neq 0$.

Достатність. Нехай $\det A \neq 0$, тоді матриця A має обернену матрицю A^{-1}, причому

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots\ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots\ldots & A_{n2} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots\ldots & A_{nn} \end{pmatrix}, \qquad (7)$$

де A_{ij} – алгебраїчні доповнення елементів a_{ij} визначника матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}. \qquad (8)$$

Дійсно, добутки AA^{-1} і $A^{-1}A$ матриць (7) і (8) дорівнюють матриці, у якої всі елементи головної діагоналі дорівнюють одиниці (за теоремою 1), а всі недіагональні елементи — нулю (за теоремою 2). Отже, $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.

Покажемо, що A^{-1} – єдина обернена матриця. Нехай A'' – ще одна обернена матриця, тоді

$$A^{-1} = A^{-1}E = A^{-1}\left(AA''\right) = \left(A^{-1}A\right)A'' = EA'' = A''.$$

Приклад

Знайти матрицю A^{-1}, обернену до матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Обчислимо визначник матриці A:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & 1 \end{vmatrix} = 15.$$

Матриця A невироджена, тому обернена матриця знаходиться за формулою (7). Знайдемо алгебраїчні доповнення всіх елементів даної матриці:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 7; \quad A_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -3;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 6;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -2; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3.$$

Складаємо обернену матрицю

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{15} & -\frac{2}{15} & \frac{4}{15} \\ \frac{7}{15} & \frac{1}{15} & -\frac{2}{15} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

Переконуємось, що

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{15} & -\frac{2}{15} & \frac{4}{15} \\ \frac{7}{15} & \frac{1}{15} & -\frac{2}{15} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{15} & -\frac{2}{15} & \frac{4}{15} \\ \frac{7}{15} & \frac{1}{15} & -\frac{2}{15} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.4. Ранг матриці

Нехай задано матрицю $A_{m\times n} = A$. Виділимо в матриці A будь-які k рядків і стільки ж стовпців, де k – число, не більше чисел m і n, тобто $k \le \min(m,n)$.

Визначник порядку k, складений з елементів, що стоять на перетині виділених рядків і стовпців, називається *мінором* k-го порядку матриці A.

Рангом $r(A)$ матриці A називається найбільший з порядків її мінорів, відмінних від нуля.

Безпосередньо з означення випливає, що:

1) ранг існує для будь-якої матриці $A_{m\times n}$, причому $0 \le r(A) \le \min(m,n)$;

2) $r(A)=0$ тоді і тільки тоді, коли $A=0$;

3) для квадратної матриці n-го порядку ранг дорівнює n тоді і тільки тоді, коли матриця невироджена.

Ранг матриці можна знайти так. Якщо всі мінори першого порядку (елементи матриці) дорівнюють нулю, то $r=0$. Якщо хоч один з мінорів першого порядку відмінний від нуля, а всі мінори другого порядку дорівнюють нулю, то $r=1$. У випадку, коли є мінор другого порядку, відмінний від нуля, досліджуємо мінори третього порядку. Так продовжуємо доти, поки не станеться одне з двох: або всі мінори порядку k дорівнюють нулю, або мінорів порядку k не існує, тоді $r=k-1$.

Приклад

Знайти ранг матриці $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$.

Серед мінорів першого порядку (тобто елементів матриці) є відмінні від нуля, тому $r(A) \ge 1$.

Оскільки один з мінорів другого порядку

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 6 \neq 0,$$

а всі мінори третього порядку дорівнюють нулю, то $r(A) = 2$.

Вказаний метод знаходження рангу матриці не завжди зручний, тому що пов'язаний з обчисленням значного числа визначників. Простіший метод ґрунтується на тому, що ранг матриці не змінюється, якщо над матрицею виконати так звані елементарні перетворення, а саме [1]:

а) переставити місцями два рядки (стовпці);

б) помножити кожний елемент рядка (стовпця) на один і той самий відмінний від нуля множник;

в) додати до елементів рядка (стовпця) відповідні елементи іншого рядка (стовпця), помножені на одне і те саме число.

Приклад

Знайти ранг матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 4 & -2 & 4 \\ 5 & 3 & 10 & 8 & 2 \\ 1 & -5 & 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Виконуючи елементарні перетворення, маємо:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 4 & -2 & 4 \\ 5 & 3 & 10 & 8 & 2 \\ 1 & -5 & 0 & -2 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -7 & -2 & -2 & 7 \\ 0 & -7 & 0 & 8 & 7 \\ 0 & -7 & -2 & -2 & 7 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -2 & -2 & 7 \\ 0 & -7 & 0 & 8 & 7 \\ 0 & -7 & -2 & -2 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$r\left(A\right)=3$.

Знак $\sim$ між матрицями показує, що вони утворюються одна з другої елементарними перетвореннями і, отже, мають один і той самий ранг.

Тема 3: Системи лінійних рівнянь

3.1. Основні означення

Системою m лінійних рівнянь з n невідомими $x_1, x_2, ..., x_n$ називається система виду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2; \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \qquad (9)$$

Числа a_{ij} $(i = 1, 2, ..., m;\ j = 1, 2, ..., n)$біля невідомих називаються коефіцієнтами, а числа b_i – вільними членами системи (9).

Система рівнянь (9) називається *однорідною*, якщо всі вільні члени дорівнюють нулю, і *неоднорідною*, якщо хоч один з них відмінний від нуля.

Множина чисел $a_1, a_2, ..., a_n$ називається *впорядкованою*, якщо вказано порядок слідування цих чисел, тобто вказано, яке з них є першим, яке другим, яке третім і т. д. Наприклад, якщо впорядкована трійка чисел, то в запису a, b, c число a вважається першим, b – другим, c – третім, в запису b, a, c першим є число b, другим – число a і третім – число c.

Упорядкований набір n чисел $(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ називається *розв'язком системи* (9), якщо при підстановці цих чисел замість невідомих $x_1, x_2, ..., x_n$ усі рівняння системи перетворюються в тотожності. Таку систему чисел називають також n*-вимірним вектором*, або точкою n-вимірного простору.

Система рівнянь називається *сумісною*, якщо вона має хоча б один розв'язок, і *несумісною*, якщо вона не має жодного розв'язку.

Сумісна система називається *визначеною*, якщо вона має єдиний розв'язок, тобто існує тільки один набір n чисел $x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0$, який перетворює всі рівняння системи (9) в тотожності.

Сумісна система називається *невизначеною*, якщо вона має більше ніж один розв'язок.

Дві системи лінійних рівнянь називаються *еквівалентними*, якщо вони мають одну й ту ж систему розв'язків. Еквівалентні системи одержують, зокрема, внаслідок елементарних перетворень даної системи. Елементарні перетворення системи лінійних рівнянь відповідають елементарним перетворенням матриці за умови, що вони виконуються лише над рядками матриці.

3.2. Розв'язування систем лінійних рівнянь за формулами Крамера

Нехай задано систему двох лінійних рівнянь з двома невідомими x і y:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1; \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2. \end{cases} \tag{10}$$

Виконаємо такі елементарні перетворення системи (10): спочатку помножимо перше рівняння на a_{22}, друге – на $-a_{12}$, а потім додамо їх; після цього перше рівняння помножимо на a_{21}, а друге – на $-a_{11}$ і додамо їх. Отримаємо систему

$$\begin{cases} x\left(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}\right) = b_1a_{22} - b_2a_{12}; \\ y\left(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}\right) = b_2a_{11} - b_1a_{21}. \end{cases} \tag{11}$$

Систему (11) можна записати за допомогою визначників:

$$\begin{cases} x \cdot \Delta = \Delta_x; \\ y \cdot \Delta = \Delta_y; \end{cases} \tag{12}$$

де

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}; \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}; \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

Визначник Δ, складений з коефіцієнтів системи (10), називається *визначником системи*. Визначники Δ_x та Δ_y утворюються з визначника Δ відповідно заміною стовпців при невідомих x та y вільними членами.

При розв'язуванні рівнянь (12) можуть бути такі випадки:

1) $\Delta \neq 0$, тоді система (10) має єдиний розв'язок:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}; \; y = \frac{\Delta_y}{\Delta}. \qquad (13)$$

Формули (13) вперше вивів К. Крамер і вони називаються *формулами Крамера*.

2) $\Delta = 0$; $\Delta_x \neq 0$ або $\Delta_y \neq 0$, тоді система (10) не має розв'язків, тобто є несумісною.

3) $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$, тоді система (10) зводиться до одного рівняння і має безліч розв'язків, тобто є невизначеною.

Розглянемо тепер систему трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими x, y, z:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1; \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2; \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3. \end{cases} \qquad (14)$$

Обчислимо визначники:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \qquad \Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \qquad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix};$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Якщо визначник системи $\Delta \neq 0$, то система (14) має єдиний розв'язок, який знаходиться за формулами Крамера:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \; y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \; z = \frac{\Delta_z}{\Delta}. \qquad (15)$$

Доведемо, наприклад, другу з формул (15). Помножимо перше, друге і третє рівняння системи (14) на алгебраїчні доповнення відповідних коефіцієнтів при y, тобто на A_{12}, A_{22}, A_{32}, а потім додамо їх:

$$x\left(a_{11}A_{12} + a_{21}A_{22} + a_{31}A_{32}\right) + y\left(a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}\right) +$$

$$+ z\left(a_{13}A_{12} + a_{23}A_{22} + a_{33}A_{32}\right) = b_1A_{12} + b_2A_{22} + b_3A_{32}.$$

За теоремою 2 вирази в дужках при x і z в цій рівності дорівнюють нулю, а за теоремою 1 вираз в дужках при y і права частина дорівнюють відповідно Δ і Δ_y, тобто $\Delta_y = \Delta \cdot y$.

Аналогічно доводяться формули Крамера для знаходження невідомих x і z.

Якщо задано n лінійних рівнянь з n невідомими ($n > 3$)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2; \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{16}$$

і визначник системи $\Delta \neq 0$, то така система має єдиний розв'язок, який знаходиться за формулами Крамера, аналогічними до формул (13) і (15):

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta},\ x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta},\ \ldots,\ x_n = \frac{\Delta_{x_n}}{\Delta}. \tag{17}$$

У випадку, коли визначник системи (14) чи (16) дорівнює нулю, формули Крамера (15) і (17) не мають змісту. Такі системи, а також системи, у яких число невідомих не дорівнює числу рівнянь і до яких, очевидно, формули Крамера теж не можна застосувати, розглянемо в пункті 5.

Приклад

Розв'язати системи за формулами Крамера:

а) $\begin{cases} 2x - y = 0; \\ x + 3y = 7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - y + z = 0; \\ 2x + y + z = 5; \\ 2y - z = 3. \end{cases}$

а) Знаходимо визначники Δ, Δ_x, Δ_y:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7; \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 7; \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 14.$$

За формулами (13)

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{7}{7} = 1; \ y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{14}{7} = 2.$$

б) Розв’язок одержимо за формулами (15). Маємо

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 0 & 2 & -1\end{vmatrix}=-1;\quad \Delta_x=\begin{vmatrix}0 & -1 & 1\\ 5 & 1 & 1\\ 3 & 2 & -1\end{vmatrix}=-1;$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 5 & 1\\ 0 & 3 & -1\end{vmatrix}=-2;\quad \Delta_z=\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 1 & 5\\ 0 & 2 & 3\end{vmatrix}=-1,$$

$x=1,\ y=2,\ z=1.$

3.3. Матричний запис системи лінійних рівнянь і її розв’язування

Нехай задано систему (16), яка містить n лінійних рівнянь з n невідомими.

Введемо матриці

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{pmatrix};\quad X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \dots\\ x_n\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ \dots\\ b_n\end{pmatrix}.$$

Матрицю A, складену з коефіцієнтів системи (16), називають *матрицею або основною матрицею* системи, матрицю X – матрицею з невідомих, а матрицю B – матрицею з вільних членів. Тоді згідно з правилом множення матриць систему (16) можна записати одним матричним рівнянням з невідомою матрицею X :

$$AX=B. \tag{18}$$

Припустимо, що матриця A системи (16) має обернену матрицю A^{-1}; помножимо обидві частини рівності (18) на A^{-1} зліва:

$$A^{-1}AX=A^{-1}B.$$

Оскільки $A^{-1}A=E$ і $EX=X$, то

$$X=A^{-1}B. \tag{19}$$

Отже, щоб розв'язати систему рівнянь (16), достатньо знайти матрицю A^{-1}, обернену до матриці системи, і помножити її справа на матрицю з вільних членів.

Формулу (19) *називають матричним записом розв'язку системи* (16) або *розв'язком матричного рівняння* (18).

Зауважимо, що розв'язання системи рівнянь матричним способом можливе лише тоді, коли матриця системи невироджена.

Приклад

Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x+2y=3; \\ -x+y+2z=5; \\ 3x+z=-2. \end{cases}$$

Маємо:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix};\ X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix};\ A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{15} & -\frac{2}{15} & \frac{4}{15} \\ \frac{7}{15} & \frac{1}{15} & -\frac{2}{15} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

За формулою (19) знаходимо

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{15} & -\frac{2}{15} & \frac{4}{15} \\ \frac{7}{15} & \frac{1}{15} & -\frac{2}{15} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Отже, $x=-1, y=2, z=1$.

3.4. Розв'язування систем лінійних рівнянь методом Гаусса

Одним з найпоширеніших методів розв'язування систем лінійних рівнянь є метод послідовного виключення невідомих, або метод Гаусса. Цей метод запропонований К. Гауссом і ґрунтується на елементарних перетвореннях системи рівнянь.

Нехай маємо систему (9), яка містить m рівнянь і n невідомих. Очевидно, серед коефіцієнтів a_{i1} хоча б один відмінний від нуля. Якщо ж $a_{11}=0$, то першим в системі (9) запишемо те рівняння, в якому коефіцієнт при x_1 відмінний від нуля. Позначимо цей коефіцієнт через a'_{11}.

Перетворимо систему (9), виключаючи x_1 в усіх рівняннях, крім першого. Для цього помножимо перше рівняння на $-\frac{a_{21}}{a'_{11}}$ і додамо до другого, потім помножимо перше рівняння на $-\frac{a_{31}}{a'_{11}}$ і додамо до третього і т. д. при цьому може статись так, що друге невідоме x_2 також не входить в усі рівняння з номером $i>1$. Нехай x_k – невідоме з найменшим номером, яке входить в будь-яке рівняння, не рахуючи першого. Дістанемо систему

$$\begin{cases} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \ldots + a'_{1n}x_n = b'_1; \\ \qquad a'_{2k}x_k + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2; \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad a'_{mk}x_k + \ldots + a'_{mn}x_n = b'_m, \end{cases} \quad k>1,\ a'_{11}\neq 0. \qquad (20)$$

Застосовуючи до всіх рівнянь, крім першого, таку саму процедуру і виконавши ряд елементарних перетворень, отримаємо систему

$$\begin{cases} a''_{11}x_1 + a''_{12}x_2 + \ldots\ldots + a''_{1n}x_n = b''_1; \\ \qquad a''_{2k}x_k + \ldots\ldots + a''_{2n}x_n = b''_2; \\ \qquad\quad a''_{3l}x_l + \ldots\ldots + a''_{3n}x_n = b''_3; \\ \qquad\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\quad a''_{ml}x_l + \ldots + a''_{mn}x_n = b'_m, \end{cases} \quad a''_{11}\neq 0,\ a''_{2k}\neq 0. \qquad (21)$$

Якщо продовжити цей процес, то матимемо систему

$$
\begin{cases}
\bar{a}_{11}x_1 + \bar{a}_{12}x_2 + \dots\dots\dots + \bar{a}_{1n}x_n = \bar{b}_1; \\
\qquad\qquad \bar{a}_{2k}x_k + \dots\dots + \bar{a}_{2n}x_n = \bar{b}_2; \\
\qquad\qquad\quad \bar{a}_{3l}x_l + \dots\dots + \bar{a}_{3n}x_n = \bar{b}_3; \\
\qquad\qquad\quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\qquad\qquad\quad \bar{a}_{rs}x_s + \dots + \bar{a}_{rn}x_n = \bar{b}_r; \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 = \bar{b}_{r+1}; \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \dots\dots\dots \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 = \bar{b}_m.
\end{cases}
\tag{22}
$$

Таку систему рівнянь називають *східчастою* або *трапецієподібною*. Дослідимо цю систему.

1. Якщо система містить рівняння виду $0 = b_t$ і $b_t \neq 0$, то вона очевидно несумісна.

2. Нехай система (22) не містить рівнянь виду $0 = b_t$ ($b_t \neq 0$). Назвемо невідомі $x_1, x_k, x_l, \dots, x_s$ з яких починаються перше, друге, …, r-е рівняння, основними, а всі інші, якщо вони є, вільними. Основних невідомих за означенням r. Надаючи вільним невідомим довільні значення і підставляючи ці значення в рівняння системи, з r-го рівняння знайдемо x_s. Підставляючи це значення в перші $r-1$ рівнянь і, піднімаючись вгору по системі, знайдемо всі основні невідомі. Оскільки вільні невідомі можуть набувати будь-яких значень, то система має безліч розв'язків.

3. Нехай в системі (22) $r = n$. Тоді вільних невідомих немає, тобто всі невідомі основні і система (22) має так званий трикутний вигляд:

$$
\begin{cases}
\bar{a}_{11}x_1 + \dots\dots\dots\dots + \bar{a}_{1n}x_n = \bar{b}_1; \\
\qquad \bar{a}_{22}x_2 + \dots + \bar{a}_{2n}x_n = \bar{b}_2; \\
\qquad\quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\qquad\qquad\qquad\quad \bar{a}_{nn}x_n = \bar{b}_n.
\end{cases}
$$

З останнього рівняння системи знайдемо x_n, і, піднімаючись по системі вгору, знайдемо всі інші невідомі. Отже, в цьому випадку система має єдиний розв'язок.

Зауваження 1. Викладений нами метод послідовного виключення змінних називають ще алгоритмом Гаусса. Він складається з однотипових операцій і легко реалізується на сучасних ЕОМ.

Зауваження 2. При розв'язуванні системи лінійних рівнянь методом Гаусса зручніше приводити до трикутного чи трапецієподібного вигляду не саму систему рівнянь, а розширену матрицю цієї системи, тобто матрицю, утворену приєднанням до матриці її коефіцієнтів стовпця вільних членів. Виконуючи над рядками розширеної матриці елементарні перетворення, приходимо до розв'язку системи.

Приклад

Розв'язати системи рівнянь методом Гаусса:

а) $\begin{cases} x-y+2z=-1; \\ -x+2y-3z=3; \\ 2x-y+3z=2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+y+z=1; \\ 2x+y+2z=1; \\ x+y+3z=2; \\ x+3z=1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} -x+y+2z=1; \\ x+2y-z=2; \\ 2x+y-3z=1; \\ x+5y=5. \end{cases}$

а) Виконуємо елементарні перетворення над рядками розширеної матриці даної системи (позначимо це символом $\Rightarrow$):

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -3 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, система а) еквівалентна системі

$$\begin{cases} x-y+2z=-1; \\ 0\cdot x+y-z=2; \\ 0\cdot x+0\cdot y+0\cdot z=2. \end{cases}$$

В останньому рівнянні вільний член дорівнює двом, а коефіцієнти при невідомих дорівнюють нулю (тобто $0=2$), тому система несумісна.

б) Маємо

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отже, система б) еквівалентна системі трикутного вигляду

$$\begin{cases} x+y+z=1; \\ -y+0\cdot z=-1; \\ \quad 2z=1; \end{cases}$$ і має єдиний розв'язок: $x=-\frac{1}{2}, y=1, z=\frac{1}{2}$.

в) Маємо

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & 0 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 6 & 2 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отже система в) еквівалентна системі трапецієподібного вигляду

$$\begin{cases} -x+y+2z=1; \\ 3y+z=3 \end{cases}$$

і має безліч розв'язків. З останньої системи знаходимо

$$y=1-\frac{z}{3},\ x=\frac{5}{3}z.$$

Таким чином, розв'язки системи в) мають вигляд $x=\frac{5}{3}t$, $y=1-\frac{t}{3}$, $z=t$, де t – довільне число ($-\infty<t<+\infty$).

Зазначимо, що жодну з наведених у цьому прикладі систем не можна розв'язати ні за формулами Крамера, ні матричним способом.

3.5. Однорідна система лінійних рівнянь

Нехай задано однорідну систему m лінійних рівнянь з n невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=0; \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=0. \end{cases} \qquad (23)$$

Ця система завжди має нульовий розв'язок $x_1=0, x_2=0, \ldots, x_n=0$, тому що підстановка нулів замість невідомих в кожне з рівнянь (23) перетворює їх в тотожності. Ненульові розв'язки (якщо вони існують) системи (23) можна знайти методом Гаусса.

Покажемо, що для однорідної системи трьох рівнянь з трьома невідомими можна знайти загальні формули, що виражають ненульові розв'язки через коефіцієнти системи.

Розглянемо систему

$$\begin{cases} a_1x + a_2y + a_3z = 0; \\ b_1x + b_2y + b_3z = 0; \\ c_1x + c_2y + c_3z = 0. \end{cases} \tag{24}$$

Якщо визначник системи $\Delta \neq 0$, то система має єдиний нульовий розв'язок. Дійсно, визначники $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$ (один стовпець в кожному визначнику містить тільки нулі), тому за формулами Крамера $x = 0, y = 0, z = 0$.

Покажемо, що коли визначник $\Delta = 0$, то система (24) має безліч розв'язків. Розглянемо такі два випадки:

1. Припустимо, що у визначнику Δ існує принаймні один відмінний від нуля мінор другого порядку. Нехай, наприклад,

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0. \tag{25}$$

Візьмемо ті рівняння системи (24), що містять відмінний від нуля мінор, і запишемо їх у вигляді

$$\begin{cases} a_1x + a_2y = -a_3z; \\ b_1x + b_2y = -b_3z. \end{cases} \tag{26}$$

Оскільки визначник (25) системи (26) відмінний від нуля, то за формулами Крамера

$$x = \frac{\Delta_x z}{\Delta}, y = \frac{\Delta_y z}{\Delta}, \tag{27}$$

де $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$; $\Delta_x = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}$; $\Delta_y = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}$.

Оскільки z може набувати будь-яких дійсних значень, покладемо $z = \Delta \cdot t$, де t – довільне дійсне число, тоді з формул (27)

$$x = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \cdot t\,;\ y = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} \cdot t\,;\ z = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \cdot t\,. \qquad (28)$$

Підставляючи розв'язки (28) у третє рівняння системи (24) і використовуючи теорему 1, переконуємося, що формули (28) при будь-якому t визначають розв'язки однорідної системи (24).

2. Нехай тепер визначник системи (24) і всі його мінори другого порядку дорівнюють нулю. Це означає, що коефіцієнти всіх трьох рівнянь (24) пропорційні, тому система зводиться до одного рівняння з трьома невідомими. Надаючи двом невідомим довільних значень, знаходять відповідне їм третє невідоме.

Отже, якщо визначник Δ однорідної системи (24) дорівнює нулю, то така система має безліч розв'язків.

Приклад

Розв'язати системи рівнянь:

а) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 0; \\ 2x + y + z = 0; \\ x - y + 2z = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} -x + y - 2z = 0; \\ x - y + 2z = 0; \\ 2x + y - z = 0. \end{cases}$

а) Визначник системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \neq 0,$$

тому система а) має єдиний розв'язок: $x = 0, y = 0, z = 0$.

б) Визначник системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

тому система б) невизначена. Всі мінори другого порядку, що містяться у першому і другому рядках визначника, дорівнюють нулю. Візьмемо друге і третє рівняння системи:

$x - y + 2z = 0;$
$2x + y - z = 0.$

Ці рівняння містять відмінний від нуля мінор другого порядку

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

тому за формулами (28) маємо

$$x = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \cdot t = -t;\ y = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \cdot t = 5t;\ z = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \cdot t = 3t.$$

Отже, система б) має безліч розв’язків: $x = -t, y = 5t, z = 3t$, де t – довільне дійсне число.

3.6. Критерій сумісності системи лінійних рівнянь

Нехай задано систему m лінійних рівнянь з n невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2; \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \qquad (29)$$

Складемо основну матрицю A і розширену матрицю $\tilde{A}$ даної системи

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ..... & ..... & ... & ..... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}; \; \tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ ..... & ..... & ... & ..... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Вичерпну відповідь на запитання про існування розв’язку системи (29) дає теорема Кронекера-Капеллі. Наведемо її без доведення.

Теорема 4. *Для того щоб система лінійних рівнянь була сумісною, необхідно і достатньо, щоб ранг її основної матриці дорівнював рангу розширеної матриці.*

Якщо ранг основної матриці дорівнює рангу розширеної матриці і дорівнює числу невідомих, то система має єдиний розв’язок.

Якщо ранг основної матриці дорівнює рангу розширеної матриці, але менший від числа невідомих, то система має безліч розв’язків.

Приклад

Дослідити на сумісність систему рівнянь

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1; \\ 2x - y + 2z = 3; \\ 3x + y + z = 5. \end{cases}$$

Оскільки ранг основної матриці $r(A) = 2$, а ранг розширеної матриці $r(\tilde{A}) = 3$ (перевірте), то задана система несумісна.