МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ТЕРНОПІЛЬСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ІВАНА ПУЛЮЯ

Кафедра вищої математики

Конспект лекцій
із
ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

Частина 2: векторна алгебра

ТЕРНОПІЛЬ
2014 р.

УДК 517.2
ББК 22.161.6
Г12

Укладач
Г. В. Габрусєв

Рецензент
Лотоцький В. А.,
к.ф.-м.н., доц., зав. каф. математики
і методики її навчання ТНПУ ім. В. Гнатюка

Затверджено на засіданні кафедри вищої математики.
Протокол № 8 від «27» лютого 2014 р.

Схвалено та рекомендовано до друку науково-методичною радою
Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя.
Протокол № 6 від «13» березня 2014 р.

Г12 Г.В. Габрусєв. Конспект лекцій із вищої математики (частина 2 : векторна алгебра) – Тернопіль : Вид-во ТНТУ імені Івана Пулюя, 2014. – 39 с.

ЗМІСТ

Тема 1: Вектори і лінійні дії з ними

1.1. Скалярні і векторні величини

Багато фізичних величин повністю визначаються своїм числовим значенням (об'єм, маса, густина, температура тощо); вони називаються *скалярними.* Але є й такі величини, які крім числового значення мають ще й напрям (швидкість, сила, напруженість магнітного поля тощо). Такі величини називаються *векторними.*

Будь-яка упорядкована пара точок A і B простору визначає *напрямлений відрізок,* або *вектор,* тобто відрізок, що має певну довжину і певний напрям. (Термін «вектор» (від лат. vector – переносник) ввів у 1848 р. Гамільтон.) Першу точку A називають початком вектора, а другу B – кінцем вектора. Напрямом вектора вважають напрям від його початку до кінця.

Вектор, початок якого знаходиться в точці A, а кінець – в точці B, позначається символом $\overrightarrow{AB}$ або $\vec{a}$. Напрям вектора на рисунку показують стрілкою (рис. 2.1). Відстань між початком вектора $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ *і* його кінцем називається *довжиною* (або *модулем) вектора* і позначається $|\vec{a}|$ або $|\overrightarrow{AB}|$.

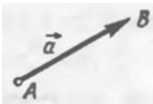

Рис. 2.1

Вектор, довжина якого дорівнює одиниці, називається *одиничним.* Одиничний вектор, напрям якого збігається з напрямом вектора $\vec{a}$, називається *ортом вектора* $\vec{a}$ і позначається через $\vec{a}_0$.

Вектор, початок якого збігається з кінцем, називається *нульовим* і позначається через $\vec{0}$; напрям нульового вектора невизначений, а його довжина дорівнює нулю.

Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називаються *колінеарними,* якщо вони лежать на одній прямій або на паралельних прямих. Колінеарні вектори можуть бути напрямлені однаково або протилежно. Нульовий вектор вважається колінеарним будь-якому вектору Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називаються *рівними* ($\vec{a}=\vec{b}$), якщо вони колінеарні, однаково напрямлені і мають рівні довжини.

В означенні рівності векторів не передбачено якесь певне розміщення їх, тому, не порушуючи рівності, вектори можна переносити паралельно самим собі. У зв'язку з цим вектори в аналітичній геометрії називаються вільними. Іноді вільність переміщення вектора обмежується. В механіці, наприклад, розглядаються ковзні і зв'язані вектори. Прикладом ковзного вектора є вектор кутової швидкості при обертанні тіла, тому що він може розміщуватися лише на осі обертання. Прикладом зв'язаного вектора є сила, прикладена до якоїсь точки пружного тіла, оскільки результат дії сили залежить від точки прикладання.

Три вектори називаються *компланарними,* якщо вони лежать в одній площині або в паралельних площинах. Зокрема, вектори компланарні, якщо два з них або всі три колінеарні. Три вектори вважаються компланарними також у тому випадку, коли хоча б один з них нульовий.

1.2. Лінійні дії з векторами

До лінійних дій з векторами належать додавання і віднімання векторів, множення вектора на число.

1. *Додавання векторів.* Сума $\vec{a}+\vec{b}$ двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ за означенням є вектор $\vec{c}$, напрямлений з початку вектора $\vec{a}$ в кінець вектора $\vec{b}$ за умови, що початок вектора $\vec{b}$ збігається з кінцем вектора $\vec{a}$ (рис. 2.2). Це правило додавання вектора називають правилом трикутника.

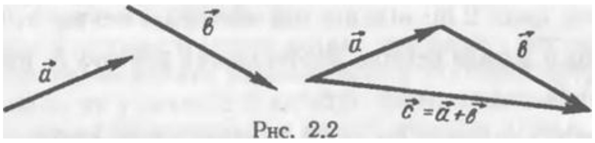

Рис. 2.2

Суму двох векторів можна побудувати також за правилом паралелограма (рис. 2.3).

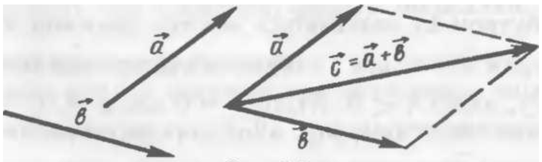

Рис. 2.3

Щоб побудувати суму будь-якого скінченного числа векторів, потрібно в кінці першого вектора побудувати другий, в кінці другого побудувати третій і т. д. Напрямлений відрізок, що йде з початку першого вектора в кінець останнього і буде сумою даних векторів (рис. 2.4).

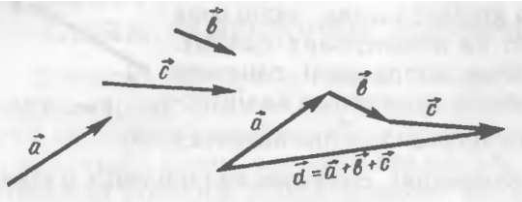

Рис. 2.4

2. *Віднімання векторів* визначається як дія, обернена додаванню. Різницею $\vec{a}-\vec{b}$ називається вектор $\vec{c}$, який, будучи доданий до вектора $\vec{b}$, дає вектор $\vec{a}$ (рис. 2.5).

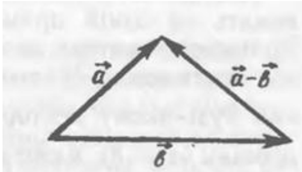

Рис. 2.5

Два вектори називаються *протилежними,* якщо вони колінеарні, довжини їх однакові, а напрями протилежні. Вектор, протилежний вектору $\vec{a}$, позначається через $-\vec{a}$. Тоді різницю $\vec{a}-\vec{b}$ можна тлумачити ще й так (рис. 2.6): відняти від вектора $\vec{a}$ вектор $\vec{b}$ – це все одно, що до вектора $\vec{a}$ додати вектор, протилежний вектору $\vec{b}$, тобто $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$.

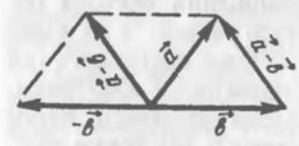

Рис. 2.6

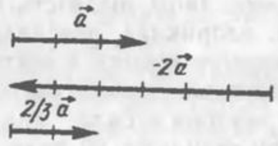

Рис. 2.7

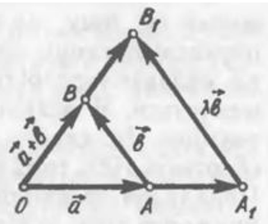

Рис. 2.8

3. *Множення вектора на число.* Нехай задані вектор $\vec{a}\neq 0$ і число $\lambda\neq 0$. Добутком $\lambda\vec{a}$ називається вектор, колінеарний до вектора $\vec{a}$ довжина якого дорівнює $|\lambda||\vec{a}|$, а напрям збігається з напрямом вектора $\vec{a}$, якщо $\lambda>0$, і протилежний йому, якщо $\lambda<0$. Якщо $\lambda=0$ або $\vec{a}=0$, то $\lambda\vec{a}=\vec{0}$.

Геометричний зміст операції множення вектора на число такий: множення вектора $\vec{a}$ на число λ можна розуміти як «розтяг» вектора $\vec{a}$ в λ разів при $\lambda>1$ і «стиск» при $0<\lambda<1$, причому при $\lambda<0$ відбувається ще й зміна напряму. На рис. 2.7 показано вектори $\vec{a}$, $-2\vec{a}$, $\frac{2}{3}\vec{a}$.

З означення множення вектора на число випливає, що коли вектори колінеарні, то існує єдине число λ таке, що $\vec{b}=\lambda\vec{a}$ і, навпаки, якщо $\vec{b}=\lambda\vec{a}$, то вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні.

Лінійні операції над векторами мають такі *властивості:*

1. Комутативність відносно додавання векторів: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.

2. Асоціативність відносно додавання векторів: $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$.

3. Асоціативність відносно множення чисел: $\lambda\left(\mu\vec{a}\right)=\left(\lambda\mu\right)\vec{a}$.

4. Дистрибутивність відносно додавання чисел: $\left(\lambda+\mu\right)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$.

5. Дистрибутивність відносно додавання векторів: $\lambda\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$.

Доведемо, наприклад, властивість 5: нехай $\vec{a}$ і $\vec{b}$ не колінеарні вектори і $\lambda>0$. Побудуємо (рис. 2.8) вектори $\overrightarrow{OB}=\vec{a}+\vec{b}$, $\overrightarrow{OA_1}=\lambda\vec{a}$, $\overrightarrow{OB_1}=\lambda\left(\vec{b}+\vec{a}\right)$. З подібності трикутників OAB і OA_1B_1 випливає, що $\overrightarrow{A_1B_1}=\lambda\vec{b}$, а із ΔOA_1B_1 маємо $\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{OB_1}$, тобто $\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}=\lambda\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$. Випадок $\lambda<0$ розглядається аналогічно.

Якщо $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні і $\vec{a}\neq 0$, то вектор $\vec{b}$ можна записати у вигляді $\vec{b}=\mu\vec{a}$. Тоді, використовуючи властивості 3 і 4, маємо: $\lambda\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\lambda\left(\vec{a}+\mu\vec{a}\right)=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$.

Розглянуті властивості мають велике значення у векторній алгебрі, бо вони дають право робити перетворення в лінійних операціях з векторами так само, як у звичайній алгебрі: векторні доданки можна переставляти місцями і сполучати їх в групи, вводити дужки, виносити за дужки як скалярні, так і векторні спільні множники.

1.3. Розклад вектора за базисом

Застосовуючи лінійні операції над векторами, можна знаходити суми добутків чисел α_i, де $i=1,2,...,n$, на вектори $\vec{a}_i$: $\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+...+\alpha_n\vec{a}_n$. Вирази такого виду називаються *лінійними комбінаціями векторів,* а числа α_i, що входять в лінійну комбінацію, – її коефіцієнтами.

Базисом на прямій називається довільний ненульовий вектор на цій прямій.

Базисом на площині називається довільна упорядкована пара неколінеарних векторів, а *базисом у просторі* – довільна упорядкована трійка некомпланарних векторів. Вектори, що складають базис, називаються базисними. Розкласти вектор за базисом означає зобразити його у вигляді лінійної комбінації базисних векторів.

Якщо вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ складають базис і вектор $\vec{d}$ розкладений за цим базисом, тобто $\vec{d}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}$, то числа α,β,γ називаються *координатами вектора* $\vec{d}$ *в даному базисі,* а вектори $\alpha\vec{a},\beta\vec{b},\gamma\vec{c}$ – компонентами, або складовими векторами $\vec{d}$. Кажуть також, що вектор $\vec{d}$

лінійно виражається через вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ або є лінійною комбінацією їх.

Теорема 1. *Кожен вектор, паралельний до деякої прямої, можна розкласти за базисом на цій прямій.*

Кожен вектор, паралельний до деякої площини, можна розкласти за базисом на цій площині.

Кожен вектор можна розкласти за базисом у просторі.

Координати вектора у кожному випадку визначаються однозначно.

Не зупиняючись на доведенні цієї теореми, розглянемо її геометричний зміст.

Перше твердження теореми означає, що для довільного вектора $\vec{d}$, колінеарного ненульовому вектору $\vec{a}$ (рис. 2.9, а), знайдеться таке число α, що $\vec{d} = \alpha\vec{a}$. Очевидно, що $\alpha = +\frac{|\vec{d}|}{|\vec{a}|}$, якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{d}$ однаково напрямлені, і $\alpha = -\frac{|\vec{d}|}{|\vec{a}|}$, якщо ці вектори протилежно напрямлені.

Друге твердження означає, що для кожного вектора $\vec{d}$, компланарного з двома неколінеарними векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$ (рис. 2.9, б), знайдуться такі числа α та β, що $\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$.

Щоб указати компоненти $\alpha\vec{a}$ та $\beta\vec{b}$, досить розкласти вектор $\vec{d}$ на суму векторів, колінеарних векторам $\vec{a}$ та $\vec{b}$ (згадайте розклад сили у фізиці на дві складові).

Третє твердження теореми означає, що для кожного вектора $\vec{d}$ і некомпланарних векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ знайдуться такі числа α, β, γ, що $\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$. Складові $\alpha\vec{a}, \beta\vec{b}, \gamma\vec{c}$ показані на рис. 2.9, в.

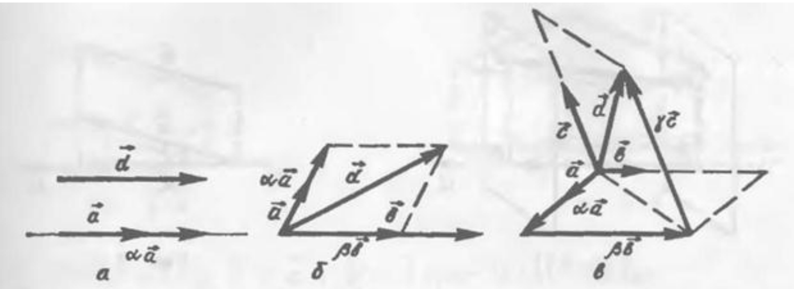

Рис. 2.9

Таким чином, базис в просторі дає змогу кожному вектору однозначно співставити упорядковану трійку чисел (координат цього вектора) і, навпаки, кожній упорядкованій трійці чисел α, β, γ за допомогою базису можна співставити єдиний вектор $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$, де $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – вектори базису, тобто обраний базис дає змогу встановити взаємно однозначну відповідність між векторами і упорядкованими трійками чисел.

1.4. Проекція вектора на вісь

Віссю називається напрямлена пряма. Напрям прямої позначають стрілкою. Заданий на осі напрям вважають додатним, а протилежний йому – від'ємним.

Проекцією точки A на вісь u називається основа A_1 перпендикуляра AA_1, опущеного з точки A на дану вісь. Таким чином, проекція A_1 є точкою перетину осі u з площиною, яка проходить через точку A перпендикулярно до осі u.

Нехай у просторі задано вісь u і вектор $\overrightarrow{AB}$. Позначимо через A_1 та B_1 проекції на вісь u відповідно початку A і кінця B вектора $\overrightarrow{AB}$ і розглянемо вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ (рис. 2.11).

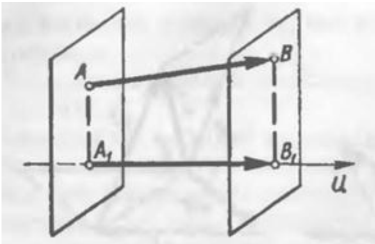

Рис. 2.11

Проекцією вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь u називають додатне число $\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right|$, якщо вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ і вісь u однаково напрямлені, і від'ємне число $-\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right|$, якщо вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ і вісь u протилежно напрямлені. Проекцію вектора $\vec{a}$ на вісь позначають так: $\text{пр}_u \vec{a}$. Якщо $\vec{a} = \vec{0}$, то вважають, що $\text{пр}_u \vec{a} = 0$.

Кутом φ між вектором $\vec{a}$ і віссю u (або між двома векторами) називається менший з кутів, на який потрібно повернути один вектор або вісь, щоб він збігався за напрямом з другим вектором або віссю: $\varphi = \left(\vec{a}, u\right) = \left(\vec{a}, \vec{u}^0\right)$, $0 \le \varphi \le \pi$.

У деяких випадках ми будемо вказувати, від якого вектора і в якому напрямі кут відраховується.

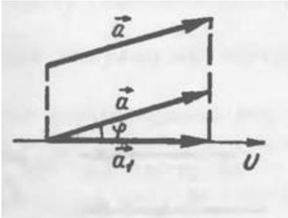

Рис. 2.12

Справедливі такі *властивості проекцій.*

1. *Проекція вектора* $\vec{a}$ *на вісь* u *дорівнює добутку довжини вектора* $\vec{a}$ *на косинус кута* φ *між вектором і віссю, тобто*

$$\text{пр}_u \vec{a} = |\vec{a}| \cos\varphi . \qquad (1)$$

Якщо $\varphi = \left(\widehat{\vec{a}, u}\right) < \dfrac{\pi}{2}$ (рис. 2.12), то $\text{пр}_u \vec{a} = |\vec{a}_1| = |\vec{a}|\cos\varphi$.

Якщо $\varphi > \dfrac{\pi}{2}$ (рис. 2.13), то $\text{пр}_u \vec{a} = -|\vec{a}_1| = -|\vec{a}|\cos(\pi - \varphi) = |\vec{a}|\cos\varphi$.

Якщо $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$, то формула (1) справедлива, оскільки $\text{пр}_u \vec{a} = 0$.

2. *Проекція суми кількох векторів на дану вісь дорівнює сумі їхніх проекцій на цю вісь, тобто*

$$\text{пр}_u \left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right) = \text{пр}_u \vec{a} + \text{пр}_u \vec{b} + \text{пр}_u \vec{c} .$$

Нехай вектор $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ (рис. 2.14). Маємо

$$\text{пр}_u \vec{d} = \left|\vec{d}_1\right| = |\vec{a}_1| + \left|\vec{b}_1\right| - |\vec{c}_1| = \text{пр}_u \vec{a} + \text{пр}_u \vec{b} + \text{пр}_u \vec{c} . \qquad (2)$$

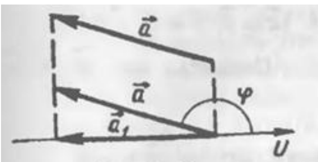

Рис. 2.13

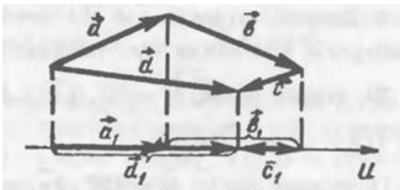

Рис. 2.14

3. *При множенні вектора* $\vec{a}$ *на число* λ *його проекція також помножиться на це число:*

$$\text{пр}_u \left(\lambda \vec{a}\right) = \lambda\, \text{пр}_u \vec{a} . \qquad (3)$$

Нехай $\varphi = \left(\vec{a}, u\right)$ і $\varphi' = \left(\lambda\vec{a}, u\right)$. Якщо $\lambda > 0$, то за формулою (1)

$$\text{пр}_u\left(\lambda\vec{a}\right) = \left|\lambda\vec{a}\right|\cos\varphi' = \lambda\left|\vec{a}\right|\cos\varphi = \lambda\,\text{пр}_u\vec{a};$$

якщо $\lambda < 0$, то

$$\text{пр}_u\left(\lambda\vec{a}\right) = \left|\lambda\vec{a}\right|\cos\varphi' = -\lambda\left|\vec{a}\right|\cos\left(\pi - \varphi\right) = \lambda\,\text{пр}_u\vec{a}.$$

Таким чином, основні властивості проекції вектора на вісь полягають в тому, що лінійні операції над векторами приводять до відповідних лінійних операцій над проекціями цих векторів.

Тема: Системи координат

2.1. Декартова система координат

Розглянемо в просторі точку O і деякий базис, що задається векторами $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ (рис. 2.15).

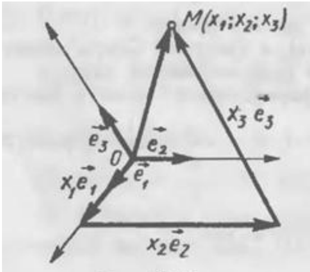

Рис. 2.15

Сукупність точки і базису називається *декартовою системою координат в просторі* на честь французького математика Р. Декарта. Точка O називається *початком координат,* а осі, які проходять через початок координат в напрямі базисних векторів, називаються *осями координат.* Перша з них проходить в напрямі вектора $\vec{e}_1$ і називається *віссю абсцис,* друга вісь, яка проходить у напрямі вектора $\vec{e}_2$, – *віссю ординат* і третя – в напрямі вектора $\vec{e}_3$ – *віссю аплікат.*

Площини, які проходять через осі координат, називаються *координатними площинами.*

Кожній точці простору можна співставити вектор $\overrightarrow{OM}$, початок якого збігається з початком координат O, а кінець – з точкою M. Такий вектор називається *радіусом-вектором точки* M відносно точки O. Згідно з теоремою 1 існують такі дійсні числа x_1, x_2, x_3, що

$$\overrightarrow{OM} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3. \qquad (4)$$

Координати x_1, x_2, x_3 радіуса-вектора точки M відносно початку координат називають *декартовими координатами точки* M в даній системі координат і пишуть: $M(x_1;x_2;x_3)$. Координата x_1 називається *абсцисою* точки M, координата x_2 *ординатою* і координата x_3 – *аплікатою* точки M.

Аналогічно визначаються декартові координати точки на площині і на прямій. Різниця лише в тому, що точка на площині має дві координати, а точка на прямій – одну. Таким чином, якщо в просторі обрано декартову систему координат, то кожній точці простору відповідає одна упорядкована трійка дійсних чисел – декартові координати цієї точки. І навпаки, для кожної упорядкованої трійки чисел знайдеться єдина точка простору, для якої ці числа є декартовими координатами. Це означає, що обрана тим чи іншим способом декартова система координат установлює взаємно однозначну відповідність між точками простору і упорядкованими трійками чисел.

Система координат на площині визначає таку саму відповідність між точками площини і упорядкованими парами чисел, а на прямій – між точками прямої і дійсними числами.

2.2. Прямокутна система координат

Очевидно, декартових систем координат можна задати скільки завгодно. Серед них найчастіше використовується прямокутна декартова система координат. Щоб визначити цю систему, введемо деякі поняття

Упорядкована трійка одиничних попарно ортогональних векторів називається *ортонормованим базисом.* Позначають ортонормований базис через $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, де $\left|\vec{i}\right| = \left|\vec{j}\right| = \left|\vec{k}\right| = 1$, $\left(\vec{i}, \vec{j}\right) = \left(\vec{j}, \vec{k}\right) = \left(\vec{k}, \vec{i}\right) = \frac{\pi}{2}$.

Упорядкована трійка $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ некомпланарних векторів називається *правою* (рис. 2.16, а), якщо з кінця третього вектора $\vec{c}$ найкоротший поворот від першого вектора $\vec{a}$ до другого вектора $\vec{b}$ видно проти годинникової стрілки; в протилежному випадку трійка векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ називається *лівою* (рис. 2.16, *б).*

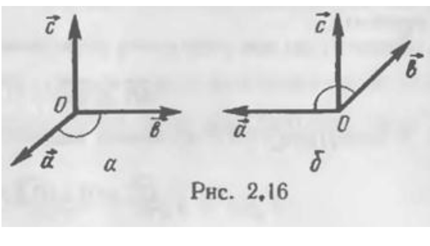

Рис. 2.16

Прямокутною декартовою системою координат (або просто *прямокутною системою координат)* називається декартова система координат, базис якої ортонормований. Прямокутна система координат називається *правою (лівою),* якщо її ортонормований базис утворює праву (ліву) трійку векторів. Надалі користуватимемося правою системою координат, яка визначається правим ортонормованим базисом: $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

Прямокутну систему координат позначають (рис. 2.17) через $Oxyz$ (Ox – вісь абсцис, Oy – вісь ординат, Oz – вісь аплікат), а координатні площини – через Oxy, Oyz, Ozx. Вони поділяють простір на вісім октантів. При зображенні системи координат, як правило, показують лише осі координат; вектори $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ не вказують.

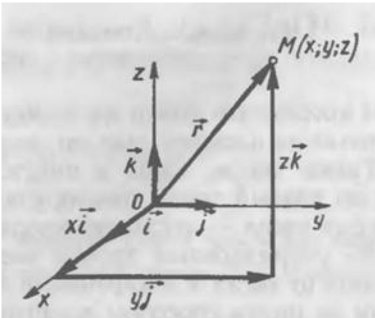

Рис. 2.17

Нехай задана прямокутна система координат $Oxyz$ і довільна точка M (рис. 2.17). Радіус-вектор $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ цієї точки згідно з формулою (4) записують у вигляді

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \text{, або } \vec{r} = (x; y; z). \quad (5)$$

Координати x, y, z радіуса-вектора точки M називаються *координатами точки* M. Точка M з координатами x, y, z позначається через $M(x; y; z)$.

З ортогональності базисних векторів системи $Oxyz$ випливає, що координати точки M дорівнюють відповідним проекціям радіуса-вектора цієї точки на осі координат, тобто

$$x = \text{пр}_{Ox}\overrightarrow{OM},\ y = \text{пр}_{Oy}\overrightarrow{OM},\ z = \text{пр}_{Oz}\overrightarrow{OM}, \quad (6)$$

і визначаються проектуванням точки M на координатні осі (рис. 2.18).

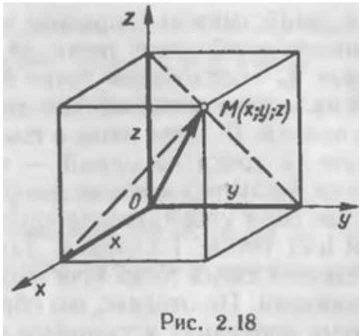

Рис. 2.18

Прямокутні координати точки на площині і на прямій визначаються таким самим способом, як і в просторі.

Прямокутна система координат Oxy на площині задається точкою O – початком координат і двома взаємно перпендикулярними одиничними векторами $\vec{i}, \vec{j}$ – базисом системи координат; система координат на прямій задається точкою O і одиничним вектором $\vec{i}$. Зрозуміло, що точка $M(x; y)$ на площині має лише дві координати (абсцису і ординату), а точка $M(x)$ на прямій – одну.

2.3. Полярна система координат

Декартова система координат не єдиний спосіб визначати за допомогою чисел місце знаходження точки на площині. Для цієї мети використовують багато інших координатних систем.

Найважливішою після прямокутної системи координат є *полярна система координат.* Вона задається точкою O, яка називається *полюсом,* і променем Op, який виходить з полюса і називається *полярною віссю.* Задаються також одиниці масштабу: лінійна – для вимірювання довжин відрізків і кутова – для вимірювання кутів.

Розглянемо полярну систему координат і візьмемо на площині довільну точку M (рис. 2.20). Нехай $\rho = \left|\overrightarrow{OM}\right|$ – відстань від точки O до точки M і $\varphi = \left(Op, \overrightarrow{OM}\right)$ – кут, на який треба повернути полярну вісь проти годинникової стрілки, щоб сумістити її з вектором $\overrightarrow{OM}$.

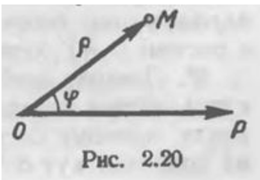

Рис. 2.20

Полярними координатами точки M називаються числа ρ і φ. При цьому число ρ вважається першою координатою і називається *полярним радіусом,* а число φ – другою координатою і називається *полярним кутом.* Точка M з полярними координатами ρ і φ позначається так: $M(\rho;\varphi)$. Очевидно, полярний радіус може набувати довільних невід'ємних значень: $0 \le \rho < +\infty$; полярний кут вважатимемо таким, що змінюється в межах $0 \le \varphi < 2\pi$. Іноді розглядають кути φ, більші від 2π, а також від'ємні кути, тобто такі, що відкладаються від полярної осі за годинниковою стрілкою.

Виразимо декартові координати точки M через полярні.

Вважатимемо, що початок прямокутної системи збігається з полюсом, а вісь Ox – з полярною віссю Op. Якщо точка M (рис. 2.21) має декартові координати x і y і полярні ρ і φ, то

$$x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi, \qquad (7)$$

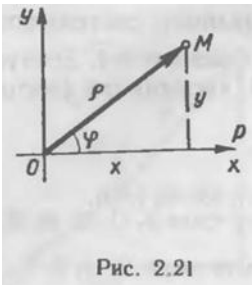

Рис. 2.21

звідки

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2},\ tg\varphi = \frac{y}{x}. \qquad (8)$$

Зауважимо, що друга з формул (8) дає два значення кута φ, оскільки він змінюється від 0 до 2π. З цих двох значень кута треба взяти те, для якого задовольняються формули (7). Формули (7) називають *формулами переходу від полярних координат до декартових,* а формули (8) – *формулами переходу від декартових координат до полярних.*

2.4. Перетворення прямокутних координат на площині

При розв’язуванні задач іноді потрібно переходити від однієї прямокутної системи до іншої. Виконується такий перехід за допомогою формул перетворення координат.

Розглянемо перетворення координат на площині.

1. *Паралельне перенесення осей.* Візьмемо дві прямокутні декартові системи координат Oxy і O_1XY з різними початками координат і однаково напрямленими осями.

Нехай точки O_1 і M в системі Oxy (рис. 2.23) мають відповідно координати $(a;b)$ і $(x;y)$, тоді координати точки M в системі O_1XY задовольняють рівності

$$X = x - a\,,\ Y = y - b\,. \qquad (9)$$

Формули (9) називаються *формулами перетворення координат при паралельному перенесенні осей.* Вони виражають координати точок в системі O_1XY через координати точок в системі Oxy.

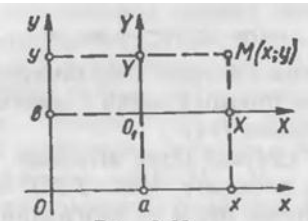

Рис. 2.23

2. *Поворот осей координат.* Нехай на площині задані дві прямокутні системи координат Oxy і OXY, що мають спільний початок координат, причому система OXY утворена з системи Oxy поворотом осей на додатний кут α (рис. 2.24).

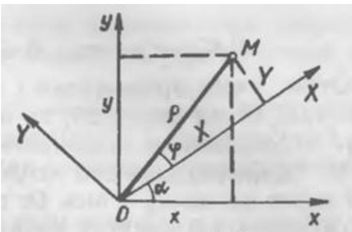

Рис. 2.24

Знайдемо формули, що виражають координати $(x;y)$ точки M в системі Oxy через координати $(X;Y)$ цієї точки в системі OXY. Введемо дві полярні системи координат із спільним полюсом O і полярними осями Ox і OX, тоді згідно з формулами (7) маємо

$$x=\rho\cos(\varphi+\alpha)=\rho\cos\varphi\cos\alpha-\rho\sin\varphi\sin\alpha=X\cos\alpha-Y\sin\alpha;$$

$$y=\rho\sin(\varphi+\alpha)=\rho\sin\varphi\cos\alpha+\rho\cos\varphi\sin\alpha=Y\cos\alpha+X\sin\alpha,$$

звідки

$$X=x\cos\alpha+y\sin\alpha,\ Y=-x\sin\alpha+y\cos\alpha. \qquad (10)$$

Формули (10) називаються *формулами перетворення координат при повороті осей*.

2.5. Циліндрична та сферична системи координат

У просторі крім прямокутної системи координат часто використовують циліндричну та сферичну системи координат.

1. *Циліндрична система координат.* Якщо в прямокутній системі координат $Oxyz$ замість перших двох координат x, y взяти полярні координати ρ, φ, а третю координату z залишити без зміни, то дістанемо циліндричну систему координат (рис. 2.25**).** Координати точки M простору в цій системі записуються у вигляді $M\left(\rho;\varphi;z\right)$.

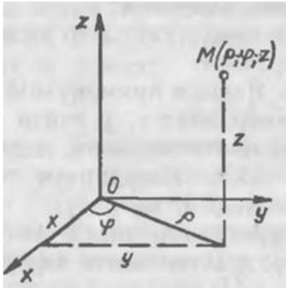

Рис. 2.25

Залежності між прямокутними координатами точки $M\left(x;y;z\right)$ і її циліндричними координатами $M\left(\rho;\varphi;z\right)$ випливають з формул (7):

$$x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi,\ z = z, \tag{11}$$

де

$$0 \le \rho < +\infty,\ 0 \le \varphi < 2\pi,\ -\infty < z < +\infty.$$

Отже, якщо прямокутна і циліндрична системи координат розміщені так, як на рис. 2.25, то зв'язок між прямокутними і циліндричними координатами виражається формулами (11).

2. *Сферична система координат.* У системі $Oxyz$ візьмемо точку M і через цю точку і вісь Oz проведемо площину (рис. 2.26). Нехай r – відстань від початку координат до точки M; φ – двогранний кут між площинами Ozx і zOM; θ – кут між віссю Oz і променем OM. Упорядкована трійка чисел r, φ, θ однозначно визначає положення точки M у просторі. Ці числа називаються *сферичними координатами точки* M.

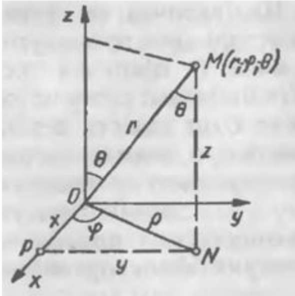

Рис. 2.26

Знайдемо залежність між прямокутними і сферичними координатами точки M. З прямокутних трикутників ONM і OPN маємо

$$z = r\cos\theta,\ \rho = r\sin\theta,\ x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi,$$

тоді

$$x = r\sin\theta\cos\varphi,\ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ z = r\cos\theta, \qquad (12)$$

де

$$0 \le r < +\infty,\ 0 \le \varphi < 2\pi,\ 0 \le \theta \le \pi.$$

Таким чином, якщо прямокутна і сферична системи координат розміщені так, як на рис. 2.26, то зв'язок між прямокутними і сферичними координатами виражається формулами (12).

2.6. Поняття про n - вимірний простір

Як уже вказувалось в п. 1, між геометричними векторами і їхніми координатами у фіксованому базисі існує взаємно однозначна відповідність. При цьому кожному вектору простору співставляється упорядкована трійка чисел, кожному вектору, що належить деякій площині, – упорядкована пара чисел, а кожному вектору, що належить деякій прямій, – дійсне число, і навпаки.

Упорядковану трійку чисел називають *тривимірним вектором,* а множину всіх тривимірних векторів називають *тривимірним простором* і позначають через R_3.

Упорядковані пари чисел називають *двовимірними векторами,* а числа – *одновимірними.* Множини двовимірних і одновимірних векторів називають відповідно *двовимірними* і *одновимірними просторами* і позначають через R_2 і R_1.

Узагальнюючи простори R_1, R_2, R_3, приходимо до n-вимірного простору R_n, де n – довільне натуральне число.

Упорядкована множина n дійсних чисел $x_1, x_2, ..., x_n$ називається n-вимірним *вектором* $\vec{x}$ і позначається так: $\vec{x} = (x_1; x_2; ...; x_n)$.

Множина всіх n-вимірних векторів називається n*-вимірним простором* і позначається через R_n. Якщо довільний вектор $\vec{x} = (x_1; x_2; ...; x_n)$ простору R_n розглядати як радіус-вектор відповідної точки M відносно початку вибраної системи координат, то координати точки M визначаються як координати цього радіуса-вектора. У зв'язку з цим n-вимірний простір R_n можна тлумачити також як множину впорядкованих сукупностей n дійсних чисел.

Простори R_1, R_2, R_3 є окремими випадками простору R_n. Їх можна зобразити геометрично; для $n > 3$ простори R_n зобразити геометрично вже не можна, проте вони відіграють важливу роль у науці і техніці.

2.7. Лінійна залежність векторів

Розглянемо систему з m n-вимірних векторів

$$\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_m. \tag{13}$$

За означенням вектори (13) називаються *лінійно залежними,* якщо рівність

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + ... + \alpha_m \vec{a}_m = 0 \tag{14}$$

можлива за умови, що хоча б одне з чисел $\alpha_i \neq 0$, де $i = 1, 2, ..., m$. Якщо ж рівність (14) можлива лише за умови, що $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_m = 0$, то вектори (13) називаються *лінійно незалежними.*

Для з'ясування питання про лінійну залежність векторів (13) кожен із заданих векторів $\vec{a}_i = (\vec{a}_{1i}; \vec{a}_{2i}; ...; \vec{a}_{ni})$ і нуль-вектор $\vec{0} = (0; 0; ...; 0)$ запишемо як матрицю-стовпець, тоді векторну рівність (14) можна записати у матричній формі:

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + \dots + \alpha_m \begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \dots \\ a_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix},$$

або

$$\begin{cases} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \dots + a_{1m}\alpha_m = 0; \\ a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \dots + a_{2m}\alpha_m = 0; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \dots + a_{nm}\alpha_m = 0. \end{cases} \qquad (15)$$

Маємо лінійну однорідну систему рівнянь відносно невідомих α_i. Якщо система (15) має лише нульовий розв’язок, то вектори (13) будуть лінійно незалежними. Якщо ж крім нульового система (15) має ще й ненульові розв’язки, то вектори (ІЗ) лінійно залежні.

Наводимо без доведення такі властивості поняття лінійної залежності:

1) *якщо серед векторів (13) є нульовий, то ці вектори лінійно залежні;*

2) *якщо вектори (13) лінійно залежні, то після додавання до них одного чи кількох нових векторів дістанемо лінійно залежну систему векторів;*

3) *якщо вектори (13) лінійно незалежні, то після відкидання одного чи кількох векторів дістанемо знову лінійно незалежні вектори;*

4) *вектори (13) лінійно залежні тоді і лише тоді, коли один з них є лінійною комбінацією інших;*

5) *якщо два ненульові тривимірні вектори лінійно залежні, то вони колінеарні, і навпаки;*

6) *якщо три ненульові тривимірні вектори лінійно залежні, то вони компланарні, і навпаки;*

7) *чотири (і більше) тривимірних вектори завжди лінійно залежні.*

Поняття лінійної залежності має досить глибокий зміст і широко використовується в математиці. Не вдаючись до подробиць, наведемо деякі застосування цього поняття.

1. Кожна упорядкована сукупність лінійно незалежних векторів, через які лінійно виражається довільний вектор простору, називається *базисом* цього простору. Неважко переконатись в еквівалентності цього означення і означення базисів у просторах R_1, R_2, R_3.

2. Максимальне число лінійно незалежних векторів деякого простору називається його *розмірністю.* Розмірність простору дорівнює числу базисних векторів цього простору. Відповідно до цього означення пряму лінію розглядають як одновимірний простір з одним базисним вектором; площина – це двовимірний простір R_2, базис якого містить два вектори і т. п.

3. Максимальне число лінійно незалежних стовпців матриці дорівнює максимальному числу її лінійно незалежних рядків і це число дорівнює рангу матриці.

Розглянемо систему лінійних рівнянь і зафіксуємо який-небудь відмінний від нуля мінор, порядок якого дорівнює рангу матриці цієї системи. Рівняння, у яких коефіцієнти при невідомих утворюють обраний мінор, називають *базисними.* Тоді з твердження 3 випливає такий важливий для практики висновок: система лінійних рівнянь еквівалентна системі своїх базисних рівнянь.

Приклад

Довести, що вектори $\vec{a}=(1;2;3)$, $\vec{b}=(0;1;2)$, $\vec{c}=(1;3;-1)$ лінійно незалежні.

Розв’яжемо рівняння $\alpha_1\vec{a}+\alpha_2\vec{b}+\alpha_3\vec{c}=0$. Маємо

$$\alpha_1\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\text{ або }\begin{cases}\alpha_1+\alpha_3=0;\\2\alpha_1+\alpha_2+3\alpha_3=0;\\3\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3=0.\end{cases}$$

Оскільки визначник системи відмінний від нуля (перевірте), то система має єдиний розв’язок $\alpha_1=0,\alpha_2=0,\alpha_3=0$. Отже задані вектори лінійно незалежні.

Тема 3: Вектори в системі координат

3.1. Координати, довжина і напрямні косинуси вектора

Для того щоб операції над векторами звести до операцій над числами, розглядатимемо вектори в системі координат.

1. *Координати вектора.* Нехай в прямокутній системі координат $Oxyz$ задано вектор $\vec{a}$. Це означає, що в ортонормованому базисі $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, який задає обрану систему координат, вектор $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, де числа a_x, a_y, a_z – координати вектора $\vec{a}$ в цьому базисі. Але з властивостей проекції випливає, що

$$a_x = \text{пр}_{Ox}\vec{a}, \; a_y = \text{пр}_{Oy}\vec{a}, \; a_z = \text{пр}_{Oz}\vec{a}. \qquad (16)$$

Отже, координати вектора в системі координат $Oxyz$ це його проекції на осі координат.

2. *Довжина вектора.* Вектор $\vec{a}$ є діагоналлю прямокутного паралелепіпеда (рис. 2.27) з вимірами $|a_x|, |a_y|, |a_z|$, тому довжина цього вектора дорівнює

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \qquad (17)$$

Якщо початок вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ (рис. 2.28) міститься в точці $A(x_1; y_1; z_1)$, а кінець – в точці $B(x_2; y_2; z_2)$, то з формул (2) і (16) випливає, що $a_x = x_2 - x_1$, $a_y = y_2 - y_1$, $a_z = z_2 - z_1$, тобто

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1). \qquad (18)$$

Тоді з формули (17) знаходимо довжину вектора $\overrightarrow{AB}$:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \qquad (19)$$

Цією формулою користуються для знаходження *відстані між точками* A і B.

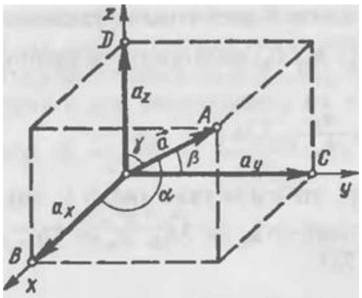

Рис. 2.27

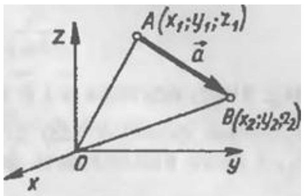

Рис. 2.28

3. *Напрямні косинуси вектора.* Напрям довільного вектора $\vec{a}=\left(a_x;a_y;a_z\right)$ визначається кутами α,β,γ, які утворює вектор $\vec{a}$ з осями координат (рис. 2.27):

$$\alpha=\left(\vec{a},\vec{i}\right),\ \beta=\left(\vec{a},\vec{j}\right),\ \gamma=\left(\vec{a},\vec{k}\right),\ 0\le\alpha,\beta,\gamma\le\pi .$$

Косинуси цих кутів називаються *напрямними косинусами.* Формули для напрямних косинусів дістаємо з формул (1) і (16):

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{|\vec{a}|},\ \cos\beta=\frac{a_y}{|\vec{a}|},\ \cos\gamma=\frac{a_z}{|\vec{a}|}. \qquad (20)$$

Піднесемо обидві частини кожної з рівностей (20) до квадрата і додамо їхні ліві та праві частини. З урахуванням формули (17) отримаємо

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1, \qquad (21)$$

тобто сума квадратів напрямних косинусів довільного вектора дорівнює одиниці.

3.2. Лінійні дії з векторами. Рівність і колінеарність векторів

1. *Дії з векторами.* Якщо відомі координати векторів, то лінійним діям з векторами відповідають відповідні арифметичні дії над їхніми координатами. Це випливає з властивостей 2, 3 проекцій. Нехай задано вектори $\vec{a}=\left(a_x;a_y;a_z\right)$, $\vec{b}=\left(b_x;b_y;b_z\right)$ і дійсне число λ, тоді $\lambda\vec{a}=\left(\lambda a_x;\lambda a_y;\lambda a_z\right)$, $\vec{a}\pm\vec{b}=\left(a_x\pm b_x;a_y\pm b_y;a_z\pm b_z\right)$.

2. *Рівність векторів.* Нехай вектори $\vec{a}=\left(a_x;a_y;a_z\right)$ та $\vec{b}=\left(b_x;b_y;b_z\right)$ рівні, тобто мають однакові довжини і напрям, тоді з формул (1) і (16) випливає, що

$$a_x=b_x,\ a_y=b_y,\ a_z=b_z \tag{22}$$

і навпаки, якщо мають місце формули (22), то $\vec{a}=\vec{b}$. Отже, векторна рівність виду $\vec{a}=\vec{b}$ еквівалентна трьом скалярним рівностям (22).

3. *Колінеарність векторів.* Необхідною і достатньою умовою того, що вектори $\vec{a}=\left(a_x;a_y;a_z\right)$ та $\vec{b}=\left(b_x;b_y;b_z\right)$ колінеарні, є пропорційність їхніх проекцій:

$$\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}. \tag{23}$$

Дійсно, якщо вектори $\vec{a}$ $\vec{b}$ колінеарні, то існує таке число λ, що $\vec{a}=\lambda\vec{b}$, тоді з формул (22) отримуємо рівності $a_x=\lambda b_x$; $a_y=\lambda b_y$; $a_z=\lambda b_z$, з яких випливає формула (23).

3.3. Поділ відрізка в даному відношенні. Координати центра мас

Нехай задано відрізок AB точками $A(x_1; y_1; z_1)$ і $B(x_2; y_2; z_2)$. Знайдемо на відрізку таку точку $M(x; y; z)$, яка ділить цей відрізок у відношенні λ, тобто $\left|\overrightarrow{AM}\right| \div \left|\overrightarrow{MB}\right| = \lambda$. Введемо радіуси-вектори $\vec{r}_1 = \overrightarrow{OA_1} = (x_1; y_1; z_1)$, $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = (x; y; z)$, $\vec{r}_2 = \overrightarrow{OB} = (x_2; y_2; z_2)$ (рис. 2.29). Оскільки $\overrightarrow{AM} = \vec{r} - \vec{r}_1$, $\overrightarrow{MB} = \vec{r}_2 - \vec{r}$ і за умовою $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{MB}$, то $\vec{r} - \vec{r}_1 = \lambda(\vec{r}_2 - \vec{r})$, звідки $\vec{r} = \dfrac{\vec{r}_1 + \lambda\vec{r}_2}{1+\lambda}$. Прирівнюючи проекції обох частин цієї рівності на осі координат, згідно з формулами (22) маємо

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda},\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda},\ z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}. \qquad (24)$$

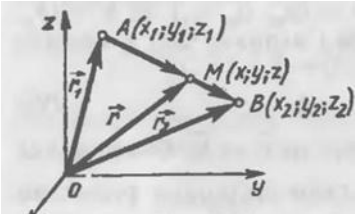

Рис. 2.29

Зокрема, координати точки, яка ділить відрізок AB навпіл ($\lambda = 1$), знаходять за формулами

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2},\ y = \frac{y_1 + y_2}{2},\ z = \frac{z_1 + z_2}{2}. \qquad (25)$$

Виведемо тепер формули для координат центра мас системи матеріальних точок $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, ..., $M_n(x_n; y_n; z_n)$, в яких зосереджено маси $m_1, m_2, ..., m_n$. Знайдемо спочатку центр маси $N_1(x_{N_1}; y_{N_1}; z_{N_1})$ системи двох точок M_1 та M_2. Оскільки центр маси лежить на відрізку M_1M_2 і ділить його у відношенні $\lambda_1 = \dfrac{m_2}{m_1} = \dfrac{\left|\overrightarrow{M_1N_1}\right|}{\left|\overrightarrow{N_1M_2}\right|}$, то за формулами (24)

$$x_{N_1} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2},\ y_{N_1} = \frac{m_1y_1 + m_2y_2}{m_1 + m_2},\ z_{N_1} = \frac{m_1z_1 + m_2z_2}{m_1 + m_2}. \qquad (26)$$

Точка, координати якої обчислюються за формулами (26), називається *центром мас двох матеріальних точок* M_1 і M_2.

Розглянемо тепер систему точок N_1 і M_3, в яких зосереджено маси m_1+m_2 і m_3 і знайдемо центр маси $N_2\left(x_{N_2};y_{N_2};z_{N_2}\right)$ цих точок. Оскільки $\lambda_2=\dfrac{m_3}{m_1+m_2}=\dfrac{\left|\overrightarrow{N_1N_2}\right|}{\left|\overrightarrow{N_2M_3}\right|}$, то з формул (24) і (26) маємо

$$x_{N_2}=\frac{m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3}{m_1+m_2+m_3},\qquad y_{N_2}=\frac{m_1y_1+m_2y_2+m_3y_3}{m_1+m_2+m_3},$$

$$z_{N_2}=\frac{m_1z_1+m_2z_2+m_3z_3}{m_1+m_2+m_3}. \qquad (27)$$

Точка, координати якої обчислюються за формулами (27), називається центром мас трьох матеріальних точок M_1, M_2, M_3.

Методом математичної індукції можна довести, що центр мас системи n матеріальних точок знаходиться в точці $C\left(x_C;y_C;z_C\right)$, де

$$x_C=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}m_ix_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}m_i},\ y_C=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}m_iy_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}m_i},\ z_C=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}m_iz_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}m_i}.$$

Тема 4: Скалярний добуток двох векторів

4.1. Означення, геометричний та механічний зміст скалярного добутку

Скалярним добутком двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається число $\vec{a}\cdot\vec{b}$, що дорівнює добутку довжин цих векторів на косинус кута між ними:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi, \qquad (28)$$

де $\varphi = \left(\vec{a},\vec{b}\right)$ – кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Якщо хоча б один з векторів $\vec{a}$ чи $\vec{b}$ нульовий, то за означенням $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$. Оскільки за формулою (3) $|\vec{a}|\cos\varphi = \text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}$, $|\vec{b}|\cos\varphi = \text{пр}_{\vec{a}}\vec{b}$, то з (28) маємо

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\,\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b} = |\vec{b}|\,\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}. \qquad (29)$$

Формули (29) виражають геометричний зміст скалярного добутку: скалярний добуток двох векторів дорівнює добутку довжини одного вектора на проекцію на нього другого вектора.

З фізики відомо, що робота A сили $\vec{F}$ при переміщенні матеріальної точки з початку в кінець вектора $\vec{S}$, який утворює з вектором $\vec{F}$ кут α (рис. 2.30), дорівнює $A = |\vec{F}||\vec{S}|\cos\alpha$, або

$$A = \vec{F}\cdot\vec{S}. \qquad (30)$$

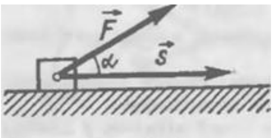

Рис. 2.30

Отже, робота дорівнює скалярному добутку вектора сили на вектор переміщення. В цьому суть механічного змісту скалярного добутку.

4.2. Властивості скалярного добутку

У векторному численні величину $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)$ називають скалярним добутком векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ тому, що, по-перше, ця величина є скаляр і, по-друге, має деякі алгебраїчні властивості звичайного добутку чисел.

Розглянемо три *алгебраїчні властивості* скалярного добутку.

1. *Комутативна* властивість множення:

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$.

За означенням скалярного добутку $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)$ і $\vec{b}\cdot\vec{a}=|\vec{b}||\vec{a}|\cos\left(\vec{b},\vec{a}\right)$. Оскільки $|\vec{a}||\vec{b}|=|\vec{b}||\vec{a}|$ як добуток чисел і $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\cos\left(\vec{b},\vec{a}\right)$, тому що $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\left(\vec{b},\vec{a}\right)$ то $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$.

2. *Асоціативна* властивість відносно множення на число λ:

$(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$.

З формул (29) і (3) маємо

$(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=|\vec{b}|\,\text{пр}_{\vec{b}}(\lambda\vec{a})=\lambda|\vec{b}|\,\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}=\lambda\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$.

3. *Дистрибутивна* властивість відносно додавання векторів:

$\vec{a}\cdot\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$.

Згідно з формулами (29) і (2) одержимо

$\vec{a}\cdot\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=|\vec{a}|\,\text{пр}_{\vec{a}}\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=|\vec{a}|\,\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b}+|\vec{a}|\,\text{пр}_{\vec{a}}\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$.

Ці три властивості обумовлюють глибоку аналогію між векторною алгеброю і алгеброю чисел. Перша властивість дає змогу міняти місцями множники, друга – об’єднувати числові коефіцієнти векторних множників, а третя – розкривати або вводити дужки і виносити за них спільні скалярні чи векторні множники. Проте аналогія між скалярним добутком векторів і добутком чисел є неповною. Зокрема, не існує скалярного добутку трьох і більшого числа векторів; рівність $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ може виконуватись і при ненульових множниках $\vec{a}\neq 0$, $\vec{b}\neq 0$, якщо $\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)=\frac{\pi}{2}$; не можна робити висновок, що з рівності $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}$ випливає рівність $\vec{b}=\vec{c}$ навіть коли $\vec{a}\neq 0$. Рівність $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}$ при $\vec{a}\neq 0$ означає, що $\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}-\vec{c}}\right)=\frac{\pi}{2}$ і правильна при $\vec{b}\neq\vec{c}$.

Наведемо *геометричні властивості* скалярного добутку.

4. *Якщо* $\vec{a}\neq 0$ *і* $\vec{b}\neq 0$*, то* $\vec{a}\cdot\vec{b}>0$*, коли кут* $\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)$ *– гострий, і* $\vec{a}\cdot\vec{b}<0$*, коли кут* $\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)$ *– тупий.*

5. *Скалярний добуток двох ненульових векторів дорівнює нулю тоді і лише тоді, коли ці вектори взаємно перпендикулярні.*

6. *Скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату його довжини*

$$\vec{a}^2=|\vec{a}|^2, \qquad (31)$$

Звідки

$$|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}^2}\,. \qquad (32)$$

Властивості 4 – 6 безпосередньо випливають з формули (28).

4.3. Вираз скалярного добутку через координати. Кут між векторами

Нехай задано два вектори $\vec{a}=\left(a_x;a_y;a_z\right)$ та $\vec{b}=\left(b_x;b_y;b_z\right)$. Знайдемо їхній скалярний добуток Використовуючи властивості 1 і 3 скалярного добутку, одержимо

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}\right)\cdot\left(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}\right)=$$

$$=a_xb_x\vec{i}^{\,2}+a_xb_y\vec{i}\cdot\vec{j}+a_xb_z\vec{i}\cdot\vec{k}+a_yb_x\vec{i}\cdot\vec{j}+a_yb_y\vec{j}^{\,2}+$$

$$+a_y b_z \vec{j} \cdot \vec{k} + a_z b_x \vec{k} \cdot \vec{i} + a_z b_y \vec{k} \cdot \vec{j} + a_z b_z \vec{k}^2 .$$

Оскільки $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – попарно ортогональні орти, то $\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1$, $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$, тому

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z . \qquad (33)$$

Отже, скалярний добуток двох векторів, заданих координатами в прямокутній системі координат, дорівнює сумі добутків їхніх відповідних координат.

Вкажемо на ряд важливих висновків з формули (33).

1. Необхідною і достатньою умовою перпендикулярності векторів $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$ і $\vec{b} = (b_x; b_y; b_z)$ є рівність

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0 . \qquad (34)$$

2. Довжина вектора $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$ визначається за формулою

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} . \qquad (35)$$

Формула (35) випливає з формул (32) і (33).

3. Кут $\varphi = (\vec{a}, \vec{b})$ між векторами $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$ та $\vec{b} = (b_x; b_y; b_z)$ визначається рівністю

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}} . \qquad (36)$$

Ця формула є наслідком формул (28), (33) і (35).

Тема 5: Векторний добуток двох векторів

5.1. Означення і властивості векторного добутку

Векторним добутком вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c}$, який визначається такими трьома умовами:

1) довжина вектора $\vec{c}$ дорівнює $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi$, де $\varphi = \left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)$;

2) вектор $\vec{c}$ перпендикулярний до кожного з векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

3) якщо $\vec{c} \neq 0$, то вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ утворюють праву трійку векторів.

Векторний добуток позначають одним із символів: $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \left[\vec{a}\vec{b}\right] = \left[\vec{a} \times \vec{b}\right]$.

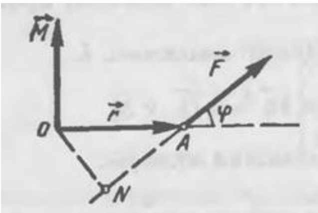

Рис. 2.31

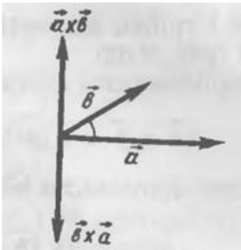

Рис. 2.32

Розглянемо кілька прикладів.

1. Нехай в точці A (рис. 2.31) прикладена сила $\vec{F}$ і O – деяка фіксована точка. Як відомо з фізики, моментом сили $\vec{F}$ відносно точки O називається вектор $\vec{M}$, довжина якого дорівнює добутку сили на плече і який напрямлений по осі обертання так, що коли дивитися з його кінця, то обертання тіла відбувається проти руху стрілки годинника. Оскільки

$$\left|\vec{M}\right| = \left|\vec{F}\right| ON = \left|\vec{F}\right||\vec{r}|\sin\varphi = \left|\vec{F}\right|\left|\overrightarrow{OA}\right|\sin\left(\widehat{\vec{F}, \overrightarrow{OA}}\right),$$

то момент сили $\vec{F}$, прикладеної в точці A, відносно точки O визначається векторним добутком

$$\vec{M} = \overrightarrow{OA} \times \vec{F}. \qquad (37)$$

2. Швидкість $\vec{v}$ точки P твердого тіла, яке обертається з кутовою швидкістю $\vec{\omega}$ навколо нерухомої осі l, визначається за формулою Ейлера $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$.

3. Якщо електрон, заряд якого дорівнює e, рухається з швидкістю $\vec{v}$ в магнітному полі сталої напруги $\vec{H}$, то на електрон діє сила $\vec{F}$, яка визначається за формулою

$$\vec{F} = \frac{e}{c}\left(\vec{v} \times \vec{H}\right),$$

де c – швидкість світла.

Розглянемо *алгебраїчні властивості векторного добутку.*

1. *Антикомутативність множення:* $\vec{a} \times \vec{b} = -\left(\vec{b} \times \vec{a}\right)$, тобто від перестановки множників векторний добуток змінює знак. Це випливає з того, що вектори $\vec{a} \times \vec{b}$ і $\vec{b} \times \vec{a}$ мають однакові модулі, колінеарні і трійки векторів $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}\right)$ і $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{b} \times \vec{a}\right)$ протилежної орієнтації (рис. 2.32).

2. *Асоціативність відносно скалярного множника* $\lambda : \lambda\vec{a} \times \vec{b} = \lambda\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)$; $\vec{a} \times \lambda\vec{b} = \lambda\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)$.

3. *Дистрибутивність відносно додавання векторів:* $\vec{a} \times \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$.

Алгебраїчні властивості векторного добутку дають змогу при множенні лінійних векторів виконувати дії так само, як з алгебраїчними многочленами. Проте при виконанні векторного множення слід пам’ятати, що воно некомутативне: при переставлянні співмножників знак векторного добутку змінюється на протилежний.

Наведемо *геометричні властивості векторного добутку.*

4. *Векторний добуток двох векторів дорівнює нулю тоді і лише тоді, коли ці вектори колінеарні.*

5. *Модуль* $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$ *векторного добутку неколінеарних векторів дорівнює площі* S *паралелограма, побудованого на векторах* $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$*, віднесених до спільного початку, тобто*

$$S=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|. \tag{38}$$

6. *Векторні добутки ортів задовольняють такі рівності:*

$\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=0$, $\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}$, $\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}$,

$\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$, $\vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k}$, $\vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i}$, $\vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}$.

5.2. Векторний добуток двох векторів, заданих координатами

Нехай в прямокутній системі координат задано вектори $\vec{a}=\left(a_x;a_y;a_z\right)$ і $\vec{b}=\left(b_x;b_y;b_z\right)$. Покажемо, що векторний добуток вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ визначається за формулою

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}. \tag{39}$$

Використовуючи властивості 1 – 3 і 6 векторного добутку і теорему про розклад визначника, маємо

$$\vec{a}\times\vec{b}=\left(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}\right)\times\left(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}\right)=$$

$$=a_xb_x\left(\vec{i}\times\vec{i}\right)+a_xb_y\left(\vec{i}\times\vec{j}\right)+a_xb_z\left(\vec{i}\times\vec{k}\right)+a_yb_x\left(\vec{j}\times\vec{i}\right)+$$

$$+a_yb_y\left(\vec{j}\times\vec{j}\right)+a_yb_z\left(\vec{j}\times\vec{k}\right)+a_zb_x\left(\vec{k}\times\vec{i}\right)+a_zb_y\left(\vec{k}\times\vec{j}\right)+$$

$$+a_zb_z\left(\vec{k}\times\vec{k}\right)=\left(a_yb_z-a_zb_y\right)\vec{i}-\vec{j}\left(a_xb_z-a_zb_x\right)+\left(a_xb_y-a_yb_x\right)\vec{k}=$$

$$=\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\vec{k}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}.$$

Тема 6: Мішаний добуток векторів

6.1. Означення і обчислення мішаного добутку

При множенні двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ вище було визначено два види добутків: скалярний, результатом якого є число $\vec{a}\cdot\vec{b}$, і векторний, результатом якого є вектор $\vec{a}\times\vec{b}$.

Множення трьох векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ можна виконати різними способами. Зокрема, можна утворити такі добутки:

$$\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\cdot\vec{c},\ \left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c},\ \left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}.$$

Перший з цих добутків відповідає множенню скаляра $\vec{a}\cdot\vec{b}$ на вектор $\vec{c}$ і результатом цього добутку є вектор, колінеарний до вектора $\vec{c}$. Те саме стосується добутків $\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)\cdot\vec{b}$ та $\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)\cdot\vec{a}$.

Результатом другого добутку є вектор $\vec{d}$, який називається *подвійним векторним* або *векторно-векторним добутком* даних трьох векторів:

$$\vec{d}=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c}.$$

Для знаходження подвійного векторного добутку застосовують формули

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c}=\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)\vec{b}-\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)\vec{a};$$

$$\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)\vec{b}-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\vec{c}.$$

Подвійний векторний добуток часто зустрічається у векторному численні, але певного геометричного змісту не має.

Останній з наведених добутків $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$ – це скалярний добуток вектора $\vec{a}\times\vec{b}$ на вектор $\vec{c}$; його називають *мішаним добутком* векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$. Цей добуток має важливий геометричний зміст і часто використовується в задачах.

Знайдемо мішаний добуток векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, заданих координатами:

$\vec{a}=\left(a_x;a_y;a_z\right)$, $\vec{b}=\left(b_x;b_y;b_z\right)$, $\vec{c}=\left(c_x;c_y;c_z\right)$.

Координати вектора $\vec{a}\times\vec{b}$ визначаються за формулою (39):

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\vec{k}.$$

Помноживши вектор $\vec{a}\times\vec{b}$ скалярно на вектор $\vec{c}$, за формулою (33) одержимо

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \qquad (40)$$

6.2. Властивості мішаного добутку

1. *Якщо в мішаному добутку поміняти місцями які-небудь два множники, то мішаний добуток змінить знак, наприклад:*

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=-\vec{c}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{a}\right).$$

Дійсно, якщо в мішаному добутку поміняти місцями два множники, то це те саме, що у визначнику (40) поміняти місцями два рядки, а від цього визначник змінює знак.

2. *При циклічній перестановці множників мішаний добуток не змінюється:*

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\cdot\vec{a}=\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)\cdot\vec{b}.$$

Справді, при циклічній перестановці множники міняються місцями два рази, або, що те саме, у визначнику (40) рядки міняються місцями двічі, а від цього визначник не змінюється.

3. *У мішаному добутку знаки векторного і скалярного добутків можна міняти місцями:*

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right).$$

Справді, з властивості 2 і комутативності скалярного добутку маємо

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\cdot\vec{a}=\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right).$$

У зв'язку з цим мішані добутки $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$ (векторно-скалярний добуток) і $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$ (скалярно-векторний добуток) скорочено позначають так: $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

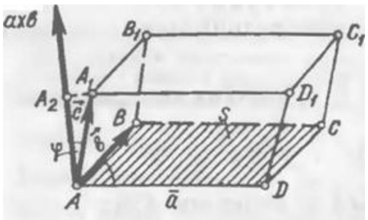

Рис. 2.33

4. *Модуль мішаного добутку* $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ *дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах* $\vec{a}$, $\vec{b}$ *і* $\vec{c}$, *віднесених до спільного початку:*

$$V=\left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|. \qquad (41)$$

Візьмемо три некомпланарних вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ і побудуємо на цих векторах паралелепіпед (рис. 2.33). Об'єм цього паралелепіпеда

$$V=Sh,$$

де S – площа основи, а h – висота. Але $S=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$, $h=\left|\overrightarrow{AA_2}\right|=\left|\text{пр}_{\vec{a}\times\vec{b}}\vec{c}\right|$, тому $V=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|\left|\text{пр}_{\vec{a}\times\vec{b}}\vec{c}\right|=\left|\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}\right|=\left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|$.

5. Якщо мішаний добуток $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ додатний, то вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ утворюють праву трійку, а якщо від'ємний, то ліву.

З формул (29) випливає, що $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|\text{пр}_{\vec{a}\times\vec{b}}\vec{c}$. Якщо $\vec{a}\vec{b}\vec{c}>0$, то $\text{пр}_{\vec{a}\times\vec{b}}\vec{c}>0$ і кут $\varphi=\left(\widehat{\vec{a}\times\vec{b},\vec{c}}\right)$ гострий, тобто вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ утворюють праву трійку.

Якщо $\vec{a}\vec{b}\vec{c}<0$, то $\text{пр}_{\vec{a}\times\vec{b}}\vec{c}<0$, кут $\varphi=\left(\widehat{\vec{a}\times\vec{b},\vec{c}}\right)$ тупий, тому вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ утворюють ліву трійку.

6. *Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарні тоді і тільки тоді, коли їхній мішаний добуток дорівнює нулю.*

Якщо $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=0$, то вектор $\vec{c}$ перпендикулярний до вектора $\vec{a}\times\vec{b}$ і лежить з векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$ в одній площині. Це означає, що вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ компланарні. Навпаки, якщо вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарні, то можна вважати, що вони лежать в одній площині, тому $\left(\vec{a}\times\vec{b}\,\hat{,}\,\vec{c}\right)=\dfrac{\pi}{2}$: $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=0$.

Властивості 4 – 6 виражають геометричний зміст мішаного добутку трьох векторів.