МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ТЕРНОПІЛЬСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ІВАНА ПУЛЮЯ

Кафедра вищої математики

Конспект лекцій
із
ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

Частина 3: аналітична геометрія

ТЕРНОПІЛЬ
2014 р.

УДК 517.2
ББК 22.161.6
Г12

Укладач
Г. В. Габрусєв

Рецензент
Лотоцький В. А.,
к.ф.-м.н., доц., зав. каф. математики
і методики її навчання ТНПУ ім. В. Гнатюка

Затверджено на засіданні кафедри вищої математики.
Протокол № 8 від «27» лютого 2014 р.

Схвалено та рекомендовано до друку науково-методичною радою
Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя.
Протокол № 6 від «13» березня 2014 р.

Г12 Г.В. Габрусєв. Конспект лекцій із вищої математики (частина 3 : аналітична геометрія) – Тернопіль : Вид-во ТНТУ імені Івана Пулюя, 2014. – 64 с.

ЗМІСТ

Тема: *Лінії* на площині

1.1. Поняття про лінію та її рівняння

Розглянемо рівність

$$F(x, y) = 0, \qquad (1)$$

яка зв'язує величини x та y.

Рівність (1) називають *рівнянням з двома змінними* x і y, якщо ця рівність виконується не для всіх пар чисел x, y, і тотожністю, якщо вона справедлива для всіх значень x і y. Наприклад, рівності $x + y = 0$ і $x^2 + y^2 = 9$ є рівняннями, а рівності $x + y - (x + y) = 0$ та $(x + y)^2 - x^2 - 2xy - y^2 = 0$ – тотожностями.

Рівняння (1) називається *рівнянням лінії* l, яка задана на площині відносно певної системи координат, якщо це рівняння задовольняють координати x і y кожної точки лінії l і не задовольняють координати x і y жодної точки, яка не лежить на цій лінії.

Коли рівняння (1) є рівнянням лінії l, то кажуть, що це рівняння визначає (або задає) лінію l. Отже, якщо лінія задана рівнянням, то про кожну точку площини можна сказати, чи лежить вона на цій лінії, чи не лежить. Якщо координати точки задовольняють рівняння лінії, то точка лежить на ній, якщо не задовольняють, то не лежить.

Лінія, яка задана рівнянням (1) відносно певної системи координат у площині, є геометричним місцем точок, координати яких задовольняють задане рівняння.

Змінні x і y в рівнянні (1) лінії l називаються *змінними координатами* її точок.

Нехай лінія l відносно системи координат Oxy визначається рівнянням (1). В аналітичній геометрії лінії класифікують залежно від властивостей цього рівняння. Якщо вираз $F(x, y)$ в рівнянні (1) є многочленом від змінних x та y (тобто сума скінченного числа одночленів $ax^k y^m$, де a – сталий коефіцієнт, а показники k і m – цілі додатні числа або нулі), то лінія, що задається цим рівнянням, називається *алгебраїчною.*

Алгебраїчні лінії розрізняють залежно від їхнього порядку. *Степенем одночлена* $ax^k y^m$ називається сума $k+m$ показників при змінних. *Степенем рівняння* (1) називається найвищий степінь одночлена, що входить до його складу. Алгебраїчною лінією n-го порядку називається лінія, що виражається рівнянням n-го степеня. Порядок алгебраїчної лінії не змінюється при заміні однієї декартової системи на іншу.

Лінія, яка не є алгебраїчною, називається *трансцендентною.* Ми вивчатимемо лише лінії першого та другого порядків, тобто лінії, що задаються рівняннями

$$ax+by+c=0 \text{ та } ax^2+by^2+cxy+dx+ey+f=0.$$

Таким чином, лінію на площині можна задати геометрично як сукупність точок з певними геометричними властивостями і аналітично – за допомогою рівняння. У зв'язку з цим виникають дві типові для аналітичної геометрії задачі: скласти рівняння лінії, яка задана геометрично, і навпаки, встановити геометричний образ лінії, заданої аналітично. Зазначимо, що в аналітичній геометрії друга задача розв'язується лише для алгебраїчних ліній першого та другого порядків. Загальний метод дослідження ліній, заданих рівняннями, дається в курсі математичного аналізу.

Приклади

1. Рівняння $y=2x-1$ визначає на площині пряму лінію.

2. Рівняння $x^2-y^2=0$ або $(x+y)(x-y)=0$ визначають дві прямі – бісектриси координатних кутів.

3. Рівняння $x^2+y^2=0$ задовольняє лише одна точка $O(0;0)$. У подібних випадках кажуть, що рівняння визначає вироджену лінію.

4. Рівняння $x^2+y^2+1=0$ не визначає ніякого геометричного місця точок, оскільки для будь-яких значень x та y маємо $x^2+y^2+1>0$.

1.2. Полярне рівняння лінії

Зупинимося детальніше на задачі про складання рівняння лінії, заданої геометрично. Для її розв'язання потрібно встановити геометричну властивість, яку мають лише точки даної лінії, і записати цю властивість у вигляді рівняння. Таке рівняння пов'язує змінні координати точок даної лінії і ті відомі сталі величини, які геометрично визначають саме цю лінію.

Рівняння $\Phi(\rho,\varphi)=0$ називається *рівнянням лінії* l *в полярних координатах,* або *полярним рівнянням*, якщо його задовольняють полярні координати ρ і φ будь-якої точки лінії l і не задовольняють координати жодної точки, яка не лежить на цій лінії. Щоб від полярного рівняння лінії перейти до рівняння (1), потрібно полярні координати в рівнянні $\Phi(\rho,\varphi)=0$ виразити через декартові.

Приклади

1. *Спіраллю Архімеда* називається лінія, описана точкою, що рівномірно рухається по променю, який сам рівномірно обертається навколо свого початку. Рівняння спіралі Архімеда (рис. 3.1) має вигляд $\rho=a\varphi$, де $a>0$ – стала величина.

2. *Равликом Паскаля* називають криву (рис. 3.2), що задається рівнянням $\rho=a\cos\varphi+b$.

3. *Лемніскатою Бернуллі* називають криву, що задається рівнянням $\rho=a\sqrt{\cos 2\varphi}$ і має вигляд вісімки (рис. 3.3). У прямокутних координатах рівняння лемніскати Бернуллі записується складніше: $\left(x^2+y^2\right)^2-a^2\left(x^2-y^2\right)=0$.

4. *Трипелюстковою розою* називають криву (рис 3.4), що задається рівнянням $\rho=a\cos 3\varphi$.

5. *Координатними лініями* називають лінії, в яких одна з координат є сталою величиною. У декартових координатах координатні лінії утворюють дві сім'ї прямих, паралельних до однієї з осей координат (рис. 3.5, а). У полярних координатах лінії $\rho=const$ утворюють сім'ю концентричних кіл з центром у полюсі, а лінії $\varphi=const$ – сім'ю променів, що виходять з полюса (рис. 3.5, б).

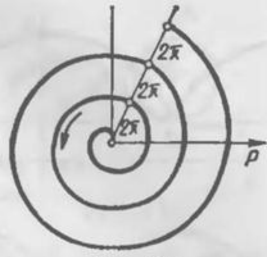


Рис. 3.1

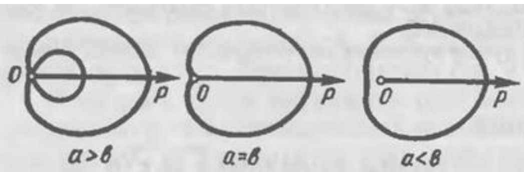


Рис. 3.2

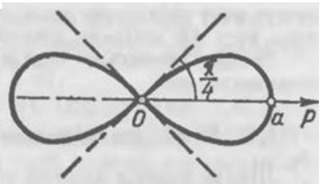


Рис. 3.3

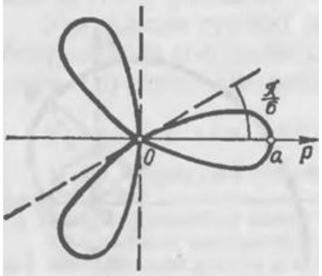


Рис. 3.4

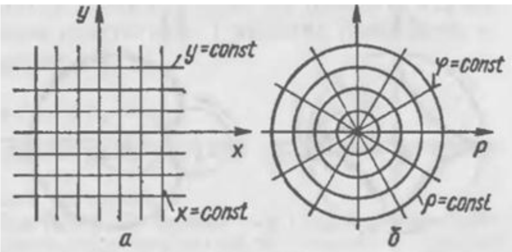


Рис. 3.5

1.3. Параметричні рівняння лінії

Нехай залежність між змінними x і y виражена через третю змінну t, тобто

$$x = x(t), y = y(t). \qquad (2)$$

Змінна t називається *параметром* і визначає положення точки $(x;y)$ на площині. Наприклад, якщо $x = 2t + 1$, $y = t^2$, то значенню параметра $t = 3$ відповідає на площині точка $(7;9)$, тому що $x = 2 \cdot 3 + 1 = 7$, $y = 3^2 = 9$.

Якщо t змінюється, то точка на площині переміщується, описуючи деяку лінію l. Такий спосіб задання лінії називається параметричним, а рівняння (2) – *параметричними рівняннями лінії* l. Щоб від рівняння (2) перейти до рівняння (1), потрібно будь-яким способом з двох рівнянь (2) виключити параметр t (наприклад, з першого рівняння виразити через x і результат підставити в друге рівняння). Але такий перехід не завжди доцільний і не завжди можливий, тому доводиться користуватись параметричними рівняннями (2).

Приклади

1. Розглянемо траєкторію точки кола, яке котиться без ковзання вздовж нерухомої прямої. Якщо вздовж осі Ox котиться без ковзання коло радіуса R, то будь-яка нерухома точка кола описує криву, яка називається циклоїдою (рис. 3.6) і задається рівнянням

$x = R(t - \sin t)$, $y = R(1 - \cos t)$; $-\infty < t < +\infty$.

Якщо параметр t змінюється від 0 до 2π, то дані рівняння визначають першу арку циклоїди, якщо $2\pi < t < 4\pi$ – то другу арку і т. д.

Циклоїда є найпростішою з кривих, які описує на нерухомій площині точка однієї лінії, що котиться без ковзання по другій лінії.

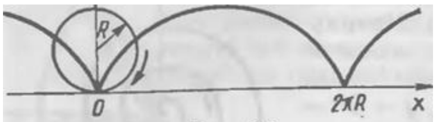


Рис. 3.6

2. Гіпоциклоїдами (рис. 3.7, а) та епіциклоїдами (рис. 3.7, б) називаються криві, які описує точка кола, яка котиться по нерухомому колу усередині та ззовні. Вигляд і рівняння кривих залежать від відношення радіусів кіл.

Гіпоциклоїда при відношенні радіусів $1:4$ називається астроїдою (рис. 3.8, а), а епіциклоїда при відношенні радіусів 1:1 називається кардіоїдою (рис. 3.8, б). Параметричні рівняння астроїди мають такий вигляд:

$x = R\cos^3 t$, $y = R\sin^3 t$; $0 \le t < 2\pi$.

Кардіоїда задається параметричними рівняннями

$x = 2R\cos t(1 + \cos t)$, $y = 2R\sin t(1 + \cos t)$; $0 \le t < 2\pi$.

Простіше записується полярне рівняння кардіоїди:

$\rho = 2R(1 + \cos\varphi)$.

Усі ці криві широко застосовуються в теорії механізмів.

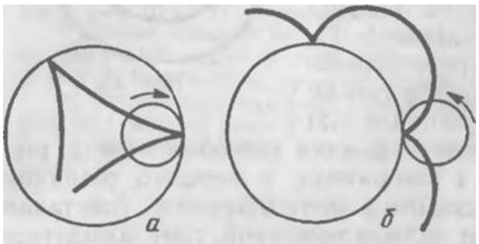


Рис. 3.7

3. Евольвентою (розгорткою) кола (від латинського evolvo – розгортати) називається крива, що задається рівняннями

$x = R(\cos t + t\sin t)$, $y = R(\sin t - t\cos t)$; $0 \le t < +\infty$.

Механічне креслення евольвенти виконується так: на коло туго намотують гнучку й нерозтяжну нитку, закріплену в точці A (рис. 3.9), і з вільним кінцем M в цій точці. Відтягуючи нитку за вільний кінець, змотують її з кола; точка M при цьому описує дугу евольвенти кола, тобто, якщо M – довільна точка евольвенти, то довжина дуги AB дорівнює довжині відрізка MB.

Профілі переважної більшості зубців зубчастих коліс окреслені з боків дугами евольвенти кола.

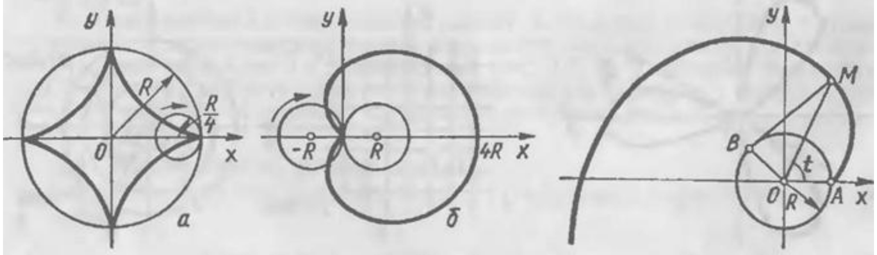


Рис. 3.8 Рис. 3.9

1.4. Векторне рівняння лінії

Лінію можна задати також векторним рівнянням $\vec{r}=\vec{r}(t)$, де t – скалярний змінний параметр. Кожному значенню t_0 відповідає цілком визначений вектор $\vec{r}_0=\vec{r}(t_0)$ площини.

Таким чином, якщо параметр t набуває певної множини деяких значень, то рівняння $\vec{r}=\vec{r}(t)$ задає деяку множину векторів. Якщо від точки O (рис. 3 10) площини відкласти вектори $\overrightarrow{OM}=\vec{r}$, то геометричне місце точок, які збігаються з кінцями цих векторів (за умови, що всі вектори компланарні), визначить на площині деяку лінію l.

Векторному параметричному рівнянню $\vec{r}=\vec{r}(t)$ в прямокутній системі координат Oxy відповідають два скалярних рівняння:

$$x=x(t), y=y(t),$$

тобто проекціями на осі координат векторного рівняння лінії є її параметричні рівняння.

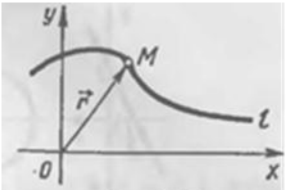


Рис. 3.10

Векторне рівняння та параметричні рівняння лінії мають такий механічний зміст: якщо точка рухається на площині, то вказані рівняння називаються рівняннями руху точки, а лінія l – траєкторією точки; параметром t при цьому є час.

1.5. Про залежність рівняння лінії від вибору системи координат

У попередніх прикладах вказувалось, що одну й ту саму лінію можна задати різними рівняннями. Таким чином, вигляд рівняння лінії залежить від вибору системи координат або, що те саме, від розміщення лінії відносно системи координат. Рівняння лінії змінюється як при переході від однієї декартової системи до іншої, тобто при перетворенні координат, так і при переході від декартових до будь-яких інших координат.

У зв’язку з цим виникають такі задачі: як обрати таку систему координат, у якій рівняння лінії, заданої геометрично, було б найпростішим, або як замінити систему координат, щоб задане рівняння лінії спростилось? Подібні задачі ми розглядатимемо при вивченні ліній другого порядку.

Усе сказане тут про залежність рівняння лінії на площині від вибору системи координат однаково стосується і рівнянь поверхонь та ліній у просторі.

Тема 2: Поверхні і лінії в просторі

2.1. Поверхня та її рівняння

Розглянемо співвідношення

$$F(x, y, z) = 0 \qquad (3)$$

між трьома змінними величинами x, y, z.

Рівність (3) називають рівнянням з трьома змінними x, y, z, якщо ця рівність не виконується для всіх трійок чисел x, y, z, і тотожністю, якщо вона справджується при будь-яких значеннях x, y, z.

Припустимо, парою значень $x = x_0$ і $y = y_0$ з рівняння (3) визначається єдине значення $z = z_0$. Упорядкована трійка чисел x_0, y_0, z_0 у заданій прямокутній системі координат визначає точку $M(x_0; y_0; z_0)$.

Сукупність всіх розв'язків z рівняння (3), які відповідають певним значенням x та y, визначає в просторі деяке геометричне місце точок $M(x; y; z)$, яке називається *поверхнею* (рис. 3.14), а рівняння (3) – рівнянням цієї поверхні.

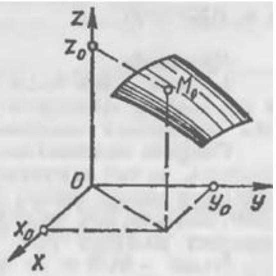


Рис. 3.14

Отже, рівняння (3) називається *рівнянням поверхні* відносно заданої системи координат, якщо це рівняння задовольняють координати x, y, z кожної точки даної поверхні і не задовольняють координати x, y, z жодної точки, яка не лежить на цій поверхні.

Поверхнею, заданою рівнянням (3) відносно певної системи координат, називається геометричне місце точок $M(x; y; z)$, координати x, y, z яких задовольняють дане рівняння.

Якщо вираз $F(x,y,z)$ в рівнянні (3) є многочленом від x,y,z, тобто сумою скінченного числа одночленів $ax^k y^m z^p$ із сталими коефіцієнтами a і невід’ємними цілими показниками k,m,p, то поверхня, яка задається цим рівнянням, називається *алгебраїчною.*

Неалгебраїчні поверхні називаються *трансцендентними. Порядком алгебраїчної поверхні* називається степінь многочлена, яким задається дана лінія.

Ми розглядатимемо лише алгебраїчні поверхні першого порядку і деякі алгебраїчні поверхні другого порядку. Отже, як і лінію на площині, поверхню в просторі можна задати геометрично і аналітично. Якщо поверхня задана геометрично, то виникає задача про складання рівняння цієї поверхні і, навпаки, якщо поверхня задана рівнянням, то постає задача про її геометричні властивості.

2.2. Рівняння лінії в просторі

Лінію l в просторі можна розглядати як лінію перетину двох поверхонь, або геометричне місце точок, що знаходяться одночасно на двох поверхнях; отже, якщо $F_1(x,y,z)=0$ і $F_2(x,y,z)=0$ рівняння двох поверхонь, які визначають лінію l (рис. 3.15), то координати точок цієї лінії задовольняють систему двох рівнянь з трьома невідомими:

$$\begin{cases} F_1(x,y,z)=0; \\ F_2(x,y,z)=0. \end{cases} \qquad (4)$$

Рівняння системи (4) сумісно визначають лінію l і називаються *рівняннями лінії в просторі.*

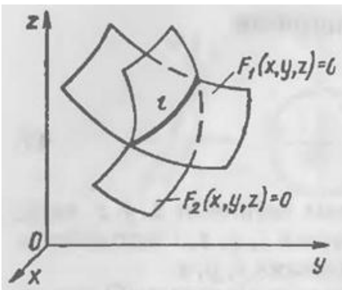


Рис. 3.15

Лінію в просторі можна розглядати також як траєкторію рухомої точки. При такому підході лінію в просторі задають векторним параметричним рівнянням

$$\vec{r} = \vec{r}\left(t\right). \qquad (5)$$

Векторному параметричному рівнянню (5) відповідають скалярні параметричні рівняння

$$x = x\left(t\right), y = y\left(t\right), z = z\left(t\right)$$

– проекції вектора (5) на осі координат. Таким чином, векторні рівняння лінії на площині і в просторі мають однаковий вигляд і однакову суть, а відповідні параметричні рівняння відрізняються лише кількістю рівнянь, яка залежить від числа базисних векторів на площині і в просторі.

Приклади

1. Якщо деяка точка M рівномірно рухається по твірній кругового циліндра, а сам циліндр рівномірно обертається навколо своєї осі, то точка M описує криву, яка називається *гвинтовою лінією.*

Радіусом гвинтової лінії називають радіус циліндра, а її *віссю* – вісь циліндра. Відстань, на яку зміститься точка вздовж твірної при повному оберті циліндра, називається *кроком гвинта* і позначається через h. Щоб вивести рівняння гвинтової лінії, візьмемо вісь циліндра за вісь Oz, а площину Oxz – за початок відліку кута повороту циліндра (рис. 3.16, а).

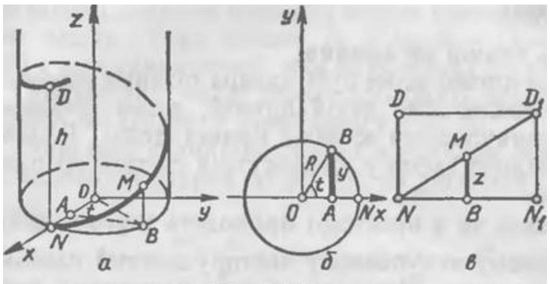


Рис. 3.16

Нехай $\angle NOB = t$ і $M\left(x;y;z\right)$ – довільна точка гвинтової лінії. Координати x і y точки M збігаються з координатами точки B (рис. 3.16, б): $x = R\cos t$, $y = R\sin t$, де R – радіус циліндра. Щоб визначити координату z, побудуємо розгортку циліндра NN_1D_1D (рис. 3.16, в), в якій $NN_1 = 2\pi R$, $N_1D_1 = ND = h$, $NB = Rt$, $BM = z$. З подібності трикутників NMB і ND_1N_1 дістанемо $\dfrac{z}{h} = \dfrac{Rt}{2\pi R}$, $z = \dfrac{h}{2\pi}t$.

Таким чином, параметричні рівняння гвинтової лінії мають вигляд

$$x = R\cos t\,,\; y = R\sin t\,,\; z = \frac{h}{2\pi}t$$

або у векторній формі $\vec{r}(t) = R\cos t\,\vec{i} + R\sin t\,\vec{j} + \frac{ht}{2\pi}\vec{k}$.

2. Лінія, яка задається рівняннями

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2; \\ x^2 + y^2 + Rx = 0. \end{cases}$$

утворюється при перетині циліндричної та сферичної поверхонь і називається *лінією Вівіані* (рис. 3.17).

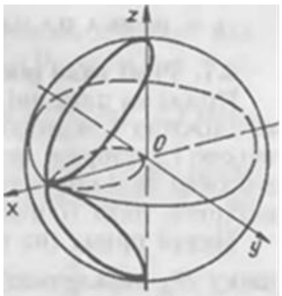


Рис. 3.17

Тема 3: Пряма на площині

3.1. Різні види рівнянь прямої на площині

Пряма на площині геометрично може бути задана різними способами: точкою і вектором, паралельним до даної прямої; двома точками; точкою і вектором, перпендикулярним до даної прямої, тощо. Різним способам задання прямої відповідають у прямокутній системі координат різні види її рівнянь.

Нехай пряма (на площині чи в просторі) проходить через задану точку M_0 паралельно до заданого ненульового вектора $\vec{s}$, який називається *напрямним вектором прямої.* Пряма має безліч напрямних векторів, їхні відповідні координати пропорційні. Точка M_0 і її напрямний вектор цілком визначають пряму, тому що через точку M_0 можна провести лише одну пряму, паралельну до вектора $\vec{s}$. Складемо рівняння цієї прямої. Позначимо через M (рис. 3.18) довільну точку прямої і розглянемо радіуси-вектори $\vec{r}_0 = \overrightarrow{OM_0}$ та $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ точок M_0 та M і вектор $\overrightarrow{M_0M}$, що лежить на даній прямій.

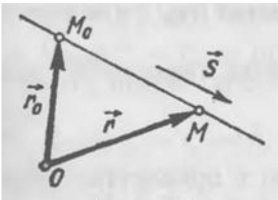


Рис. 3,18

Оскільки вектори $\overrightarrow{M_0M} = \vec{r} - \vec{r}_0$ і $\vec{s}$ колінеарні, то $\vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{s}t$, звідки

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{s}t. \qquad (6)$$

Змінна t у формулі (6) може набувати довільних дійсних значень і називається *параметром,* а рівняння (6) називається *векторним параметричним рівнянням прямої.*

Векторне параметричне рівняння прямої має однаковий вигляд і на площині, і в просторі.

Якщо пряма l розглядається на площині і задається точкою $M_0(x_0; y_0)$ та напрямним вектором $\vec{s} = (m; n)$, то, прирівнюючи відповідні координати векторів $\vec{r}$ та $\vec{r}_0 + \vec{s}t$ за формулою (6), маємо

$$x = x_0 + mt, \; y = y_0 + nt, \tag{7}$$

звідки

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} \tag{8}$$

Рівняння (7) називаються *параметричними рівняннями прямої,* а рівняння (8) – її *канонічним рівнянням.*

Зокрема, якщо пряма проходить через точку $M_0\left(x_0; y_0\right)$ паралельно до осі Ox, то її напрямний вектор $\vec{s} = \left(m; 0\right)$, тому рівняння (8) набуває вигляду

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{0}.$$

Як відомо, добуток середніх членів пропорції дорівнює добутку крайніх членів. Тому маємо $\left(y - y_0\right)m = \left(x - x_0\right) \cdot 0$, звідки $y = y_0$. Це і є рівняння прямої, яка паралельна до осі Ox.

Аналогічно, якщо пряма проходить через точку $M_0\left(x_0; y_0\right)$ паралельно до осі Oy, то її рівнянням є $x = x_0$.

Виведемо рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом. Якщо пряма не перпендикулярна до осі Ox, то рівняння (8) можна записати у вигляді

$$y - y_0 = \frac{n}{m}\left(x - x_0\right) \text{ або } y = \frac{n}{m}x + \left(y_0 - \frac{n}{m}x_0\right).$$

Позначивши $\frac{n}{m} = k$, $y_0 - \frac{n}{m}x_0 = b$, одержимо

$$y - y_0 = k\left(x - x_0\right) \tag{9}$$

або

$$y = kx + b. \tag{10}$$

Відношення $k = \frac{n}{m} = tg\alpha$, де α – кут, утворений прямою з додатним напрямом осі Ox (рис. 3.19), називається *кутовим коефіцієнтом прямої*. Величина $b = y_0 - \frac{n}{m}x_0$ дорівнює ординаті точки перетину прямої з віссю

Oy. Якщо пряма проходить через початок координат, то $b = 0$ і рівняння такої прямої має вигляд

$$y = kx \qquad (11)$$

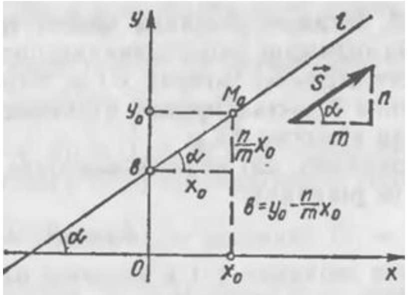


Рис. 3.19

Рівняння (9) називається *рівнянням прямої, яка проходить через задану точку і має заданий кутовий коефіцієнт,* а рівняння (10) – *рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом.*

Рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки $M_1(x_1; y_1)$ та $M_2(x_2; y_2)$, отримаємо з рівняння прямої, що проходить через точку M_1 і має напрямний вектор $\vec{s} = \overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1)$:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \qquad (12)$$

Рівняння (12) називається *рівнянням прямої, яка проходить через дві задані точки.*

Зокрема, якщо пряма проходить через точки $A(a; 0)$ та $B(0; b)$, тобто відтинає на осях відрізки a та b (рис. 3.20), то з рівняння (12) маємо

$$\frac{x - a}{0 - a} = \frac{y - 0}{b - 0} \text{ або } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \qquad (13)$$

Рівняння (13) називається *рівнянням прямої у відрізках.*

Розглянемо рівняння прямої, яка проходить через задану точку $M_1(x_1; y_1)$ перпендикулярно до заданого ненульового вектора $\vec{n} = (A; B)$.

Візьмемо на прямій l довільну точку (рис. 3.21) $M(x; y)$ і розглянемо вектор $\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1; y - y_1)$. Оскільки вектори $\vec{n}$ і $\overrightarrow{M_1M}$ перпендикулярні, то їх скалярний добуток дорівнює нулю, тобто

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0. \qquad (14)$$

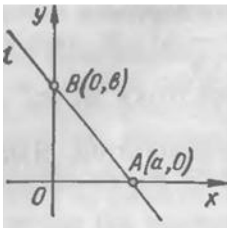


Рис. 3.20

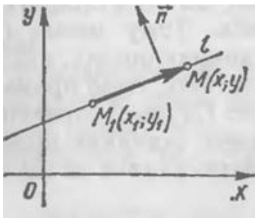


Рис. 3.21

Рівняння (14) називається *рівнянням прямої, яка проходить через задану точку перпендикулярно до заданого вектора.*

Вектор $\vec{n} = (A; B)$ називається *нормальним вектором прямої*. Пряма має безліч нормальних векторів. Усі вони колінеарні, отже, їхні відповідні координати пропорційні.

3.2. Загальне рівняння прямої та його дослідження

Усі одержані вище рівняння прямої лінії є рівняннями першого степеня відносно змінних x і y, тобто лінійними рівняннями. Отже, рівняння будь-якої прямої, яка лежить в площині Oxy, є лінійним рівнянням відносно x і y.

Покажемо, що справджується й обернене твердження: кожне лінійне рівняння

$$Ax + By + C = 0 \qquad (15)$$

з двома змінними x і y визначає на площині в прямокутній системі координат пряму лінію.

Справді, якщо $(x_1; y_1)$ – будь-який розв'язок рівняння (15), то

$$Ax_1 + By_1 + C = 0. \qquad (16)$$

Віднімаючи почленно від рівняння (15) рівність (16), дістаємо

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0. \qquad (17)$$

Рівняння (17) еквівалентне рівнянню (15) і згідно з формулою (14) визначає на площині Oxy пряму, яка проходить через точку $M_1(x_1; y_1)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n} = (A; B)$, тобто рівняння (15) також визначає пряму і називається *загальним рівнянням прямої*. Коефіцієнти A і

B при невідомих x і y загального рівняння є координатами її нормального вектора.

Кожне з рівнянь (7) – (14) зводиться до рівняння (15), отже, кожна пряма лінія задається рівнянням (15), і навпаки, кожне рівняння (15) визначає на площині Oxy пряму. Це означає, що кожна пряма – це лінія першого порядку, і навпаки, кожна лінія першого порядку є прямою.

Дослідимо загальне рівняння, тобто розглянемо окремі випадки розміщення прямої в системі координат Oxy залежно від значень коефіцієнтів A, B і C.

1. Якщо $A \neq 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$, то рівняння (15) зводиться до рівняння прямої у відрізках на осях

$$\frac{x}{-C/A} + \frac{y}{-C/B} = 1,$$

тобто пряма перетинає осі координат в точках з координатами $\left(-\frac{C}{A};0\right)$ і $\left(0;-\frac{C}{B}\right)$.

2. Якщо $A = 0$, то пряма $By + C = 0$ паралельна до осі Ox і проходить через точку $\left(0;-\frac{C}{B}\right)$, оскільки нормальний вектор $\vec{n} = (0;B)$ прямої перпендикулярний до осі Ox, а координати даної точки задовольняють рівняння прямої.

3. Аналогічно до попереднього, якщо $B = 0$, то пряма $Ax + C = 0$ паралельна до осі Oy і проходить через точку $\left(-\frac{C}{A};0\right)$.

4. Якщо $C = 0$, то пряма $Ax + By = 0$ проходить через початок координат, тому що координати точки $O(0;0)$ задовольняють рівняння прямої.

5. Якщо $A = C = 0$, то згідно з попереднім рівняння $By = 0$ або $y = 0$ визначає вісь Ox.

6. Якщо $B = C = 0$, то рівняння $Ax = 0$ або $x = 0$ визначає вісь Oy.

3.3. Кут між двома прямими. Умови паралельності і перпендикулярності двох прямих

Кут між двома прямими вимірюється кутом між їхніми напрямними векторами. При цьому слід зазначити, що, вибравши на одній із прямих напрямний вектор, напрямлений в протилежну сторону, отримаємо другий кут, який доповнює перший до π.

а) Нехай прямі l_1 та l_2 задано канонічними рівняннями

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}; \quad \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}$$

і φ – кут між цими прямими: $\varphi=\left(l_1,l_2\right)$, $0<\varphi<\pi$. Оскільки вектори $\vec{s}_1=\left(m_1;n_1\right)$ і $\vec{s}_2=\left(m_2;n_2\right)$ є напрямними векторами даних прямих (рис. 3.22) і $\varphi=\left(\vec{s}_1,\vec{s}_2\right)$, то маємо

$$\cos\varphi=\frac{\vec{s}_1\cdot\vec{s}_2}{\left|\vec{s}_1\right|\left|\vec{s}_2\right|}=\frac{m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2}}. \qquad (18)$$

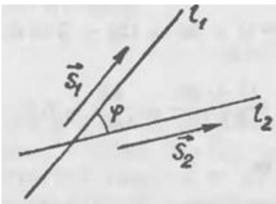


Рис. 3.22

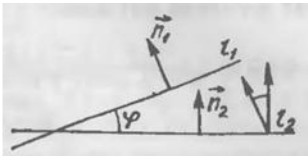


Рис. 3.23

Якщо прямі l_1 і l_2 паралельні, то вектори $\vec{s}_1$ і $\vec{s}_2$ колінеарні, тому їхні координати пропорційні, тобто

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2} \qquad (19)$$

– *умова паралельності двох прямих.* Якщо прямі l_1 і l_2 перпендикулярні, то вектори $\vec{s}_1$ і $\vec{s}_2$ теж перпендикулярні і їхній скалярний добуток дорівнює нулю, отже,

$$m_1m_2+n_1n_2=0 \qquad (20)$$

– *умова перпендикулярності двох прямих.*

б)Нехай тепер прямі l_1 і l_2 задані загальними рівняннями $A_1x+B_1y+C_1=0$ і $A_2x+B_2y+C_2=0$, тоді кут φ між ними (рис. 3.23) дорівнює куту між їхніми нормальними векторами $\vec{n}_1 = (A_1; B_1)$ і $\vec{n}_2 = (A_2; B_2)$; тому аналогічно до випадку а) одержимо:

1) формулу для кута φ між прямими l_1 і l_2:

$$\cos\varphi = \frac{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}; \qquad (21)$$

2) умову паралельності прямих l_1 і l_2:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}; \qquad (22)$$

3) умову перпендикулярності прямих l_1 і l_2:

$$A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 0. \qquad (23)$$

Нехай прямі l_1 і l_2 задані рівняннями з кутовими коефіцієнтами $y = k_1 x + b_1$, $y = k_2 x + b_2$, де $k_1 = tg\alpha_1$, $k_2 = tg\alpha_2$ – кутові коефіцієнти, то з рис. 3.24 видно, що

$$tg\varphi = tg(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_1 tg\alpha_2}$$

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}. \qquad (24)$$

Зауважимо, що формула (24) визначає кут, на який треба повернути пряму l_1 (проти годинникової стрілки), щоб вона збіглась з прямою l_2. Якщо прямі l_1 і l_2 паралельні, то $\varphi = 0$ і $tg\varphi = 0$, тому з формули (24) маємо $k_2 - k_1 = 0$. Отже, умовою паралельності двох прямих є рівність їхніх кутових коефіцієнтів:

$$k_1 = k_2. \qquad (25)$$

Якщо прямі l_1 і l_2 перпендикулярні, то $\varphi = 90^0$ і $ctg\varphi = \dfrac{1 + k_1 k_2}{k_2 - k_1} = 0$. Таким чином, умова перпендикулярності прямих має вигляд

$$k_1 k_2 + 1 = 0 \text{ або } k_2 = -\frac{1}{k_1}. \qquad (26)$$

Формули (18), (21) і (24) дають змогу визначити один із двох суміжних кутів, які утворюються при перетині двох прямих. Другий кут дорівнює $\pi - \varphi$. Іноді вирази справа в цих формулах записують по модулю, тоді визначається гострий кут між прямими.

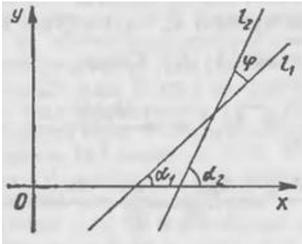


Рис. 3.24

3.4. Відстань від точки до прямої

Нехай задано пряму l рівнянням $Ax + By + C = 0$ і точку $M_0(x_0; y_0)$. Відстань d (рис. 3.26) точки M_0 від прямої l дорівнює модулю проекції вектора $\overrightarrow{M_1M_0}$, де $M_1(x_1; y_1)$ – довільна точка прямої l, на напрям нормального вектора $\vec{n} = (A; B)$. Отже,

$$d = \left| \text{пр}_{\vec{n}} \overrightarrow{M_1M_0} \right| = \frac{\left| \overrightarrow{M_1M_0} \cdot \vec{n} \right|}{|\vec{n}|} = \frac{|Ax_0 + By_0 - Ax_1 - By_1|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Оскільки $Ax_1 + By_1 + C = 0$, то $-Ax_1 - By_1 = C$, тому

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \qquad (27)$$

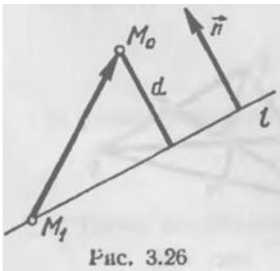


Рис. 3.26

Зауваження. Число d завжди додатне, бо це відстань. *Відхиленням* δ точки $M_0(x_0; y_0)$ від прямої $Ax + By + C = 0$ називається додатне число $\delta = d$, якщо точки M_0 і $O(0;0)$ лежать по різні сторони від прямої, і від'ємне число $\delta = -d$, якщо ці точки лежать по один бік від неї. З формули (27) випливає, що відхилення

$$\delta = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}},$$

де знак знаменника має бути протилежним до знаку C.

Тема 4: Площина в просторі

4.1. Загальне рівняння площини та його дослідження

Нехай в прямокутній системі координат $Oxyz$ задано площину П (рис. 3.27) точкою $M_0(x_0;y_0;z_0)$ і вектором $\vec{n}=(A;B;C)$, перпендикулярним до цієї площини. Візьмемо на площині точку $M(x;y;z)$ і знайдемо вектор $\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0;y-y_0;z-z_0)$. При будь-якому положенні точки M на площині П вектори $\vec{n}$ і $\overrightarrow{M_0M}$ взаємно перпендикулярні, тому їхній скалярний добуток дорівнює нулю, тобто

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \qquad (28)$$

або

$$Ax+By+Cz+D=0, \qquad (29)$$

де $D=-Ax_0-By_0-Cz_0$.

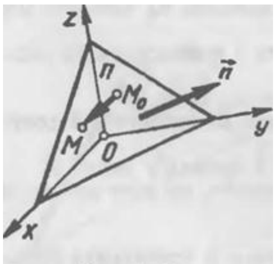


Рис. 3.27

Рівняння (28) називається *рівнянням площини, яка проходить через точку* $M_0(x_0;y_0;z_0)$ *перпендикулярно до вектора* $\vec{n}=(A;B;C)$, а рівняння (29) – *загальним рівнянням площини.*

Вектор $\vec{n}=(A;B;C)$ називається *нормальним вектором площини.* Кожна площина має безліч нормальних векторів. Усі вони колінеарні між собою, а їхні координати пропорційні. Отже, кожна площина в прямокутній системі координат визначається рівнянням першого степеня.

Покажемо тепер справедливість оберненого твердження: кожне рівняння першого степеня

$$Ax+By+Cz+D=0 \qquad (30)$$

з трьома змінними x, y і z задає в прямокутній системі координат $Oxyz$ площину.

Нехай задано довільне рівняння (30) і (x_0, y_0, z_0) – будь-який розв'язок цього рівняння, тобто

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0. \tag{31}$$

Віднявши від рівняння (30) рівність (31), одержимо

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \tag{32}$$

Рівняння (32) еквівалентне рівнянню (30) і згідно з формулою (28) визначає в просторі площину, яка проходить через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n} = (A; B; C)$. Отже, рівняння (30) також визначає площину.

Таким чином, кожне алгебраїчне рівняння першого степеня із змінними x, y і z є рівнянням площини.

Дослідимо загальне рівняння площини.

1. Якщо в рівняннях (30) $D = 0$, то воно набуває вигляду $Ax + By + Cz = 0$. Це рівняння задовольняє точка $O(0;0;0)$. Отже, якщо в загальному рівнянні площини відсутній вільний член, то така площина проходить через початок координат.

2. Якщо $A = 0$, то рівняння (30) набуває вигляду $By + Cz + D = 0$ і визначає площину, нормальний вектор якої $\vec{n} = (0; B; C)$ перпендикулярний до осі Ox. Отже, якщо в загальному рівнянні площини коефіцієнт при змінній x дорівнює нулю, то таке рівняння визначає площину, що паралельна до осі Ox.

Аналогічно рівняння $Ax + Cz + D = 0$ визначає площину, паралельну до осі Oy, а рівняння $Ax + By + D = 0$ – площину, паралельну до Oz.

3. Якщо $A = 0$, $B = 0$, $C \neq 0$, $D \neq 0$, то рівняння (30) набуває вигляду $Cz + D = 0$ або $z = -\dfrac{D}{C}$. З випадку 2 випливає, що це рівняння визначає площину, яка паралельна до осей Ox та Oy (коефіцієнти при x і y дорівнюють 0), тобто площину, паралельну до площини Oxy.

Аналогічно площина $By+D=0$ паралельна до площини Oxz, а площина $Ax+D=0$ паралельна до площини Oyz.

4. Якщо в рівнянні (30) $A=D=0$, то площина $By+Cz=0$ проходить через вісь Ox. Справді, згідно з попереднім, при $D=0$ площина проходить через початок координат, а при $A=0$ – паралельно до осі Ox, отже, проходить через вісь Ox.

Аналогічно площина $Ax+Cz=0$ проходить через вісь Oy, а площина $Ax+By=0$ – через вісь Oz.

5. Якщо в рівнянні площини $A=B=D=0$, то площина $Cz=0$ або $z=0$ збігається з площиною Oxy. Аналогічно площина $Ax=0$ або $x=0$ збігається з площиною Oyz, а площина $y=0$ – з площиною Oxz.

4.2. Рівняння площини, що проходить через три точки. Рівняння площини у відрізках

Нехай на площині Π задано три точки: $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$, $M_3(x_3;y_3;z_3)$, які не лежать на одній прямій. Ці точки однозначно визначають площину. Знайдемо її рівняння.

Візьмемо на площині довільну точку $M(x;y;z)$ і знайдемо вектори: $\overrightarrow{M_1M_3}=(x_3-x_1;y_3-y_1;z_3-z_1)$, $\overrightarrow{M_1M}=(x-x_1;y-y_1;z-z_1)$, $\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1)$.

Ці вектори лежать в площині Π, тобто вони компланарні. Оскільки мішаний добуток компланарних векторів дорівнює нулю, то $\overrightarrow{M_1M}\,\overrightarrow{M_1M_2}\,\overrightarrow{M_1M_3}=0$ або

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0. \qquad (33)$$

Маємо *рівняння площини, що проходить через три точки.* Зокрема, нехай площина відтинає на осях Ox, Oy, Oz відрізки a,b,c, тобто проходить через точки $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$ і $C(0;0;c)$. Підставляючи координати цих точок у формулу (33) і розкриваючи визначник, отримаємо

$$xbc + yac + zab - abc = 0 \text{ або } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \qquad (34)$$

Рівняння (34) називається *рівнянням площини у відрізках.* Ним зручно користуватись при побудові площини.

4.3. Кут між двома площинами. Умови паралельності і перпендикулярності двох площин

Нехай задано дві площини Π_1 і Π_2 відповідно рівняннями

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \; A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Двогранний кут між площинами вимірюється лінійним кутом, який дорівнює куту між нормальними векторами $\vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$ і $\vec{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$ цих площин (рис. 3.29). Отже, з формули (36) (векторна алгебра) маємо

$$\cos\varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \qquad (35)$$

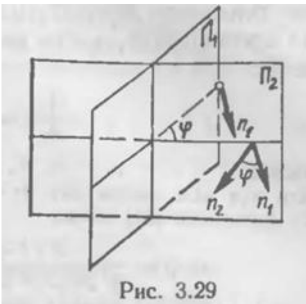


Рис. 3.29

Якщо площини Π_1 і Π_2 перпендикулярні, то скалярний добуток їхніх нормальних векторів дорівнює нулю, тобто рівність

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0 \qquad (36)$$

є *умовою перпендикулярності площин.*

Якщо площини Π_1 і Π_2 паралельні, то координати нормальних векторів пропорційні, тобто *умова паралельності площин* має вигляд:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \qquad (37)$$

Приклад: Знайти кут між площинами $2x+y+3z-1=0$ і $x+y-z+5=0$.

За формулою (35) маємо

$$\cos\varphi=\frac{2\cdot1+1\cdot1+3\cdot(-1)}{\sqrt{2^2+1^2+3^2}\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}}=0,$$

отже, дані площини перпендикулярні.

4.4. Відстань від точки до площини

Якщо задане рівняння $Ax+By+Cz+D=0$ площини Π і точка $M_0(x_0;y_0;z_0)$, що не лежить на цій площині, то відстань d від точки M_0 до площини Π знаходиться за формулою

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \qquad (38)$$

Доведення формули (38) таке саме, як і формули (27).

Тема 5: Пряма лінія в просторі

5.1. Різні види рівнянь прямої в просторі

Як уже зазначалося, якщо пряма задана точкою і напрямним вектором, то її векторне параметричне рівняння (як на площині, так і в просторі) має вигляд (6): $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{s}t$, де $\vec{r}$ – радіус-вектор змінної точки M прямої; $\vec{r}_0$ – радіус-вектор заданої точки M_0; $\vec{s}$ – ненульовий напрямний вектор прямої; t – параметр.

Нехай у просторі в прямокутній системі координат задано пряму точкою $M_0\left(x_0; y_0; z_0\right)$ і напрямним вектором $\vec{s} = \left(m; n; p\right)$. Візьмемо довільну точку $M\left(x; y; z\right)$ цієї прямої (рис. 3.30). Тоді аналогічно тому, як було знайдено формули (7), (8) і (12), одержуємо:

1) *параметричні рівняння прямої в просторі:*

$$x = x_0 + mt,\ y = y_0 + nt,\ z = z_0 + pt; \tag{39}$$

2) *канонічні рівняння прямої в просторі:*

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}; \tag{40}$$

3) *рівняння прямої в просторі, яка проходить через дві задані точки* $M_1\left(x_1; y_1; z_1\right)$ і $M_2\left(x_2; y_2; z_2\right)$:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \tag{41}$$

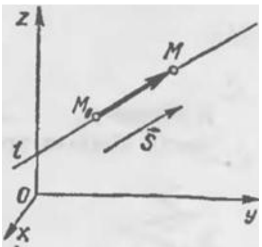


Рис. 3.30

У рівняннях (39) – (41) одна або дві координати напрямного вектора можуть дорівнювати нулю (випадки $m = n = p = 0$ та $x_2 - x_1 = y_2 - y_1 = z_2 - z_1 = 0$ неможливі, бо за означенням $\vec{s} \neq 0$).

Якщо $m=0, n\neq 0, p\neq 0$, то напрямний вектор $\vec{s}$ перпендикулярний до осі Ox, тому рівняння

$$\frac{x-x_0}{0}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$$

визначають пряму, перпендикулярну до осі Ox.

Аналогічно рівняння, в яких лише $n=0$ або $p=0$, визначають прямі, перпендикулярні до осі Oy або Oz.

Якщо $m=n=0, p\neq 0$, або $m=p=0, n\neq 0$, або $n=p=0, m\neq 0$, то рівняння (40) визначають прямі, відповідно паралельні до осей Oz, Oy, Ox.

Розглянемо тепер випадок, коли пряма в просторі задається перетином двох площин. Відомо, що дві непаралельні площини перетинаються по прямій лінії. Отже, система рівнянь двох площин

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0; \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0, \end{cases} \qquad (42)$$

нормальні вектори яких $\vec{n}_1=(A_1;B_1;C_1)$ і $\vec{n}_2=(A_2;B_2;C_2)$ не колінеарні, визначає в просторі пряму лінію.

Рівняння (42) називаються *загальними рівняннями прямої в просторі.* Щоб від загальних рівнянь (42) перейти до канонічних рівнянь (40), потрібно знайти точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ на прямій і її напрямний вектор $\vec{s}=(m;n;p)$. Для знаходження точки M_0 одну з її координат, наприклад, $x=x_0$ беруть довільною, а дві інші визначають із системи

$$\begin{cases} B_1y+C_1z=-D_1-A_1x_0; \\ B_2y+C_2z=-D_2-A_2x_0. \end{cases}$$

Ця система матиме розв'язок за умови, що $\dfrac{B_1}{B_2}\neq\dfrac{C_1}{C_2}$. Якщо ця умова порушується, то в системі (42) довільного значення надають змінній y або змінній z.

Для знаходження напрямного вектора $\vec{s}$ врахуємо, що нормальні вектори $\vec{n}_1$ і $\vec{n}_2$ даних площин перпендикулярні до прямої (рис. 3.31). Тому за вектор $\vec{s}$ можна взяти їхній векторний добуток:

$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}. \qquad (43)$$

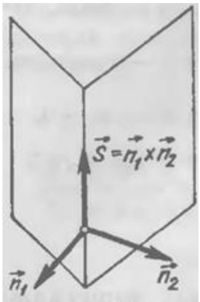


Рис. 3.31

5.2. Кут між двома прямими. Умови паралельності і перпендикулярності прямих

Нехай прямі l_1 і l_2 задано рівняннями

$$\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1}; \ \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}.$$

Кут між цими прямими (рис. 3.32) дорівнює куту φ між їхніми напрямними векторами $\vec{s}_1 = (m_1; n_1; p_1)$ і $\vec{s}_2 = (m_2; n_2; p_2)$, тому одержимо:

1) формулу для *кута φ між прямими l_1 і l_2:*

$$\cos\varphi = \frac{\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2}{|\vec{s}_1||\vec{s}_2|} = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}; \qquad (44)$$

2) *умову паралельності прямих l_1 і l_2:*

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}; \qquad (45)$$

3) *умову перпендикулярності прямих l_1 і l_2:*

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0. \qquad (46)$$

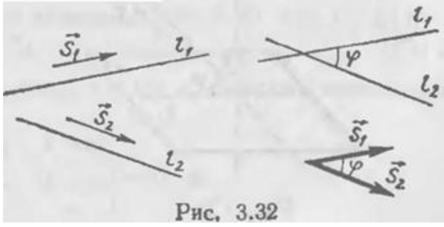


Рис. 3.32

5.3. Кут між прямою і площиною. Умови паралельності і перпендикулярності прямої і площини

Кут між прямою l і площиною Π за означенням є кут між прямою l і її проекцією на площину Π.

Нехай площина Π і пряма l задані рівняннями

$$Ax + By + Cz + D = 0 \text{ і } \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}.$$

Позначимо гострий кут між прямою l (рис. 3.33) і її проекцією l_1 на площину Π через φ, а кут між нормальним вектором $\vec{n} = (A; B; C)$ площини Π і напрямним вектором $\vec{s} = (m; n; p)$ прямої l – через θ. Якщо $\theta \le 90^0$, то $\varphi = 90^0 - \theta$, тому $\sin\varphi = \cos\theta$; якщо ж $\theta > 90^0$, то $\varphi = \theta - 90^0$ і $\sin\varphi = -\cos\theta$.

Отже, в будь-якому випадку $\sin\varphi = |\cos\theta|$. Але

$$\cos\theta = \frac{\vec{n} \cdot \vec{s}}{|\vec{n}||\vec{s}|},$$

тому *кут між прямою і площиною* знаходиться за формулою

$$\sin\varphi = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{s}|}{|\vec{n}||\vec{s}|} = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}. \tag{47}$$

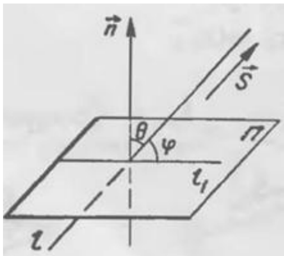


Рис. 3.33

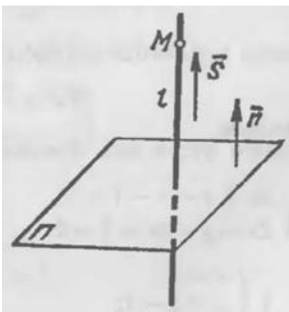


Рис. 3.34

Якщо пряма l паралельна площині Π, то вектори $\vec{n}$ і $\vec{s}$ перпендикулярні, тому $\vec{n} \cdot \vec{s} = 0$, тобто

$$Am + Bn + Cp = 0 \tag{48}$$

– *умова паралельності прямої і площини.*

Якщо пряма l перпендикулярна до площини Π, то вектори $\vec{n}$ і $\vec{s}$ колінеарні, тому співвідношення

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p} \tag{49}$$

є умовою перпендикулярності прямої і площини.

Приклади

1. Через задану точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ провести пряму l, перпендикулярну до площини Π, заданої рівнянням $Ax + By + Cz + D = 0$.

Оскільки пряма l перпендикулярна до площини Π, то напрямним вектором прямої l можна взяти нормальний вектор площини Π: (рис. 3.34): $\vec{s} = \vec{n} = (A; B; C)$. Тому згідно з формулою (40) рівняння прямої l має вигляд

$$\frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B} = \frac{z - z_0}{C}.$$

2. Через задану точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ провести площину Π, перпендикулярну до прямої l, заданої рівняннями

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p}.$$

Нормальним вектором площини Π може бути напрямний (рис. 3.35) вектор прямої l: $\vec{n} = \vec{s} = (m; n; p)$, тому за формулою (28) рівняння площини Π має вигляд

$$m(x - x_0) + n(y - y_0) + p(z - z_0) = 0.$$

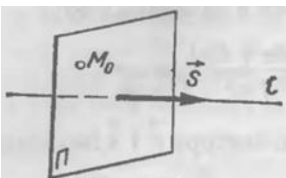


Рис. 3.35

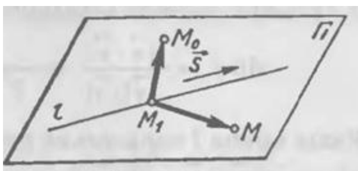


Рис. 3.36

3. Через задану точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ і пряму l, задану рівняннями $\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p}$, провести площину Π.

Нехай $M(x;y;z)$ – довільна точка площини Π (рис. 3.36), а $M_1(x_1;y_1;z_1)$ – задана точка прямої l. Тоді вектори $\overrightarrow{M_1M_0}=(x_0-x_1;y_0-y_1;z_0-z_1)$, $\overrightarrow{M_1M}=(x-x_1;y-y_1;z-z_1)$ і напрямний вектор $\vec{s}=(m;n;p)$ прямої компланарні, тому рівняння площини Π має вигляд

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_0-x_1 & y_0-y_1 & z_0-z_1 \\ m & n & p \end{vmatrix}=0.$$

4. Як розміщена пряма l, задана рівняннями $\begin{cases} x=x_0+mt; \\ y=y_0+nt; \\ z=z_0+pt, \end{cases}$ відносно площини Π, заданої рівнянням $Ax+By+Cz+D=0$?

Підставивши в рівняння площини Π замість x,y,z їхні значення з рівнянь прямої l, дістанемо рівняння

$$A(x_0+mt)+B(y_0+nt)+C(z_0+pt)+D=0,$$

з якого можна визначити те значення параметра t, яке відповідає шуканій точці перетину. Якщо це рівняння має єдиний розв’язок, то пряма l перетинає площину Π, якщо безліч розв’язків – пряма l лежить в площині Π, якщо одержане рівняння не має розв’язків, то пряма l паралельна площині Π.

5. Знайти точку перетину прямих l_1 і l_2, заданих рівняннями

$$\begin{cases} x=x_1+m_1t; \\ y=y_1+n_1t; \\ z=z_1+p_1t \end{cases} \text{ і } \begin{cases} x=x_2+m_2t; \\ y=y_2+n_2t; \\ z=z_2+p_2t. \end{cases}$$

Нехай $M_0(x_0;y_0;z_0)$ – точка перетину заданих прямих. При якомусь значенні t_1 параметра t її координати задовольнятимуть рівняння прямої l_1, а при певному значенні t_2 – рівняння прямої l_2, тобто

$$\begin{cases} x_0 = x_1 + m_1 t_1; \\ y_0 = y_1 + n_1 t_1; \\ z_0 = z_1 + p_1 t_1, \end{cases} \quad \begin{cases} x_0 = x_2 + m_2 t_2; \\ y_0 = y_2 + n_2 t_2; \\ z_0 = z_2 + p_2 t_2. \end{cases}$$

Прирівнюючи праві частини цих систем, одержуємо систему трьох лінійних рівнянь з двома невідомими t_1 і t_2, яку можна розв'язати, наприклад, методом Гаусса. Якщо ця система має один розв'язок, то прямі перетинаються, якщо безліч розв'язків – прямі збігаються, якщо система не має розв'язків, то прямі мимобіжні.

6. Знайти відстань заданої точки $M_0\left(x_0; y_0; z_0\right)$ від прямої l, заданої рівняннями

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p}.$$

Відстань d від точки M_0 (рис. 3.37) до прямої l дорівнює відстані між точкою M_0 та її проекцією P на цю пряму: $d = M_0 P$. Щоб знайти точку P, досить через точку M_0 провести площину Π, перпендикулярну до прямої l (приклад 3), і знайти точку її перетину з прямою l (приклад 4).

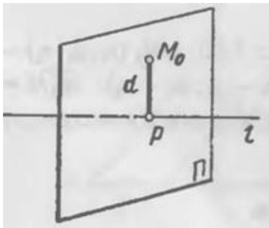


Рис. 3.37

7. Як розміщені прямі $\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{s}_1 t$ і $\vec{r} = \vec{r}_2 + \vec{s}_2 t$?

Прямі l_1 і l_2 збігаються, якщо вектори $\vec{s}_1, \vec{s}_2$ і $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$ колінеарні (рис. 3.38, а).

Умовою паралельності даних прямих є колінеарність векторів $\vec{s}_1$ і $\vec{s}_2$ (рис. 3.38, б), тобто $\vec{s}_1 \times \vec{s}_2 = 0$.

Прямі l_1 і l_2 перетинаються, якщо вектори $\vec{s}_1$ і $\vec{s}_2$ не колінеарні, а вектори $\vec{s}_1, \vec{s}_2$ і $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$ компланарні (рис. 3.38, в), тобто $\vec{s}_1 \vec{s}_2 \left(\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right) = 0$.

Отже, умова $\vec{s}_1 \vec{s}_2 \left(\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right) \neq 0$ еквівалентна тому, що прямі l_1 і l_2 мимобіжні.

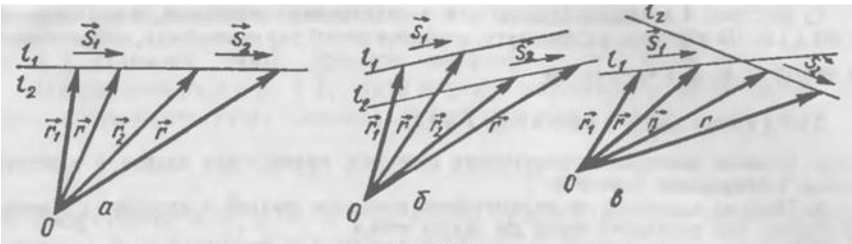


Рис. 3.38

8. Довести, що відстань d точки M_0 (рис. 3.39) з радіусом-вектором $\vec{r}_0$ від прямої l, заданої рівнянням $\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{s}t$, визначається за формулою $d = \dfrac{\left|\vec{s} \times \left(\vec{r}_1 - \vec{r}_0\right)\right|}{\left|\vec{s}\right|}$.

Відстань d дорівнює одній з висот паралелограма, побудованого на векторах $\vec{s}$ і $\vec{r}_1 - \vec{r}_0$.

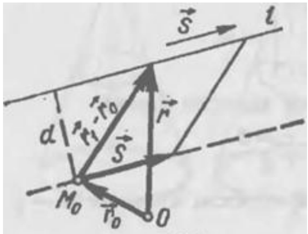


Рис. 3.39

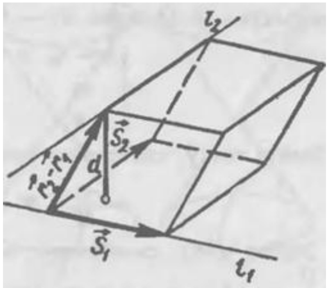


Рис. 3.40

9. Довести, що відстань (рис. 3.40) між мимобіжними прямими (довжина спільного перпендикуляра) l_1 і l_2, заданими рівняннями $\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{s}_1 t$ і $\vec{r} = \vec{r}_2 + \vec{s}_2 t$, знаходиться за формулою

$$d = \frac{\left|\vec{s}_1 \vec{s}_2 \left(\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right)\right|}{\left|\vec{s}_1 \times \vec{s}_2\right|}.$$

Відстань d дорівнює відстані між паралельними площинами, в яких лежать прямі l_1 і l_2. Ця відстань, в свою чергу, дорівнює висоті паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{s}_1, \vec{s}_2$ і $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$.

Тема 6: Лінії другого порядку

6.1. Поняття лінії другого порядку

Лінія другого порядку – це множина точок, координати яких задовольняють рівняння виду

$$ax^2+by^2+cxy+dx+ey+f=0, \qquad (50)$$

де коефіцієнти a,b,c,d,e,f – дійсні числа, причому хоча б одне з чисел a,b,c відмінне від нуля, тобто $a^2+b^2+c^2\neq 0$. Зокрема, до ліній другого порядку належать такі лінії: коло, еліпс, гіпербола і парабола. Виявляється, що множиною точок $(x;y)$ з дійсними координатами, які задовольняють рівняння (50), може бути не тільки одна з названих ліній. Рівняння (50) може визначати на площині Oxy також дві прямі, одну пряму, точку або не визначати жодної точки.

Отже, коло, еліпс, парабола і гіпербола задаються рівняннями другого степеня, але обернене твердження неправильне.

Щоб відповісти на запитання, яке геометричне місце точок визначаться рівнянням (50), треба підібрати таку систему координат, в якій це рівняння мало би найпростіший вигляд. Відомо, що для кожної лінії другого порядку існує прямокутна система координат (її називають канонічною), в якій рівняння (50) має найпростіший або канонічний вигляд. Ми не будемо розглядати зведення загального рівняння (50) до канонічного вигляду, а встановимо і дослідимо лише окремі канонічні рівняння.

Лінії другого порядку називають також конічними перерізами через те, що їх можна отримати як лінії перетину кругового конуса з площиною. Коло утворюється як лінія перетину з площиною, яка перпендикулярна до осі конуса і не проходить через його вершину (рис. 3.41, а); еліпс – лінія перетину з площиною, яка перетинає всі твірні конуса, не перпендикулярна до осі конуса і не проходить через його вершину (рис. 3.41, б); якщо перетнути конус площиною, паралельною до двох твірних, одержимо гіперболу (3.41, в), а до однієї твірної – параболу (рис. 3.41, г).

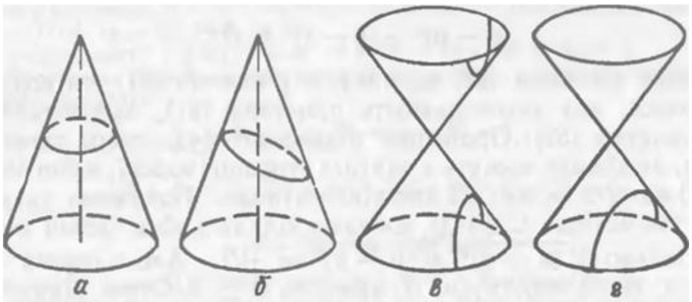


Рис. 3.41

Лінії другого порядку часто застосовуються в науці і техніці.

Приклади

1. Планети Сонячної системи рухаються по еліпсах, що мають спільний фокус, в якому розташовано Сонце.

2. Якщо у фокусі параболи розмістити джерело світла, то промені, відбившись від параболи, підуть паралельно до її осі. На цій властивості ґрунтується побудова прожектора.

3. У динаміці космічних польотів використовуються поняття трьох космічних швидкостей: $v_1 = 7,9$ км/с, $v_2 = 11,2$ км/с, $v_3 = 16,7$ км/с. Нехай v_0 – початкова швидкість, з якою штучний супутник запускається з поверхні Землі. При недостатній початковій швидкості $v_0 < v_1$ супутник обертатися навколо Землі не буде. Якщо $v_0 = v_1$, то супутник буде обертатися по круговій орбіті, центр якої знаходиться в центрі Землі. Якщо $v_1 < v_0 < v_2$, то обертання супутника відбуватиметься по еліпсу, причому центр Землі знаходитиметься в одному з фокусів еліпса.

При $v_2 \le v_0 < v_3$ супутник долає земне тяжіння і стає штучним супутником Сонця, рухаючись при цьому по параболі (при $v_0 = v_2$) або по гіперболі (при $v_2 < v_0 < v_3$) відносно Землі. Якщо $v_0 \ge v_3$, то супутник спочатку долає земне, а потім і сонячне тяжіння і залишає Сонячну систему.

4. Рух матеріальної точки під дією центрального поля сили тяжіння відбувається по одній з ліній другого порядку.

6.2. Коло

Колом називають множину точок площини, відстані яких від заданої точки площини (центра кола) дорівнюють сталому числу (радіусу).

Щоб вивести рівняння кола, використаємо прямокутну систему координат Oxy, позначимо через $O_1(a;b)$ – центр кола, через $M(x;y)$ – довільну точку площини і через R – радіус кола (рис. 3.42).

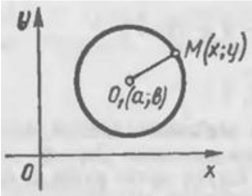


Рис. 3.42

Точка M лежить на колі тоді і лише тоді, коли $O_1M = R$ або

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=R. \qquad (51)$$

Рівняння (51) і є шуканим рівнянням кола. Але зручніше користуватись рівнянням, яке одержимо при піднесенні обох частин рівняння (51) до квадрата:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2. \qquad (52)$$

Оскільки рівняння (52) випливає з рівняння (51), то координати кожної точки, які задовольняють рівняння (51), задовольнятимуть також рівняння (52). Проте при піднесенні будь-якого рівняння до квадрата, як відомо, можуть з’явитися сторонні корені, тобто рівняння (51) і (52) можуть виявитися нееквівалентними. Покажемо, що в цьому випадку так не буде. Справді, добувши корінь з обох частин рівняння (52), дістанемо $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=\pm R$. Але в правій частині знак мінус треба відкинути, бо відстань $R>0$. Отже, рівняння (51) і (52) еквівалентні, тобто визначають одну й ту саму криву – коло.

Якщо центр кола міститься в початку координат, то $a=b=0$ і рівняння (52) набирає вигляду

$$x^2+y^2=R^2. \qquad (53)$$

Рівняння (53) називається *канонічним рівнянням кола*. Якщо в рівнянні (52) розкрити дужки, то одержимо загальне рівняння кола

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0, \qquad (54)$$

де $A = -2a$, $B = -2b$, $C = a^2 + b^2 - R^2$. Отже, коло – лінія другого порядку.

Рівняння кола має такі властивості.

1. *Коефіцієнти при* x^2 *і* y^2 *рівні між собою.*

2. *У рівнянні відсутній член з добутком* xy.

Обернене твердження неправильне: не кожне рівняння другого степеня, яке задовольняє умови 1 і 2, є рівнянням кола, тобто не кожне рівняння виду (54) визначає коло.

6.3. Еліпс

Еліпсом називають множину всіх точок площини, сума відстаней яких від двох даних точок цієї площини, які називаються фокусами, є величина стала і більша від відстані між фокусами. Щоб вивести рівняння еліпса, візьмемо на площині дві точки F_1 і F_2 – фокуси еліпса і розмістимо прямокутну систему координат так, щоб вісь Ox проходила через фокуси, а початок координат ділив відрізок F_1F_2 навпіл (рис. 3.44).

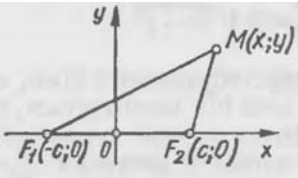


Рис. 3.44

Позначимо відстань між фокусами, яку називають фокальною, через $2c$: $F_1F_2 = 2c$, а суму відстаней від довільної точки еліпса до фокусів – через $2a$. Тоді фокуси мають такі координати: $F_1(-c;0)$ і $F_2(c;0)$. За означенням $2a > 2c$, тобто $a > c$.

Нехай $M(x;y)$ – довільна точка площини. Ця точка лежить на еліпсі тоді, коли $F_1M + F_2M = 2a$ або

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a. \qquad (55)$$

Це, по суті, і є *рівняння еліпса*. Щоб спростити його, перенесемо один радикал у праву частину, піднесемо обидві частини до квадрата і зведемо подібні члени. Матимемо

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx.$$

Піднісши обидві частини цього рівняння ще раз до квадрата та спростивши вираз, дістанемо $x^2\left(a^2-c^2\right)+a^2y^2=a^2\left(a^2-c^2\right)$.

Оскільки $a>c$, то $a^2-c^2>0$, тому можна позначити

$$a^2-c^2=b^2. \qquad (56)$$

Тоді рівняння (55) набуде вигляду

$$x^2b^2+a^2y^2=a^2b^2$$

або

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (57)$$

Можна довести, що рівняння (55) і (57) еквівалентні. Рівняння (57) називається канонічним рівнянням еліпса. Отже, еліпс – крива другого порядку.

Встановимо деякі властивості і дослідимо форму еліпса.

1. Рівняння (57) містить змінні x та y лише в парних степенях, тому, якщо точка $(x;y)$ належить еліпсу, то йому також належать точки $(-x;y)$, $(x;-y)$ і $(-x;-y)$. Тому еліпс симетричний відносно осей Ox та Oy, а також відносно точки $O(0;0)$, яку називають центром еліпса. Отже, для встановлення форми еліпса достатньо дослідити ту його частину, яка розміщена в одному, наприклад, в першому координатному куті.

2. В першому координатному куті $x\ge 0, y\ge 0$, тому з рівності (57) маємо

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}, \qquad (58)$$

звідки випливає, що точки $A_1(a;0)$ та $B_0(0;b)$ належать еліпсу, причому, якщо x збільшується від 0 до a, то y зменшується від b до 0. Крім того, не існує точок еліпса, у яких $x > a$, бо вираз (58) при $x > a$ не має змісту. Таким чином, частина еліпса, розміщена в першому координатному куті, має форму дуги A_1B_1 (рис. 3.45). Відобразивши цю дугу симетрично відносно осей Ox та Oy, одержимо весь еліпс. Він вміщується в прямокутник із сторонами $2a$ і $2b$. Сторони прямокутника дотикаються до еліпса в точках перетину його з осями Ox і Oy.

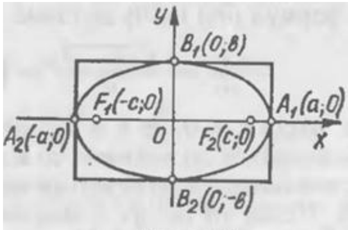


Рис. 3.45

Еліпс перетинає осі координат в точках $A_1(a;0)$, $A_2(-a;0)$, $B_1(0;b)$, $B_2(0;-b)$. Ці точки називаються *вершинами еліпса*.

Величини $A_1A_2 = 2a$ та $B_1B_2 = 2b$ називаються відповідно *великою* та *малою осями еліпса*.

Таким чином, з властивостей 1 і 2 випливає, що кожний еліпс має *дві взаємно перпендикулярні осі симетрії (головні осі еліпса)* і *центр симетрії (центр еліпса)*. Точки, в яких еліпс перетинає головні осі, обмежують на головних осях відрізки довжинами $2a$ і $2b$, які називаються *великою* і *малою осями еліпса*, а числа a та b – *великою* і *малою півосями еліпса*. Весь еліпс вміщується в прямокутник із сторонами $2a$ і $2b$. Сторони прямокутника дотикаються до еліпса в його вершинах.

3. Якщо $a = b$, то рівняння (57) набуває вигляду

$$x^2 + y^2 = a^2,$$

тобто отримуємо рівняння кола. Отже, коло є окремим випадком еліпса. З формули (56) випливає, що при $a = b$ значення $c = 0$, тобто коло – це еліпс, у якого фокуси збігаються з його центром.

Міра відхилення еліпса від кола характеризується величиною ε, яка називається *ексцентриситетом еліпса* і дорівнює відношенню половини його фокальної відстані до довжини більшої півосі:

$$\varepsilon = \frac{c}{a}, \tag{59}$$

причому $0 \le \varepsilon < 1$, оскільки $0 \le c < a$.

З формул (56) і (59) одержуємо $\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{a}=\sqrt{1-\frac{c^2}{a^2}}=\sqrt{1-\varepsilon^2}$.

Отже, якщо $\varepsilon=0$, то $b=a$, тобто еліпс перетворюється в коло; якщо ε наближається до одиниці, то відношення осей $\frac{b}{a}$ зменшується, тобто еліпс все більше розтягується вздовж осі Ox.

4. Нехай $M(x;y)$ – довільна точка еліпса з фокусами F_1 і F_2 (рис. 3.46). Відстані $F_1M=r_1$ і $F_2M=r_2$ – називаються *фокальними радіусами точки* M. Очевидно, $r_1+r_2=2a$. Прямі $x=\pm\frac{a}{\varepsilon}$ – називаються *директрисами еліпса*.

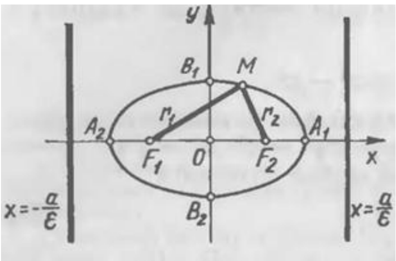


Рис. 3.46

Відношення фокальних радіусів довільної точки еліпса до відстаней цієї точки від відповідних директрис є величина стала і дорівнює ексцентриситету еліпса, тобто

$$\frac{r_1}{d_1}=\frac{r_2}{d_2}=\varepsilon. \tag{60}$$

6.4. Гіпербола

Гіперболою називається множина всіх точок площини, модуль різниці відстаней яких від двох даних точок цієї площини, що називаються фокусами, є величина стала і ця величина не дорівнює нулю та менша від відстані між фокусами.

Позначимо через F_1 і F_2 фокуси гіперболи, відстань між ними – через $2c$, а модуль різниці відстаней від довільної точки гіперболи до фокусів – через $2a$. За означенням $a<c$. Щоб вивести рівняння гіперболи, візьмемо на площині прямокутну систему координат Oxy так, щоб вісь Ox проходила через фокуси, а початок координат поділив відрізок F_1F_2 навпіл (рис. 3.44). Точка $M(x;y)$ площини лежить на гіперболі тоді і лише тоді, коли $\left|MF_1 - MF_2\right| = 2a$ або

$$\left|\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right| = 2a.$$

Виконавши ті самі перетворення, що й при виведенні рівняння еліпса, одержимо канонічне рівняння гіперболи

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad (61)$$

де

$$b^2=c^2-a^2. \qquad (62)$$

Отже, гіпербола є лінією другого порядку.

Встановимо деякі властивості і дослідимо форму гіперболи.

1. Гіпербола симетрична відносно осей Ox, Oy і початку координат.

2. Для частини гіперболи, яка лежить у першому координатному куті, з рівняння (61) отримаємо

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}. \qquad (63)$$

З рівняння (63) випливає, що $x \ge a$.

Точка $A_1(a;0)$ належить гіперболі і є точкою перетину гіперболи з віссю Ox. Гіпербола не перетинає вісь Oy. Якщо $x>a$, то $y>0$, причому якщо x збільшується, то y також збільшується, тобто якщо $x \to +\infty$, то $y \to +\infty$.

Покажемо, що, *віддаляючись у нескінченність, змінна точка* $M(x;y)$ *гіперболи необмежено наближається до прямої*

$$y = \frac{b}{a}x. \qquad (64)$$

Така пряма називається *асимптотою гіперболи*. Для цього візьмемо точку N, що лежить на асимптоті і має таку саму абсцису x, що й точка $M(x;y)$, і знайдемо різницю MN між ординатами цих точок (рис. 3.47):

$$MN = \frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} = \frac{b}{a}\left(x - \sqrt{x^2 - a^2}\right) =$$

$$= \frac{b}{a}\frac{\left(x - \sqrt{x^2 - a^2}\right)\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right)}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}.$$

Звідси, якщо $x \to +\infty$, то знаменник теж прямує до $+\infty$, а $MN \to 0$, бо чисельник є сталою величиною. Отже, точки M гіперболи, віддаляючись від точки $A_1(a;0)$ у нескінченність, необмежено наближаються до прямої (64), тобто ця пряма є асимптотою.

Таким чином, частина гіперболи, що розміщена у першому координатному куті, має вигляд дуги, яка показана на рис. 3.47. Відобразивши цю дугу симетрично відносно координатних осей, дістанемо вигляд всієї гіперболи.

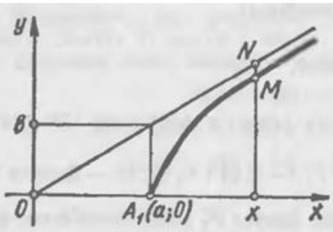


Рис. 3.47

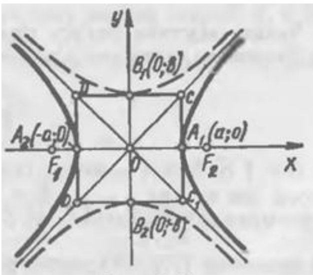


Рис. 3.48

Гіпербола складається з двох віток (лівої і правої) і має дві асимптоти:

$$y = \frac{b}{a}x, \quad y = -\frac{b}{a}x.$$

Осі симетрії називаються *осями гіперболи*, а точка перетину осей – її центром. Вісь Ox перетинає гіперболу в двох точках $A_1(a;0)$ і $A_2(-a;0)$, які називаються *вершинами гіперболи*. Ця вісь називається *дійсною віссю гіперболи*, а вісь, яка не має спільних точок з гіперболою, – *уявною віссю*.

Дійсною віссю називають також відрізок A_1A_2, який сполучає вершини гіперболи, і його довжину $A_1A_2 = 2a$. Відрізок B_1B_2, який сполучає точки $B_1(0;b)$ і $B_2(0;-b)$, а також його довжину називають *уявною віссю*. Величини a і b відповідно називаються *дійсною* і *уявною півосями гіперболи*.

Прямокутник із сторонами $2a$ і $2b$ називається *основним прямокутником гіперболи*.

При побудові гіперболи (61) доцільно спочатку побудувати основний прямокутник C_1D_1DC (рис. 3.48), провести прямі, що проходять через протилежні вершини цього прямокутника – асимптоти гіперболи і визначити вершини A_1 і A_2 гіперболи.

Рівняння

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \qquad (65)$$

також визначає гіперболу, яка називається спряженою до гіперболи (61). Гіпербола (65) показана на рис. 3.48 штриховою лінією. Вершини цієї гіперболи лежать в точках $B_1(0;b)$ і $B_2(0;-b)$, а її асимптоти збігаються з асимптотами гіперболи (61).

Гіпербола з рівними півосями ($a = b$) називається *рівносторонньою*, її канонічне рівняння має вигляд

$$x^2 - y^2 = a^2.$$

Основним прямокутником рівносторонньої гіперболи є квадрат із стороною $2a$, а її асимптотами – бісектриси координатних кутів.

3. *Ексцентриситет гіперболи визначається як відношення половини фокальної відстані до довжини її дійсної півосі:*

$$\varepsilon = \frac{c}{a}. \qquad (66)$$

Оскільки $c > a$, то $\varepsilon > 1$. Крім того, з формул (62) і (66) випливає, що

$$\frac{b}{a} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}.$$

Отже, ексцентриситет гіперболи характеризує її форму: чим більший ексцентриситет, тим більше відношення $\frac{b}{a}$, тобто тим більше основний прямокутник розтягується в напрямі осі Oy, а гіпербола відхиляється від осі Ox; чим ближче ексцентриситет до одиниці, тим більше основний прямокутник розтягується в напрямі осі Ox, а гіпербола наближається до цієї осі.

4. *Прямі* $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$*, де* a *– дійсна піввісь гіперболи, а* ε *– її ексцентриситет, називаються директрисами гіперболи.* Директриси гіперболи мають таку саму властивість (60), що й директриси еліпса.

6.5. Парабола

Параболою називається множина всіх точок площини, кожна з яких знаходиться на однаковій відстані від даної точки, яка називаються фокусом, і від даної прямої, яка називається директрисою і не проходить через фокус.

Знайдемо рівняння параболи. Нехай на площині задані фокус F і директриса, причому відстань фокуса від директриси дорівнює p. Візьмемо прямокутну систему координат Oxy так, щоб вісь Ox проходила через фокус, перпендикулярно до директриси, а вісь Oy ділила відстань між фокусом F і директрисою навпіл (рис. 3.51). Тоді фокус має координати $F\left(\frac{p}{2};0\right)$, а рівняння директриси має вигляд $x = -\frac{p}{2}$. Нехай $M(x;y)$ – довільна точка площини, а відрізки MB і MF – відстані цієї точки від директриси і фокуса. Точка M тоді лежить на параболі, коли $MB = MF$ або

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2}. \qquad (67)$$

Це і є рівняння параболи. Щоб спростити його, піднесемо обидві частини рівняння (67) до квадрата:

$$x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4},$$

тобто

$$y^2 = 2px. \tag{68}$$

Можна довести, що рівняння (67) і (68) рівносильні.

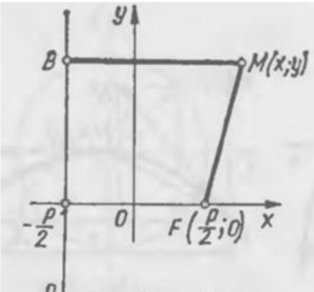


Рис. 3.51

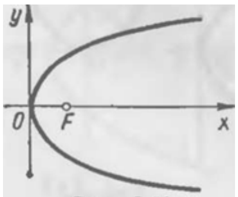


Рис. 3.52

Рівняння (68) називається *канонічним рівнянням параболи*. Отже, парабола є лінія другого порядку.

Дослідимо форму параболи. Оскільки рівняння (68) містить змінну y в парному степені, то парабола симетрична відносно осі Ox. Тому достатньо розглянути лише ту її частину, яка лежить у верхній півплощині. Для цієї частини $y \geq 0$, тому з рівняння (68) одержимо

$$y = \sqrt{2px}. \tag{69}$$

З цієї рівності випливає, що парабола розміщена справа від осі Oy, тому що при $x < 0$ вираз (69) не має змісту. Значення $x = 0, y = 0$ задовольняють рівняння (69), тобто парабола проходить через початок координат. Із зростанням x значення y також зростає. Отже, змінна точка $M(x;y)$ параболи, виходячи з початку координат із зростанням x, рухається по ній вправо і вверх.

Виконавши симетричне відображення розглянутої частини параболи відносно осі Ox, матимемо всю параболу (рис. 3.52).

Вісь симетрії параболи називається її *віссю*; точка перетину осі з параболою – *вершиною параболи*; число, яке дорівнює відстані фокуса від директриси, – *параметром* параболи. Віссю параболи, заданої рівнянням (68), є вісь Ox, вершиною – точка $O(0;0)$ і параметром – число p.

З'ясуємо вплив параметра p на форму параболи. Якщо в рівнянні (68) покласти $x=\frac{p}{2}$, то отримаємо відповідні значення ординати $y=\pm p$, тобто маємо на параболі дві симетричні відносно осі Ox точки $\left(\frac{p}{2};p\right)$ і $\left(\frac{p}{2};-p\right)$. Відстань між цими точками дорівнює $2p$ і збільшується із збільшенням p. Отже, параметр p характеризує «ширину» області, яку обмежує парабола.

Рівняння $y^2=-2px$, $x^2=2py$, $x^2=-2py$, у яких параметр $p>0$ визначають параболи, зображені на рис. 3.53.

Зауваження. Використовуючи властивість 4 еліпса та гіперболи і означення параболи, можна дати таке загальне означення кривої другого порядку (крім кола): множина точок, для яких відношення ε відстані до фокуса і до відповідної директриси є величина стала, – це еліпс (при $0<\varepsilon<1$), або парабола (при $\varepsilon=1$), або гіпербола (при $\varepsilon>1$).

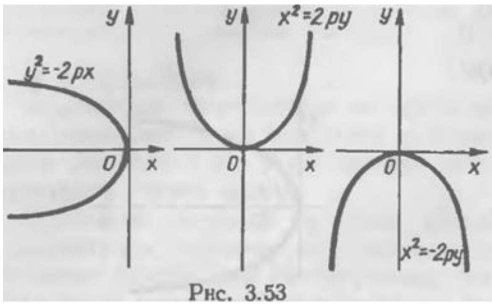


Рис. 3.53

6.6. Полярні та параметричні рівняння кривих другого порядку

1. Нехай в прямокутній системі координат рівнянням (53) задано коло. Якщо ввести полярні координати ρ і φ, то рівняння (53) запишеться у вигляді

$$(\rho\cos\varphi)^2+(\rho\sin\varphi)^2=R^2;\ \text{або}\ \rho=R. \qquad (70)$$

Це і є *полярне рівняння кола* з центром у полюсі і радіусом R. Щоб вивести параметричні рівняння кола, позначимо через t кут між віссю Ox і радіусом-вектором $\overrightarrow{OM}$ довільної точки $M(x;y)$ кола (рис. 3.55). Точка $M(x;y)$ лежить на колі тоді і тільки тоді, коли

$$x = R\cos t,\ y = R\sin t;\ 0 \le t < 2\pi. \qquad (71)$$

Рівняння (71) називаються *параметричними рівняннями кола*.

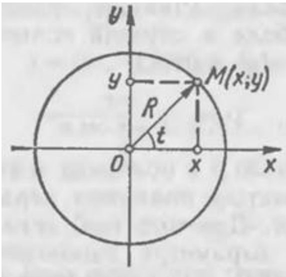


Рис. 3.55

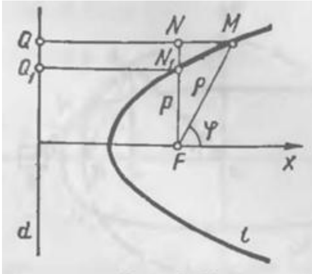


Рис. 3.56

2. Розглянемо тепер криву l, яка може бути еліпсом, параболою або правою віткою гіперболи (рис. 3.56).

Нехай F – фокус кривої l (якщо l – еліпс, то F – його лівий фокус), d – відповідна цьому фокусу директриса, $2p$ – довжина хорди, яка проходить через фокус паралельно директрисі, і ε – ексцентриситет кривої l. Введемо полярну систему координат так, щоб її полюс збігався з F, а полярна вісь Fx була перпендикулярною до директриси d і напрямлена в бік, протилежний від неї. Тоді згідно з загальним означенням кривої другого порядку (зауваження п. 5) маємо

$$\frac{MF}{MQ} = \varepsilon. \qquad (72)$$

Оскільки $MF = \rho$, то

$$\frac{N_1F}{Q_1N_1} = \frac{p}{Q_1N_1} = \varepsilon,\ MQ = Q_1N_1 + MN = \frac{p}{\varepsilon} + \rho\cos\varphi$$

і з рівності (72) одержимо

$$\rho = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi}. \qquad (73)$$

Це і є *загальне полярне рівняння кривої* l. При $0 < \varepsilon < 1$ рівняння (73) визначає еліпс, при $\varepsilon = 1$ – параболу, а при $\varepsilon > 1$ – праву вітку гіперболи. Рівняння лівої вітки гіперболи в обраній полярній системі має вигляд

$$\rho=\frac{-p}{1+\varepsilon\cos\varphi}$$

Число p в полярних рівняннях називається полярним параметром кривої. Для того, щоб виразити p через параметри канонічних рівнянь (57), (61) і (68) кривої l, досить в це рівняння підставити координати точки N_1: $x=c, y=p$ – для еліпса і гіперболи і $x=\frac{p}{2}, y=p$ – для параболи. Тоді для еліпса і гіперболи маємо $p=\frac{b^2}{a}$, а для параболи полярний параметр дорівнює параметру p її канонічного рівняння (68). Рівняння (73) застосовується в механіці.

Наведемо без доведення *параметричні рівняння еліпса і гіперболи*. Параметричні рівняння

$$x=x_0+a\cos t;\ y=y_0+b\sin t,\ (a>0, b>0, 0\le t<2\pi)$$

задають еліпс з центром у точці $(x_0;y_0)$ і з півосями a і b.

Параметричні рівняння гіперболи з центром у точці $(x_0;y_0)$ і півосями a і b мають вигляд

$$x=x_0+acht;\ y=y_0+bsht,\ (a>0, b>0, -\infty\le t<+\infty),$$

де cht і sht – гіперболічний косинус і гіперболічний синус.

Тема 7: Поверхні другого порядку

7.1. Поняття поверхні другого порядку

Поверхнею другого порядку називається множина точок, прямокутні координати яких задовольняють рівняння виду

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + kz + l = 0, \qquad (74)$$

де принаймні один з коефіцієнтів a, b, c, d, e, f відмінний від нуля.

Рівняння (74) називається *загальним рівнянням поверхні другого порядку.*

Поверхня другого порядку як геометричний об’єкт не змінюється, якщо від заданої прямокутної системи координат перейти до іншої. При цьому рівняння (74) і рівняння, знайдене після перетворення координат, будуть еквівалентними.

Можна довести, що існує система координат, в якій рівняння (74) має найпростіший (або канонічний) вигляд.

До поверхонь другого порядку належать, зокрема, циліндричні та конічні поверхні, поверхні обертання, сфера, еліпсоїд, однопорожнинний та двопорожнинний гіперболоїди, еліптичний та гіперболічний параболоїди. Розглянемо ці поверхні та їхні канонічні рівняння.

7.2. Циліндричні поверхні

Циліндричною поверхнею називають поверхню σ, утворену множиною прямих (твірних), які перетинають задану лінію L (напрямну) і паралельні до заданої прямої l (рис. 3.58). Вивчатимемо лише такі циліндричні поверхні, напрямні яких лежать в одній з координатних площин, а твірні паралельні до координатної осі, яка перпендикулярна до цієї площини.

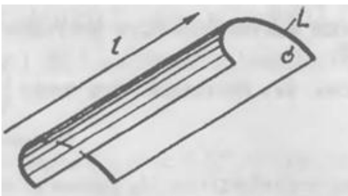


Рис. 3.53

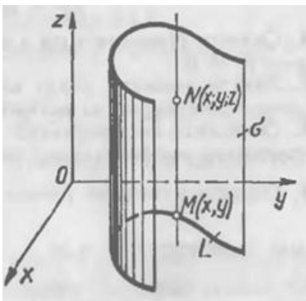


Рис. 3.59

Розглянемо випадок, коли твірні циліндричної поверхні паралельні до осі Oz, а напрямна лежить в площині Oxy.

Нехай задано рівняння

$$f(x, y) = 0, \qquad (75)$$

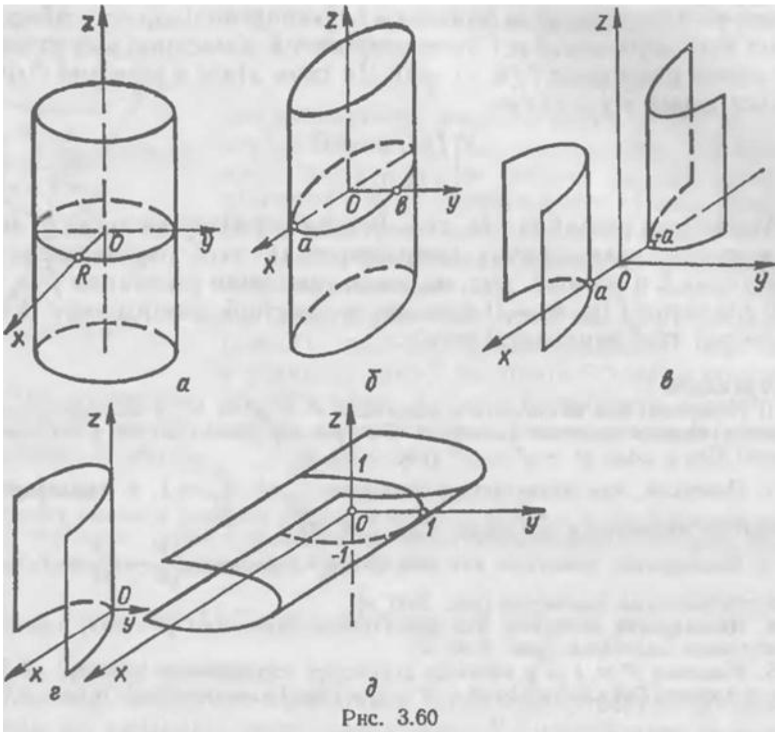
яке в площині Oxy визначає (рис. 3.59) деяку лінію L – множину точок $M(x; y)$, координати яких задовольняють це рівняння. Дане рівняння задовольняють також координати всіх тих точок $N(x; y; z)$ простору, у яких дві перші координати x і y збігаються з координатами будь-якої точки лінії L, а третя координата z – довільна, тобто тих точок простору, які проектуються на площину Oxy в точки лінії L.

Всі такі точки лежать на прямій, яка паралельна до осі Oz і перетинає лінію L в точці $M(x; y)$. Сукупність таких прямих і є циліндричною поверхнею σ.

Якщо точка не лежить на поверхні σ, то вона не може проектуватися в точку лінії L, тобто координати такої точки рівняння (75) не задовольняють. Отже, рівняння (75) визначає поверхню σ. Таким чином, рівняння $f(x, y) = 0$ визначає в просторі циліндричну поверхню, твірні якої паралельні до осі Oz, а напрямна L в площині Oxy задається тим самим рівнянням $f(x, y) = 0$. Напрямна L в просторі $Oxyz$ визначається двома рівняннями:

$$\begin{cases} f(x, y) = 0; \\ z = 0. \end{cases}$$

Аналогічно рівняння $f(x, z) = 0$, в якому відсутня змінна y, визначає в просторі циліндричну поверхню, твірні якої паралельні до осі Oy, а напрямна L в площині Oxz задається тим самим рівнянням $f(x, z) = 0$; рівняння $f(y, z) = 0$ визначає в просторі циліндричну поверхню, твірні якої паралельні до осі Ox.



Приклади

1. Поверхня, яка визначається рівнянням $x^2 + y^2 = R^2$, є циліндричною і називається *прямим круговим циліндром.* Її твірні паралельні до осі Oz, а напрямною в площині Oxy є коло $x^2 + y^2 = R^2$ (рис. 3.60, а).

2. Поверхня, яка визначається рівнянням $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, є циліндричною і називається *еліптичним циліндром* (рис. 3.60, б).

3. Циліндрична поверхня, яка визначається рівнянням $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, називається *гіперболічним циліндром* (рис. 3.60, в).

4. Циліндрична поверхня, яка визначається рівнянням $y^2 = 2px$, називається *параболічним циліндром* (рис. 3.60, г).

5. Рівняння $z^2 = 1 - y$ визначає в просторі параболічний циліндр, напрямна якого в площині Oyz є парабола $z^2 = 1 - y$, а твірні паралельні до осі Ox (рис. 3.60, д).

7.3. Поверхні обертання

Поверхню, утворену обертанням заданої плоскої кривої l навколо заданої прямої (осі обертання), яка лежить в площині кривої l, називають *поверхнею обертання.*

Нехай лінія l, що лежить в площині Oyz, задана рівняннями

$$\begin{cases} F(Y,Z)=0; \\ \quad X=0, \end{cases}$$

де X,Y,Z – змінні координати точок лінії l, а x,y,z – змінні координати точок поверхні.

Розглянемо поверхню, утворену обертанням цієї лінії навколо осі Oz (рис. 3.61), і знайдемо рівняння поверхні обертання.

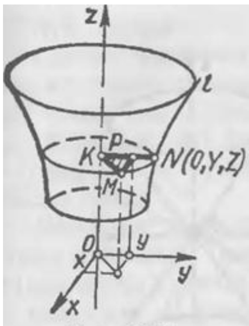


Рис. 3.61

Проведемо через довільну точку $M(x;y;z)$ поверхні обертання площину, перпендикулярну до осі Oz, і позначимо через K і N точки перетину цієї площини з віссю Oz і лінією l. Оскільки відрізки $|Y|, KN$ і KM рівні між собою як радіуси, $KP=y, PM=x$, то $Y=\pm\sqrt{x^2+y^2}$, крім того, $Z=z$. Оскільки координати точки N задовольняють рівняння $F(Y,Z)=0$, то, підставляючи в це рівняння замість Y,Z рівні їм величини $\pm\sqrt{x^2+y^2}, z$, одержимо рівняння

$$F\left(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z\right)=0, \tag{76}$$

яке задовольняє довільна точка $M(x;y;z)$ поверхні обертання. Можна показати, що координати точок, які не лежать на цій поверхні, рівняння (76) не задовольняють. Отже, рівняння (76) є рівнянням поверхні обертання.

Аналогічно можна скласти рівняння поверхонь обертання навколо осей Ox і Oy. Таким чином, щоб одержати рівняння поверхні, утвореної обертанням кривої навколо якої-небудь координатної осі, треба в рівнянні кривої залишити без зміни координату, яка відповідає осі обертання, а другу координату замінити на квадратний корінь із суми квадратів двох інших координат, взятий із знаком + або –.

7.4. Конічні поверхні

Конічною поверхнею називається поверхня, утворена множиною прямих, що проходять через задану точку P і перетинають задану лінію L. При цьому лінія L називається *напрямною конічної поверхні,* точка P – її *вершиною,* а кожна з прямих, які утворюють конічну поверхню, – *твірною.*

Нехай напрямна L задана в прямокутній системі координат рівняннями

$$\begin{cases} F_1(X,Y,Z)=0; \\ F_2(X,Y,Z)=0, \end{cases} \tag{77}$$

а точка $P(x_0;y_0;z_0)$ – вершина конічної поверхні (рис. 3.62) Щоб скласти рівняння конічної поверхні, візьмемо на поверхні довільну точку $M(x;y;z)$ і позначимо точку перетину твірної PM з напрямною L через $N(X;Y;Z)$.

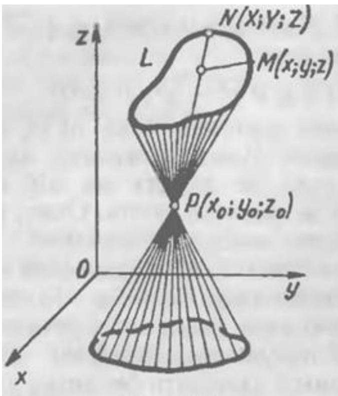


Рис. 3.62

Канонічні рівняння твірних, які проходять через точки N і P, мають вигляд

$$\frac{x-x_0}{X-x_0}=\frac{y-y_0}{Y-y_0}=\frac{z-z_0}{Z-z_0}. \tag{78}$$

Виключаючи X, Y і Z з рівнянь (77) і (78), дістанемо шукане рівняння конічної поверхні.

7.5. Сфера

Сферою називають множину всіх точок простору, рівновіддалених від заданої точки, яка називається *центром сфери.* Відрізок, що сполучає центр сфери з її довільною точкою, називається *радіусом сфери.*

Візьмемо в просторі прямокутну систему координат $Oxyz$. Щоб скласти рівняння сфери з центром у точці $O_1(a;b;c)$ і радіусом R. (рис. 3.65), візьмемо в просторі довільну точку $M(x;y;z)$. Точка M належить сфері тоді і лише тоді, коли $O_1M = R$, або $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2} = R$. Це і є *рівняння сфери.* Для зручності його записують у такому вигляді:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = R^2. \qquad (79)$$

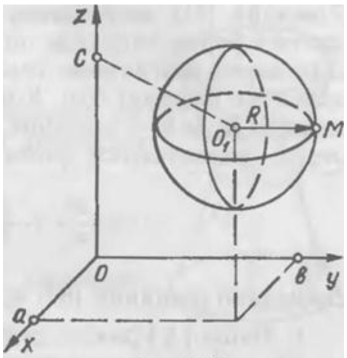


Рис. 3.65

Зокрема, якщо центр сфери збігається з початком координат, тобто $a=b=c=0$, то рівняння такої сфери має вигляд

$$x^2+y^2+z^2 = R^2.$$

Якщо в рівнянні (79) розкриємо дужки, то матимемо загальне рівняння сфери

$$x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0, \qquad (80)$$

де $A=-2a, B=-2b, C=-2c$, $D=a^2+b^2+c^2-R^2$.

Це рівняння має такі властивості.

1. *Рівняння* (80) *є рівнянням другого степеня відносно* x, y *і* z*, отже, сфера – поверхня другого порядку.*

2. *Коефіцієнти при* x^2, y^2, z^2 *рівні між собою.*

3. *У рівнянні відсутні члени з добутками* xy, xz, yz.

Проте не кожне рівняння виду (80), яке задовольняє умови 1 – 3 зображує сферу.

7.6. Еліпсоїд

Еліпсоїдом називається поверхня, яка в деякій прямокутній системі координат визначається рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \qquad (81)$$

Рівняння (81) називається *канонічним рівнянням еліпсоїда.* Дослідження форми еліпсоїда проведемо методом паралельних перерізів. Для цього розглянемо перерізи даного еліпсоїда площинами, паралельними до площини Oxy. Кожна з таких площин визначається рівнянням $z=h$, де h – довільне дійсне число, а лінія, яка утвориться в перерізі, визначається рівняннями

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2}; z=h. \qquad (82)$$

Дослідимо рівняння (82) при різних значеннях h.

1. Якщо $|h|>c, c>0$, то $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}<0$ і рівняння (82) ніякої лінії не визначають, тобто точок перетину площини $z=h$ з еліпсоїдом не існує.

2. Якщо $h=\pm c$, то $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ і лінія (82) вироджується в точки $(0;0;c)$ і $(0;0;-c)$, тобто площини $z=c$ і $z=-c$ дотикаються до еліпсоїда.

3. Якщо $|h|<c$, то $\frac{x^2}{a_1^2}+\frac{y^2}{b_1^2}=1$, де $a_1=a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}$, $b_1=b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}$, тобто площина $z=h$ перетинає еліпсоїд по еліпсу з півосями a_1 і b_1. При

зменшенні h значення a_1 і b_1 збільшуються і досягають своїх найбільших значень при $h=0$, тобто в перерізі еліпсоїда площиною Oxy матимемо найбільший еліпс з півосями $a_1=a, b_1=b$.

Аналогічні результати отримаємо, якщо розглядатимемо перерізи еліпсоїда площинами $x=h$ і $y=h$.

Таким чином, розглянуті перерізи дають змогу зобразити еліпсоїд як замкнену овальну поверхню (рис. 3.66). Величини a,b,c називаються *півосями еліпсоїда.* Якщо будь-які дві півосі рівні між собою, то триосний еліпсоїд перетворюється в еліпсоїд обертання, а якщо всі три півосі рівні між собою, – у сферу.

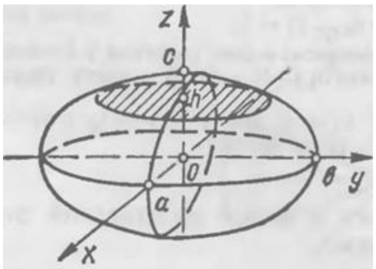


Рис. 3,66

7.7. Однопорожнинний гіперболоїд

Однопорожнинним гіперболоїдом називається поверхня, яка в деякій прямокутній системі координат визначається рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1. \qquad (83)$$

Рівняння (83) називається *канонічним рівнянням однопорожнинного гіперболоїда.*

Досліджують рівняння (83), як і в попередньому пункті, методом паралельних перерізів. Перетинаючи однопорожнинний гіперболоїд площинами, паралельними до площини Oxy, отримаємо в перерізі еліпси. Якщо поверхню (83) перетинати площинами $x=h$ або $y=h$, то в перерізі одержимо гіперболи.

Детальний аналіз цих перерізів показує, що однопорожнинний гіперболоїд має форму нескінченної трубки, яка необмежено розширюється в обидва боки від найменшого еліпса, по якому площина Oxy перетинає однопорожнинний гіперболоїд (рис. 3.67).

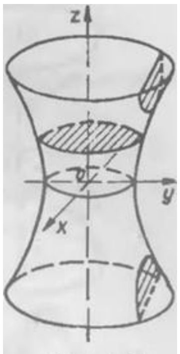


Рис. 3.67

7.8. Двопорожнинний гіперболоїд

Двопорожнинним гіперболоїдом називається поверхня, яка в деякій прямокутній системі координат визначається рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1.$$

Рівняння (84) називається *канонічним рівнянням двопорожнинного гіперболоїда.*

Метод паралельних перерізів дає змогу зобразити двопорожнинний гіперболоїд як поверхню, що складається з двох окремих порожнин (звідси назва двопорожнинний), кожна з яких перетинає вісь Oz і має форму опуклої нескінченної чаші (рис. 3.68).

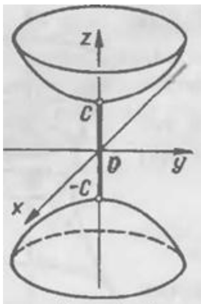


Рис. 3.68

7.9. Еліптичний параболоїд

Еліптичним параболоїдом називається поверхня, яка в деякій прямокутній системі координат визначається рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z, \qquad (85)$$

яке називається канонічним рівнянням еліптичного параболоїда. Він має форму нескінченної опуклої чаші (рис. 3.70). Лініями паралельних перерізів еліптичного параболоїда є параболи або еліпси.

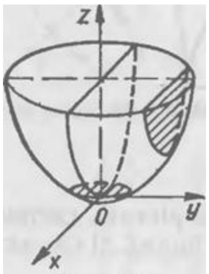


Рис. 3.70

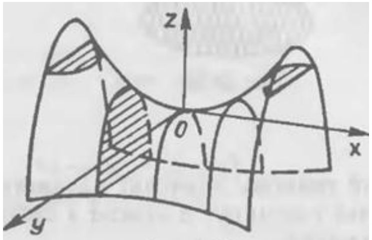


Рис. 3.71

7.10. Гіперболічний параболоїд

Гіперболічним параболоїдом називається поверхня, яка в деякій прямокутній системі координат визначається рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z, \qquad (86)$$

яке називається *канонічним рівнянням гіперболічного параболоїда.* Ця поверхня має форму сідла (рис. 3.71).

Лініями паралельних перерізів гіперболічного параболоїда є гіперболи або параболи.

7.11. Лінійчаті поверхні

Поверхні, твірні яких є прямі лінії, називаються *лінійчатими.* Такими поверхнями є циліндричні та конічні поверхні. Розглянемо рівняння однопорожнинного гіперболоїда (83) і запишемо його у вигляді

$$\left(\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)\left(\frac{y}{b}-\frac{z}{c}\right)=\left(1+\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{x}{a}\right). \qquad (87)$$

Складемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=k\left(1+\dfrac{x}{a}\right); \\ \dfrac{y}{b}-\dfrac{z}{c}=\dfrac{1}{k}\left(1-\dfrac{x}{a}\right), \end{cases} \qquad (88)$$

де k – довільний, відмінний від нуля, параметр.

При певному значенні параметра k кожне з рівнянь системи (88) визначає площину, а кожна з систем визначає пряму лінію як перетин площин.

Якщо перемножити рівняння (88) почленно, то дістанемо рівняння (87). Тому довільна точка $(x;y;z)$, що задовольняє систему (88), лежить на поверхні (87). Це означає, що кожна з прямих (88) повністю лежить на поверхні однопорожнинного гіперболоїда (рис. 3.72). Отже, однопорожнинний гіперболоїд – лінійчата поверхня. Те саме стосується і гіперболічного параболоїда (86).

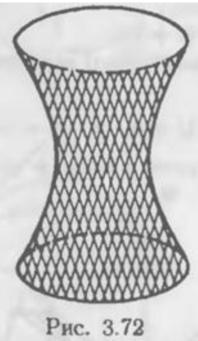


Рис. 3.72

Зазначимо, що однопорожнинні гіперболоїди застосовуються в будівництві. Спорудження різноманітних висотних веж з використанням прямолінійних твірних однопорожнинного гіперболоїда поєднує в собі міцність конструкції і простоту її виконання. Ідея використання однопорожнинного гіперболоїда в будівництві належить російському вченому В. Г Шухову. За проектом Шухова побудована телевізійна вежа на Шаболовці в Москві. Вона складається з секцій однопорожнинних гіперболоїдів обертання.