УДК 517.532

Г. Готинчан

Чернівецький факультет Національного технічного університету “Харківський політехнічний інститут”

МОДЕЛЮВАННЯ ТЕХНОЛОГІЧНИХ ПРОЦЕСІВ У БАГАТОШАРОВИХ НАПІВОБМЕЖЕНИХ ТІЛАХ МЕТОДОМ ГІБРИДНОГО ІНТЕГРАЛЬНОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ ТИПУ ЛЕЖАНДРА 1-го РОДУ – ГАНКЕЛЯ 2-го РОДУ - (КОНТОРОВИЧА - ЛЄБЄДЄВА) 2-го РОДУ – ФУР’Є

Методом гібридного інтегрального перетворення типу Лежандра 1-го роду - Ганкеля 2-го роду – (Конторовича - Лєбєдєва) 2-го роду – Фур’є та фундаментальних функцій вперше побудовано точні аналітичні розв’язки алгоритмічного характеру математичних моделей задач квазістатики, статики та динаміки для кусково-однорідного чотирискладового середовища

G. Gotynchan

DESIGN OF TECHNOLOGICAL PROCESSES IN THE MULTILEVEL SEMI-BOUNDED BODIES BY THE METHOD OF HYBRID INTEGRAL TRANSFORMATION OF TYPE LEGENDRE OF 1-th KIND – HANKEL OF 2-nd KIND – (CONTOROVYCH-LYEBYEDYEV) OF 2-nd KIND – FOURIER

The method of fundamental functions the exact analytical decision of algorithmic character of tasks of quasi-static, static and dynamic is built for a piece-homogeneous four-composite environment.

Постановка проблеми та її аналіз. Інтенсивне впровадження композитних матеріалів у технологічні процеси вимагає знання їх властивостей. Виникають задачі математичної фізики неоднорідних середовищ. Розв’язання таких задач потребує відповідного математичного апарату. Це породило метод гібридних інтегральних перетворень, започаткованих у працях Я.С. Уфлянда [1]. Продовження цих досліджень знаходимо в роботах В.С. Проценка [2]. Теорію гібридних інтегральних перетворень (ГІП) закладено в працях [3, 4]. Дана робота присвячена розв’язанню деяких задач квазістатики, статики та динаміки в неоднорідному середовищі методом ГІП.

Основна частина. Задача квазістатики. Розглянемо задачу про побудову обмеженого в області $D_3 = \{(t,r) : t \in (0,+\infty), r \in I_3^+ = (0; R_1) \cup (R_1; R_2) \cup (R_2; R_3) \cup (R_3; +\infty)\}$ розв’язку сепаратної системи диференціальних рівнянь теплопровідності параболічного типу

$$\frac{\partial u_1(t,r)}{\partial t} + \chi_1^2 u_1(t,r) - a_1^2 \Lambda_{(\mu)}[u_1(t,r)] = f_1(t,r), \quad r \in (0, R_1);$$

$$\frac{\partial u_2(t,r)}{\partial t} + \chi_2^2 u_2(t,r) - a_2^2 \mathrm{B}_{\nu,\alpha_1}[u_2(t,r)] = f_2(t,r), \quad r \in (R_1, R_2);$$

$$\frac{\partial u_3(t,r)}{\partial t} + \chi_3^2 u_3(t,r) - a_3^2 \mathrm{B}_{\alpha_2}[u_3(t,r)] = f_3(t,r), \quad r \in (R_2, R_3); \tag{1}$$

$$\frac{\partial u_4(t,r)}{\partial t} + \chi_4^2 u_4(t,r) - a_4^2 \frac{\partial^2 u_4(t,r)}{\partial r^2} = f_4(t,r), \quad r \in (R_3, +\infty)$$

за початковими умовами

$$u_i(t,r)\big|_{t=0} = g_i(r), \quad r \in (R_{i-1}, R_i), \quad i = \overline{1,4}, R_0 = 0, R_4 = +\infty, \tag{2}$$

умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j1}^k\right) u_k(t,r) - \left(\alpha_{j2}^k \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j2}^k\right) u_{k+1}(t,r)\right]\Bigg|_{r=R_k} = \omega_{j1}^k(t), \, j = 1,2, \, k = \overline{1,3} \tag{3}$$

та крайовими умовами

$$\lim_{r\to 0} shr u_1(t,r)=0,\ \lim_{r\to+\infty}\frac{\partial^m u_4(t,r)}{\partial r^m}=0,\ m=0,1, \tag{4}$$

де $a_i>0;$ $\chi_i^2\geq 0;$ $\alpha_{jm}^k\geq 0;$ $\beta_{jm}^k\geq 0;$ $c_{jk}=\alpha_{2j}^k\beta_{1j}^k-\alpha_{1j}^k\beta_{2j}^k;$ $c_{1k}\cdot c_{2k}>0;$ $i=\overline{1,4};$ $j,m=1,2;$ $k=\overline{1,3};$ B_{α_2} - диференціальний оператор Бесселя з виродженням у групі старших [4,5];

$\mathrm{B}_{\alpha_2}=r^2\dfrac{\partial^2}{\partial r^2}+(2\alpha_2+1)r\dfrac{\partial}{\partial r}+\alpha_2-\lambda^2r^2;$ $\alpha_2>-\dfrac{1}{2};$ $\lambda\in(0,+\infty);$ $\Lambda_{(\mu)}$ - узагальнений диференціальний оператор Лежандра [3,4]: $\Lambda_{(\mu)}=\dfrac{\partial^2}{\partial r^2}+cthr\dfrac{\partial}{\partial r}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\mu_1}{1-chr}+\dfrac{\mu_2}{1+chr}\right),$ $\mu_1\geq\mu_2\geq 0;$ $\mathrm{B}_{\nu,\alpha_1}$- диференціальний оператор Бесселя з виродженням у групі молодших [4,5]: $\mathrm{B}_{\nu,\alpha_1}=\dfrac{\partial^2}{\partial r^2}+\dfrac{2\alpha_1+1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}-\dfrac{\nu^2-\alpha_1}{r^2},$ $\nu\geq\alpha_1\geq-\dfrac{1}{2};$ $\dfrac{\partial^2}{\partial r^2}$ - диференціальний оператор Фур'є.

Ефективним методом побудови розв'язку задачі (1) – (4) може служити спеціально запроваджене ГІП Лежандра 1-го роду – Ганкеля 2-го роду - (Конторовича - Лєбєдєва) 2-го роду – Фур'є на полярній осі.

Запровадимо методом дельта-подібної послідовності інтегральне перетворення, породжене на множині I_3^+ гібридним диференціальним оператором (ГДО)

$$M_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}=a_1^2\theta(r)\theta(R_1-r)\Lambda_{(\mu)}+a_2^2\theta(r-R_1)\theta(R_2-r)\mathrm{B}_{\nu,\alpha_1}+a_3^2\theta(r-R_2)\theta(R_3-r)\mathrm{B}_{\alpha_2}+$$
$$+a_4^2\theta(r-R_3)\frac{d^2}{dr^2},\quad(\alpha)=(\alpha_1,\alpha_2),\quad(\mu)=(\mu_1,\mu_2). \tag{5}$$

Тут $\theta(x)$ - одинична функція Хевісайда.

За область визначення оператора $M_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}$ приймемо множину G вектор-функцій $g(r)=\{g_1(r);g_2(r);g_3(r);g_4(r)\}$ з такими властивостями:

1) вектор-функція $f(r)=\{\Lambda_{(\mu)}[g_1(r)];\mathrm{B}_{\nu,\alpha_1}[g_2(r)];\mathrm{B}_{\alpha_2}[g_3(r)];g_4''(r)\}$ неперервна на множині I_3^+;

2) справджуються крайові умови

$$\lim_{r\to 0} shrg_1(r)=0,\ \lim_{r\to+\infty}\frac{d^k g_4(r)}{dr^k}=0,\ k=0,1; \tag{6}$$

3) справджуються умови спряження

$$\left.\left[\left(\alpha_{j1}^k\frac{d}{dr}+\beta_{j1}^k\right)g_k(r)-\left(\alpha_{j2}^k\frac{d}{dr}+\beta_{j2}^k\right)g_{k+1}(r)\right]\right|_{r=R_k}=0,\ j=1,2,\ k=\overline{1,3}. \tag{7}$$

Визначимо числа:

$$\sigma_1=\frac{1}{a_1^2}\frac{c_{11}c_{12}c_{13}}{c_{21}c_{22}c_{23}}\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{2\alpha_1+1}\left(\frac{R_2}{R_3}\right)^{2\alpha_2+1}\frac{1}{shR_1},\ \sigma_2=\frac{1}{a_2^2}\frac{c_{12}c_{13}}{c_{22}c_{23}}\left(\frac{R_2}{R_3}\right)^{2\alpha_2+1}\frac{1}{R_2^{2\alpha_1+1}},$$

$$\sigma_3=\frac{1}{a_3^2}\frac{c_{13}}{c_{23}}\frac{1}{R_3^{2\alpha_2+1}},\ \sigma_3=\frac{1}{a_4^2},$$

вагову функцію

$$\sigma(r)=\theta(r)\theta(R_1-r)\sigma_1 shr+\theta(r-R_1)\theta(R_2-r)\sigma_2 r^{2\alpha_1+1}+\theta(r-R_2)\theta(R_3-r)\sigma_3 r^{2\alpha_2-1}+$$
$$+\theta(r-R_3)\sigma_4 \tag{8}$$

і скалярний добуток

$$(u,v)=\int_{R_0}^{+\infty}u(r)v(r)\sigma(r)dr=\int_{R_0}^{R_1}u_1(r)v_1(r)\sigma_1 shr dr+\int_{R_1}^{R_2}u_2(r)v_2(r)\sigma_2 r^{2\alpha_1+1}dr+$$
$$+\int_{R_2}^{R_3}u_3(r)v_3(r)\sigma_3 r^{2\alpha_2-1}dr+\int_{R_3}^{+\infty}u_4(r)v_4(r)\sigma_4 dr,\quad u(r)\in G, v(r)\in G. \tag{9}$$

Із умов спряження (7) маємо базову тотожність

$$u_k'(R_k)v_k(R_k)-u_k(R_k)v_k'(R_k)=\frac{c_{2k}}{c_{1k}}\left[u_{k+1}'(R_k)v_{k+1}(R_k)-u_{k+1}(R_k)v_{k+1}'(R_k)\right] \tag{10}$$

Безпосередньо інтегруючи частинами двічі, знаходимо:

$$\left(M_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}[u],v\right)=\left(u,M_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}[v]\right). \tag{11}$$

Отже, ГДО $M_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}$ самоспряжений. Значить, його власні числа дійсні.

При $b_j=a_j^{-1}\left(\beta^2+\gamma_j^2\right)^{1/2}$, де $|\beta|\in(0,+\infty)$, $\gamma_j^2\ge 0$, $j=\overline{1,4}$, фундаментальну систему розв'язків (ФСЗ) для узагальненого диференціального рівняння Лежандра $\left(\Lambda_{(\mu)}+b_1^2\right)u(r)=0$ утворюють функції $P_{-\frac{1}{2}+ib_1}^{(\mu)}(chr)$ та $\mathrm{B}_{-\frac{1}{2}+ib_1}^{(\mu)}(chr)$ [4]; ФСР для диференціального рівняння Бесселя $\left(\mathrm{B}_{\nu,\alpha_1}+b_2^2\right)u(r)=0$ утворюють циліндричні функції $J_{\nu,\alpha_1}(b_2r)=(b_2r)^{-\alpha_1}J_\nu(b_2r)$ та $N_{\nu,\alpha_1}(b_2r)=(b_2r)^{-\alpha_1}N_\nu(b_2r)$ [5]; (ФСЗ) для диференціального рівняння Бесселя $\left(\mathrm{B}_{\alpha_2}+b_3^2\right)u(r)=0$ утворюють функції $C_{\alpha_2}(\lambda r,b_3)$ та $D_{\alpha_2}(\lambda r,b_3)$ [5]; ФСР для диференціального рівняння Фур'є $\left(\frac{d^2}{dr^2}+b_4^2\right)u(r)=0$ утворюють функції $\cos b_4r$ та $\sin b_4r$.

ГДО $M_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}$, визначений рівністю (5), має одну особливу точку $r=+\infty$. Тому спектр оператора $M_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}$ дійсний та неперервний і йому відповідає дійсна спектральна вектор-функція $V_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}(r,\beta)=\left\{V_{\nu,(\alpha);1}^{(\mu)}(r,\beta);V_{\nu,(\alpha);2}^{(\mu)}(r,\beta);V_{\nu,(\alpha);3}^{(\mu)}(r,\beta);V_{\nu,(\alpha);4}^{(\mu)}(r,\beta)\right\}$

Визначимо величини та функції:

$$q_{\alpha_2,2}(\beta)=X_{\alpha_{21};12}^{21}(\lambda R_2,b_3)X_{\alpha_2;22}^{22}(\lambda R_2,b_3)-X_{\alpha_2;22}^{21}(\lambda R_2,b_3)X_{\alpha_2;12}^{22}(\lambda R_2,b_3)=\frac{c_{22}sh\pi b_3}{\pi\lambda^{2\alpha_2}R_2^{2\alpha_2+1}},$$

$$q_{\nu,\alpha_1,1}(\beta)=u_{\nu,\alpha_1;12}^{11}(b_2R_1)u_{\nu,\alpha_1;22}^{12}(b_2R_1)-u_{\nu,\alpha_1;12}^{12}(b_2R_1)u_{\nu,\alpha_1;22}^{11}(b_2R_1)=\frac{2}{\pi}\frac{c_{21}}{b_2^{2\alpha_1}}\frac{1}{R_1^{2\alpha_1+1}},$$

$$\delta_{\alpha_2;jk}(\beta)=\mathrm{X}_{\alpha_2;j2}^{21}(\lambda R_2,b_3)\mathrm{X}_{\alpha_2;k1}^{32}(\lambda R_3,b_3)-\mathrm{X}_{\alpha_2;j2}^{22}(\lambda R_2,b_3)\mathrm{X}_{\alpha_2;k1}^{31}(\lambda R_3,b_3),$$

$$Z_{-\frac{1}{2}+ib_1;jk}^{(\mu),m}(chR_m)=\left(\alpha_{jk}^m\frac{d}{dr}+\beta_{jk}^m\right)P_{-\frac{1}{2}+ib_1}^{(\mu)}(chr)\Big|_{r=R_m},\ m=\overline{1,3},$$

$$\delta_{\nu,\alpha_1;jk}(\beta)=u_{\nu,\alpha_1;j2}^{11}(b_2R_1)u_{\nu,\alpha_1;k1}^{22}(b_2R_2)-u_{\nu,\alpha_1;j2}^{12}(b_2R_1)u_{\nu,\alpha_1;k1}^{21}(b_2R_2),$$

$$\delta_{\nu,\alpha_1;j}^{(\mu)}(\beta)=Z_{-\frac{1}{2}+ib_1;21}^{(\mu),1}(\beta)\delta_{\nu,\alpha_1,1j}(\beta)-Z_{-\frac{1}{2}+ib_1;11}^{(\mu),1}(\beta)\delta_{\nu,\alpha_1,2j}(\beta),$$

$$a_{\nu,(\alpha);j}^{(\mu)}(\beta)=\delta_{\nu,\alpha_1;2}^{(\mu)}(\beta)\delta_{\alpha_2;1j}(\beta)-\delta_{\nu,\alpha_1;1}^{(\mu)}(\beta)\delta_{\alpha_2;2j}(\beta),$$

$$\omega_{\nu,(\alpha);j}^{(\mu)}(\beta)=a_{\nu,(\alpha);1}^{(\mu)}(\beta)v_{22}^{3j}(b_4R_3)-a_{\nu,(\alpha);2}^{(\mu)}(\beta)v_{12}^{3j}(b_4R_3),$$

$$\Psi^{2}_{\alpha_2,jk}(\lambda R_2,\lambda r,b_3)=X^{21}_{\alpha_2,jk}(\lambda R_2,b_3)D_{\alpha_2}(\lambda r,b_3)-X^{22}_{\alpha_2,jk}(\lambda R_2,b_3)C_{\alpha_2}(\lambda r,b_3),$$

$$\Psi^{1}_{\nu,\alpha_1,jk}(b_2R_1,b_2r)=u^{11}_{\nu,\alpha_1,jk}(b_2R_1)N_{\nu,\alpha_1}(b_2r)-u^{12}_{\nu,\alpha_1,jk}(b_2R_1)J_{\nu,\alpha_1}(b_2r),\ j,k=1,2.$$

Інші функції визначені в роботах [3,4,5].

Безпосередньо перевіряється, що компоненти $V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta)$, $j=\overline{1,4}$, спектральної вектор-функції $V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(r,\beta)$ мають вигляд:

$$V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta)=c_{23}b_4q_{\alpha_2,2}(\beta)q_{\nu,\alpha_1,1}(\beta)P^{(\mu)}_{-\frac{1}{2}+ib_1}(chr),$$

$$V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta)=c_{23}b_4q_{\alpha_2,2}(\beta)\left[Z^{(\mu),1}_{-\frac{1}{2}+ib_1;21}(chR_1)\Psi^{1}_{\nu,\alpha_1;12}(b_2R_1,b_2r)-Z^{(\mu),1}_{-\frac{1}{2}+ib_1;11}(chR_1)\Psi^{1}_{\nu,\alpha_1;22}(b_2R_1,b_2r)\right],$$

$$V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta)=c_{23}b_4\left[\delta^{(\mu)}_{\nu,\alpha_2;2}(\beta)\Psi^{2}_{\alpha_2;12}(\lambda R_2,\lambda r,b_3)-\delta^{(\mu)}_{\nu,\alpha_1;1}(\beta)\Psi^{2}_{\alpha_2;22}(\lambda R_2,\lambda r,b_3)\right];$$

$$V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);4}(r,\beta)=\omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(\beta)\cos b_4r-\omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(\beta)\sin b_4r.$$

Наявність спектральної функції

$$V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(r,\beta)=\theta(r)\theta(R_1-r)V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta)+\theta(r-R_1)\theta(R_2-r)V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta)+$$
$$+\theta(r-R_2)\theta(R_3-r)V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta)+\theta(r-R_3)V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);4}(r,\beta),$$

вагової функції $\sigma(r)$, визначеної рівністю (4), і спектральної щільності $\Omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(\beta)=$ $=\frac{\beta}{b_4(\beta)}\left(\left[\omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(\beta)\right]^2+\left[\omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(\beta)\right]^2\right)^{-1}$ дають можливість визначити пряме $\mathrm{H}^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}$ і обернене $\mathrm{H}^{-(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}$ гібридне інтегральне перетворення типу Лежандра 1-го роду - Ганкеля 2-го роду - (Конторовича - Лєбєдєва) 2-го роду - Фур'є, породжене на множині I_3^+ ГДО $M^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}$ [4]:

$$\mathrm{H}^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}[g(r)]=\int_0^{+\infty}g(r)V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(r,\beta)\sigma(r)dr\equiv\int_0^{R_1}g_1(r)V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta)\sigma_1 shrdr+$$
$$+\int_{R_1}^{R_2}g_2(r)V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta)\sigma_2r^{2\alpha_1+1}dr+\int_{R_2}^{R_3}g_3(r)V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta)\sigma_3r^{2\alpha_2-1}dr+\tag{12}$$
$$+\int_{R_3}^{+\infty}g_4(r)V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);4}(r,\beta)\sigma_4dr=\tilde g_1(\beta)+\tilde g_2(\beta)+\tilde g_3(\beta)+\tilde g_4(\beta)\equiv\tilde g(\beta),$$

$$\mathrm{H}^{-(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}[\tilde g(\beta)]=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\tilde g(\beta)V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(r,\beta)\Omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(\beta)d\beta\equiv g(r).\tag{13}$$

Математичним обґрунтуванням правил (12), (13) є твердження.

Теорема (про інтегральне зображення). *Якщо вектор-функція* $f(r)=\left[\theta(r-R_0)\theta(R_1-r)\sqrt{shr}+\right.$ $\left.+\theta(r-R_1)\theta(R_2-r)r^{\alpha_1+1/2}+\theta(r-R_2)\theta(R_3-r)r^{\alpha_2-1/2}+\theta(r-R_3)\cdot 1\right]g(r)$ *неперервна, абсолютно сумовна і має обмежену варіацію на* $(0,\infty)$, *то для будь-якого* $r\in I_3^+$ *справджується інтегральне зображення*

$$\frac{1}{2}[g(r-0)+g(r+0)]=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(r,\beta)\Omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(\beta)\int_0^{+\infty}g(\rho)V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(\rho,\beta)\sigma(\rho)d\rho d\beta.$$

Доведення проводиться методом дельта-подібної послідовності (ядро Діріхле) [4].

Застосування запровадженого формулами (12), (13) ГІП базується на основній тотожності інтегрального перетворення ГДО $M_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}$.

Теорема (про основну тотожність). *Якщо вектор-функція*

$$f(r)=\left\{\Lambda_{(\mu)}[g_1(r)];\mathrm{B}_{\nu,\alpha_1}[g_2(r)];\mathrm{B}_{\alpha_2}[g_3(r)];g_4''(r)\right\}$$

неперервна на множині I_3^+ *і справджуються крайові умови*

$$\lim_{r\to 0} shr\left(\frac{dg_1(r)}{dr}V_{\nu,(\alpha);1}^{(\mu)}(r,\beta)-g_1(r)\frac{dV_{\nu,(\alpha);1}^{(\mu)}(r,\beta)}{dr}\right)=0,$$

$$\lim_{r\to+\infty}\left[V_{\nu,(\alpha);4}^{(\mu)}(r,\beta)\frac{dg_4(r)}{dr}-g_4(r)\frac{dV_{\nu,(\alpha);4}^{(\mu)}(r,\beta)}{dr}\right]=0$$

та умови спряження $\left[\left(\alpha_{j1}^k\frac{d}{dr}+\beta_{j1}^k\right)g_k(r)-\left(\alpha_{j2}^k\frac{d}{dr}+\beta_{j2}^k\right)g_{k+1}(r)\right]\Big|_{r=R_k}=\omega_{j1}^k,\ j=1,2,\ k=\overline{1,3},$ *то має місце основна тотожність інтегрального перетворення ГДО, визначеного за формулою (5):*

$$\mathrm{H}_{\nu,(\alpha);3}^{(\mu)}\left[M_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}[g(r)]\right]=-\beta^2\tilde{g}(\beta)-\sum_{j=1}^{4}\gamma_j^2\tilde{g}_j(\beta)+\sum_{j=1}^{3}d_j\left(\mathrm{Z}_{\nu,(\alpha);12}^{(\mu),j+1}(\beta)\omega_{21}^j-\mathrm{Z}_{\nu,(\alpha);22}^{(\mu),j+1}(\beta)\omega_{11}^j\right), \quad (14)$$

де $Z_{\nu,(\alpha);j2}^{(\mu),k+1}(\beta)=\left(\alpha_{j2}^k\frac{d}{dr}+\beta_{j2}^k\right)V_{\nu,(\alpha),k+1}^{(\mu)}(r,\beta)\Big|_{r=R_k}$, $j=1,2,\ k=\overline{1,3},\quad d_1=a_1^2\sigma_1 shR_1\,c_{11}^{-1},$

$d_2=a_2^2\sigma_2R_2^{2\alpha_1+1}c_{12}^{-1},\quad d_3=a_3^2\sigma_3R_3^{2\alpha_2+1}c_{13}^{-1}.$

Доведення проводиться методом інтегрування два рази частинами під знаком інтегралів з послідуючим використанням властивостей вектор-функцій $g(r)$ та $V_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}(r,\beta)$ і структури $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\sigma_4$.

Запишемо систему (1) і початкові умови (2) в матричній формі:

$$\begin{bmatrix}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\chi_1^2-a_1^2\Lambda_{(\mu)}\right)u_1(t,r)\\ \left(\frac{\partial}{\partial t}+\chi_2^2-a_2^2\mathrm{B}_{\nu,\alpha_1}\right)u_2(t,r)\\ \left(\frac{\partial}{\partial t}+\chi_3^2-a_3^2\mathrm{B}_{\alpha_2}\right)u_3(t,r)\\ \left(\frac{\partial}{\partial t}+\chi_4^2-a_4^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}\right)u_4(t,r)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f_1(t,r)\\ f_2(t,r)\\ f_3(t,r)\\ f_4(t,r)\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}u_1(t,r)\\ u_2(t,r)\\ u_3(t,r)\\ u_4(t,r)\end{bmatrix}\Bigg|_{t=0}=\begin{bmatrix}g_1(r)\\ g_2(r)\\ g_3(r)\\ g_4(r)\end{bmatrix}. \quad (15)$$

Інтегральне перетворення $\mathrm{H}_{\nu,(\alpha);3}^{(\mu)}$, згідно з правилом (12), зобразимо у вигляді операторної матриці-рядка

$$\mathrm{H}_{\nu,(\alpha);3}^{(\mu)}[\Lambda]=\Bigg[\int_0^{R_1}\mathrm{K}\,V_{\nu,(\alpha);1}^{(\mu)}(r,\beta)\sigma_1 shrdr\quad \int_{R_1}^{R_2}\mathrm{K}\,V_{\nu,(\alpha);2}^{(\mu)}(r,\beta)\sigma_2 r^{2\alpha_1+1}dr$$

$$\int_{R_2}^{R_3}\mathrm{K}\,V_{\nu,(\alpha);3}^{(\mu)}(r,\beta)\sigma_3 r^{2\alpha_1-1}dr\quad \int_{R_3}^{+\infty}\mathrm{K}\,V_{\nu,(\alpha);4}^{(\mu)}(r,\beta)\sigma_4 dr\Bigg]. \quad (16)$$

Припустимо, що $\chi_1^2 = \max\{\chi_1^2;\chi_2^2;\chi_3^2;\chi_4^2\}$. Покладемо всюди $\gamma_j^2 = \chi_1^2 - \chi_j^2 \geq 0$, $j = \overline{1,4}$. Застосуємо, за правилом множення матриць, операторну матрицю-рядок (16) до задачі (15). Внаслідок тотожності (14) отримуємо задачу Коші:

$$\left(\frac{d}{dt} + \beta^2 + \chi_1^2\right)\widetilde{u}(t,\beta) = \widetilde{F}(t,\beta), \qquad \widetilde{u}(t,\beta)\big|_{t=0} = \widetilde{g}(\beta). \tag{17}$$

Тут прийняті позначення: $\widetilde{u}(t,\beta) = \sum\limits_{j=1}^{4} \widetilde{u}_j(t,\beta)$, $\widetilde{g}(\beta) = \sum\limits_{j=1}^{4} \widetilde{g}_j(\beta)$, $\widetilde{f}(t,\beta) = \sum\limits_{j=1}^{4} \widetilde{f}_j(t,\beta)$,

$$\widetilde{F}(t,\beta) = \widetilde{f}(t,\beta) + \sum_{j=1}^{3} d_j\left(Z^{(\mu),j+1}_{\nu,(\alpha);12}(\beta)\omega^j_{21}(t) - Z^{(\mu),j+1}_{\nu,(\alpha);22}(\beta)\omega^j_{11}(t)\right).$$

Безпосередньо перевіряється, що розв’язком задачі Коші (17) є функція [6]

$$\widetilde{u}(t,\beta) = e^{-(\beta^2+\chi_1^2)t}\widetilde{g}(\beta) + \int_0^t e^{-(\beta^2+\chi_1^2)(t-\tau)}\widetilde{F}(\tau,\beta)d\tau. \tag{18}$$

Оператор $H^{-(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}$, згідно з правилом (13), як обернений до (16) зобразимо у вигляді операторної матриці стовпця:

$$H^{-(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}[\Lambda\ ] = \begin{bmatrix} \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} K\ V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta)V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(\beta)d\beta \\ \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} K\ V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta)V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(\beta)d\beta \\ \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} K\ V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta)V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(\beta)d\beta \\ \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} K\ V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);4}(r,\beta)V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(\beta)d\beta \end{bmatrix}. \tag{19}$$

Застосуємо операторну матрицю-стовпець (19), за правилом множення матриць, до матриці-елемента $[\widetilde{u}(t,\beta)]$, де функція $\widetilde{u}(t,\beta)$, однозначно визначена формулою (18). Після низки елементарних перетворень маємо єдиний розв’язок параболічної задачі (1)-(4):

$$\begin{aligned} u_j(t,r) = &\int_0^t\int_0^{R_1} H^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);j1}(t-\tau,r,\rho)\left[f_1(\tau,\rho) + \delta_+(\tau)g_1(\rho)\right]\sigma_1 sh\rho d\rho d\tau + \\ &+ \int_0^t\int_{R_1}^{R_2} H^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);j2}(t-\tau,r,\rho)\left[f_2(\tau,\rho) + \delta_+(\tau)g_2(\rho)\right]\sigma_2\rho^{2\alpha_1+1}d\rho d\tau + \\ &+ \int_0^t\int_{R_2}^{R_3} H^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);j3}(t-\tau,r,\rho)\left[f_3(\tau,\rho) + \delta_+(\tau)g_3(\rho)\right]\sigma_3\rho^{2\alpha_2-1}d\rho d\tau + \\ &+ \int_0^t\int_{R_3}^{+\infty} H^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);j4}(t-\tau,r,\rho)\left[f_4(\tau,\rho) + \delta_+(\tau)g_4(\rho)\right]\sigma_4 d\rho d\tau + \\ &+ \sum_{m=2}^{4}\int_0^t\left[R^{jm}_{\nu,(\alpha);12}(t-\tau,r)\omega^{m-1}_{21}(\tau) - R^{jm}_{\nu,(\alpha);22}(t-\tau,r)\omega^{m-1}_{11}(\tau)\right]d\tau,\ j = \overline{1,4}. \end{aligned} \tag{20}$$

Тут беруть участь головні розв’язки даної параболічної задачі: 1) породжені неоднорідністю системи (1) функції впливу

$$H^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);jk}(t,r,\rho) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-(\beta^2+\chi_1^2)t}V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta)V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);k}(\rho,\beta)\Omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(\beta)d\beta,\ j,k = \overline{1,4};$$

2) породжені неоднорідністю умов спряження функції Гріна

$$R^{jm}_{\nu,(\alpha);k2}(t,r)=\frac{2}{\pi}\cdot d_{m-1}\int\limits_0^{+\infty} e^{-(\beta^2+\chi_1^2)t}V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta)Z^{(\mu),m}_{\nu,(\alpha);k2}(\beta)\Omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(\beta)d\beta,$$

$$j=\overline{1,4},\quad k=1,2,\quad m=\overline{2,4}.$$

Тут $\delta_+(\tau)$ - дельта-функція, зосереджена в точці $t=0+$.

Задача статики. Розглянемо задачу про побудову обмеженого в області $D_3^+=\{(r,z):r\in I_3^+,z\in(0,+\infty)\}$ розв'язку сепаратної системи диференціальних рівнянь Пуассона

$$\frac{\partial^2 u_1(r,z)}{\partial z^2}-\chi_1^2 u_1(r,z)+a_1^2\Lambda_{(\mu)}[u_1(r,z)]=-f_1(r,z),\quad r\in(0,R_1);$$

$$\frac{\partial^2 u_2(r,z)}{\partial z^2}-\chi_2^2 u_2(r,z)+a_2^2 \mathrm{B}_{\nu,\alpha_1}[u_2(r,z)]=-f_2(r,z),\quad r\in(R_1,R_2);$$

$$\frac{\partial^2 u_3(r,z)}{\partial z^2}-\chi_3^2 u_3(r,z)+a_3^2 \mathrm{B}_{\alpha_2}[u_3(r,z)]=-f_3(r,z),\quad r\in(R_2,R_3);\qquad (21)$$

$$\frac{\partial^2 u_4(r,z)}{\partial z^2}-\chi_4^2 u_4(r,z)+a_4^2\frac{\partial^2 u_4(r,z)}{\partial r^2}=-f_4(r,z),\quad r\in(R_3,+\infty)$$

за крайовими умовами

$$\lim_{r\to 0} shr u_1(r,z)=g_0(z),\quad \lim_{r\to+\infty}\frac{\partial^m u_4(r,z)}{\partial r^m}=0,\ m=0,1,\qquad (22)$$

$$\left(-h_1\frac{\partial}{\partial z}+h_2\right)u_j(r,z)\Big|_{z=0}=g_j(r),\ h_j\ge 0,\ h_1+h_2\ne 0,\ \lim_{r\to+\infty}\frac{\partial u_j(r,z)}{\partial z}=0,\qquad (23)$$

і умовами спряження

$$\left[\left(\alpha^k_{j1}\frac{\partial}{\partial r}+\beta^k_{j1}\right)u_k(r,z)-\left(\alpha^k_{j2}\frac{\partial}{\partial r}+\beta^k_{j2}\right)u_{k+1}(r,z)\right]\Big|_{r=R_k}=\omega^k_{j1}(z),\ j=1,2,\ k=\overline{1,3}.\qquad (24)$$

<u>Розв'язання.</u> Запишемо систему (21) і крайові умови (23) в матричній формі:

$$\begin{bmatrix}\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\chi_1^2+a_1^2\Lambda_{(\mu)}\right)u_1(r,z)\\ \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\chi_2^2+a_2^2\mathrm{B}_{\nu,\alpha_1}\right)u_2(r,z)\\ \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\chi_3^2+a_3^2\mathrm{B}_{\alpha_2}\right)u_3(r,z)\\ \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\chi_4^2+a_4^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}\right)u_4(r,z)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f_1(r,z)\\ f_2(r,z)\\ f_3(r,z)\\ f_4(r,z)\end{bmatrix},\qquad (25)$$

$$\left(-h_1\frac{\partial}{\partial z}+h_2\right)\begin{bmatrix}u_1(r,z)\\ u_2(r,z)\\ u_3(r,z)\\ u_4(r,z)\end{bmatrix}\Bigg|_{z=0}=\begin{bmatrix}g_1(r)\\ g_2(r)\\ g_3(r)\\ g_4(r)\end{bmatrix},\quad \frac{\partial}{\partial z}\begin{bmatrix}u_1(r,z)\\ u_2(r,z)\\ u_3(r,z)\\ u_4(r,z)\end{bmatrix}\Bigg|_{z=+\infty}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}.\qquad (26)$$

Припустимо, що $\chi_1^2=\max\{\chi_1^2;\chi_2^2;\chi_3^2;\chi_4^2\}$. Покладемо всюди $\gamma_j^2=\chi_1^2-\chi_j^2\ge 0$, $j=\overline{1,4}$. Застосуємо, за правилом множення матриць, операторну матрицю-рядок (16) до задачі (25), (26). Внаслідок тотожності (14) отримуємо лінійне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$\left(\frac{d^2}{dz^2}-q^2\right)\tilde{u}(\beta,z)=-\tilde{F}(\beta,z),\qquad q^2=\beta^2+\chi_1^2. \tag{27}$$

Тут бере участь функція $\tilde{F}(\beta,z)=\tilde{f}(\beta,z)+\sum_{j=1}^{3}d_j\left(Z_{\nu,(\alpha);12}^{(\mu),j+1}(\beta)\omega_{21}^{j}(z)-Z_{\nu,(\alpha);22}^{(\mu),j+1}(\beta)\omega_{11}^{j}(z)\right)$.

При цьому повинні справджуватися крайові умови

$$\left(-h_1\frac{d}{dz}+h_2\right)\tilde{u}(\beta,z)\Big|_{z=0}=\tilde{g}(\beta),\quad \frac{d\tilde{u}(\beta,z)}{dz}\Big|_{z=+\infty}=0. \tag{28}$$

Розв'язком крайової задачі (27)-(28) є функція

$$\tilde{u}(\beta,z)=\tilde{W}(\beta,z)\tilde{g}(\beta)+\int_0^{+\infty}\tilde{E}(\beta,z,\xi)\tilde{F}(\beta,\xi)d\xi. \tag{29}$$

У рівності (29) присутня функція Гріна

$$\tilde{W}(\beta,z)=e^{-q(\beta)z}(h_1q+h_2)^{-1},$$

породжена крайовою умовою (28) в точці $z=0$, і фундаментальна функція крайової задачі (27), (28)

$$\tilde{E}(\beta,z,\xi)=\frac{1}{2q}\left(e^{-q(\beta)|z-\xi|}+e^{-q(\beta)(z+\xi)}-\frac{2h_2}{h_1q+h_2}e^{-q(\beta)(z+\xi)}\right),$$

породжена неоднорідністю рівняння (27).

Застосуємо операторну матрицю-стовпець (19), за правилом множення матриць, до матриці-елемента $[\tilde{u}(\beta,z)]$, де функція $\tilde{u}(\beta,z)$ визначена формулою (29). Після низки елементарних перетворень отримуємо єдиний розв'язок еліптичної задачі (21) – (24):

$$\begin{aligned}u_j(r,z)&=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\tilde{u}(\beta,z)V_{\nu,(\alpha);j}^{(\mu)}(r,\beta)\Omega_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}(\beta)d\beta=\int_0^{R_1}W_{\nu,(\alpha);j1}^{(\mu),z}(r,\rho,z)g_1(\rho)\sigma_1 sh\rho d\rho+\\&+\int_{R_1}^{R_2}W_{\nu,(\alpha);j2}^{(\mu),z}(r,\rho,z)g_2(\rho)\sigma_2\rho^{2\alpha_1+1}d\rho+\int_{R_2}^{R_3}W_{\nu,(\alpha);j3}^{(\mu),z}(r,\rho,z)g_3(\rho)\sigma_3\rho^{2\alpha_2-1}d\rho+\\&+\int_{R_3}^{+\infty}W_{\nu,(\alpha);j4}^{(\mu),z}(r,\rho,z)g_4(\rho)\sigma_4 d\rho+\sum_{k=1}^{3}\int_0^{+\infty}\left[R_{\nu,(\alpha);12}^{(\mu);k+1,j}(r,z,\xi)\omega_{21}^{k}(\xi)-R_{\nu,(\alpha);22}^{(\mu);k+1,j}(r,z,\xi)\omega_{11}^{k}(\xi)\right]d\xi+\\&+\int_0^{+\infty}\left[\int_0^{R_1}H_{\nu,(\alpha);j1}^{(\mu)}(r,\rho,z,\xi)f_1(\rho,\xi)\sigma_1 sh\rho d\rho+\int_{R_1}^{R_2}H_{\nu,(\alpha);j2}^{(\mu)}(r,\rho,z,\xi)f_2(\rho,\xi)\sigma_2\rho^{2\alpha_1+1}d\rho+\right.\\&\left.+\int_{R_2}^{R_3}H_{\nu,(\alpha);j3}^{(\mu)}(r,\rho,z,\xi)f_3(\rho,\xi)\sigma_3\rho^{2\alpha_2-1}d\rho+\int_{R_3}^{+\infty}H_{\nu,(\alpha);j4}^{(\mu)}(r,\rho,z,\xi)f_4(\rho,\xi)\sigma_4 d\rho\right]d\xi,\ j=\overline{1,4}.\end{aligned} \tag{30}$$

Тут беруть участь головні розв'язки даної еліптичної задачі:

1) породжені крайовою умовою на лінії $z=0$ функції Гріна

$$W_{\nu,(\alpha);jk}^{(\mu),z}(r,\rho,z)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\tilde{W}(\beta,z)V_{\nu,(\alpha);j}^{(\mu)}(r,\beta)V_{\nu,(\alpha);k}^{(\mu)}(\xi,\beta)\Omega_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}(\beta)d\beta,\quad j,k=\overline{1,4};$$

2) породжені неоднорідністю умов спряження функції Гріна

$$R_{\nu,(\alpha);m2}^{(\mu);k+1,j}(r,z,\xi)=\frac{2}{\pi}d_k\int_0^{+\infty}\tilde{E}(\beta,z,\xi)V_{\nu,(\alpha);j}^{(\mu)}(r,\beta)Z_{\nu,(\alpha);m2}^{(\mu),k+1}(\beta)\Omega_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}(\beta)d\beta,\ m=1,2,\ j=\overline{1,4},\ k=\overline{1,3};$$

3) породжені неоднорідністю системи рівнянь (21) функції впливу

$$H^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);jk}(r,\rho,z,\xi)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\widetilde{E}(\beta,z,\xi)V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta)V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);k}(\rho,\beta)\Omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(\beta)d\beta,\quad j,k=\overline{1,4}.$$

Задача динаміки. Розглянемо задачу про побудову обмеженого в області $D_3^+=\{(t,r):t\in(0,+\infty),r\in I_3^+\}$ розв'язку сепаратної системи диференціальних рівнянь гіперболічного типу

$$\frac{\partial^2 u_1(t,r)}{\partial t^2}+\chi_1^2u_1(t,r)-a_1^2\Lambda_{(\mu)}[u_1(t,r)]=f_1(t,r),\quad r\in(0,R_1);$$

$$\frac{\partial^2 u_2(t,r)}{\partial t^2}+\chi_2^2u_2(t,r)-a_2^2\mathrm{B}_{\nu,\alpha_1}[u_2(t,r)]=f_2(t,r),\quad r\in(R_1,R_2);$$

$$\frac{\partial^2 u_3(t,r)}{\partial t^2}+\chi_3^2u_3(t,r)-a_3^2\mathrm{B}_{\alpha_2}[u_3(t,r)]=f_3(t,r),\quad r\in(R_2,R_3);\tag{31}$$

$$\frac{\partial^2 u_4(t,r)}{\partial t^2}+\chi_4^2u_4(t,r)-a_4^2\frac{\partial^2 u_4(t,r)}{\partial r^2}=f_4(t,r),\quad r\in(R_3,+\infty)$$

за початковими умовами

$$u_i(t,r)\big|_{t=0}=\varphi_i(r),\quad \left.\frac{\partial u_i(t,r)}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi_i,\ r\in(R_{i-1},R_i),\quad i=\overline{1,4},\ R_4=+\infty,\tag{32}$$

крайовими умовами

$$\lim_{r\to 0} shr u_1(t,r)=0,\ \lim_{r\to+\infty}\frac{\partial^m u_4(t,r)}{\partial r^m}=0,\ m=0,1\tag{33}$$

і умовами спряження

$$\left.\left[\left(\alpha_{j1}^k\frac{\partial}{\partial r}+\beta_{j1}^k\right)u_k(t,r)-\left(\alpha_{j2}^k\frac{\partial}{\partial r}+\beta_{j2}^k\right)u_{k+1}(t,r)\right]\right|_{r=R_k}=\omega_{j1}^k(t),\ j=1,2,\ k=\overline{1,3},\tag{34}$$

Запишемо систему (31) і початкові умови (32) у матричній формі:

$$\begin{bmatrix}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\chi_1^2-a_1^2\Lambda_{(\mu)}\right)u_1(t,r)\\ \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\chi_2^2-a_2^2\mathrm{B}_{\nu,\alpha_1}\right)u_2(t,r)\\ \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\chi_3^2-a_3^2\mathrm{B}_{\alpha_2}\right)u_3(t,r)\\ \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\chi_4^2-a_4^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}\right)u_4(t,r)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f_1(t,r)\\ f_2(t,r)\\ f_3(t,r)\\ f_4(t,r)\end{bmatrix},\tag{35}$$

$$\left.\begin{bmatrix}u_1(t,r)\\u_2(t,r)\\u_3(t,r)\\u_4(t,r)\end{bmatrix}\right|_{t=0}=\begin{bmatrix}\varphi_1(r)\\\varphi_2(r)\\\varphi_3(r)\\\varphi_4(r)\end{bmatrix},\quad \frac{\partial}{\partial t}\left.\begin{bmatrix}u_1(t,r)\\u_2(t,r)\\u_3(t,r)\\u_4(t,r)\end{bmatrix}\right|_{t=0}=\begin{bmatrix}\psi_1(r)\\\psi_2(r)\\\psi_3(r)\\\psi_4(r)\end{bmatrix}.\tag{36}$$

Припустимо, що $\chi_1^2=\max\{\chi_1^2;\chi_2^2;\chi_3^2;\chi_4^2\}$. Покладемо всюди $\gamma_j^2=\chi_1^2-\chi_j^2\geq 0$, $j=\overline{1,4}$. Застосуємо, за правилом множення матриць, операторну матрицю-рядок (16) до задачі (35), (36). Внаслідок тотожності (14) отримуємо задачу Коші

$$\left(\frac{d^2}{dt^2}+\left(\chi_1^2+\beta^2\right)\right)\widetilde{u}(\beta,z)=\widetilde{F}(\beta,z),\quad \widetilde{u}(\beta,z)\Big|_{t=0}=\widetilde{\varphi}(\beta),\quad \left.\frac{\partial\widetilde{u}(\beta,z)}{\partial t}\right|_{t=0}=\widetilde{\psi}(\beta). \qquad (37)$$

Тут $\widetilde{F}(t,\beta)=\widetilde{f}(t,\beta)+\sum\limits_{j=1}^{3}d_j\left(Z_{\nu,(\alpha);12}^{(\mu),j+1}(\beta)\omega_{21}^{j}(t)-Z_{\nu,(\alpha);22}^{(\mu),j+1}(\beta)\omega_{11}^{j}(t)\right).$

Розв'язком задачі Коші (37) є функція

$$\widetilde{u}(t,\beta)=\frac{\sin\sqrt{\beta^2+\chi_1^2}\,t}{\sqrt{\beta^2+\chi_1^2}}\widetilde{\psi}(\beta)+\frac{d}{dt}\left(\frac{\sin\sqrt{\beta^2+\chi_1^2}\,t}{\sqrt{\beta^2+\chi_1^2}}\right)\widetilde{\varphi}(\beta)+\int\limits_0^t\frac{\sin\sqrt{\beta^2+\chi_1^2}\,(t-\tau)}{\sqrt{\beta^2+\chi_1^2}}\widetilde{F}(\tau,\beta)d\tau. \qquad (38)$$

Визначимо: 1) породжені неоднорідністю системи функції впливу

$$\mathrm{H}_{\nu,(\alpha);jk}^{(\mu)}(t,r,\rho)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin\sqrt{\beta^2+\chi_1^2}\,t}{\sqrt{\beta^2+\chi_1^2}}V_{\nu,(\alpha);j}^{(\mu)}(r,\beta)V_{\nu,(\alpha);k}^{(\mu)}(\rho,\beta)\Omega_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}(\beta)d\beta,\ j,k=\overline{1,4};$$

2) породжені неоднорідністю умов спряження функції Гріна

$$R_{\nu,(\alpha);m2}^{(\mu);k+1,j}(t,r)=\frac{2}{\pi}\cdot d_k\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin\sqrt{\beta^2+\chi_1^2}\,t}{\sqrt{\beta^2+\chi_1^2}}V_{\nu,(\alpha);j}^{(\mu)}(r,\beta)Z_{\nu,(\alpha);m2}^{(\mu),k+1}(\beta)\Omega_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}(\beta)d\beta,$$

$$j=\overline{1,4},\quad m=1,2,\quad k=\overline{1,3}.$$

Застосуємо операторну матрицю-стовпець (19), за правилом множення матриць, до матриці-елемента $\left[\widetilde{u}(t,\beta)\right]$, де функція $\widetilde{u}(t,\beta)$ однозначно визначена формулою (38). Після низки елементарних перетворень маємо єдиний розв'язок гіперболічної задачі (31) – (34):

$$\begin{aligned}
u_j(t,r)={}&\int\limits_0^t\int\limits_0^{R_1}\mathrm{H}_{\nu,(\alpha);j1}^{(\mu)}(t-\tau,r,\rho)\left[f_1(\tau,\rho)+\delta_+(\tau)\psi_1(\rho)\right]\sigma_1 sh\rho d\rho d\tau+\\
&+\int\limits_0^t\int\limits_{R_1}^{R_2}\mathrm{H}_{\nu,(\alpha);j2}^{(\mu)}(t-\tau,r,\rho)\left[f_2(\tau,\rho)+\delta_+(\tau)\psi_2(\rho)\right]\sigma_2\rho^{2\alpha_1+1}d\rho d\tau+\\
&+\int\limits_0^t\int\limits_{R_2}^{R_3}\mathrm{H}_{\nu,(\alpha);j3}^{(\mu)}(t-\tau,r,\rho)\left[f_3(\tau,\rho)+\delta_+(\tau)\psi_3(\rho)\right]\sigma_3\rho^{2\alpha_2-1}d\rho d\tau+\\
&+\int\limits_0^t\int\limits_{R_3}^{+\infty}\mathrm{H}_{\nu,(\alpha);j4}^{(\mu)}(t-\tau,r,\rho)\left[f_4(\tau,\rho)+\delta_+(\tau)\psi_4(\rho)\right]\sigma_4 d\rho d\tau+\\
&+\sum_{m=2}^{4}\int\limits_0^t\left[R_{\nu,(\alpha);12}^{(\mu);jm}(t-\tau,r)\omega_{21}^{m-1}(\tau)-R_{\nu,(\alpha);22}^{(\mu);jm}(t-\tau,r)\omega_{11}^{m-1}(\tau)\right]d\tau+\\
&+\frac{\partial}{\partial t}\Bigg[\int\limits_0^{R_1}\mathrm{H}_{\nu,(\alpha);j1}^{(\mu)}(t-\tau,r,\rho)\varphi_1(\rho)\sigma_1 sh\rho d\rho+\int\limits_{R_1}^{R_2}\mathrm{H}_{\nu,(\alpha);j2}^{(\mu)}(t-\tau,r,\rho)\varphi_2(\rho)\sigma_2\rho^{2\alpha_1+1}d\rho+\\
&+\int\limits_{R_2}^{R_3}\mathrm{H}_{\nu,(\alpha);j3}^{(\mu)}(t-\tau,r,\rho)\varphi_3(\rho)\sigma_3\rho^{2\alpha_2-1}d\rho+\int\limits_{R_3}^{+\infty}\mathrm{H}_{\nu,(\alpha);j4}^{(\mu)}(t-\tau,r,\rho)\varphi_4(\rho)\sigma_4 d\rho\Bigg],\quad j=\overline{1,4}. \qquad (39)
\end{aligned}$$

Тут $\delta_+(\tau)$ - дельта-функція, зосереджена в точці $t=0+$.

Висновок. Вектор-функція $u(t,r)=\{u_1(t,r);u_2(t,r);u_3(t,r);u_4(t,r)\}$, де $u_j(t,r)$ визначені формулою (20), описує в точній аналітичній формі тепловий процес у даному середовищі, вектор-функція $u(r,z)=\{u_1(r,z);u_2(r,z);u_3(r,z);u_4(r,z)\}$, де $u_j(r,z)$ визначені формулою (30), описує в точній аналітичній формі стаціонарний процес у даному середовищі, а вектор-функція $u(t,r)=\{u_1(t,r);u_2(t,r);u_3(t,r);u_4(t,r)\}$, де $u_j(t,r)$ визначені формулою (39), описує в точній аналітичній формі коливний процес у даному середовищі. Алгоритмічний характер формул (20), (30), (39) дозволяє використовувати одержані розв'язки як в теоретичних дослідженнях, так і в інженерних розрахунках.

Література

1. Уфлянд Я.С. О некоторых новых интегральных преобразованиях и их приложений к задачам математической физики // Вопросы математической физики. – Л., 1976. – С.93-106.
2. Проценко В.С., Соловьев А.И. Некоторые гибридные интегральные преобразования и их приложения в теории упругости неоднородных сред // Прикладная механика. – 1982. – Т. XIII, №1. – С.62-67.
3. Ленюк М.П., Янчишин М.Л. Гібридні інтегральні перетворення типу (Фур'є, Конторовича - Лєбєдєва) - Лежандра. – Львів, 2002. – 76 с. – (Препринт/ НАН України. Ін-т прикладних проблем механіки і математики ім.Я.С. Підстригача; 01.02).
4. Ленюк М.П., Шинкарик М.І. Гібридні інтегральні перетворення (Фур'є, Бесселя, Лежандра). Частина 1. – Тернопіль: Економічна думка, 2004. – 368 с.
5. Ленюк М.П., Міхалевська Г.І. Інтегральні перетворення типу Конторовича – Лєбєдєва. – Чернівці: Прут, 2002. – 280 с.

Одержано 07.03.2006 р.