

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ. МАТЕМАТИКА. ФІЗИКА

MATHEMATICS. MATHEMATICAL MODELING. PHYSICS

УДК. 517.958:519.6

**В.Кухарський¹, канд.фіз.-мат.наук; Н.Кухарська², канд.фіз.-мат.наук;
Я.Савула¹, докт. фіз.-мат.наук; Т.Мандзак¹**

¹ Львівський національний університет імені Івана Франка

² Львівський державний університет безпеки життєдіяльності

ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ТЕПЛОМАСОПЕРЕНЕСЕННЯ В СЕРЕДОВИЩАХ ІЗ ВКЛЮЧЕНИМИ ТОНКИМИ ШАРАМИ

У статті запропоновано математичні моделі та числові схеми розв'язування задач поширення субстанції у середовищі з тонкими включеннями. Передбачено, що фізико-хімічні властивості середовища та включень можуть відрізнятися. Запропонована математична модель передбачає наявність дифузійно-дисперсійного перенесення в основному середовищі та додатково адвективного перенесення в тонких шароподібних включеннях. Гетерогенність запропонованої математичної моделі полягає у використанні співвідношень різної вимірності у побудованій системі ключових рівнянь. Це, в свою чергу, вимагає застосування модифікованих схем методу скінченних елементів, який використовується як базовий до розв'язування сформульованих задач.

V.Kukharskyu; N.Kukharska; Ya.Savula; T.Mandzak

PHISICAL-MATHEMATICAL MODELING OF HEAT AND MASS TRANSFER PROCESSES IN CONTINUUMS WITH THIN LAYERS

The mathematical models and numerical schemes of heat and mass transfer problems in the continuum with thin layers insertions are offered. It is stipulated, that physical and chemical properties of environment and insertions can be different. Mathematical model provides presence of diffusive transferring in the basic environment and more advective transferring in thin layers. Heterogeneity of this mathematical model will consist in use of different measurability correlations in constructed system of the key equations. It demands application of the modified schemes of finite element method which is used as base for solving of the formulated problems.

Вступ

Розв'язування реальних задач поширення субстанції у неоднорідних середовищах здійснюється, як правило, з допомогою числових методів. Їх застосування у середовищах, що мають складну фізико-хімічну структуру, вимагає побудови спеціальних підходів як при побудові математичної моделі [1,2], так і при конструюванні алгоритмів числового розв'язання.

У роботі побудовано математичну модель процесу тепломасоперенесення у середовищі, що включає n тонких криволінійних шарів (рис.1), що відрізняються від основного середовища своїми фізичними характеристиками. В областях тонких каналів передбачено існування явища конвекції вздовж серединної осі каналу поряд з

дифузійним перенесенням. В об'ємних складових середовища розглядаються тільки дифузійні процеси.

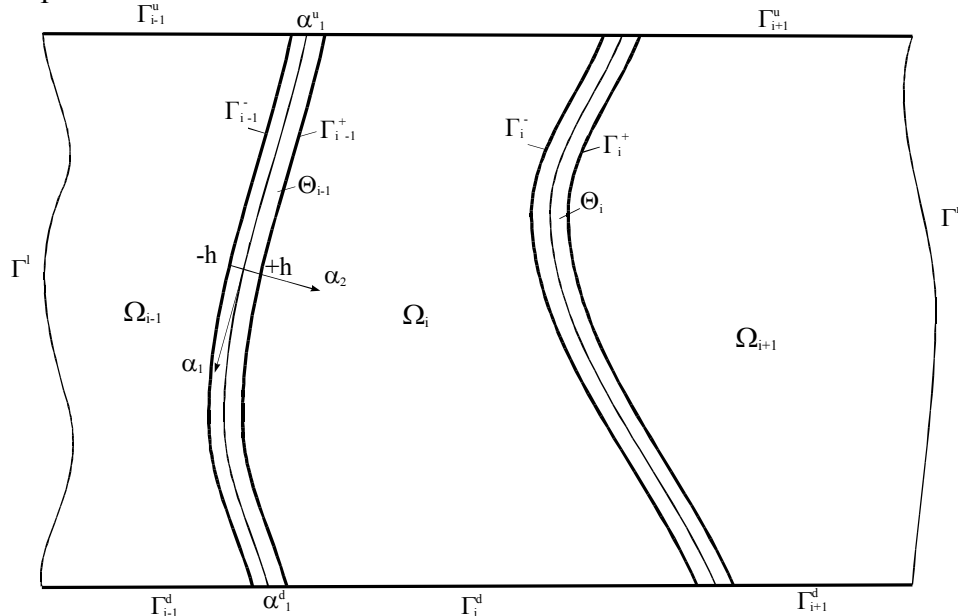


Рисунок 1 - Середовище з тонкими криволінійними включеннями.

Постановка задачі

Для побудови математичної моделі тепломасоперенесення у гетерогенному середовищі з тонкими криволінійними шарами (рис.1) розглянемо окремо кожен криволінійний шар Θ_i . Побудуємо для такого шару криволінійну систему координат $\alpha_1\alpha_2$, пов'язану із параметрично заданою серединною кривою $x_1 = x_1(\alpha_1)$, $x_2 = x_2(\alpha_1)$ таким чином, щоб координата α_1 відповідала напрямку дотичної до кривої, а координата α_2 - напрямку нормалі.

У введений системі координат кожен криволінійний шар Θ_i можна описати наступним співвідношенням

$$\Theta_i = \left\{ \alpha_1\alpha_2 : \alpha_1^d \leq \alpha_1 \leq \alpha_1^u, -h_i \leq \alpha_2 \leq h_i \right\}, \quad (1)$$

де h_i - півтовщина каналу, що є малою величиною щодо інших розмірів, які описують зовнішні параметри середовища.

Компоненти g_{ij} метричного тензора ортогональної системи координат $\alpha_1\alpha_2$ мають вигляд:

$$g_{11} = H^2, \quad g_{22} = I, \quad g_{12} = g_{21} = 0; \quad H = A(1 + \alpha_2 K),$$

де

$$A = \sqrt{(x_1')^2 + (x_2')^2} - \text{коефіцієнт Ляме параметрично заданої кривої,}$$

$$K = \frac{x_2''x_1' - x_1''x_2'}{A^3} - \text{кривина цієї кривої.}$$

Зважаючи на малу товщину шару, розподіл шуканої величини $T_{ch}^{(i)}$ у кожному з шарів подамо у вигляді лінійного закону за змінною α_2

$$T_{ch}^{(i)} = t_1^{(i)}(\tau, \alpha_1) + \frac{\alpha_2}{h} t_2^{(i)}(\tau, \alpha_1), \quad (2)$$

де $t_1(\tau, \alpha_1)$, $t_2(\tau, \alpha_1)$ - нові невідомі функції, $i = 1, \dots, n$.

Позначимо через T_i - розподіл концентрації субстанції у кожній з $n+1$ об'ємних частин Ω_i нашого середовища.

Математична модель задач перенесення субстанції для середовища з n тонкими криволінійними шарами включає: основні співвідношення адвекції-дифузії, граничні та початкові умови, отримані з врахуванням припущення про лінійний закон розподілу (2) невідомої функції за товщиною у тонких криволінійних шарах [3-5]; рівняння дифузії в областях Ω_i , граничні умови на границях Γ_i^u, Γ_i^d областей Ω_i , а також початкові умови в областях Ω_i , де $i=1, K, n+1$; умови спряження на спільних границях $\Gamma_{i-1}^-, \Gamma_{i-1}^+$ об'ємних областей та каналів $\Omega_{i-1}, \Theta_{i-1}, \Theta_{i-1}, \Omega_i$.

Таким чином, основні рівняння тепломасоперенесення в середовищі з тонкими криволінійними шарами можуть бути подані у наступному вигляді.

Рівняння адвективно-дифузійного переносу в тонких каналах

$$\kappa_i^{(0)} M_i \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial \tau} + \kappa_i^{(0)} w_i L_i \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_i} \frac{\partial \lambda_i^{(0)}}{\partial \alpha_1} \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial \alpha_1} + P_i \lambda_i^{(0)} \mathbf{u}_i = \mathbf{f}_i, \quad (3)$$

де $\tau \times x_1, x_2 \in (0, \gamma] \times \Theta_{i-1}, \mathbf{u}_i = (t_1^{(i)}, t_2^{(i)})^T$,

$$\mathbf{f}_i = \begin{pmatrix} q_i^{(0)} - (1 + K_i h_i) q_i^+ - (1 - K_i h_i) q_i^- \\ q_i^{(1)} - (1 + K_i h_i) q_i^+ + (1 - K_i h_i) q_i^- \end{pmatrix}, \quad L_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & h_i/3 \end{pmatrix}, \quad P_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1/h_i \end{pmatrix},$$

$$M_i = \begin{pmatrix} 1 & K_i h_i/3 \\ K_i h_i^2/3 & h_i/3 \end{pmatrix}, \quad N_i = \begin{pmatrix} 1 & -K_i h_i/3 \\ -K_i h_i^2/3 & h_i/3 \end{pmatrix}, \quad i=1, \dots, n;$$

крайові умови на границі кожного з каналів

$$\frac{\lambda_i^{(0)}}{A_i} N_i \frac{d\mathbf{u}_i}{d\alpha_1} = \beta_i^u (u_i - u_i^u), \quad \alpha_1 = \alpha_1^u, \quad (4)$$

$$\frac{\lambda_i^{(0)}}{A_i} N_i \frac{d\mathbf{u}_i}{d\alpha_1} = \beta_i^d (u_i - u_i^d), \quad \alpha_1 = \alpha_1^d; \quad (5)$$

початкові умови в тонкому каналі

$$\mathbf{u}_i|_{\tau=0} = \mathbf{u}_0^{(i)}, \quad (6)$$

де $\mathbf{u}_i|_{\tau=0} = \begin{pmatrix} t_1^{(i)}(0, \alpha_1) \\ t_2^{(i)}(0, \alpha_1) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_0^{(i)} = \begin{pmatrix} t_{1i}^0 \\ t_{2i}^0 \end{pmatrix},$

$$t_{1i}^0 = \frac{1}{2h_i} \int_{-h_i}^{h_i} T_{ch}^{(i)}(0, \alpha_1, \alpha_2) d\alpha_2, \quad t_{2i}^0 = \frac{3}{2h_i^2} \int_{-h_i}^{h_i} T_{ch}^{(i)}(0, \alpha_1, \alpha_2) \alpha_2 d\alpha_2.$$

Основними рівняннями, які описують процес перенесення субстанції в об'ємних частинах середовища, є рівняння дифузії

$$-\frac{\partial}{\partial x_1} \lambda_i \frac{\partial T_i}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_2} \lambda_i \frac{\partial T_i}{\partial x_2} + \kappa_i \frac{\partial T_i}{\partial \tau} = q_i, \quad \tau \times x_1, x_2 \in (0, \gamma] \times \Omega_i, \quad (7)$$

тут $i=1, \dots, n+1$, γ - довжина проміжку часу, $t_1^{(i)}(\tau, \alpha_1), t_2^{(i)}(\tau, \alpha_1)$ - невідомі функції розкладу (2), T_i - шукані розподіли субстанції в Ω_i , $\kappa_i^{(0)} = 2h_i c_{ch}^{(i)} \rho_{ch}^{(i)}$, $\lambda_i^{(0)} = 2h_i \lambda_{ch}^{(i)}$,

$$q_i^{(0)} = \int_{-h_i}^{h_i} q_{ch}^{(i)} (1 + \alpha_2 K_i) d\alpha_1, \quad q_i^{(1)} = \int_{-h}^h q_{ch}^{(i)} (1 + \alpha_2 K_i) \alpha_2 d\alpha_1, \quad \lambda_{ch}^{(i)} = Const \geq 0,$$

$\lambda_{ch}^{(i)} = Const \geq 0$ - коефіцієнти дифузії (коефіцієнт теплопровідності у задачах теплопровідності) у включеннях Θ_i , $\lambda_i = Const \geq 0$ - коефіцієнти дифузії (коефіцієнт теплопровідності у задачах теплопровідності) у середовищах Ω_i , $\kappa_i^{(0)} = 1$, $\kappa_i = 1$, (у задачах теплопровідності: $\kappa_i^{(0)} = Const \geq 0$, $\kappa_i = Const \geq 0$ - об'ємні теплоємності в Ω_i , $\rho_{ch}^{(i)}$, $c_{ch}^{(i)}$ - густина та коефіцієнти теплоємності у включеннях Θ_i), $q_{ch}^{(i)} = q_{ch}^{(i)}(\tau, \alpha_1)$, $q_i = q_i(\tau, x_1, x_2)$, - інтенсивності джерел в Θ_i та Ω_i відповідно.

До цих рівнянь необхідно додати граничні умови на частині границі, що відповідає об'ємній частині

$$-\lambda_i \frac{\partial T_i}{\partial \nu} = \beta_u^{(i)} (T_i - T_u^{(i)}), \quad (x_1, x_2) \in \Gamma_i^u, \quad (8)$$

$$-\lambda_i \frac{\partial T_i}{\partial \nu} = \beta_d^{(i)} (T_i - T_d^{(i)}), \quad (x_1, x_2) \in \Gamma_i^d \quad (9)$$

умови ізолюваності на лівій та правій границях середовища

$$-\lambda_0 \frac{\partial T_0}{\partial \nu} = 0, \quad (x_1, x_2) \in \Gamma^l, \quad (10)$$

$$-\lambda_{n+1} \frac{\partial T_{n+1}}{\partial \nu} = 0, \quad (x_1, x_2) \in \Gamma^r, \quad (11)$$

умови спряження на Γ_i^-, Γ_i^+

$$T_i = t_1^{(i)} - t_2^{(i)}, \quad \lambda_i \frac{\partial T_i}{\partial \alpha_2} = q_i^- \text{ на } \Gamma_i^-, \quad (12)$$

$$T_{i+1} = t_1^{(i)} + t_2^{(i)}, \quad -\lambda_i \frac{\partial T_{i+1}}{\partial \alpha_2} = q_i^+ \text{ на } \Gamma_i^+, \quad (13)$$

та початкові умови у внутрішніх точках середовища

$$T_i(0, x_1, x_2) = T_i^{(0)}. \quad (14)$$

Варіаційне формулювання

Для побудови варіаційного формулювання розглянемо простір Соболева $W_2^{(k)}(\alpha_1^u, \alpha_1^d)$ - функцій, визначених на (α_1^u, α_1^d) з інтегрованими з квадратом похідними порядку $k \geq 0$ з нормою

$$\|v\|_r = \left\{ \sum_{|j| \leq r} \int_{\alpha_1^b}^{\alpha_1^e} |D^j v|^2 A d\alpha_1 \right\}^{1/2}, \text{ де } j - \text{ціле невід'ємне число, } D^j v = \frac{d^j v}{d\alpha_1^j}, \text{ та введемо}$$

простори

$$V = \left\{ v(\alpha_1) \mid v(\alpha_1) \in W_2^{(1)}(\alpha_1^u, \alpha_1^d) \right\}$$

та

$$V_i = \left\{ v(x_1, x_2) \mid v(x_1, x_2) \in W_2^{(1)}(\Omega_i) \right\}.$$

Зважаючи на громіздкість виведення та запису загального варіаційного формулювання, наведемо його тільки для тонких криволінійних включень. Для цього введемо білінійні та лінійні форми

$$m(\mathbf{u}'_i, \mathbf{v}) = \int_{\alpha_1^u}^{\alpha_1^d} \kappa^{(0)} \frac{d\mathbf{u}_i^T}{d\tau} \mathbf{M}^T \mathbf{v} A d\alpha_1, \quad a(\mathbf{u}_i, \mathbf{v}) = \int_{\alpha_1^u}^{\alpha_1^d} \kappa^{(0)} W \frac{d\mathbf{u}_i^T}{d\alpha_1} \mathbf{L}^T \mathbf{v} d\alpha_1,$$

$$b(\mathbf{u}_i, \mathbf{v}) = \int_{\alpha_1^u}^{\alpha_1^d} \frac{\lambda^{(0)}}{A} \frac{d\mathbf{u}_i^T}{d\alpha_1} \mathbf{N}^T \frac{d\mathbf{v}}{d\alpha_1} d\alpha_1 + \int_{\alpha_1^u}^{\alpha_1^d} \lambda^{(0)} \mathbf{u}_i^T \mathbf{P}^T \mathbf{v} A d\alpha_1, \quad l(\mathbf{v}) = \int_{\alpha_1^u}^{\alpha_1^d} \mathbf{f}^T \mathbf{v} A d\alpha_1.$$

У таких позначеннях варіаційне формулювання матиме наступний вигляд.

Знайти вектор-функцію $\mathbf{u}_i = \{t_1^{(i)}, t_2^{(i)}\}$, де $t_1^{(i)}, t_2^{(i)} \in L_2(0, \gamma; V)$, таку, що

$$m(\mathbf{u}'_i, \mathbf{v}) + a(\mathbf{u}_i, \mathbf{v}) + b(\mathbf{u}_i, \mathbf{v}) = l(\mathbf{v}), \quad (15)$$

$$m(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}^0, \mathbf{v}) = 0, \quad (16)$$

$$\forall \mathbf{v} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}^T, \text{ де } \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V, \gamma - \text{кінцевий момент часу.}$$

Реалізація методу скінченних елементів

Згідно з процедурою Гальоркіна, використаємо розклад за базисом

$$u_1^\eta(\tau, \alpha_1) = \sum_{j=1}^N u_{1j}(\tau) \varphi_j(\alpha_1), \quad u_2^\eta(\tau, \alpha_1) = \sum_{j=1}^N u_{2j}(\tau) \varphi_j(\alpha_1), \quad (17)$$

тут - $\mathbf{u}^\eta = \{u_1^\eta, u_2^\eta\}^T$, де $u_1^\eta(\tau, \alpha_1), u_2^\eta(\tau, \alpha_1) \in L_2(0, \gamma; V_\eta)$, $\varphi_i(\alpha_1), i = 1, N$ - базисні функції.

У такий спосіб введені напівдискретні апроксимації дозволяють отримати напівдискретизовану за просторовими змінними варіаційну задачу.

Знайти \mathbf{u}^η , такі що

$$m(\mathbf{u}'^\eta, \mathbf{v}) + a(\mathbf{u}^\eta, \mathbf{v}) + b(\mathbf{u}^\eta, \mathbf{v}) = l(\mathbf{v}), \quad (18)$$

$$m(\mathbf{u}^\eta(0, \alpha_1) - \mathbf{u}^0, \mathbf{v}) = 0, \quad \forall \mathbf{v} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}^T, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V_\eta, \quad (19)$$

де $\mathbf{u}^0 = \{u_1^0, u_2^0\}^T$. Невідомою залишається лише поведінка розв'язку в часі, тобто вектори $\mathbf{u}_i = \{u_{1j}(\tau), u_{2j}(\tau)\}$ з $2N$ невідомими функціями часу.

Дискретизація одновимірними квадратичними лагранжевими скінченними елементами передбачає поділ проміжку $[\alpha_1^u, \alpha_1^d]$ на елементи наступного вигляду:

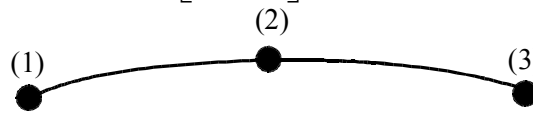


Рисунок 2 - Одновимірні криволінійні скінченні елементи.

Скориставшись матричним поданням наближеного розв'язку на кожному елементі, отримаємо

$$\mathbf{t}^\eta = \mathbf{N}_e \mathbf{q}_e,$$

де $\mathbf{N}_e = \begin{Bmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 \end{Bmatrix}$, $\mathbf{q}_e = \{t_{11}, t_{12}, t_{13}, t_{21}, t_{22}, t_{23}\}^T$ - у випадку квадратичних апроксимацій.

Використання двох змінних t_1, t_2 у варіаційному формулюванні для тонкого шару зумовлює ускладнення розв'язання задачі. Це ускладнення пов'язане зі

специфікою просторової сітки в області тонкого шару, що дозволяє коректно врахувати умови спряження областей. При цьому маємо збільшення розміру локальних матриць методу скінченних елементів відповідно у два рази.

Паралельно розглядатимемо випадки використання лінійних та квадратичних апроксимацій. Побудовані локальні матриці на кожному скінченному елементі матимуть структуру, котра продиктована виглядом білінійних форм.

Можливість зведення змінних t_1, t_2 до реальної величини T , яка є характеристикою субстанції поряд із T_i , використовується матриця перетворень P , яка у випадку квадратичних апроксимацій має наступний вигляд:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Така форма матриці P пов'язана з локальною нумерацією на скінченному елементі, який схематично поданий у вигляді, наведеному на рис.3.

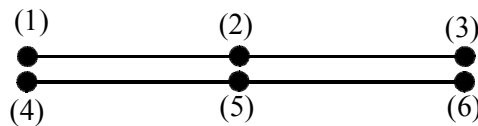


Рисунок 3 - Схема нумерації на одновимірному скінченному елементі.

Дискретизація двовимірними скінченними елементами в областях Ω_i вимагає використання апроксимацій на криволінійних чотирикутниках. Будемо використовувати восьмиточкові двовимірні елементи у вигляді криволінійних чотирикутників та відповідні біквадратичні системи базисних функцій.

Числові приклади

Для тестування запропонованої числової методики отримання розв'язку задачі тепломасоперенесення у середовищі з тонкими включеними каналами вдалося отримати аналітичний розв'язок відповідної одновимірної нестационарної задачі адвекції-дифузії з неоднорідними початково-крайовими умовами

$$\kappa u_t + \kappa \omega u_x - \lambda u_{xx} = 0; \tag{20}$$

$$u(x, 0) = \varphi; \tag{21}$$

$$u(0, t) = \rho_1; u(L, t) = \rho_2.$$

Її розв'язок має вигляд

$$u(x, t) = e^{\frac{\omega \kappa}{2\lambda} x} v(x, t), \tag{22}$$

де

$$v(x, t) = z(x, t) + w(x, t),$$

$$z(x, t) = \frac{\rho_2 - \rho_1}{e^{\frac{\omega \kappa}{\lambda} L} - 1} e^{\frac{\omega \kappa}{2\lambda} x} + \frac{\rho_1 e^{\frac{\omega \kappa}{\lambda} L} - \rho_2}{e^{\frac{\omega \kappa}{\lambda} L} - 1} e^{-\frac{\omega \kappa}{2\lambda} x},$$

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-at} \sin \frac{\pi n}{L} x.$$

Розглянемо приклад нестационарної задачі тепломасоперенесення у середовищі з тонким включеним криволінійним каналом, що має такі ж фізичні характеристики. Здійснимо порівняння отриманих чисельних розв'язків з вище наведеним аналітичним розв'язком.

Задамо середовище із каналом параболічної форми (серединна лінія каналу проходить через точки (4;0), (4;3), (6;6)). Товщина каналу $h = 0.01$. Вважається, що швидкість адвективного перенесення рівна нулю. В середовищі та каналі вибрані однакові коефіцієнти теплопровідності та об'ємної теплоємності $\lambda = 0,03 \frac{\text{Дж}}{\text{м с К}}$, $\kappa = 1,789 \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3 \text{К}}$ та значення температур зовнішнього середовища: $T_u^{(i)} = 50, T_d^{(i)} = 0$. При цьому коефіцієнти теплообміну $\beta_u^{(i)} = \beta_d^{(i)} = 10^3$.

Побудована сітка включає 80 елементів (10 по x_2 , 8 по x_1 у кожній із підобластей). Дискретизація в часі проводилася з кроком $\Delta\tau = 0,01\text{с}$, з використанням різницевої схеми Кранка-Ніколсона. Початкова умова $T_i^{(0)} = 0^0\text{С}$, $T_{ch}^{(i)} = 0^0\text{С}$.

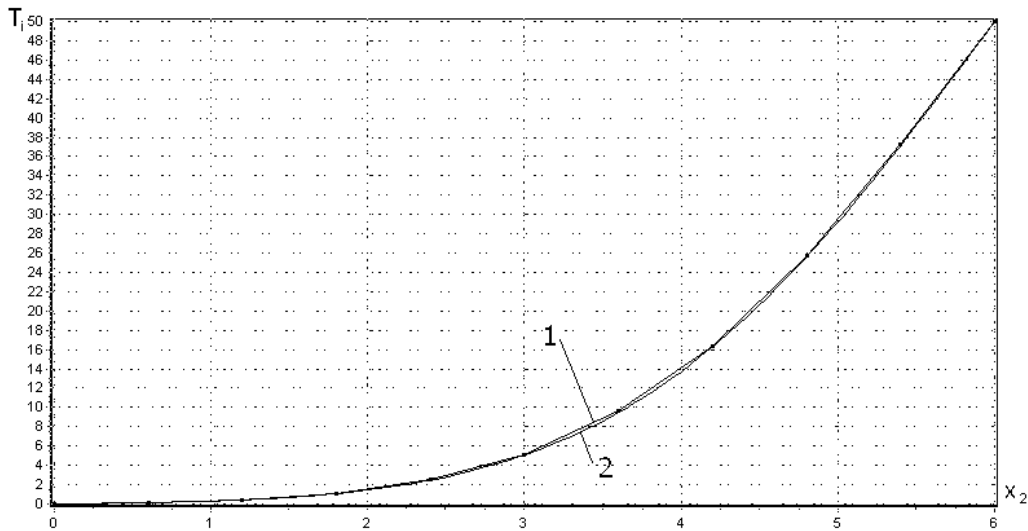


Рисунок 4 - Графік чисельного та аналітичного розв'язків ($\tau = 100\text{с}$): 1 – чисельний, 2 – аналітичний розв'язки.

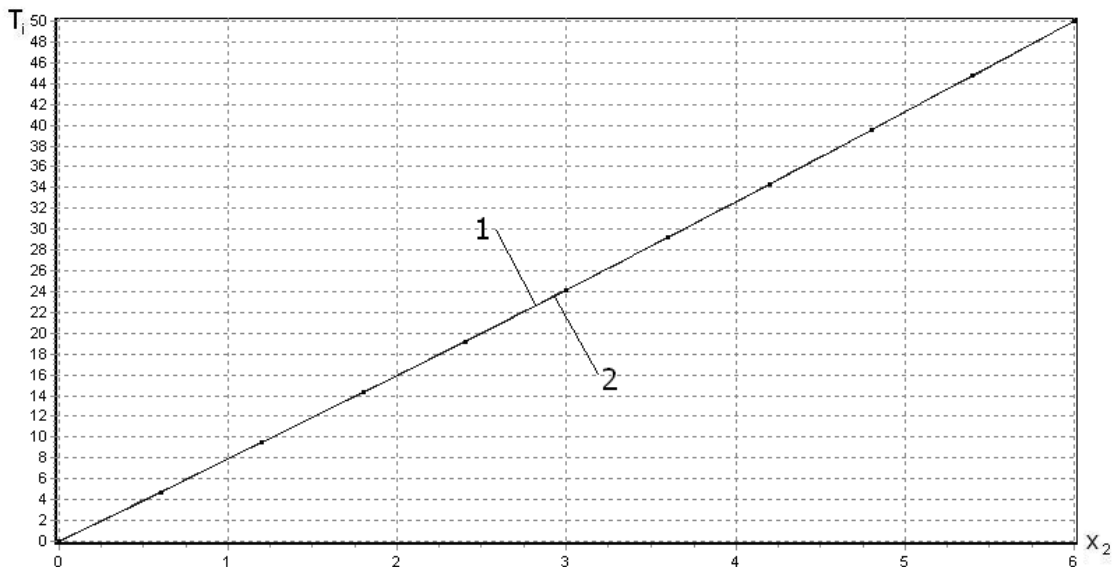


Рисунок 5 - Графік чисельного та аналітичного розв'язків ($\tau = 800\text{с}$): 1 – чисельний, 2 – аналітичний розв'язки.

На рисунках 4 та 5 наведено числові розв'язки двовимірної задачі на лінії $x_1 = 0$ та табульовані у відповідних точках аналітичні розв'язки (22) одновимірної задачі у моменти часу $\tau = 100c$ та $\tau = 800c$. Близькість аналітичного та числового розв'язків (рис.4–5) демонструє коректність вибраних числових методів розв'язування задач.

Висновки

Запропонована методика числового розв'язування нестационарних задач тепломасоперенесення у середовищах з тонкими неоднорідними шароподібними включеннями дозволяє отримувати розв'язки широкого кола практичних задач біології, електроніки, екології. Використана гетерогенна математична модель передбачає різницю у хіміко-фізичних параметрах включень та середовища, що дозволяє імітувати процеси дифузії та адвекції у різних за вимірністю областях.

Література

1. Quarteroni A. Multifields Modeling in Numerical Simulation of Partial Differential Equations // GAAM-Mitteilungen. – 1996. – Heft 1, – P.45-63.
2. Савула Я., Мандзак Т., Кухарський В., Дяконюк Л. Числове дослідження процесів поширення субстанції у неоднорідних пористих середовищах // Механіка середовища, методи комп'ютерних наук та моделювання. – Львів, 2004.-Вип.1.–С.55-64.
3. Savula Ya.H., Koukharskyi V.M., Chaplia Ye.Ya. Numerical Analysis of Advection-Diffusion in the continuum with thin canal // Numerical Heat Transfer.PartA. – 1998. – 33(3). – P.341-351.
4. Кухарський В., Савула Я. Дослідження варіаційних задач адвекції-дифузії у середовищах із тонкими неоднорідностями // Вісник Львівського університету. Серія прикладна математика та інформатика. – 2000. Вип..2. – С.155-162.
5. Кухарський В.М., Савула Я.Г., Копитко М.Ф. Чисельне дослідження задач адвекції-дифузії у середовищах із включеними тонкими криволінійними шарами // Волинск. математ. вісник.-2001.-Вип. 8.- С. 86-92.

Одержано 23.06.2006 р.