

6. Curry D. A. A micromechanistic approach to the warm prestressing of ferritic steel// Int. J. Fract. – 1981. – 17, No.3. – P.335-342.
7. Покровский В., Иванченко А. Прогнозирование влияния предварительного термомеханического нагружения на повышение сопротивления хрупкого разрушения конструкционных теплоустойчивых сталей с трещинами. Сообщение 1. Модель и методика расчета эффекта предварительного термомеханического нагружения// Проблемы прочности. – 2002. - №6. – С. 96-106.
8. Lidbury D. And Birkett P. Effect of warm prestressing on the transition toughness behavior of an A533 grade B class I pressure vessel steel // Fracture Mechanics: Twenty-First Symposium, ASTM STP 1074. – 1990. – P.264-285.
9. Shum D. K. Warm prestress effects in fracture-margin assessment of PWR-RPVS// SmiRT-12/ Ed. K. Kussmaul. – Elsevier Science Publishers, 1993. – P.333-338.
10. Ясній П.В., Гладь В.Б., Гуцайлюк В.Б. Вплив пружно-пластичного деформування на дислокаційну структуру сталі 15X2МФА // Проблемы прочности. - 2003. - № 6. - С. 30-38.
11. Ясній П., Гуцайлюк В., Пшоняк П. Вплив комбінованого попереднього термомеханічного навантаження на опір крихкому руйнуванню теплостійкої сталі // Вісник ТДТУ. – 2003. – Т.8, №4.- С.5-12.
12. Ясній П.В., Подкозьїн В.Ю., Ковальчук Я.О. Деклараційний патент на винахід 23231А, F16L57/0 Спосіб підвищення стійкості елементу конструкції до поширення тріщин. Оуб. бюл. №4/19.05.1998.

Одержано 27.03.2007 р.

УДК 539.3

**Г.Сулим¹, докт.фіз.-мат.наук; М.Драган², канд.фіз.-мат.наук;
Я.Пастернак²**

¹Львівський національний університет імені Івана Франка

²Луцький державний технічний університет

ПРУЖНА РІВНОВАГА ПЛАСТИНКИ З ТОНКИМ ПРЯМОКУТНИМ ВКЛЮЧЕННЯМ

У роботі запропоновано ефективний числово-аналітичний метод аналізу пружної рівноваги необмеженого пружного середовища з тонкостінним включенням довільної жорсткості. Проведено числове дослідження впливу тонкостінного включення різної відносної жорсткості на напружений стан композиції. Вказано на узгодженість результатів, отриманих для абсолютно жорстких і сильно податних включень, з відомими асимптотичними розподілами поблизу вістря жорстких включень і тріщин.

G.Sulym, M.Dragan, Ya.Pasternak

ELASTIC EQUILIBRIUM OF THE PLATE WITH THIN RECTANGULAR INCLUSION

In this paper the effective numerical-analytical method of the analysis of elastic equilibrium of the infinite elastic medium with thin inclusion of arbitrary rigidity is constructed. Numerical research of the influence of thin inclusion of various rigidity on the stress field in a composite is carried out. Results received for absolutely rigid and very weak inclusions conform to well-known asymptotic distributions near the tip of thin rigid inclusions and cracks.

Умовні позначення

$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$ – компоненти тензора напружень;

u, v – складові вектора переміщень;

E – модуль пружності матеріалу;

S – деяка плоска область;

$\omega(\zeta)$ – функція конформного відображення;

i – уявна одиниця;

θ – дійсний параметр, що є дуговою координатою одиничного кола γ ;

Δ – максимальна зведена похибка обчислень.

На сьогодні використовують три основні прямі методи числового аналізу задач теорії пружності – різницевий та скінченних і граничних елементів, які дають цілком добрі результати під час розв’язування більшості задач. Бібліографія з питань використання числових методів для розв’язування задач теорії тріщин практично невичерпна. Згадаємо лише декілька монографій [1-5]. Проблема дослідження напруженого стану елементів з тонкими абсолютно жорсткими і деформівними, зокрема, пружними, включеннями залишилася практично поза увагою дослідників. Класичним прикладом застосування МСЕ у механіці композиційних матеріалів (волокно скінченної довжини у тривимірному тілі та лінійне у двовимірному) є дослідження [6]. Багато з передбачених МСЕ результатів підтвердилися у експериментах [7, 8]. Те ж стосується МСЕ-аналізу, здійсненого у працях [9-11]. Порівняння МСЕ-розрахунків для тонких пружних і абсолютно жорстких включень отримане у праці [12]; подібні дослідження дещо іншої задачі здійснені у [13]. Наноструктура за допомогою МГЕ досліджена у публікації [14]. Тому застосування числових методів до задач теорії тріщин, тонкостінних включень можна вважати продуктивним і перспективним способом математичного моделювання цього явища. Однак практика застосування прямих числових методів до дослідження тонкостінних структур, у тому числі тіл із тонкими дефектами (тріщинами та включеннями), виявила певні ускладнення у застосуванні цих схем до тонкостінних об’єктів, спричинені, головню, близькістю вузлових точок розбиття області на елементи (МСЕ) або числовим обчисленням значень майже сингулярних інтегралів (МГЕ).

Спеціальні числово-аналітичні підходи до аналізу тонкостінних включень, наприклад, метод функцій стрибка [15, 16], внаслідок необхідності використання апіорних торцьових сталих, дають точний розв’язок тільки для граничних випадків пружних властивостей включення (тріщина, однорідний стан, абсолютно жорстке включення) і лише більшою чи меншою мірою наближений розв’язок для проміжних властивостей включення.

Метою даної роботи є побудова ефективного числово-аналітичного методу для аналізу пружної рівноваги необмеженого пружного середовища з тонкостінним включенням довільної жорсткості.

У межах плоскої задачі теорії пружності розглянемо пружну рівновагу нескінченної ізотропної пластини S_m (матриці), у яку за сталої температури без попереднього натягу вставлене і поєднане з матрицею ізотропне ядро S_i (включення) з іншого матеріалу (рис. 1). Навантаження композиту зумовлене заданим на нескінченності однорідним полем напружень $\sigma_{yy}^\infty, \sigma_{xx}^\infty, \sigma_{xy}^\infty$.

Пов’яжемо з геометричним центром включення декартову систему координат xOy . Величини, пов’язані з ядром, позначатимемо індексом “i”; з матрицею – “m”. За теоремою Рімана, існує така єдина функція $z = \omega(\zeta)$, що конформно відображає зайняту матрицею область S_m у комплексній площині $z = x + iy$ на зовнішність одиничного кола γ у параметричній площині ζ . Відповідно до [17], її можна подати у вигляді

$$z = \omega(\zeta) = R \left(\zeta + \sum_{k=1}^n c_k \zeta^{-k} \right), \quad (1)$$

де R, c_k – дійсні коефіцієнти.

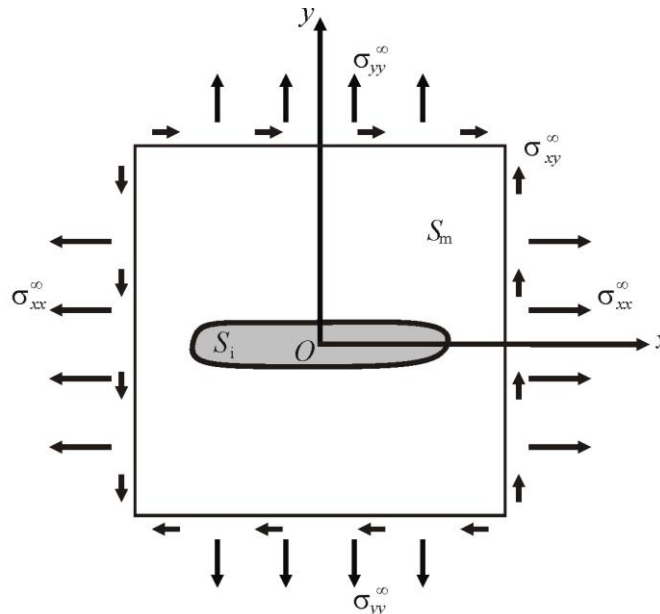


Рисунок 1 - Схема задачі тонкого включення.

Комплексні потенціали Колосова–Мусхелішвілі [17], що характеризують напружено-деформований стан включення, шукатимемо у вигляді скінченних сум рядів

$$\varphi_i(z) = \sum_{k=1}^N a_k^{(i)} z^k, \quad \psi_i(z) = \sum_{k=1}^N b_k^{(i)} z^k. \quad (2)$$

Тоді зусилля, що передається з боку включення через межу поділу матеріалів до матриці, дорівнюватиме

$$f_i(\sigma) = \varphi_i(\sigma) + \omega(\sigma) \overline{\Phi_i(\sigma)} + \overline{\psi_i(\sigma)} \quad (\sigma = e^{i\theta} \in \gamma), \quad (3)$$

де $\varphi_i(\sigma) = \varphi_i(\omega(\sigma))$, $\Phi_i(\sigma) = \Phi_i(\omega(\sigma))$, $\psi_i(\sigma) = \psi_i(\omega(\sigma))$ – граничні значення комплексних потенціалів з боку включення.

Комплексні потенціали, що характеризують напружено-деформований стан матриці, шукатимемо у вигляді суми потенціалів $\varphi_m^0(\zeta)$, $\psi_m^0(\zeta)$ для однорідної пластинки, які за даного навантаження мають вигляд

$$\varphi_m^0(\zeta) = 1/4(\sigma_{xx}^\infty + \sigma_{yy}^\infty)\omega(\zeta), \quad \psi_m^0(\zeta) = 1/2(\sigma_{yy}^\infty - \sigma_{xx}^\infty + 2i\sigma_{xy}^\infty)\omega(\zeta), \quad (4)$$

та збуреної складової – потенціалів $\varphi_m(\zeta)$ і $\psi_m(\zeta)$ – для пластинки з отвором, навантаженим зусиллям

$$f_m(\sigma) = f_i(\sigma) - \left[\varphi_m^0(\sigma) + \omega(\sigma) \overline{\Phi_m^0(\sigma)} + \overline{\psi_m^0(\sigma)} \right] \quad (\sigma = e^{i\theta} \in \gamma). \quad (5)$$

Поставлена крайова задача, відповідно до [17], зводиться до системи інтегральних рівнянь з ядрами типу Коші, розв’язок якої у даному випадку можна подати у вигляді

$$\varphi_m(\zeta) = \sum_{k=1}^{nN} a_k^{(m)} \zeta^{-k}, \quad \psi_m(\zeta) = \sum_{k=1}^{nN} b_k^{(m)} \zeta^{-k} - \frac{\overline{\omega(1/\zeta)}}{\omega'(\zeta)} \varphi_m'(\zeta) + \sum_{k=0}^{n-2} K_k \zeta^k,$$

де $a_k^{(m)}$, $b_k^{(m)}$ – певні відомі з розв’язку згаданої вище системи сингулярних рівнянь лінійні комбінації шуканих сталих $a_k^{(i)}$ та $b_k^{(i)}$; $K_k \zeta^k$ – головні частини функції $\varphi_m'(\zeta) \cdot \overline{\omega(1/\zeta)} / \omega'(\zeta)$.

Невідомі величини $a_k^{(i)}$ та $b_k^{(i)}$ знайдемо з умови рівності N перших відповідних коефіцієнтів розвинення в ряди Фур'є переміщень з боку включення і матриці на межі поділу матеріалів.

Для оцінки точності отриманого розв'язку доцільно використовувати максимальну нев'язку переміщень на межі поділу матеріалів

$$\Delta = \max(\Delta_u, \Delta_v) = \max_{0 < \theta < 2\pi} \{\delta_u, \delta_v\}, \quad (6)$$

де $\delta_u = 4\pi |u_i - u_m| / \int_0^{2\pi} (|u_i| + |u_m|) d\theta$, $\delta_v = 4\pi |v_i - v_m| / \int_0^{2\pi} (|v_i| + |v_m|) d\theta$; u_i, u_m, v_i, v_m – складові вектора переміщень прилеглих точок межі включення і матриці.

Дослідимо за допомогою цього підходу пружну рівновагу пластинки з тонким включенням, близьким за формою до прямокутника з відношенням довжин сторін $b/a = 1/10$. Для числового аналізу взято $n = 7$ членів відображувальної функції (1), коли коефіцієнти c_k дорівнюють: $c_1 = \cos(\lambda)$, $c_3 = 1/6(\cos^2(\lambda) - 1)$, $c_5 = -1/20 \sin(\lambda) \sin(2\lambda)$, $c_7 = 1/448(5 \cos(4\lambda) - 4 \cos(2\lambda) - 1)$, $c_2 = c_4 = c_6 = 0$. Тут $\lambda = 2\pi/10$ – параметр, що визначає відношення довжин сторін прямокутника. Форма зображеної на рис. 2-7 кінцевої частини межі поділу матеріалів відповідає значенням розрахункових параметрів задачі. На нескінченності пластинка навантажена зусиллям $\sigma_{yy}^\infty = p$ ($\sigma_{xx}^\infty = \sigma_{xy}^\infty = 0$); коефіцієнти Пуассона включення і матриці $\nu_i = \nu_m = 0,3$ (значення коефіцієнтів Пуассона складових матеріалів можуть відрізнятися). Обчислення здійснені для восьми різних значень відносної жорсткості включення: $E_i/E_m = [10^{-10}; 10^{-3}; 10^{-2}; 0,1; 10; 10^2; 10^3; 10^{10}]$.

Попередній аналіз впливу параметра N у рядах (2) на точність виявив, що у досліджуваному діапазоні зміни E_i/E_m найбільша зведена похибка Δ при $N = 25$ не перевищує 8 %, однак вже при $N = 30$ вона менша 0,5 %. Узагалі, розбіжність між значеннями напружень для відносних жорсткостей $E_i/E_m = 10^{-10}$ та 10^{-3} (так само, як і для 10^3 та 10^{10}) не перевищує 1 %, тому включення з $E_i/E_m = 10^{-3}$ можна вважати сильно податним (практично порожнистим, щілиною), а з $E_i/E_m = 10^3$ – практично абсолютно жорстким.

За допомогою побудованих комплексних потенціалів обчислене поле напружень у композиті. З'ясовано, що для включень, жорсткіших від матриці, максимальна концентрація напружень за даного навантаження всередині включення зосереджена біля його периферійної (кінцевої) частини. Тобто, напруження σ_{yy} практично сталі та дорівнюють зовнішньому навантаженню p майже у всьому включенні, але різко зростають з наближенням точки спостереження до його торця (рис. 2). З огляду на характер асимптотичного розподілу напружень в його околі та на берегах [15, 16], цього можна було очікувати. Щодо напружень у матриці, то максимальними є σ_{yy} поблизу “кутових” (в сенсі з малим радіусом кривини межі поділу) точок включення (рис. 3). Компоненти σ_{xx} та σ_{xy} тензора напружень виявляють свою зміну лише безпосередньо біля “кутових” точок ядра і тільки незначно перевищують за модулем зовнішнє навантаження. Добре помітне збільшення жорсткості включення збільшує рівень напружень як у включенні, так і у прилеглих до нього зонах матриці.

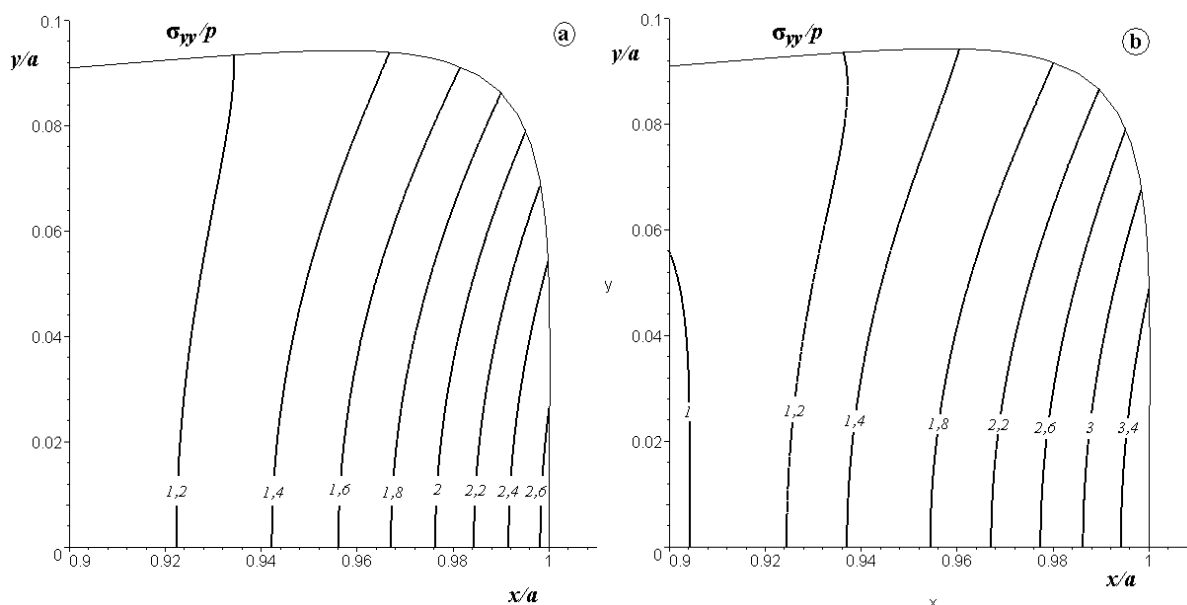


Рисунок 2 - Розподіл нормованих нормальних напружень σ_{yy}/p у включенні за $E_i/E_m = 10$ (a) та $E_i/E_m = 100$ (b).

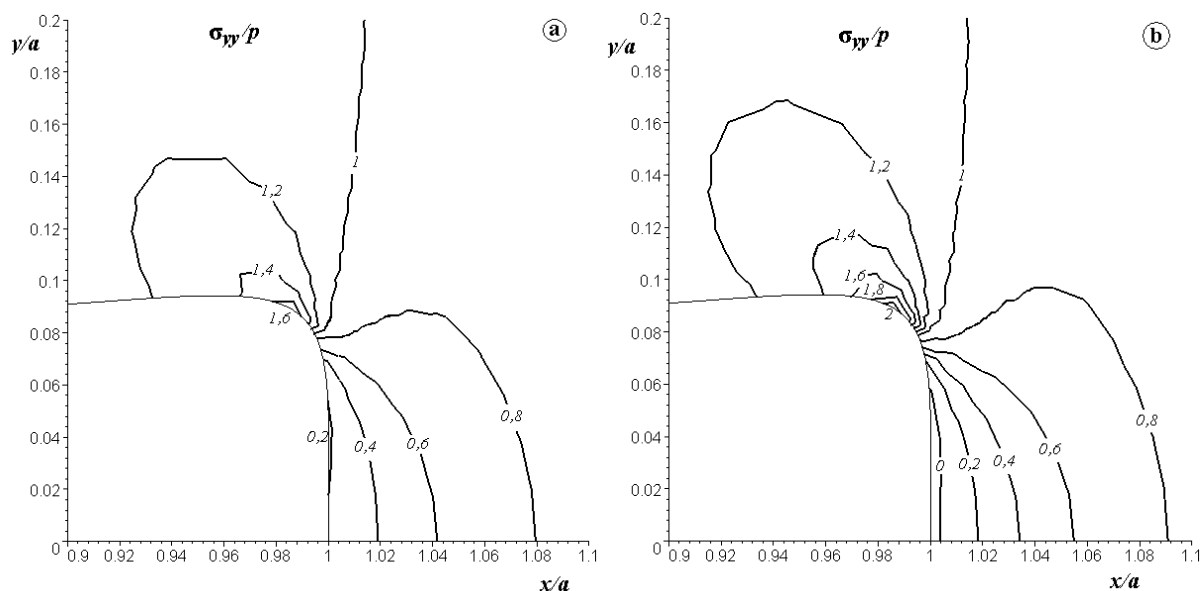


Рисунок 3 - Розподіл нормованих нормальних напружень σ_{yy}/p у матриці за $E_i/E_m = 10$ (a) та $E_i/E_m = 100$ (b).

Всередині включення із відносною жорсткістю $E_i/E_m < 1$ максимальна концентрація напружень дорівнює близько 0,8 для $E_i/E_m = 0,1$ та 0,2 для $E_i/E_m = 0,01$ і зосереджується у центральній частині включення. Щодо матриці, то найбільші напруження у ній так само, як і для жорсткого включення, спостерігаються біля “кутових” точок згладженого прямокутного ядра. За модулем максимальною знову ж таки є компонента σ_{yy} (рис. 4), хоча і σ_{xx} та σ_{xy} теж набагато більші від зовнішнього навантаження p (рис. 5).

Аналіз розв’язку за більшої кількості n членів розвинення відображувальної функції (1), яке сприяє кращому опису прямокутної форми включення та збільшенню кривини його межі у “кутових” точках, вказує на те, що концентрація напружень у вершинах істотно залежить від радіуса заокруглення. Чим більша кривина і менша відносна жорсткість включення, тим більшою є концентрація напружень.

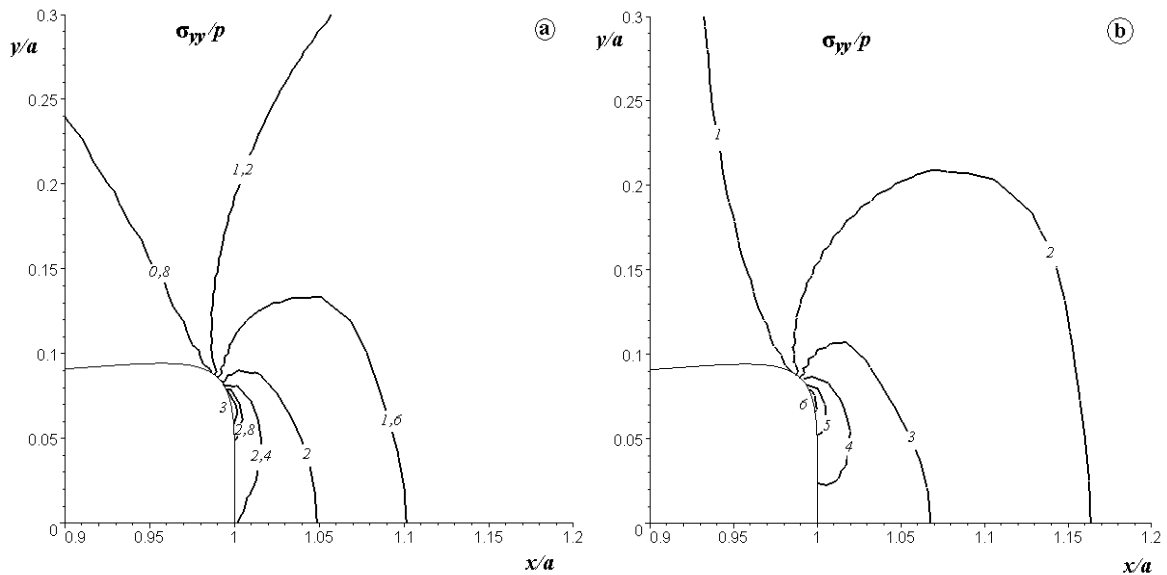


Рисунок 4 - Розподіл нормованих нормальних напружень σ_{yy}/p у матриці за $E_i/E_m = 0,1$ (а) та $E_i/E_m = 0,01$ (б).

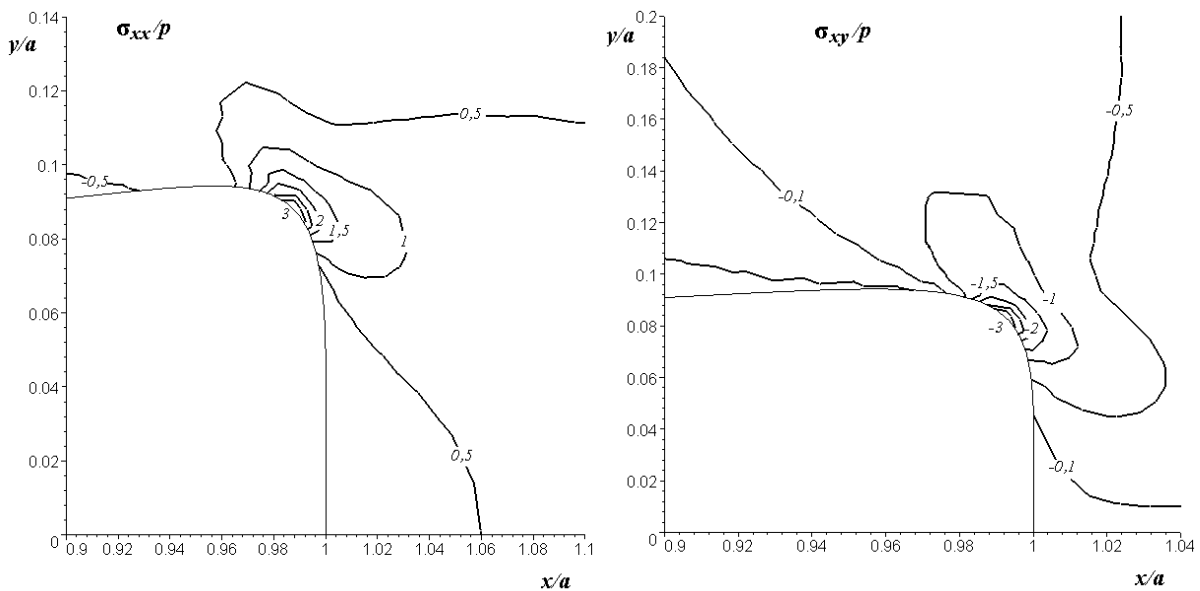


Рисунок 5 - Розподіл нормованих напружень σ_{xx}/p та σ_{xy}/p у матриці за $E_i/E_m = 0,01$.

Досліджено зміну у включенні та поблизу його вістря рівня інтенсивності дотичних напружень

$$T = \sqrt{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 - \sigma_{xx}\sigma_{yy} + 3\sigma_{xy}^2},$$

яка відповідно до загальновідомого критерію Губера-Мізеса [18] є мірою опору матеріалу пластичному руйнуванню. У нульовому наближенні область, де $T \geq \sigma_y$, можна вважати пластично деформованою. Розподіл інтенсивності дотичних напружень у сильно податному включенні ($E_i/E_m = 10^{-3}$) зображено на рис. 6, а у дуже жорсткому ($E_i/E_m = 10^3$) – на рис. 7. У податному включенні інтенсивність дотичних напружень фактично не змінюється у поперечному напрямі і плавно зменшуються від центра до краю. Це означає, що пластичне деформування такого включення розпочнеться у його центральній частині.

Абсолютно протилежна картина спостерігається для дуже жорсткого включення – дотичні напруження з віддаленням від центра включення різко збільшуються і досягають свого максимуму на торцях. Також добре помітна

неоднорідність останніх у поперечному напрямі. Що стосується матриці, то, як і для нормальних напружень, найбільша концентрація дотичних напружень виникає у „кутових точках”. Для податного включення інтенсивність дотичних напружень у вершині згладженого прямокутного ядра є більшою, ніж для жорсткого. Також характерним є те, що доволі велика концентрація величини T зосереджена і біля торця включення. На відміну від податного, поблизу торця жорсткого включення інтенсивність дотичних напружень, так само як і концентрація нормальних напружень σ_{yy} , є навіть меншою від зовнішнього навантаження p .

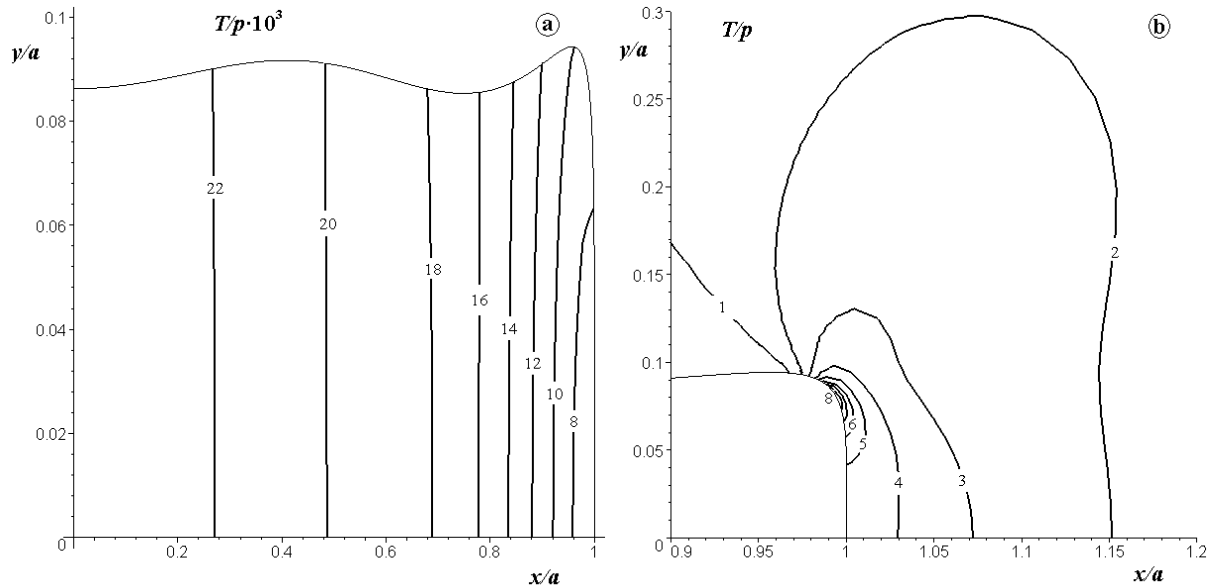


Рисунок 6 - Розподіл інтенсивності дотичних напружень T у включенні (а) та матриці (б) за $E_i/E_m = 10^{-3}$.

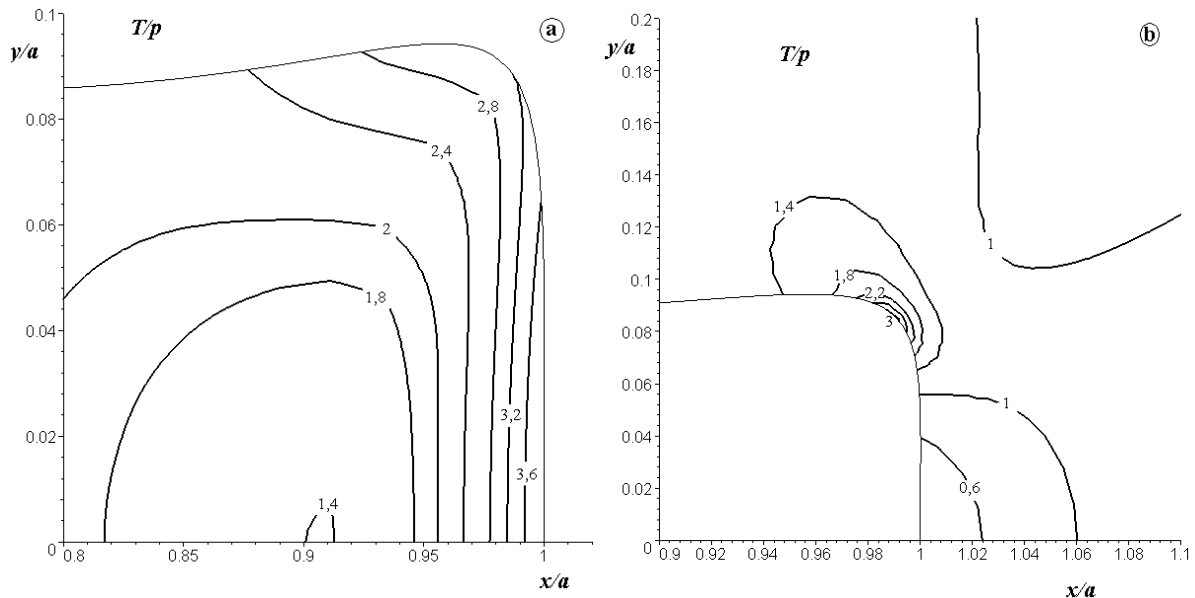


Рисунок 7 - Розподіл інтенсивності дотичних напружень T у включенні (а) та матриці (б) за $E_i/E_m = 10^3$.

Висновки. Розроблено алгоритм розв’язування плоских задач теорії пружності для необмеженого середовища із включенням практично довільної форми, комбінуючи методи рядів та інтегральних рівнянь з ядрами типу Коші. Запропоновано спосіб надійного і ефективного контролю точності розв’язку за мірою задоволення крайових умов на переміщення на межі включення-матриця. Виявлено, що вже відносно невеликої кількості членів рядів комплексних потенціалів для включення достатньо для

доволі точного з'ясування його напружено-деформованого стану. Дослідження впливу тонкостінного прямокутного включення на збурення напруженого стану у пружному середовищі виявило можливість надійного дослідження залежності концентрації напружень від відносної жорсткості та радіуса заокруглення вершини тонкого включення. Для жорстких включень характер розподілу напружень на берегах близький до асимптотичного. Зі зменшенням товщини сильно податних включень та зі збільшенням кривини „кутових точок” концентрація напружень на вістрі включення зростає і наближається до розподілу, властивого для тріщини.

Література

1. Aliabadi M.H., Rooke D.P. Numerical Fracture Mechanics. Kluwer Academic Publ., Dordrecht, 1991, 288 p.
2. Cook Robert D. Finite Element Modeling Stress. John Wiley & Sons, 1994. 336 p.
3. Curnier A. Computational Methods in Solid Mechanics (Solid Mechanics and Its Applications) Springer, 2006. 420 p.
4. Kleiber M., ed. Handbook of Computational Solid Mechanics Survey and Comparison of Contemporary Methods Springer Verlag, Berlin, 1998. 763 p.
5. Seweryn A. Metody numeryczne w mechanice pękania, Biblioteka Mechaniki Stosowanej, IPPT PAN: Warszawa, 2003. 292 s.
6. Carrara A.S., McGarry F.J. Matrix and interface stresses in a discontinuous fiber composite model // J. Compos. Mater., 1968, 2. No. 2. P. 222-243.
7. Hunter R.W. Stress transfer mechanisms in a single fiber composite material // J. Austral. Inst. Metals. 1973, 18, No. 4. P. 173-181.
8. MacLaughlin T.F., Barker R.M. Effect of modulus ratio on stress near a discontinuous fiber // SESA Paper N1826 A, Soc.Exp.Stress Anal. Westport, Connecticut, 1971.
9. Mirza S. Finite-element analysis of rectangular plates with rectangular inserts // Exp. Mech. 1976, 16. No. 10. P. 392-396.
10. Owen D.R.J., Holbeche J., Zienkiewicz O.C. Elastic-plastic analysis of fibereinforced materials // Fibre Sci. and Technol. 1969, 1. No. 3. P. 185-207.
11. Zachary L.W., Rogge T.R. Stresses in adhesive layers with cracks and inclusions // Develop. Theor. and Appl. Mech. Vol.9. Proc. 9-th Southeastern Conf. Theor. and Appl. Mech. Nashville, Tenn., 1978. S. 1., s.a. P. 205-214.
12. Сулим Г.Т., Рокач И.В. Метод конечных элементов в задаче о тонкостенном включении. – Львов, 1983. – 3 с. // "Материалы 10 Конф. мол. ученых Физ.-мех. ин-та АН УССР. Секц. физ.-хим. мех. материалов, Львов, 12–16 окт., 1981". Деп. в ВИНТИ 12 апр. 1983 г. № 1948–83 Деп.
13. Кухарський В., Кухарська Н., Савула Я., Мандзак Т. Фізико-математичне моделювання процесів тепломасоперенесення в середовищах із включеними тонкими шарами // Вісн. Тернопільського держ. техн. ун-ту. – Тернопіль, 2006. – 11, № 3. – С. 145-152.
14. Liu Y.J., Chen X.L. Continuum Models of Carbon Nanotube-Based Composites Using the Boundary Element Method // Electronic Journal of Boundary Elements, 2003, 1. No. 2. P. 316-335.
15. Сулим Г.Т Система лінійних включень в ізотропному середовищі // Доп. АН УРСР, Сер. А, 1980. – № 7. С. 62-65.
16. Сулим Г.Т. Концентрация напряжений возле тонкостенных линейных включений // Прикл. механика. – 1981. – Т. 17. – № 11. – С. 82-89.
17. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 707 с.
18. Аннин Б.Д., Черепанов Г.П. Упруго-пластическая задача. – Новосибирск: Наука, 1983. – 238 с.

Одержано 12.03.2007 р.