# *МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ. МАТЕМАТИКА. ФІЗИКА*

# *MATHEMATICAL MODELING. MATHEMATICS. PHYSICS*

*УДК 517.52/524: 517.58/589*

**М.Ленюк[1], докт.фіз.-мат.наук; Б.Шелестовський[2], канд.фіз.-мат.наук**

*[1]Чернівецький факультет Національного технічного університету “Харківський політехнічний інститут”*
*[2]Тернопільський державний технічний університет імені Івана Пулюя*

## ПІДСУМОВУВАННЯ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РЯДІВ ЗА ВЛАСНИМИ ЕЛЕМЕНТАМИ ГІБРИДНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ФУР’Є – (КОНТОРОВИЧА-ЛЄБЄДЄВА) – ЛЕЖАНДРА НА СЕГМЕНТІ ПОЛЯРНОЇ ОСІ

*Методом порівняння розв’язку крайової задачі на трискладовому сегменті полярної осі для сепаратної системи модифікованих диференціальних рівнянь Фур’є, Бесселя та Лежандра, побудованого, з одного боку, методом функцій Коші, а з другого боку – методом скінченного гібридного інтегрального перетворення типу Фур’є – (Конторовича-Лєбєдєва) – Лежандра 2-го роду підсумовано поліпараметричну сім’ю функціональних рядів за системою власних елементів даного гібридного диференціального оператора.*

**M. Lenyuk; B. Shelestovsky**

## SUMMARISING OF FUNCTIONAL SERIES BY MEANS OF OWN ELEMENTS OF THE HYBRID DIFFERENTIAL FURIE – (KONTOROVICH-LEBEDYEV) – LEGENDRE OPERATOR ON THE POLAR AXIS SEGMENT

*Using the method of comparison of solution the boundary task on the three-component segment of the polar axis for the seperate system of the modified differential Furier, Bessel and Legendre equations, built, on one hand, by the Koshier function method, an by the finite hybrid integrated transformation of Furier – (Kontorovich- Lebedyev) – 2-nd level Legendre type on the other hand, polyparameter family of the functional series according to the own elements system of the given hybrid differential operator, has been summarised.*

**Вступ.** В сучасних довідниках [1-3] підсумовані функціональні ряди, загальні члени яких залежать від спеціальних функцій математичної фізики одного характеру: тригонометричних, функцій Бесселя, функцій Лежандра тощо. Розв’язування задач математичної фізики для неоднорідних середовищ (при моделюванні фізико-технічних характеристик за різними законами) спонукає підсумовувати функціональні ряди, в яких загальні члени є суперпозиціями спеціальних функцій математичної фізики різного характеру.

В даній статті здійснено підсумовування однієї сім’ї поліпараметричних функціональних рядів за суперпозицією тригонометричних функцій, спеціальних функцій Бесселя $C_\alpha$ та $D_\alpha$ і спеціальних функцій Лежандра $A_\nu^\mu$ та $B_\nu^\mu$.

Побудуємо обмежений на множині

$$I_2 = \{r : r \in (R_0, R_1) \cup (R_1, R_2) \cup (R_2, R_3); R_0 \geq 0, R_3 < \infty\}$$

розв'язок сепаратної системи звичайних диференціальних рівнянь 2-го порядку Фур'є, Бесселя і Лежандра для модифікованих функцій

$$\begin{aligned} &\left(\frac{d^2}{dr^2} - q_1^2\right) u_1(r) = -g_1(r), \quad r \in (R_0, R_1), \\ &\left(B_\alpha - q_2^2\right) u_2(r) = -g_2(r), \quad r \in (R_1, R_2), \\ &\left(\Lambda_\mu - q_3^2\right) u_3(r) = -g_3(r), \quad r \in (R_2, R_3) \end{aligned} \tag{1}$$

за умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k \frac{d}{dr} + \beta_{ji}^k\right) u_k(r) - \left(\alpha_{j2}^k \frac{d}{dr} + \beta_{j2}^k\right) u_{k+1}(r)\right]\Bigg|_{r=R_k} = \omega_{jk}; \; j,k = 1,2 \tag{2}$$

і крайовими умовами

$$\left(\alpha_{11}^0 \frac{d}{dr} + \beta_{11}^0\right) u_1(r)\Bigg|_{r=R_0} = g_0, \; \left(\alpha_{22}^3 \frac{d}{dr} + \beta_{22}^3\right) u_3(r)\Bigg|_{r=R_3} = g_R. \tag{3}$$

У системі (1) беруть участь диференціальні оператори Лежандра [4] $\Lambda_\mu = \frac{d^2}{dr^2} + cthr\frac{d}{dr} + \frac{1}{4} - \frac{\mu^2}{sh^2 r}$ та Бесселя [5]

$$B_\alpha = r^2 \frac{d^2}{dr^2} + (2\alpha + 1) r \frac{d}{dr} + \alpha^2 - \lambda^2 r^2; \; \mu \geq 0, \alpha \geq -\frac{1}{2}, \; \lambda \in (0, \infty).$$

Ми вважаємо, що виконані умови на коефіцієнти: $\left|\alpha_{11}^0\right| + \left|\beta_{11}^0\right| \neq 0$, $\left|\alpha_{22}^3\right| + \left|\beta_{22}^3\right| \neq 0$, $c_{1k} \cdot c_{2k} > 0$, $c_{jk} = \alpha_{2j}^k \beta_{1j}^k - \alpha_{1j}^k \beta_{2j}^k$, $j,k = 1,2$.

Фундаментальну систему розв'язків для рівняння Фур'є $\left(\frac{d^2}{dr^2} - q_1^2\right) v = 0$ утворюють функції $v_1 = chq_1 r$ та $v_2 = shq_1 r$ [6], фундаментальну систему розв'язків для рівняння Бесселя $\left(B_\alpha - q_2^2\right) v = 0$ утворюють модифіковані функції Бесселя 1-го роду $I_{q_2,\alpha}(\lambda r)$ і 2-го роду $K_{q_2,\alpha}(\lambda r)$ [5], фундаментальну систему розв'язків для рівняння Лежандра $\left(\Lambda_\mu - q_3^2\right) v = 0$ утворюють приєднані функції Лежандра 1-го роду $P^\mu_{-1/2+q_3}(chr)$ і 2-го роду $L^\mu_{-1/2+q_3}(chr)$ [4].

Наявність фундаментальної системи розв'язків дозволяє будувати розв'язок крайової задачі (1)-(3) методом функцій Коші [6, 7]:

$$\begin{aligned} &u_1(r) = A_1 chq_1 r + B_1 shq_1 r + \int_{R_0}^{R_1} E_1(r,\rho) g_1(\rho) d\rho, \\ &u_2(r) = A_2 I_{q_2,\alpha}(\lambda r) + B_2 K_{q_2,\alpha}(\lambda r) + \int_{R_1}^{R_2} E_2(r,\rho) g_2(\rho) \rho^{2\alpha-1} d\rho, \\ &u_3(r) = A_3 P^\mu_{\nu_3}(chr) + B_3 L^\mu_{\nu_3}(chr) + \int_{R_2}^{R_3} E_3(r,\rho) g_3(\rho) sh\rho d\rho, \; \nu_3 = -1/2 + q_3. \end{aligned} \tag{4}$$

У рівностях (4) $E_j(r,\rho)$ - функції Коші:

$$E_j(r,\rho)\big|_{r=\rho+0} - E_j(r,\rho)\big|_{r=\rho-0} = 0,$$

$$\frac{d}{dr}E_j(r,\rho)\Big|_{r=\rho+0}-\frac{d}{dr}E_j(r,\rho)\Big|_{r=\rho-0}=-\frac{1}{\varphi_j(r)}, \qquad (5)$$

$$\varphi_1(r)=1,\ \varphi_2(r)=r^{2\alpha-1},\ \varphi_3(r)=shr.$$

Безпосередньо перевіряється, що функціями Коші можуть бути функції

$$E_1(r,\rho)=\frac{-1}{q_1\Delta_{11}(q_1R_0,q_1R_1)}\begin{cases}\Phi_{11}^0(q_1R_0,q_1r)\Phi_{11}^1(q_1R_1,q_1\rho), & R_0<r<\rho<R_1\\ \Phi_{11}^0(q_1R_0,q_1\rho)\Phi_{11}^1(q_1R_1,q_1r), & R_0<\rho<r<R_1,\end{cases} \qquad (6)$$

$$E_2(r,\rho)=\frac{\lambda^{2\alpha}}{\Delta_{q_2,\alpha;11}(\lambda R_1,\lambda R_2)}\times\begin{cases}\Psi_{q_2,\alpha;12}^{1^*}(\lambda R_1,\lambda r)\Psi_{q_2,\alpha;11}^{2^*}(\lambda R_2,\lambda\rho), & R_1<r<\rho<R_2\\ \Psi_{q_2,\alpha;12}^{1^*}(\lambda R_1,\lambda\rho)\Psi_{q_2,\alpha;11}^{2^*}(\lambda R_2,\lambda r), & R_1<\rho<r<R_2,\end{cases} \qquad (7)$$

$$E_3(r,\rho)=\frac{B_\mu(q_2)}{\Delta_{\nu_3;12}^{\mu}(chR_2,chR_3)}\times\begin{cases}F_{\nu_3;12}^{\mu,2}(chR_2,chr)F_{\nu_3;22}^{\mu,3}(chR_3,ch\rho), & R_2<r<\rho<R_3\\ F_{\nu_3;12}^{\mu,2}(chR_2,ch\rho)F_{\nu_3;22}^{\mu,3}(chR_3,chr), & R_2<\rho<r<R_3\end{cases}. \qquad (8)$$

У рівностях (6)-(8) беруть участь функції:

$$V_{jk}^{m1}(q_sR_m)=\alpha_{jk}^m q_s shq_sR_m+\beta_{jk}^m chq_sR_m,$$

$$V_{jk}^{m2}(q_sR_m)=\alpha_{jk}^m q_s chq_sR_m+\beta_{jk}^m shq_sR_m,$$

$$\Phi_{jk}^m(q_sR_m,q_sr)=V_{jk}^{m2}(q_sR_m)chq_sr-V_{jk}^{m1}(q_sR_m)shq_sr,$$

$$\Delta_{j1}(q_1R_0,q_1R_1)=V_{11}^{01}(q_1R_0)V_{j1}^{12}(q_1R_1)-V_{11}^{02}(q_1R_0)V_{j1}^{11}(q_1R_1),$$

$$U_{q_2,\alpha;jk}^{m1}(\lambda R_m)=\left(\alpha_{jk}^m\frac{q_2-\alpha}{R_m}+\beta_{jk}^m\right)I_{q_2,\alpha}(\lambda R_m)+\alpha_{jk}^m\lambda^2R_mI_{q_2+1,\alpha+1}(\lambda R_m),$$

$$U_{q_2,\alpha;jk}^{m2}(\lambda R_m)=\left(\alpha_{jk}^m\frac{q_2-\alpha}{R_m}+\beta_{jk}^m\right)K_{q_2,\alpha}(\lambda R_m)-\alpha_{jk}^m\lambda^2R_mK_{q_2+1,\alpha+1}(\lambda R_m),$$

$$\Psi_{q_2,\alpha;jk}^{m^*}(\lambda R_m,\lambda r)=U_{q_2,\alpha;jk}^{m1}(\lambda R_m)K_{q_2,\alpha}(\lambda r)-U_{q_2,\alpha;jk}^{m2}(\lambda R_m)I_{q_2,\alpha}(\lambda r),$$

$$\Delta_{q_2,\alpha;jk}(\lambda R_1,\lambda R_2)=U_{q_2,\alpha;j2}^{11}(\lambda R_1)U_{q_2,\alpha;k1}^{22}(\lambda R_2)-U_{q_2,\alpha;j2}^{12}(\lambda R_1)U_{q_2,\alpha;k1}^{21}(\lambda R_2);\ j,k=1,2;$$

$$Z_{\nu_3;jk}^{\mu,m1}(chR_m)=\alpha_{jk}^m shR_mP_{\nu_3}^{\mu'}(chR_m)+\beta_{jk}^mP_{\nu_3}^{\mu}(chR_m),$$

$$Z_{\nu_3;jk}^{\mu,m2}(chR_m)=\alpha_{jk}^m shR_mL_{\nu_3}^{\mu'}(chR_m)+\beta_{jk}^mL_{\nu_3}^{\mu}(chR_m),$$

$$F_{\nu_3;jk}^{\mu,m}(chR_m,chr)=Z_{\nu_3;jk}^{\mu,m1}(chR_m)L_{\nu_3}^{\mu}(chr)-Z_{\nu_3;jk}^{\mu,m2}(chR_m)P_{\nu_3}^{\mu}(chr),$$

$$\Delta_{\nu_3;j2}^{\mu}(chR_2,chR_3)=Z_{\nu_3;j2}^{\mu,21}(chR_2)Z_{\nu_3;22}^{\mu,32}(chR_3)-Z_{\nu_3;j2}^{\mu,22}(chR_2)Z_{\nu_3;22}^{\mu,31}(chR_3).$$

Умови спряження (2) і крайові умови (3) для визначення величин $A_j$, $B_j$ ($j=\overline{1,3}$) дають алгебраїчну систему із шести рівнянь:

$$\begin{aligned}&V_{11}^{01}(q_1R_0)A_1+V_{11}^{02}(q_1R_0)B_1=g_0,\\ &V_{j1}^{11}(q_1R_1)A_1+V_{j1}^{12}(q_1R_1)B_1-U_{q_2,\alpha;j2}^{11}(\lambda R_1)A_2-U_{q_2,\alpha;j2}^{12}(\lambda R_1)B_2=\\ &\qquad=\omega_{11}\delta_{j1}+(\omega_{21}+G_{12})\delta_{j2},\\ &U_{q_2,\alpha;j1}^{21}(\lambda R_2)A_2+U_{q_2,\alpha;j1}^{22}(\lambda R_2)B_2-Z_{\nu_3;j2}^{\mu,21}(chR_2)A_3-Z_{\nu_3;j2}^{\mu,22}(chR_2)B_3=\\ &\qquad=\omega_{12}\delta_{j1}+(\omega_{22}+G_{23})\delta_{j2},\\ &Z_{\nu_3;22}^{\mu,31}(chR_3)A_3+Z_{\nu_3;22}^{\mu,32}(chR_3)B_3=g_R.\end{aligned} \qquad (9)$$

У системі (9) беруть участь функції

$$G_{12}=-c_{11}\int_{R_0}^{R_1}\frac{\Phi_{11}^0(q_1R_0,q_1\rho)}{\Delta_{11}(q_1R_0,q_1R_1)}g_1(\rho)d\rho-\frac{c_{21}}{R_1^{2\alpha+1}}\int_{R_1}^{R_2}\frac{\Psi_{q_2,\alpha;11}^{2^*}(\lambda R_2,\lambda\rho)}{\Delta_{q_2,\alpha;11}(\lambda R_1,\lambda R_2)}g_2(\rho)\rho^{2\alpha-1}d\rho,$$

$$G_{23}=\frac{c_{12}}{R_2^{2\alpha+1}}\int\limits_{R_1}^{R_2}\frac{\Psi^{1^*}_{q_2,\alpha;12}(\lambda R_1,\lambda\rho)}{\Delta_{q_2,\alpha;11}(\lambda R_1,\lambda R_2)}g_2(\rho)\rho^{2\alpha-1}d\rho-\frac{c_{22}}{shR_2}\int\limits_{R_2}^{R_3}\frac{F^{\mu,3}_{\nu_3;22}(chR_3,ch\rho)}{\Delta^{\mu}_{\nu_3;12}(chR_2,chR_3)}\times g_3(\rho)sh\rho d\rho$$

і символ Кронекера $\delta_{jk}$.

Визначимо функції:

$$A_{\alpha;j}(q)=\Delta_{11}(q_1R_0,q_1R_1)\Delta_{q_2,\alpha;2j}(\lambda R_1,\lambda R_2)-\Delta_{21}(q_1R_0,q_1R_1)\Delta_{q_2,\alpha;1j}(\lambda R_1,\lambda R_2),$$

$$B_{\mu,\alpha;j}(q)=\Delta^{\mu}_{\nu_3;22}(chR_2,chR_3)\Delta_{q_2,\alpha;j1}(\lambda R_1,\lambda R_2)-\Delta^{\mu}_{\nu_3;12}(chR_2,chR_3)\Delta_{q_2,\alpha;j2}(\lambda R_1,\lambda R_2),$$

$$\Theta_{\mu,\alpha;2}(r,q)=\Delta^{\mu}_{\nu_3;22}(chR_2,chR_3)\Psi^{2^*}_{q_2,\alpha;11}(\lambda R_2,\lambda r)-\Delta^{\mu}_{\nu_3;12}(chR_2,chR_3)\Psi^{2^*}_{q_2,\alpha;21}(\lambda R_2,\lambda r),$$

$$\Theta_{\alpha;1}(r,q)=\Delta_{11}(q_1R_0,q_1R_1)\Psi^{1^*}_{q_2,\alpha;22}(\lambda R_1,\lambda r)-\Delta_{21}(q_1R_0,q_1R_1)\Psi^{1^*}_{q_2,\alpha;12}(\lambda R_1,\lambda r).$$

Припустимо, що виконана умова однозначної розв’язності крайової задачі (1)-(3): визначник алгебраїчної системи (9)

$$\begin{aligned}\Delta_{\mu,\alpha}(q)\equiv A_{\alpha;1}(q)\Delta^{\mu}_{\nu_3;22}(chR_2,chR_3)-A_{\alpha;2}(q)\Delta^{\mu}_{\nu_3;12}(chR_2,chR_3)=\\ =B_{\mu,\alpha;2}(q)\Delta_{11}(q_1R_0,q_1R_1)-B_{\mu,\alpha;1}(q)\Delta_{21}(q_1R_0,q_1R_1)\neq 0.\end{aligned} \tag{10}$$

Визначимо головні розв’язки даної крайової задачі:

1) породжені крайовою умовою в точці $r=R_0$ функції Гріна

$$W_{\mu,\alpha;11}(r,q)=\frac{1}{\Delta_{\mu,\alpha}(q)}\left[B_{\mu,\alpha;2}(q)\Phi^1_{11}(q_1R_1,q_1r)-B_{\mu,\alpha;1}(q)\Phi^1_{21}(q_1R_1,q_1r)\right],$$

$$W_{\mu,\alpha;12}(r,q)=\frac{c_{11}q_1}{\Delta_{\mu,\alpha}(q)}\cdot\Theta_{\mu,\alpha;2}(r,q), \tag{11}$$

$$W_{\mu,\alpha;13}(r,q)=\frac{c_{11}q_1c_{12}}{\lambda^{2\alpha}R_2^{2\alpha+1}\Delta_{\mu,\alpha}(q)}\cdot F^{\mu,3}_{\nu_3;22}(chR_3,chr);$$

2) породжені крайовою умовою в точці $r=R_3$ функції Гріна

$$W_{\mu,\alpha;31}(r,q)=-\frac{c_{21}}{\lambda^{2\alpha}R_1^{2\alpha+1}}\cdot\frac{c_{22}}{B_{\mu}(q_3)shR_2}\cdot\frac{1}{\Delta_{\mu,\alpha}(q)}\Phi^0_{11}(q_1R_0,q_1r),$$

$$W_{\mu,\alpha;32}(r,q)=\frac{c_{22}}{B_{\mu}(q_3)shR_2}\cdot\frac{1}{\Delta_{\mu,\alpha}(q)}\cdot\Theta_{\alpha;1}(r,q), \tag{12}$$

$$W_{\mu,\alpha;33}(r,q)=\frac{1}{\Delta_{\mu,\alpha}(q)}\left[A_{\alpha;1}(q)F^{\mu,2}_{\nu_3;22}(chR_2,chr)-A_{\alpha;2}(q)F^{\mu,2}_{\nu_3;12}(chR_2,chr)\right];$$

3) породжені неоднорідністю умов спряження функції Гріна

$$R^1_{\mu,\alpha;11}(r,q)=-\frac{B_{\mu,\alpha;2}(q)}{\Delta_{\mu,\alpha}(q)}\Phi^0_{11}(q_1R_0,q_1r),\ R^1_{\mu,\alpha;21}(r,q)=\frac{B_{\mu,\alpha;1}(q)}{\Delta_{\mu,\alpha}(q)}\Phi^0_{11}(q_1R_0,q_1r),$$

$$R^1_{\mu,\alpha;12}(r,q)=-\frac{c_{21}}{\lambda^{2\alpha}R_1^{2\alpha+1}}\frac{\Delta^{\mu}_{\nu_3;22}(chR_2,chR_3)}{\Delta_{\mu,\alpha}(q)}\Phi^0_{11}(q_1R_0,q_1r),$$

$$R^1_{\mu,\alpha;22}(r,q)=\frac{c_{21}}{\lambda^{2\alpha}R_1^{2\alpha+1}}\frac{\Delta^{\mu}_{\nu_3;12}(chR_2,chR_3)}{\Delta_{\mu,\alpha}(q)}\Phi^0_{11}(q_1R_0,q_1r),$$

$$R^2_{\mu,\alpha;11}(r,q)=-\frac{\Delta_{21}}{\Delta_{\mu,\alpha}(q)}\Theta_{\mu,\alpha;2}(r,q),\ R^2_{\mu,\alpha;21}(r,q)=\frac{\Delta_{11}}{\Delta_{\mu,\alpha}(q)}\Theta_{\mu,\alpha;2}(r,q), \tag{13}$$

$$R^2_{\mu,\alpha;12}(r,q)=\frac{\Delta^{\mu}_{\nu_3;22}}{\Delta_{\mu,\alpha}(q)}\Theta_{\alpha;1}(r,q),\ R^2_{\mu,\alpha;22}(r,q)=-\frac{\Delta^{\mu}_{\nu_3;12}}{\Delta_{\mu,\alpha}(q)}\Theta_{\alpha;1}(r,q),$$

$$R^3_{\mu,\alpha;11}(r,q) = -\frac{c_{21}}{\lambda^{2\alpha}R_1^{2\alpha+1}}\frac{1}{\Delta_{\mu,\alpha}(q)}\Delta_{21}(q_1R_0, q_1R_1)F^{\mu,3}_{\nu_3;22}(chR_3, chr),$$

$$R^3_{\mu,\alpha;21}(r,q) = \frac{c_{21}}{\lambda^{2\alpha}R_1^{2\alpha+1}}\frac{1}{\Delta_{\mu,\alpha}(q)}\Delta_{11}(q_1R_0, q_1R_1)F^{\mu,3}_{\nu_3;22}(chR_3, chr),$$

$$R^3_{\mu,\alpha;12} = \frac{A_{\alpha;2}}{\Delta_{\mu,\alpha}}F^{\mu,3}_{\nu_3;22}(chR_3, chr),\ R^3_{\mu,\alpha;22} = -\frac{A_{\alpha;1}}{\Delta_{\mu,\alpha}}F^{\mu,3}_{\nu_3;22}(chR_3, chr);$$

4) породжені неоднорідністю системи (1) функції впливу

$$H_{\mu,\alpha;11}(r,\rho,q) = -\frac{1}{q_1}\begin{cases}\Phi^0_{11}(q_1R_0, q_1r)W_{\mu,\alpha;11}(\rho,q), & R_0 < r < \rho < R_1,\\ \Phi^0_{11}(q_1R_0, q_1\rho)W_{\mu,\alpha;11}(r,q), & R_0 < \rho < r < R_1,\end{cases}$$

$$H_{\mu,\alpha;12}(r,\rho,q) = -\frac{c_{21}}{R_1^{2\alpha+1}}\frac{1}{\Delta_{\mu,\alpha}(q)}\Phi^0_{11}(q_1R_0, q_1r)\Theta_{\mu,\alpha;2}(\rho,q),$$

$$H_{\mu,\alpha;13}(r,\rho,q) = -\frac{c_{21}}{\lambda^{2\alpha}R_1^{2\alpha+1}}\frac{c_{22}}{shR_2}\frac{1}{\Delta_{\mu,\alpha}(q)}\Phi^0_{11}(q_1R_0, q_1r)F^{\mu,3}_{\nu_3;22}(chR_3, ch\rho),$$

$$H_{\mu,\alpha;21}(r,\rho,q) = -\frac{c_{11}}{\Delta_{\mu,\alpha}(q)}\Phi^0_{11}(q_1R_0, q_1\rho)\Theta_{\mu,\alpha;2}(r,q),$$

$$H_{\mu,\alpha;22}(r,\rho,q) = \frac{\lambda^{2\alpha}}{\Delta_{\mu,\alpha}(q)}\begin{cases}\Theta_{\alpha;1}(r,q)\Theta_{\mu,\alpha;2}(\rho,q), & R_1 < r < \rho < R_2,\\ \Theta_{\alpha;1}(\rho,q)\Theta_{\mu,\alpha;2}(r,q), & R_1 < \rho < r < R_2,\end{cases} \quad (14)$$

$$H_{\mu,\alpha;23}(r,\rho,q) = \frac{c_{22}}{shR_2}\frac{1}{\Delta_{\mu,\alpha}(q)}\Theta_{\alpha;1}(r,q)F^{\mu,3}_{\nu_3;22}(chR_3, ch\rho),$$

$$H_{\mu,\alpha;31}(r,\rho,q) = -\frac{c_{11}c_{12}}{\lambda^{2\alpha}R_2^{2\alpha+1}}\frac{1}{\Delta_{\mu,\alpha}(q)}\Phi^0_{11}(q_1R_0, q_1\rho)F^{\mu,3}_{\nu_3;22}(chR_3, chr),$$

$$H_{\mu,\alpha;32}(r,\rho,q) = \frac{c_{12}}{R_2^{2\alpha+1}}\frac{1}{\Delta_{\mu,\alpha}(q)}\Theta_{\alpha;1}(\rho,q)F^{\mu,3}_{\nu_3;22}(chR_3, chr),$$

$$H_{\mu,\alpha;33}(r,\rho,q) = B_\mu(q_3)\begin{cases}F^{\mu,3}_{\nu_3;22}(chR_3, ch\rho)W_{\mu,\alpha;33}(r,q), & R_2 < r < \rho < R_3,\\ F^{\mu,3}_{\nu_3;22}(chR_3, chr)W_{\mu,\alpha;33}(\rho,q), & R_2 < \rho < r < R_3.\end{cases}$$

У результаті однозначної розв'язності алгебраїчної системи (9) і підстановки одержаних значень $A_j$, $B_j$ ($j=\overline{1,3}$) в рівності (4) маємо єдиний розв'язок крайової задачі (1)-(3):

$$u_j(r) = W_{\mu,\alpha;1j}(r,q)g_0 + W_{\mu,\alpha;3j}(r,q)g_R + \sum_{i,k=1}^{2}R^j_{\mu,\alpha;ik}(r,q)\omega_{ik} + \\ + \sum_{k=1}^{3}\int_{R_{k-1}}^{R_k}H_{\mu,\alpha;jk}(r,\rho,q)g_k(\rho)\varphi_k(\rho)d\rho, \quad j=\overline{1,3}. \quad (15)$$

Побудуємо тепер розв'язок крайової задачі (1)-(3) методом скінченного гібридного інтегрального перетворення, породженого на множині $I_2$ гібридним диференціальним оператором (ГДО)

$$M_{\mu,\alpha} = \theta(r-R_0)\theta(R_1-r)\frac{d^2}{dr^2} + \theta(r-R_1)\theta(R_2-r)B_\alpha + \theta(r-R_2)\theta(R_3-r)\Lambda_\mu, \quad (16)$$

$\theta(x)$ - одинична функція Хевісайда.

Означення: За область визначення $G$ оператора $M_{\mu,\alpha}$ візьмемо вектор-функції $g(r)=\{g_1(r); g_2(r); g_3(r)\}$ з такими властивостями: 1) вектор-функція $f(r)=\{g_1''(r); B_\alpha[g_2(r)]; \Lambda_\mu[g_3(r)]\}$ неперервна на множині $I_2$; 2) функції $g_j(r)$ задовольняють однорідні умови спряження (2); 3) функції $g_j(r)$ задовольняють однорідні крайові умови(3).

Оскільки ГДО $M_{\mu,\alpha}$ самоспряжений і не має на множині $I_2$ особливих точок, то його спектр дискретний [8]. Якщо $\beta_n$ - власне число, то йому відповідає власна вектор-функція

$$V_{\mu,\alpha}(r,\beta_n)=\{V_{\mu,\alpha;1}(r,\beta_n); V_{\mu,\alpha;2}(r,\beta_n); V_{\mu,\alpha;3}(r,\beta_n)\}.$$

З метою побудови власних елементів ГДО $M_{\mu,\alpha}$ розглянемо спектральну задачу Штурма-Ліувілля: побудувати ненульовий розв'язок системи диференціальних рівнянь

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+b_1^2(\beta)\right)V_{\mu,\alpha;1}(r,\beta)=0,\ r\in(R_0,R_1),$$
$$\left(B_\alpha+b_2^2(\beta)\right)V_{\mu,\alpha;2}(r,\beta)=0,\ r\in(R_1,R_2), \tag{17}$$
$$\left(\Lambda_\mu+b_3^2(\beta)\right)V_{\mu,\alpha;3}(r,\beta)=0,\ r\in(R_2,R_3)$$

за однорідними крайовими умовами

$$\left(\alpha_{11}^0\frac{d}{dr}+\beta_{11}^0\right)V_{\mu,\alpha;1}(r,\beta)\Big|_{r=R_0}=0,\ \left(\alpha_{22}^3\frac{d}{dr}+\beta_{22}^3\right)V_{\mu,\alpha;3}(r,\beta)\Big|_{r=R_3}=0 \tag{18}$$

та умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k\frac{d}{dr}+\beta_{j1}^k\right)V_{\mu,\alpha;r}(r,\beta)-\left(\alpha_{j2}^k\frac{d}{dr}+\beta_{j2}^k\right)V_{\mu,\alpha;k+1}(r,\beta)\right]\Big|_{r=R_3}=0 \tag{19}$$

$$b_j(\beta)=\left(\beta^2+k_j^2\right)^{1/2},\ k_j^2\geq 0,\ j=\overline{1,3}.$$

Фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Фур'є $\left(d^2/dr^2+b_1^2\right)v=0$ утворюють функції $\cos b_1 r$ і $\sin b_1 r$ [6], фундаментальну систему розв'язків для рівняння Бесселя $\left(B_\alpha+b_2^2\right)v=0$ утворюють функції Бесселя 1-го роду $C_\alpha(\lambda r,b_2)$ і 2-го роду $D_\alpha(\lambda r,b_2)$ [9], фундаментальну систему розв'язків для рівняння Лежандра $\left(\Lambda_\mu+b_3^2\right)v=0$ утворюють приєднані функції Лежандра 1-го роду $A^\mu_{-1/2+ib_3}(chr)$ та 2-го роду $B^\mu_{-1/2+ib_3}(chr)$ [4].

Наявність фундаментальної системи розв'язків дозволяє відшукувати функції $V_{\mu,\alpha;j}(r,\beta)$ за правилами [6]:

$$V_{\mu,\alpha;1}(r,\beta)=A_1\cos b_1r+B_1\sin b_1r,\ r\in(R_0,R_1),$$
$$V_{\mu,\alpha;2}(r,\beta)=A_2C_\alpha(\lambda r,b_2)+B_2D_\alpha(\lambda r,b_2),\ r\in(R_1,R_2), \tag{20}$$
$$V_{\mu,\alpha;3}(r,\beta)=A_3A^\mu_{v_3^*}(chr)+B_3B^\mu_{v_3^*}(chr),\ r\in(R_2,R_3),\ v_3^*=-1/2+ib_3.$$

Введемо до розгляду функції:

$$v_{jk}^{m1}(b_sR_m)=-\alpha_{jk}^m b_s\sin b_sR_m+\beta_{jk}^m\cos b_sR_m,$$
$$v_{jk}^{m2}(b_sR_m)=\alpha_{jk}^m b_s\cos b_sR_m+\beta_{jk}^m\sin b_sR_m,$$
$$X_{\alpha;jk}^{m1}(\lambda R_m,b_2)=\alpha_{jk}^m C'_\alpha(\lambda R_m,b_2)+\beta_{jk}^m C_\alpha(\lambda R_m,b_2),$$
$$X_{\alpha;jk}^{m2}(\lambda R_m,b_2)=\alpha_{jk}^m D'_\alpha(\lambda R_m,b_2)+\beta_{jk}^m D_\alpha(\lambda R_m,b_2),$$

$$Y_{\nu_3^*;\,jk}^{\mu,m1}(chR_m)=\alpha_{jk}^m shR_m A_{\nu_3^*}^{\mu'}(chR_m)+\beta_{jk}^m A_{\nu_3^*}^{\mu}(chR_m),$$
$$Y_{\nu_3^*;\,jk}^{\mu,m2}(chR_m)=\alpha_{jk}^m shR_m B_{\nu_3^*}^{\mu'}(chR_m)+\beta_{jk}^m B_{\nu_3^*}^{\mu}(chR_m).$$

Крайові умови (18) та умови спряження (19) для визначення шести величин $A_j$, $B_j$ ($j=\overline{1,3}$) дають однорідну алгебраїчну лінійну систему із шести рівнянь:

$$v_{11}^{01}(b_1R_0)A_1+v_{11}^{02}(b_1R_0)B_1=0,$$
$$v_{j1}^{11}(b_1R_1)A_1+v_{j1}^{12}(b_1R_1)B_1-X_{\alpha;\,j2}^{11}(\lambda R_1,b_2)A_2-X_{\alpha;\,j2}^{12}(\lambda R_1,b_2)B_2=0,$$
$$X_{\alpha;\,j1}^{21}(\lambda R_2,b_2)A_2+X_{\alpha;\,j1}^{22}(\lambda R_2,b_2)B_2-Y_{\nu_3^*;\,j2}^{\mu,21}(chR_2)A_3-Y_{\nu_3^*;\,j2}^{\mu;22}(chR_2)B_3=0,$$
$$Y_{\nu_3^*;22}^{\mu,31}(chR_3)A_3+Y_{\nu_3^*;22}^{\mu,32}(chR_3)B_3=0,\ j=1,2. \qquad (21)$$

Алгебраїчна система (21) має відмінні від нуля розв'язки тоді й тільки тоді, коли її визначник рівний нулю [10]:

$$\begin{aligned}\delta_{\mu,\alpha}(\beta)&\equiv a_{\alpha;1}(\beta)\delta_{\nu_3^*;22}^{\mu}(chR_2,chR_3)-a_{\alpha;2}(\beta)\delta_{\nu_3^*;12}^{\mu}(chR_2,chR_3)=\\&=b_{\mu,\alpha;2}(\beta)\delta_{11}(b_1R_0,b_1R_1)-b_{\mu,\alpha;1}(\beta)\delta_{21}(b_1R_0,b_1R_1)=0.\end{aligned} \qquad (22)$$

У рівності (22) беруть участь функції:

$$\delta_{j1}(b_1R_0,b_1R_1)=v_{11}^{01}(b_1R_0)v_{j1}^{12}(b_1R_1)-v_{11}^{02}(b_1R_0)v_{j1}^{11}(b_1R_1);\ j=1,2,$$
$$\delta_{\nu_3^*;\,j2}^{\mu}(chR_2,chR_3)=Y_{\nu_3^*;\,j2}^{\mu,21}(chR_2)Y_{\nu_3^*;22}^{\mu,32}(chR_3)-Y_{\nu_3^*;\,j2}^{\mu,22}(chR_2)Y_{\nu_3^*;22}^{\mu,31}(chR_3),$$
$$\delta_{\alpha;\,jk}(\lambda R_1,\lambda R_2,b_2)=X_{\alpha;\,j2}^{11}(\lambda R_1,b_2)X_{\alpha;k1}^{22}(\lambda R_2,b_2)-X_{\alpha;\,j2}^{12}(\lambda R_1,b_2)X_{\alpha;k1}^{21}(\lambda R_2,b_2),$$
$$a_{\alpha;\,j}(\beta)=\delta_{11}(b_1R_0,b_1R_1)\delta_{\alpha;2j}(\lambda R_1,\lambda R_2,b_2)-\delta_{21}(b_1R_0,b_1R_1)\delta_{\alpha;1j}(\lambda R_1,\lambda R_2,b_2),$$
$$\begin{aligned}b_{\mu,\alpha;\,j}(\beta)=\ &\delta_{\nu_3^*;22}^{\mu}(chR_2,chR_3)\delta_{\alpha;\,j1}(\lambda R_1,\lambda R_2,b_2)-\\&-\delta_{\nu_3^*;12}^{\mu}(chR_2,chR_3)\delta_{\alpha;\,j2}(\lambda R_1,\lambda R_2,b_2),\ j=1,2.\end{aligned}$$

Корені $\beta_n$ трансцендентного рівняння (22) утворюють дискретний спектр ГДО $M_{\mu,\alpha}$ [11]: дійсні, різні, симетричні відносно $\beta=0$, на півосі $\beta>0$ складають монотонно зростаючу послідовність з єдиною граничною точкою $\beta=\infty$.

Підставимо в систему (21) $\beta=\beta_n$ ($b_j(\beta_n)\equiv b_{jn}$), відкинемо останнє рівняння в силу лінійної залежності і покладемо $A_1=A_0v_{11}^{02}(b_{1n}R_0)$, $B_1=-A_0v_{11}^{01}(b_{1n}R_0)$. Тоді рівняння, що залишилися, утворюють послідовно дві алгебраїчні системи по два рівняння в кожній:

$$X_{\alpha;\,j2}^{11}(\lambda R_1,b_{2n})A_2+X_{\alpha;\,j2}^{12}(\lambda R_1,b_{2n})B_2=-A_0\delta_{j1}(b_{1n}R_0,b_{1n}R_1),\ j=1,2, \qquad (23)$$

$$Y_{\nu_{3n}^*;\,j2}^{\mu,21}(chR_2)A_3+Y_{\nu_{3n}^*;\,j2}^{\mu,22}(chR_3)B_3=\frac{A_0}{q_\alpha(\beta_n)}a_{\alpha;\,j}(\beta_n),\nu_{3n}^*=-1/2+ib_{3n}. \qquad (24)$$

У рівності (24) бере участь визначник системи (23)

$$-q_\alpha(\beta_n)=-\frac{c_{21}sh(\pi b_{2n})}{\pi\lambda^{2\alpha}R_1^{2\alpha+1}}\neq 0.$$

Визначник алгебраїчної системи (24)

$$q_\mu(\beta_n)=\frac{2}{\pi^2}c_{22}\frac{ch\pi b_{3n}}{shR_2}\left|\Gamma\left(1/2+\mu+ib_{3n}\right)\right|^2\neq 0.$$

Якщо при $A_0=q_\alpha(\beta_n)q_\mu(\beta_n)$ розв'язати послідовно алгебраїчні системи (23) (24) і підставити одержані значення $A_j$, $B_j$ ($j=\overline{1,3}$) у рівності (20), то маємо функції:

$$V_{\mu,\alpha;1}(r,\beta_n)=q_\alpha(\beta_n)q_\mu(\beta_n)\left[v_{11}^{02}(b_{1n}R_0)cos\,b_{1n}r-v_{11}^{01}(b_{1n}R_0)sin\,b_{1n}r\right],$$

$$V_{\mu,\alpha;2}(r,\beta_n) = q_\mu(\beta_n)\left[\delta_{11}(b_{1n}R_0, b_{1n}R_1)\psi^1_{\alpha;22}(\lambda R_1, \lambda r, b_{2n}) - \right.$$
$$\left. - \delta_{21}(b_{1n}R_0, b_{1n}R_1)\psi^1_{\alpha;12}(\lambda R_1, \lambda r, b_{2n})\right], \tag{25}$$
$$V_{\mu,\alpha;3}(r,\beta_n) = a_{\alpha;1}(\beta_n) f^{\mu,2}_{\nu^*_{3n};22}(chR_2, chr) - a_{\alpha;2}(\beta_n) f^{\mu,2}_{\nu^*_{3n};12}(chR_2, chr).$$

Введемо до розгляду вагову функцію

$$\sigma(r) = \sigma_1\theta(r-R_0)\theta(R_1-r) + \sigma_2\theta(r-R_1)\theta(R_2-r)r^{2\alpha-1} + \sigma_3\theta(r-R_2)\theta(R_3-r)shr,$$

де $\sigma_1 = c_{11}c_{12}R_1^{2\alpha+1}\left(c_{21}c_{22}R_2^{2\alpha+1}\right)^{-1}$, $\sigma_2 = c_{12}\left(c_{22}R_2^{2\alpha+1}\right)^{-1}, \sigma_3 = (shR_2)^{-1}$, і спектральну функцію

$$V_{\mu,\alpha}(r,\beta_n) = \sum_{j=1}^{3}\theta(r-R_{j-1})\theta(R_j - r)V_{\mu,\alpha;j}(r,\beta_n)$$

з квадратом норми

$$\left\|V_{\mu,\alpha}(r,\beta_n)\right\|^2 = \int_{R_0}^{R_3}\left[V_{\mu,\alpha}(r,\beta_n)\right]^2\sigma(r)dr \equiv \int_{R_0}^{R_1}\left[V_{\mu,\alpha;1}(r,\beta_n)\right]^2\sigma_1 dr +$$
$$+ \int_{R_1}^{R_2}\left[V_{\mu,\alpha;2}(r,\beta_n)\right]^2\sigma_2 r^{2\alpha-1}dr + \int_{R_2}^{R_3}\left[V_{\mu,\alpha;3}(r,\beta_n)\right]^2\sigma_3 shrdr.$$

Згідно з роботою [11] маємо твердження.

<u>Теорема</u> (про спектральну функцію). Система $\left\{V_{\mu,\alpha}(r,\beta_n)\right\}_{n=1}^{\infty}$ власних функцій ГДО $M_{\mu,\alpha}$ ортогональна з ваговою функцією $\sigma(r)$ на множині $I_2$, повна і замкнена.

<u>Теорема</u> (про зображення). Будь-яка вектор-функція $g(r)\in G$ зображається абсолютно і рівномірно збіжним на множині $I_2$ рядом Фур'є за системою $\left\{V_{\mu,\alpha}(r,\beta_n)\right\}_{n=1}^{\infty}$:

$$g(r) = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{R_0}^{R_3} g(\rho)V_{\mu,\alpha}(\rho,\beta_n)\sigma(\rho)d\rho\,\frac{V_{\mu,\alpha}(r,\beta_n)}{\left\|V_{\mu,\alpha}(r,\beta_n)\right\|^2}. \tag{26}$$

Ряд Фур'є (26) визначає пряме $H_{\mu,\alpha}$ і обернене $H^{-1}_{\mu,\alpha}$ скінченне гібридне інтегральне перетворення типу Фур'є – (Конторовича-Лєбєдєва) – Лежандра, породжене на множині $I_2$ ГДО $M_{\mu,\alpha}$:

$$H_{\mu,\alpha}[g(r)] = \int_{R_0}^{R_3} g(r)V_{\mu,\alpha}(r,\beta_n)\sigma(r)dr \equiv \tilde{g}_n, \tag{27}$$

$$H^{-1}_{\mu,\alpha}[\tilde{g}_n] = \sum_{n=1}^{\infty}\tilde{g}_n\,\frac{V_{\mu,\alpha}(r,\beta_n)}{\left\|V_{\mu,\alpha}(r,\beta_n)\right\|^2} \equiv g(r). \tag{28}$$

<u>Теорема</u> (про основну тотожність). Якщо вектор-функція $g(r)\in G$, а функції $g_j(r)$ задовольняють умови спряження (2) і крайові умови (3), то справджується основна тотожність інтегрального перетворення ГДО $M_{\mu,\alpha}$:

$$\begin{aligned} H_{\mu,\alpha}\left[M_{\mu,\alpha}\left[g(r)\right]\right] &= -\beta_n^2\tilde{g}_n - \sum_{i=1}^{3} k_i^2 \tilde{g}_{in} - \\ &-\sigma_1\left(\alpha_{11}^0\right)^{-1} V_{\mu,\alpha;1}(R_0,\beta_n) g_0 + \sigma_3 shR_3\left(\alpha_{22}^3\right)^{-1} V_{\mu,\alpha;3}(R_3,\beta_n) g_R + \\ &+\sum_{k=1}^{2} d_k\left[Z_{\mu,\alpha;12}^k(\beta_n)\omega_{2k} - Z_{\mu,\alpha;22}^k(\beta_n)\omega_{1k}\right],\ d_1=\sigma_1 c_{11}^{-1},\ d_2=\sigma_2 R_2^{2\alpha+1} c_{12}^{-1} \end{aligned} \tag{29}$$

$$Z_{\mu,\alpha;i2}^k(\beta_n) = \left(\alpha_{i2}^k \frac{d}{dr} + \beta_{i2}^k\right) V_{\mu,\alpha;k+1}(r,\beta_n)\Big|_{r=R_k},\ i,k=1,2.$$

Запишемо систему (1) в матричній формі:

$$\begin{bmatrix} \left(\dfrac{d^2}{dr^2} - q_1^2\right) u_1(r) \\ \left(B_\alpha - q_2^2\right) u_2(r) \\ \left(\Lambda_\mu - q_3^2\right) u_3(r) \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} g_1(r) \\ g_2(r) \\ g_3(r) \end{bmatrix}. \tag{30}$$

Інтегральний оператор $H_{\mu,\alpha}$ згідно з правилом (27) зобразимо у вигляді операторної матриці-рядка:

$$\begin{aligned} H_{\mu,\alpha}[\cdots] = \Bigg[ &\int_{R_0}^{R_1} \cdots V_{\mu,\alpha;1}(r,\beta_n)\sigma_1 dr \quad \int_{R_1}^{R_2} \cdots V_{\mu,\alpha;2}(r,\beta_n)\sigma_2 r^{2\alpha-1} dr \\ &\int_{R_2}^{R_3} \cdots V_{\mu,\alpha;3}(r,\beta_n)\sigma_3 shRdr \Bigg]. \end{aligned} \tag{31}$$

Припустимо, що $\max\left\{q_1^2; q_2^2; q_3^2\right\} = q_3^2$. Покладемо всюди $k_1^2 = q_3^2 - q_1^2 \geq 0$, $k_2^2 = q_3^2 - q_2^2 \geq 0$, $k_3^2 = q_3^2 - q_3^2 \geq 0$.

Застосувавши до системи (30) за правилом множення матриць операторну матрицю-рядок (31), в силу основної тотожності (29) одержуємо функцію

$$\begin{aligned} \tilde{u}_n = &\frac{\tilde{g}_n}{\beta_n^2 + q_3^2} + \frac{V_{\mu,\alpha;1}(R_0,\beta_n)}{\left(-\alpha_{11}^0\right)\left(\beta_n^2+q_3^2\right)}\sigma_1 g_0 + \frac{V_{\mu,\alpha;3}(R_3,\beta_n)}{\alpha_{22}^3\left(\beta_n^2+q_3^2\right)}\sigma_3 shR_3 g_R + \\ &+\sum_{k=1}^{2} d_k\left[\frac{Z_{\mu,\alpha;12}^k(\beta_n)}{\beta_n^2+q_3^2}\omega_{2k} - \frac{Z_{\mu,\alpha;22}^k(\beta_n)}{\beta_n^2+q_3^2}\omega_{1k}\right]. \end{aligned} \tag{32}$$

Оператор $H_{\mu,\alpha}^{-1}$ згідно з правилом (28) як обернений до (31) зобразимо у вигляді операторної матриці-стовпця:

$$H_{\mu,\alpha}^{-1}[\cdots] = \begin{bmatrix} \sum_{n=1}^{\infty} \cdots V_{\mu,\alpha;1}(r,\beta_n)\left(\left\|V_{\mu,\alpha}(r,\beta_n)\right\|^2\right)^{-1} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \cdots V_{\mu,\alpha;2}(r,\beta_n)\left(\left\|V_{\mu,\alpha}(r,\beta_n)\right\|^2\right)^{-1} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \cdots V_{\mu,\alpha;3}(r,\beta_n)\left(\left\|V_{\mu,\alpha}(r,\beta_n)\right\|^2\right)^{-1} \end{bmatrix}. \tag{33}$$

Застосувавши операторну матрицю-стовпець (33) до матриці-елементу $[\tilde{u}_n]$, де функція $\tilde{u}_n$ визначена формулою (32), за правилом множення матриць, маємо єдиний розв'язок крайової задачі (1)-(3):

$$u_j(r)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\alpha_{11}^{0}\right)^{-1}V_{\mu,\alpha;1}(R_0,\beta_n)S_{\mu,\alpha;j}(r,\beta_n)\sigma_1 g_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\alpha_{22}^{3}\right)^{-1}V_{\mu,\alpha;3}(R_3,\beta_n)\times$$
$$\times S_{\mu,\alpha;j}(r,\beta_n)\sigma_3 shR_3 g_R+\sum_{k=1}^{2}d_k\left[\sum_{n=1}^{\infty}Z_{\mu,\alpha;12}^{k}(\beta_n)S_{\mu,\alpha;j}(r,\beta_n)\omega_{2k}-\right.$$
$$\left.-\sum_{n=1}^{\infty}Z_{\mu,\alpha;22}^{k}(\beta_n)S_{\mu,\alpha;j}(r,\beta_n)\omega_{1k}\right]+ \tag{34}$$
$$+\sum_{k=1}^{3}\int_{R_{k-1}}^{R_k}\left(\sum_{n=1}^{\infty}S_{\mu,\alpha;j}(r,\beta_n)V_{\mu,\alpha;k}(\rho,\beta_n)\right)g_k(\rho)\sigma_k\varphi_k(\rho)d\rho,\quad j=\overline{1,3}.$$

$$S_{\mu,\alpha;j}(r,\beta_n)=V_{\mu,\alpha;j}(r,\beta_n)\left(\beta_n^2+q_3^2\right)^{-1}\left(\left\|V_{\mu,\alpha}(r,\beta_n)\right\|^2\right)^{-1}.$$

Порівнюючи внаслідок єдиності розв'язки (15) і (34), маємо формули підсумовування наступних поліпараметричних функціональних рядів:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\alpha_{11}^{0}\right)^{-1}V_{\mu,\alpha;1}(R_0,\beta_n)S_{\mu,\alpha;j}(r,\beta_n)=\sigma_1^{-1}W_{\mu,\alpha;1j}(r,q);\ \ j=\overline{1,3}, \tag{35}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\alpha_{22}^{3}\right)^{-1}V_{\mu,\alpha;3}(R_3,\beta_n)S_{\mu,\alpha;j}(r,\beta_n)=\left(\sigma_3 R_3^{2\alpha+1}\right)^{-1}W_{\mu,\alpha;3j}(r,q);\ \ j=\overline{1,3}, \tag{36}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}Z_{\mu,\alpha;12}^{k}(\beta_n)S_{\mu,\alpha;j}(r,\beta_n)=d_k^{-1}R_{\mu,\alpha;2k}^{j}(r,q);\ \ k=1,2,\ \ j=\overline{1,3}, \tag{37}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}Z_{\mu,\alpha;22}^{k}(\beta_n)S_{\mu,\alpha;j}(r,\beta_n)=-d_k^{-1}R_{\mu,\alpha;1k}^{j}(r,q);\ \ k=1,2,\ \ j=\overline{1,3}, \tag{38}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}S_{\mu,\alpha;j}(r,\beta_n)V_{\mu,\alpha;k}(\rho,\beta_n)=\sigma_k^{-1}H_{\mu,\alpha;jk}(r,\rho,q);\ \ k,j=\overline{1,3}. \tag{39}$$

У рівностях (35)-(39) функції Гріна $W_{\mu,\alpha;1j}(r,q)$ визначені формулами (11), функції Гріна $W_{\mu,\alpha;3j}(r,q)$ визначені формулами (12), функції Гріна $R_{\mu,\alpha;ik}^{j}(r,q)$ умов спряження визначені формулами (13); а функції впливу $H_{\mu,\alpha;jk}(r,\rho,q)$ визначені формулами (14). Оскільки вони не залежать від нерівності $\left(q_3^2-q_j^2\right)\geq 0$, то можна покласти $q_1^2=q_2^2=q_3^2\equiv q_0^2>0$, звужуючи при цьому сім'ю функціональних рядів.

Теорема. Якщо вектор-функція $g(r)\in G$, функції $g_j(r)$ задовольняють умови теореми про основну тотожність і виконується умова (10) однозначної розв'язності крайової задачі (1)-(3), то справджуються формули (35)-(39) підсумовування поліпараметричних функціональних рядів за власними елементами ГДО $M_{\mu,\alpha}$, визначеного рівністю (16).

**Висновок**

Результати роботи поповнюють довідкову математичну літературу і можуть бути використані при підсумовуванні функціональних рядів за власними елементами відповідних гібридних диференціальних операторів, які появляються при моделюванні фізико-технічних процесів у неоднорідних середовищах.

**Література**


1. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Наука, 1971. – 1108 с.
2. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Марычев О.И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. – М.: Наука, 1981. – 797 с.
3. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Марычев О.И. Интегралы и ряды. Специальные функции. – М.: Наука, 1983. – 798 с.
4. Ленюк М.П., Шинкарик Н.И. Гибридные интегральные преобразования Лежандра. –Львов, 1989. – 60 с. – (Препринт/АН УССР. Ин-т прикл. проблем механики и мамематики; 89.0).
5. Ленюк М.П. Исследование основных краевых задач для диссипативного волнового уравнения Бесселя. – Киев, 1983. – 61 с. – (Препр./АН УССР. Ин-т математики, 83.3).
6. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. – М.: Физ-матгиз, 1959. – 468 с.
7. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй специальный курс. – М.: Наука, 1965. – 328 с.
8. Ленюк М.П., Шинкарик М.І. Гібридні інтегральні перетворення (Фур'є, Бесселя, Лежандра). Частина І. –Тернопіль; Економічна думка, 2004. – 368 с.
9. Ленюк М.П., Міхалевська Г.І. Інтегральні перетворення типу Конторовича-Лєбєдєва. – Чернівці: Прут, 2002.– 280 с.
10. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – М.: Физматгиз, 1963. – 431 с.
11. Комаров Г.М., Ленюк М.П., Мороз В.В. Скінченні гібридні інтегральні перетворення, породжені диференціальними рівняннями другого порядку. – Чернівці: Прут, 2001. – 228 с.


*Одержано 01.08.2006 р.*

*УДК 628.113.2 : 66.067.1*

**А. Бомба[1], докт. техн. наук; І. Присяжнюк[1], канд. техн. наук; А. Сафоник[2]**

[1]*Рівненський державний гуманітарний університет,*
[2]*Національний університет водного господарства та природокористування*

# ЗАКОНОМІРНОСТІ ФІЛЬТРУВАННЯ З УРАХУВАННЯМ ДИФУЗІЇ

*Уточнено відому модель фільтрування Мінца шляхом її „дифузійного збурення”. На цій основі проведено дослідження процесу очистки стічних вод при фільтруванні на каркасно-засипних фільтрах, зокрема, отримані формули для розрахунку процесу накопичення забруднень у фільтрі в залежності від різних його технічних характеристик. Наведено результати числових розрахунків.*

**A. Bomba, I. Prysjazhnjuk, A. Safonik**

# FEATURES OF FILTERING WITH AN ACCOUNT OF DIFFUSION

*The known Mints filtration model has been developed by its „diffuse existement”. On this basis, the research of water purification process of filtration through wire-frame filling filters has been carried out, namely, the formulas for filter pollutants accumulation process calculation depending on its various technical characteristics have been obtained. The results of numerical calculations are represented.*

Моделюванням процесу очистки стічних вод при фільтруванні на каркасно-засипних фільтрах займались такі відомі вчені, як Мінц Д.М., Шехтман Ю.М., Веригін М.М. [1-2]. Зокрема, відомою є модель Мінца Д.М.: $\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} + v\frac{\partial c(x,t)}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} = \beta c(x,t) - \alpha \rho(x,t)$, де перше рівняння - закон збереження маси (рівняння