Висновки

1. Розроблена математична модель остигання диска після наплавлення нагрівальною системою ІТЕЕ дозволяє визначати температурне поле в диску за більш точним і інженерним варіантами, похибка між ними складає 5,0-7,5%.
2. Перевірені теоретично отримані величини температур з експериментальними даними при остиганні диска добре узгоджуються, розходження складає 1-5%.

Література

1. О.Шаблій, Ч.Пулька. Математична модель оптимізації конструктивних параметрів нагрівальної системи з урахуванням комбінованого екранування теплових та електромагнітних полів // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – 2007. – № 2. – С. 66-76.
2. Пристрій для регулювання потужності в зоні наплавлення. Деклараційний патент UA. №58943А, В23К13/00/Шаблій О.М., Пулька Ч.В., Михайлишин М.С. та ін. – №2002119491; Заявл. 28.11.2002; Опубл. 17.11.2003, Бюл. №11.
3. Шаблій О.М., Пулька Ч.В., Письменний О.С. Програмне керування процесом індукційного наплавлення по оптимальному режиму // Зб. наук. праць присвячений 100-річчю механіко-машинобудівного і 50-річчю зварювального факультетів. – Том IV. 1998. – С.344-345.

Одержано 03.07.2007 р.

УДК 319.216

С. Лупенко, канд. техн. наук

Тернопільський державний технічний університет імені Івана Пулюя

ЦИКЛІЧНЕ ФУНКЦІОНАЛЬНЕ ВІДНОШЕННЯ ЯК ОСНОВА МАТЕМАТИЧНОГО ФОРМАЛІЗМУ ТЕОРІЇ МОДЕЛЮВАННЯ ТА АНАЛІЗУ ЦИКЛІЧНИХ СИГНАЛІВ

У роботі дано означення циклічного функціонального відношення як узагальненої математичної моделі циклічних сигналів. Здійснено формалізацію поняття циклу, фази та ритму циклічного сигналу. У вигляді доведеної теореми записано атрибутивні властивості структурної функції циклічного функціонального відношення.

S. Lupenko

CYCLE FUNCTIONAL RELATION AS THE BASE OF THE MATHEMATICAL FORMALISM OF THE THEORY OF MODELING AND ANALYSIS OF THE CYCLE SIGNALS

In the work, is given the definition of the cycle functional relation as the generalized mathematical model of the cycle signals. Has been realized the formalization of the conception of the cycle, phase and rhythm of the cycle signal. In the form of the proven theorem, have been written down the attributive properties of the structural function of the cycle functional relation.

Вступ

У роботах [1, 2] введено поняття циклічної функції (циклічного функціонального відношення), яка формалізує структуру циклічних сигналів та в певній мірі узагальнює відомі математичні моделі коливних явищ. У роботах [3, 4] розроблено методи статистичного аналізу випадкових циклічних функціональних відношень - циклічних випадкових процесів, у роботі [5] запропоновано підходи до імітаційного моделювання циклічних випадкових процесів, у роботі [6] розроблено метод дискретизації циклічних функцій, а у роботі [7] запропоновано метод оцінювання функції ритму циклічної функції. Циклічні функціональні відношення знайшли своє застосування і при моделюванні та обробці циклічних сигналів серця різної фізичної природи (електричної, магнітної, механічної) [8, 9].

Роботи [1-9], у своїй переважній більшості, стосуються дослідження певних частинних проблем моделювання, аналізу та обробки циклічних сигналів, і, як наслідок, у них мало уваги приділено систематичному дослідженню математичних об’єктів, які лежать в основі теорії моделювання та аналізу широкого класу циклічних сигналів та які формалізують такі її базові поняття як цикл, фаза, ритм та циклічний сигнал.

Дана робота намагається усунути цей недолік, шляхом означення, встановлення властивостей циклічного функціонального відношення, а також таких його атрибутивних складових як цикл, фаза та функція ритму.

Основна частина

Поняття “цикл”, “фаза”, “ритм”, “циклічний сигнал” є основними в теорії математичного моделювання та аналізу циклічних сигналів. Оскільки в літературних джерелах немає однозначності щодо тлумачення цих термінів, то дамо цим термінам такі тлумачення, які будуть приписуватися їм в даній роботі.

Цикл – це впорядкована множина фаз, етапів, що становить завершене коло у розвитку, розгортанні деякого явища, процесу чи сигналу. Поняття циклу, циклічного сигналу базуються на понятті фази.

Поняття "*фаза*" (від грецького “$\varphi\alpha\sigma\iota\varsigma$” - поява) в науково-технічній літературі має різні смислові відтінки та особливості. У загальнонауковому розумінні, “*фаза*” – це певний етап, стадія у розвитку, розгортанні деякого явища, процесу чи сигналу. В строгому математичному сенсі термін "фаза" використовується для позначення аргументу синусоїди чи косинусоїди, але у цьому випадку термін “фаза” має вузькоспеціалізоване значення і стосується найпростіших видів циклічних функцій – гармонічних.

Більш широкого сенсу термін "фаза" набуває в рамках теорії фазового простору (простру станів). В теорії фазового простору термін "фаза" означає будь-який елемент (точку) фазового простору. Така загальність змісту терміну "фаза" не враховує циклічну специфіку розгортання станів системи у часі, оскільки описує будь-які, зокрема і не циклічні траєкторії руху, еволюції системи. Коли ж мислимо фазу в циклічному сигналі, то завжди маємо на увазі не лише значення фази, але і її місце серед інших фаз у циклі, тобто враховуємо впорядкований характер фаз у кожному циклі циклічного сигналу. В рамках циклу коливного процесу всі його фази повинні бути розрізнені між собою, навіть якщо процес в цих фазах приймає однакові значення. Тому, коли говоримо про фазу циклічного сигналу, то маємо на увазі не лише його конкретне значення (елемент фазового простору), але і місце в рамках циклу серед решти фаз процесу.

Крім того, інтуїтивний образ циклічного сигналу не обов’язково передбачає строгу рівність однофазних значень в різних циклах циклічного сигналу, але, в загальному випадку - їх певну еквівалентність. Отже, в поняття “фаза” у загальній теорії моделей циклічних сигналів повинен закладатися більш специфічний зміст, ніж це є в теорії фазових просторів, а саме: цей зміст повинен відображати впорядковану структуру фаз у всіх циклах коливного явища та множинну природу фази.

Під *циклічним сигналом* будемо розуміти сигнал, який розвивається (розгортається, еволюціонує) циклами, що мають у деякому сенсі подібні (однакові) властивості та структуру, тобто це такий сигнал, що становить собою впорядковану множину циклів, які складаються із однієї і тієї ж впорядкованої множини фаз.

Термін "*ритм*" походить від грецького “$\rho\upsilon\vartheta\mu o\varsigma$”, що означає розмірність, узгодженість і в тлумачних словниках інтерпретується як рівномірне чергування впорядкованих елементів, зокрема, впорядковане чергування циклів. Таке тлумачення ритму подібне даному нами вище тлумаченню терміну "циклічний сигнал", а тому, з метою мінімізації синонімії, будемо вживати термін "ритм" в дещо іншому сенсі.

У даній роботі під римом будемо розуміти властивість, яка притаманна будь-якому циклічному сигналу і яка визначає особливості його розгортання в часі і/або просторі, а точніше задає величини часових (просторових) проміжків між однофазними значеннями циклічного сигналу для всіх його циклів та фаз. Ритм циклічного сигналу може бути стабільним, а може бути і не стабільним, змінним, мінливим. Наприклад, кажуть, що серце б'ється ритмічно, серцевий ритм є стабільним. Або кажуть, що технологічний, виробничий процес є ритмічним. В протилежність цьому кажуть – серце б'ється неритмічно, присутня аритмія, виробництво неритмічне (є збої виробничого процесу).

Для побудови теорії моделювання та аналізу циклічних сигналів таким її базовим поняттям як "фаза", "цикл", "ритм", "циклічний сигнал" необхідно поставити у відповідність математичні об'єкти, що адекватно і несуперечливо їх відображають та дозволяють строго ввести поняття циклічного функціонального відношення (абстрактної циклічної функції) як узагальненої математичної моделі циклічних сигналів.

Будь-яке функціональне відношення має свою область визначення та область значень. Для циклічного функціонального відношення область визначення та область значень не довільні, а повинні мати характерні властивості, тому дамо означення цим поняттям.

Означення 1. ***Областю визначення*** циклічного функціонального відношення є впорядкована дискретна $\mathbf{W}=\mathbf{D}=\left\{t_{ml}\in\mathbf{R},\, m\in\mathbf{Z},\, l=\overline{1,L}\right\}$ або неперервна $\mathbf{W}=\mathbf{R}$ множина дійсних чисел. У випадку дискретності області визначення $\mathbf{W}=\mathbf{D}$ для її елементів має місце такий тип лінійного упорядкування: $t_{m_1l_1}<t_{m_2l_2}$, якщо $m_2>m_1$, або якщо $m_2=m_1$, а $l_2>l_1$, в інших випадках $t_{m_1l_1}>t_{m_2l_2}$; $m_1,m_2\in\mathbf{Z}$, $l_1,l_2\in\overline{1,L}$. Причому $0<t_{m,l+1}-t_{m,l}<\infty$.

Як видно із означення 1, множина $\mathbf{W}$ є лінійно упорядкованою множиною (чи дискретною підмножиною) дійсних чисел. Під дискретною множиною будемо розуміти таку множину, яку утворюють тільки ізольовані точки.

Означення 2. ***Областю значень*** циклічного функціонального відношення є деякий лінійний простір $\mathbf{\Psi}$, елементами якого можуть бути числа, вектори, матриці, тензори, функції, оператори, випадкові величини, випадкові вектори, випадкові матриці, випадкові функції та випадкові оператори і т. п.

Як видно із означення 2, в силу абстрактності та намагання охопити досить широкий клас можливих циклічних структур, до області значень $\mathbf{\Psi}$ висувається лише одна досить загальна вимога – бути лінійним простором.

Нехай маємо підмножину $\mathbf{Q}$ декартового добутку множин $\mathbf{W}$ та $\mathbf{\Psi}$ ($\mathbf{Q}\subset\mathbf{W}\times\mathbf{\Psi}$), що визначає деяке функціональне відношення (функцію) із областю визначення $\mathbf{W}$ та областю значень $\mathbf{\Psi}$, тобто $\mathbf{Q}=\{(t,f(t)),\, t\in\mathbf{W}, f\in\mathbf{\Psi}\}$. Встановимо такі атрибутивні властивості функціонального відношення $\mathbf{Q}$, які б давали підстави називати його циклічним функціональним відношенням (абстрактною циклічною функцією). А також дамо чітку математичну інтерпретацію поняттям цикл та фаза циклічного сигналу, тобто здійснимо їх математичну формалізацію.

На загальнонауковому рівні зрозуміло, що циклічний сигнал – це сигнал, який еволюціонує циклами, складається із циклів, а отже, його можна розбити на сегменти-цикли, які не перетинаються і які задані на областях визначення, що не перетинаються. Причому у загальному випадку таких циклів є зліченна множина. Виходячи із таких не зовсім чітких міркувань про циклічну структуру, введемо такі математичні структури, що формалізують ці уявлення.

Нехай задано деяке зліченне впорядковане розбиття $\mathbf{D}_{\mathbf{W}}^{ц} = \{\mathbf{W}_{ц_m} \subset \mathbf{W}, m \in \mathbf{Z}\}$ області визначення $\mathbf{W}$, тобто для елементів $\mathbf{D}_{\mathbf{W}}^{ц}$ виконуються такі співвідношення:

$$\bigcup_{m \in \mathbf{Z}} \mathbf{W}_{ц_m} = \mathbf{W}, \ \mathbf{W}_{ц_{m_1}} \bigcap \mathbf{W}_{ц_{m_2}} = \varnothing, m_1 \neq m_2, m_1, m_2 \in \mathbf{Z}. \quad (1)$$

Причому, у випадку, коли $\mathbf{W} = \mathbf{R}$, то $\mathbf{W}_{ц_m} = [t_m, t_{m+1}), m \in \mathbf{Z}$ ($0 < t_{m+1} - t_m < \infty$). У випадку, коли область визначення дискретна $\mathbf{W} = \mathbf{D}$, то $\mathbf{W}_{ц_m} = \left\{ t_{ml}, l = \overline{1, L} \right\}, m \in \mathbf{Z}$ ($0 < t_{m+1,1} - t_{m,1} < \infty$).

Внаслідок лінійної упорядкованості числової множини $\mathbf{W}$ елементи розбиття $\mathbf{D}_{\mathbf{W}}^{ц}$ також є лінійно впорядкованими числовими множинами, між якими існує ізоморфізм відносно порядку, тобто:

а) має місце бієкція (позначимо її знаком "$\Leftrightarrow$") між $\mathbf{W}_{ц_{m_1}}$ та $\mathbf{W}_{ц_{m_2}}$ ($m_1, m_2 \in \mathbf{Z}$), тобто: будь-якому $t \in \mathbf{W}_{ц_{m_1}}$ ставиться у відповідність лише одне $t' \in \mathbf{W}_{ц_{m_2}}$ ($t \to t'$), а будь-якому $t' \in \mathbf{W}_{ц_{m_2}}$ ставиться у відповідність лише одне $t \in \mathbf{W}_{ц_{m_1}}$ ($t' \to t$), причому для будь-яких різних $t_1, t_2 \in \mathbf{W}_{ц_{m_1}}$ їх образи $t_1', t_2' \in \mathbf{W}_{ц_{m_2}}$ є різними, і навпаки. Будемо говорити, що елементи t та t' перебувають у бієктивному зв'язку або є бієктивно пов'язаними і позначати це так: $t \leftrightarrow t'$;

б) зберігається тип лінійного упорядкування множин $\mathbf{W}_{ц_{m_1}}$ та $\mathbf{W}_{ц_{m_2}}$, тобто: $\forall t_1, t_2 \in \mathbf{W}_{ц_{m_1}}$, $\exists t_1', t_2' \in \mathbf{W}_{ц_{m_2}}$, що $t_1' \leftrightarrow t_1$, $t_2' \leftrightarrow t_2$ та має місце відношення лінійного порядку $t_2' > t_1'$, якщо $t_2 > t_1$, і навпаки.

Таким чином елементи розбиття $\mathbf{D}_{\mathbf{W}}^{ц} = \{\mathbf{W}_{ц_m} \subset \mathbf{W}, m \in \mathbf{Z}\}$ є математичними об'єктами, які задають області визначення відповідних циклів циклічного сигналу.

Перейдемо до формалізації самих циклів циклічного сигналу як деяких функціональних відношень із певними властивостями. Для цього розглянемо бієктивне відображення множини $\mathbf{W}$ на функціональне відношення $\mathbf{Q}$, яке завжди може бути побудоване, оскільки кожному елементу $t \in \mathbf{W}$ ставиться у відповідність лише одна пара $(t, f(t)) \in \mathbf{Q}$, і навпаки, причому для двох різних $t_1, t_2 \in \mathbf{W}$ відповідні їм пари $(t_1, f(t_1)), (t_2, f(t_2)) \in \mathbf{Q}$ також різні. Таке бієктивне відображення $\mathbf{W} \Leftrightarrow \mathbf{Q}$ є ізоморфізмом відносно порядку, оскільки воно індукує лінійний порядок у саме функціональне відношення $\mathbf{Q}$, порядковий тип якого співпадає із порядковим типом множини $\mathbf{W}$. Тобто у подальшому будемо говорити про $\mathbf{Q}$ як про впорядковане за областю визначення $\mathbf{W}$ функціональне відношення.

Внаслідок бієкції між $\mathbf{W}$ та $\mathbf{Q}$ розбиття $\mathbf{D}_{\mathbf{W}}^{ц} = \{\mathbf{W}_{ц_m} \subset \mathbf{W}, m \in \mathbf{Z}\}$ породжує впорядковане розбиття $\mathbf{D}_{\mathbf{Q}}^{ц} = \{\mathbf{Q}_{ц\,m} \subset \mathbf{Q}, m \in \mathbf{Z}\}$ функціонального відношення $\mathbf{Q}$ шляхом бієктивного відображення ($\mathbf{D}_{\mathbf{W}}^{ц} \Leftrightarrow \mathbf{D}_{\mathbf{Q}}^{ц}$) елементів упорядкованого розбиття $\mathbf{D}_{\mathbf{W}}^{ц} = \{\mathbf{W}_{ц_m}, m \in \mathbf{Z}\}$ на неперетинні підмножини (функціональні відношення $\mathbf{Q}_{ц\,m}$) відношення $\mathbf{Q}$, тобто, кожній множині $\mathbf{W}_{ц_m}$ співставимо підмножину $\mathbf{Q}_{ц\,m} = \{(t, f(t)), t \in \mathbf{W}_{ц_m}\} \subset \mathbf{Q}$, що є її образом, тобто множину тих пар $(t, f(t))$ відношення $\mathbf{Q}$, аргумент t яких належить $\mathbf{W}_{ц_m}$ ($t \leftrightarrow (t, f(t)), t \in \mathbf{W}_{ц_m}$).

Оскільки елементи $\mathbf{W}_{ц_m}$ розбиття $\mathbf{D}_{\mathbf{W}}^{ц}$ є лінійно впорядкованими множинами і між ними встановлено ізоморфізм відносно порядку, то і елементи $\mathbf{Q}_{ц\,m}$ розбиття

$\mathbf{D}_{\mathbf{Q}}^{ц}=\{\mathbf{Q}_{ц\,m}, m\in\mathbf{Z}\}$ також є лінійно впорядкованими за областями визначення $\mathbf{W}_{ц_m}$ і між ними можна встановити ізоморфізм відносно порядку, тобто:

а) має місце бієкція між $\mathbf{Q}_{ц\,m_1}$ та $\mathbf{Q}_{ц\,m_2}$ ($\mathbf{Q}_{ц\,m_1}\Leftrightarrow\mathbf{Q}_{ц\,m_2}$, $m_1, m_2\in\mathbf{Z}$), тобто з того, що аргументи $t\in\mathbf{W}_{ц_{m_1}}$ та $t'\in\mathbf{W}_{ц_{m_2}}$ перебувають у бієктивній пов'язаності ($t'\leftrightarrow t$), в силу бієкції між $\mathbf{Q}_{ц\,m}$ та $\mathbf{W}_{ц_m}$, слідує, що в такій бієктивній пов'язаності будуть і відповідні пари: $(t, f(t))\leftrightarrow(t', f(t'))$;

б) внаслідок співпадіння типів упорядкування областей визначення $\mathbf{W}_{ц_{m_1}}$ та $\mathbf{W}_{ц_{m_2}}$ співпадають типи упорядкування пар функціональних відношень $\mathbf{Q}_{ц\,m_1}$ та $\mathbf{Q}_{ц\,m_2}$, тобто: для будь-яких різних пар $(t_1, f(t_1)), (t_2, f(t_2))\in\mathbf{Q}_{ц_{m_1}}$, що перебувають у бієктивній пов'язаності із парами $(t_1', f(t_1')), (t_2', f(t_2'))\in\mathbf{Q}_{ц_{m_2}}$ ($(t_1, f(t_1))\leftrightarrow(t_1', f(t_1'))$, $(t_2, f(t_2))\leftrightarrow(t_2', f(t_2'))$), мають місце відношення порядку $(t_2, f(t_2))>(t_1, f(t_1))$ та $(t_2', f(t_2'))>(t_1', f(t_1'))$, якщо $t_2'>t_1'$ та $t_2>t_1$ ($t_1'\leftrightarrow t_1, t_2'\leftrightarrow t_2$).

Упорядковані функціональні відношення, тип упорядкування яких однаковий, будемо називати ізоморфними відносно порядку функціональними відношеннями. Ще раз відмітимо, що введені нами функціональні відношення $\mathbf{Q}_{ц\,m}=\{(t, f(t)), t\in\mathbf{W}_{ц_m}\}\subset\mathbf{Q}$ є упорядкованими за областями свого визначення $\mathbf{W}_{ц_m}$.

Враховуючи наведене вище, підкреслимо, що маємо ізоморфізм відносно порядку як між елементами розбиття $\mathbf{D}_{\mathbf{Q}}^{ц}=\{\mathbf{Q}_{ц\,m}\subset\mathbf{Q}, m\in\mathbf{Z}\}$ та елементами розбиття $\mathbf{D}_{\mathbf{W}}^{ц}=\{\mathbf{W}_{ц_m}, m\in\mathbf{Z}\}$ між самими собою, так і між довільними парами $\mathbf{Q}_{ц\,m_1}$ та $\mathbf{W}_{ц_{m_2}}$, $m_1, m_2\in\mathbf{Z}$, що взяті із відповідних розбиттів $\mathbf{D}_{\mathbf{Q}}^{ц}$ та $\mathbf{D}_{\mathbf{W}}^{ц}$.

Введене нами таким чином розбиття $\mathbf{D}_{\mathbf{Q}}^{ц}=\{\mathbf{Q}_{ц\,m}\subset\mathbf{Q}, m\in\mathbf{Z}\}$ функціонального відношення $\mathbf{Q}$ на ізоморфні відносно порядку функціональні відношення є першим етапом формалізації поняття множини циклів циклічного сигналу. Ще одним необхідним етапом математичної формалізації поняття циклу циклічного сигналу є введення певної властивості, а точніше атрибуту, що мають пари $(t, f(t))$ функціонального відношення $\mathbf{Q}$, відносно якого лише і можна говорити про ту чи іншу повторюваність у структурі циклічного сигналу. Такими атрибутами можуть бути: 1) значення циклічної функції (наприклад, для детермінованих числових, векторних, матричних періодичних функцій), коли циклічність мислиться в сенсі рівності значень функціонального відношення для його бієктивно пов'язаних пар, які взяті у різних його циклах; 2) певні характеристики циклічної функції, зокрема такі, відносно яких вводиться еквівалентність значень циклічної функції для бієктивно пов'язаних пар (наприклад, стохастична еквівалентність у вузькому чи широкому сенсах для періодичних випадкових процесів, еквівалентність відносно математичного сподівання та змішаного центрального моменту другого порядку для періодично корельованих випадкових процесів, еквівалентність векторів в сенсі рівності їх норм для періодичного відносно норми вектора функцій, еквівалентність квадратних матриць в сенсі рівності їх визначників для періодичної відносно визначника функціональної матриці); еквівалентність самих бієктивно пов'язаних пар функціонального відношення в сенсі рівності відношень значення функції до значення деякої функції її аргумента для амплітудно модульованої періодичної несучої, належність одному і тому ж інтервалу значень циклічної функції для бієктивно пов'язаних пар (наприклад, для майже періодичних функцій), і т.п.

Перейдемо до математичної формалізації таких атрибутів. Для цього введемо зліченновимірний вектор відображень $\{p_m\langle(t_m, f(t_m))\rangle\in\mathbf{A}, t_m\in\mathbf{W}_{ц_m}, m\in\mathbf{Z}\}$, які визначені на ізоморфних відносно порядку функціональних відношеннях $\mathbf{Q}_{ц_m}, m \in \mathbf{Z}$, а області їх значень є множиною деяких атрибутів $\mathbf{A} = \{p_\beta, \beta \in \mathbf{B}\}$ (наприклад, чисел, векторів, функцій). Отже, кожній парі $(t_m, f(t_m))$ функціонального відношення $\mathbf{Q}_{ц_m}$ поставимо у відповідність деякий атрибут $p_\beta \in \mathbf{A}$. Причому для кожного функціонального відношення $p_m\langle(t_m, f(t_m))\rangle \in \mathbf{A}, t_m \in \mathbf{W}_{ц_m}$, $\exists t_m, t'_m \in \mathbf{W}_{ц_m}$, що $p_m\langle(t_m, f(t_m))\rangle \neq p_m\langle(t'_m, f(t'_m))\rangle$. Дані функціональні відношення $\{p_m\langle(t_m, f(t_m))\rangle \in \mathbf{A}, t_m \in \mathbf{W}_{ц_m}, m \in \mathbf{Z}\}$ повинні бути строго узгоджені із відношеннями порядку, які задані на функціональних відношеннях $\mathbf{Q}_{ц_m}, m \in \mathbf{Z}$, тому дамо означення ізоморфних відносно порядку та множини атрибутів $\mathbf{A} = \{p_\beta, \beta \in \mathbf{B}\}$ функціональних відношень $\mathbf{Q}_{ц_m}, m \in \mathbf{Z}$.

Означення 3. Ізоморфні відносно порядку функціональні відношення $\mathbf{Q}_{ц_m}, m \in \mathbf{Z}$, що упорядковані за своїми областями визначення $\mathbf{W}_{ц_m}, m \in \mathbf{Z}$, будемо називати ізоморфними відносно порядку та множини атрибутів $\mathbf{A} = \{p_\beta, \beta \in \mathbf{B}\}$, якщо на кожному $\mathbf{Q}_{ц_m}$ задано відображення $p_m\langle(t_m, f(t_m))\rangle \in \mathbf{A}, t_m \in \mathbf{W}_{ц_m}$ та для всіх бієктивно пов'язаних пар $(t_{m_1}, f(t_{m_1})) \leftrightarrow (t_{m_2}, f(t_{m_2}))$ двох довільних функціональних відношень $\mathbf{Q}_{ц_{m_1}}$ та $\mathbf{Q}_{ц_{m_2}}$ ($m_1, m_2 \in \mathbf{Z}$), має місце рівність:

$$p_{m_1}\left\langle\left(t_{m_1}, f\left(t_{m_1}\right)\right)\right\rangle = p_{m_2}\left\langle\left(t_{m_2}, f\left(t_{m_2}\right)\right)\right\rangle \in \mathbf{A}, t_{m_1} \in \mathbf{W}_{ц_{m_1}}, t_{m_2} \in \mathbf{W}_{ц_{m_2}}, m_1, m_2 \in \mathbf{Z}. \quad (2)$$

Розглянуті нами математичні структури дають змогу чітко ввести поняття циклічного функціонального відношення як узагальненої математичної моделі циклічних сигналів, що адекватно і несуперечливо відображає їх циклічну структуру для досить широкого класу таких сигналів.

Означення 4. Упорядковане за областю визначення $\mathbf{W}$ функціональне відношення $\mathbf{Q} \subset \mathbf{W} \times \mathbf{\Psi}$, із областю значень $\mathbf{\Psi}$, будемо називати циклічним за множиною атрибутів $\mathbf{A} = \{p_\beta, \beta \in \mathbf{B}\}$ функціональним відношенням, якщо існує таке його найдрібніше упорядковане зліченне розбиття $\mathbf{D}^ц_{\mathbf{Q}} = \{\mathbf{Q}_{ц_m}, m \in \mathbf{Z}\}$ на ізоморфні відносно порядку та множини атрибутів $\mathbf{A} = \{p_\beta, \beta \in \mathbf{B}\}$ функціональні відношення.

У подальшому, з метою спрощення, будемо використовувати термін "циклічне функціональне відношення" або "циклічна функція", розуміючи, що циклічність мислиться відносно певних атрибутів $\mathbf{A} = \{p_\beta, \beta \in \mathbf{B}\}$. Виходячи із означення циклічного функціонального відношення, легко дати математичне означення поняттю циклу та множини циклів циклічного сигналу.

Означення 5. Найдрібніше впорядковане розбиття $\mathbf{D}^ц_{\mathbf{Q}} = \{\mathbf{Q}_{ц_m}, m \in \mathbf{Z}\}$ циклічного функціонального відношення $\mathbf{Q}$, елементи якого є ізоморфними відносно порядку та множини атрибутів $\mathbf{A} = \{p_\beta, \beta \in \mathbf{B}\}$, будемо називати ***розбиттям на цикли***, а будь-який його елемент $\mathbf{Q}_{ц_m}$ - m-ним ***циклом*** циклічного функціонального відношення $\mathbf{Q}$.

Тобто, m-ний цикл – це функціональне відношення $\mathbf{Q}_{ц_m}$, яке є звуженням циклічного функціонального відношення $\mathbf{Q}$ на область $\mathbf{W}_{ц_m}$.

Означення 6. Проекцію $\mathbf{\Psi}_{ц_m} = \mathbf{Пр}_{\mathbf{\Psi}}\{\mathbf{Q}_{ц_m}\}$ функціонального відношення $\mathbf{Q}_{ц_m}$ на множину $\mathbf{\Psi}$ будемо називати ***областю значень циклу*** $\mathbf{Q}_{ц_m}$.

Означення 7. Проекцію $\mathbf{W}_{ц_m} = \mathbf{Пр_W}\{\mathbf{Q}_{ц_m}\}$ функціонального відношення $\mathbf{Q}_{ц_m}$ на множину $\mathbf{W}$ будемо називати ***областю визначення циклу*** $\mathbf{Q}_{ц_m}$.

Отже, цикл $\mathbf{Q}_{ц_m}$ функціонального відношення $\mathbf{Q}$ є таким декартовим добутком:

$$\mathbf{Q}_{ц_m} = \mathbf{W}_{ц_m} \times \mathbf{\Psi}_{ц_m}. \tag{3}$$

Введене означення циклу функціонального відношення $\mathbf{Q}$ формалізує загальнонаукове поняття циклу циклічного сигналу та коливного процесу.

Ще одним базовим поняттям, яке характеризує певний етап, стадію у розгортанні коливного руху, є поняття фази. Введені вище математичні структури, що формалізують поняття циклу та циклічного сигналу, є достатніми для того, щоб коректно означити поняття фази як математичного об'єкту. Проведемо таку формалізацію.

Із розбиттями $\mathbf{D}_\mathbf{W}^ц$ та $\mathbf{D}_\mathbf{Q}^ц$ пов'язані ще два розбиття $\mathbf{D}_\mathbf{W}^\phi$ та $\mathbf{D}_\mathbf{Q}^\phi$, які використовуються при формалізації поняття фази циклічного сигналу. Покажемо, як утворюються розбиття $\mathbf{D}_\mathbf{W}^\phi$ та $\mathbf{D}_\mathbf{Q}^\phi$.

Нехай маємо область визначення $\mathbf{W}_{ц_{m_1}}$ m_1-го циклу $\mathbf{Q}_{ц_{m_1}}$. Для будь-якого $t_{m_1}^\alpha \in \mathbf{W}_{ц_{m_1}}$ в області визначення $\mathbf{W}_{ц_{m_2}}$, $m_2 \in \mathbf{Z}$ довільного m_2-го циклу $\mathbf{Q}_{ц_{m_2}}$ існує лише один елемент $t_{m_2}^\alpha \in \mathbf{W}_{ц_{m_2}}$, що бієктивно пов'язаний із $t_{m_1}^\alpha$ ($t_{m_1}^\alpha \leftrightarrow t_{m_2}^\alpha$), оскільки між множинами $\mathbf{W}_{ц_{m_1}}$ та $\mathbf{W}_{ц_{m_2}}$ має місце взаємооднозначне відображення (бієкція). Оскільки маємо зліченновимірну множину областей $\mathbf{W}_{ц_m}$, то відповідно для кожного $t_{m_1}^\alpha$ будемо мати зліченновимірну множину $\mathbf{W}_{\phi_\alpha}$ елементів t_m^α, що бієктивно пов'язані із ним. Множина $\mathbf{W}_{\phi_\alpha}$ всіх бієктивно пов'язаних елементів із елементом $t_{m_1}^\alpha$ визначається так:

$$\mathbf{W}_{\phi_\alpha} = \left\{t_m^\alpha : t_{m_1}^\alpha \leftrightarrow t_m^\alpha,\, m_1 = const,\, m \in \mathbf{Z}\right\}. \tag{4}$$

Для кожного фіксованого $t_{m_1}^\alpha \in \mathbf{W}_{ц_{m_1}}$ будемо мати свою множину $\mathbf{W}_{\phi_\alpha}$. Якщо ж $t_{m_1}^\alpha$ пробіжить всю упорядковану множину $\mathbf{W}_{ц_{m_1}}$, то отримаємо впорядковане по індексу α розбиття $\mathbf{D}_\mathbf{W}^\phi = \left\{\mathbf{W}_{\phi_\alpha}, \alpha \in \mathbf{I} \subset \mathbf{R}\right\}$ ($\mathbf{I}$-індексна числова множина) області визначення $\mathbf{W}$ циклічного функціонального відношення $\mathbf{Q}$. Індексна числова множина $\mathbf{I}$ може бути прийнята рівною будь-якій із множин $\mathbf{W}_{ц_m}$. Приймемо, що $\mathbf{I} = \mathbf{W}_{ц_0}$. У випадку, коли $\mathbf{W} = \mathbf{R}$, розбиття $\mathbf{D}_\mathbf{W}^\phi$ є незліченним, тобто індексна множина $\mathbf{I}$ є незліченною і рівною півінтервалу: $\mathbf{I} = \mathbf{W}_{ц_0} = [t_0, t_1)$, у випадку, коли $\mathbf{W} = \mathbf{D}$, розбиття $\mathbf{D}_\mathbf{W}^\phi$ містить рівно L множин, а індексна множина є скінченною і рівною $\mathbf{I} = \mathbf{W}_{ц_0} = \left\{t_{0l},\, l = \overline{1, L}\right\}$.

Утворимо впорядковане за індексом α розбиття $\mathbf{D}_\mathbf{Q}^\phi = \left\{\mathbf{Q}_{\phi_\alpha}, \alpha \in \mathbf{I}\right\}$ циклічного функціонального відношення $\mathbf{Q}$ шляхом бієктивного відображення елементів $\mathbf{W}_{\phi_\alpha}$ розбиття $\mathbf{D}_\mathbf{W}^\phi = \left\{\mathbf{W}_{\phi_\alpha}, \alpha \in \mathbf{I}\right\}$ на підмножини (функціональні відношення) $\mathbf{Q}_{\phi_\alpha}$ функціонального відношення $\mathbf{Q}$, тобто, кожному $\mathbf{W}_{\phi_\alpha}, \alpha \in \mathbf{I}$ поставимо у відповідність підмножину $\mathbf{Q}_{\phi_\alpha} = \left\{(t, f(t)), t \in \mathbf{W}_{\phi_\alpha}\right\} \subset \mathbf{Q}$ тих пар $(t, f(t))$ відношення $\mathbf{Q}$, аргумент t яких належить $\mathbf{W}_{\phi_\alpha}$ ($t \leftrightarrow (t, f(t)), t \in \mathbf{W}_{\phi_\alpha}$). Оскільки $\mathbf{W}_{\phi_\alpha}$ - це злічення множина (4), то і $\mathbf{Q}_{\phi_\alpha}$ - також злічення множина, яка визначається так:

$$\mathbf{Q}_{\phi_\alpha} = \left\{\left(t_m^\alpha, f\left(t_m^\alpha\right)\right) : t_{m_1}^\alpha \leftrightarrow t_m^\alpha,\, m_1 = const,\, m \in \mathbf{Z}\right\}. \tag{5}$$

Оскільки індикаторна числова множина $\mathbf{I}$ є ізоморфною будь-якій множині $\mathbf{W}_{ц_m}$, то між елементами розбиття $\mathbf{D}_{\mathbf{Q}}^{\phi} = \{\mathbf{Q}_{\phi_\alpha}, \alpha \in \mathbf{I}\}$ та елементами будь-якої із множин $\mathbf{W}_{ц_m}$ має місце ізоморфізм. Причому тип упорядкування розбиття $\mathbf{D}_{\mathbf{Q}}^{\phi}$ визначається типом упорядкування елементів будь-якої із множин $\mathbf{W}_{ц_m}$, зокрема $\mathbf{W}_{ц_0}$, оскільки прийнято, що $\mathbf{I} = \mathbf{W}_{ц_0}$, тобто: $\forall \alpha_1 = t_1, \alpha_2 = t_2 \in \mathbf{W}_{ц_0}$, що $t_2 > t_1$, $\exists \mathbf{Q}_{\phi_{t_1}}, \mathbf{Q}_{\phi_{t_2}} \in \mathbf{D}_{\mathbf{Q}}^{\phi}$, що $t_1 \leftrightarrow \mathbf{Q}_{\phi_{t_1}}$, $t_2 \leftrightarrow \mathbf{Q}_{\phi_{t_2}}$ та має місце відношення порядку $\mathbf{Q}_{\phi_{t_2}} > \mathbf{Q}_{\phi_{t_1}}$, і навпаки.

Відзначимо, що $\mathbf{Q}_{\phi_\alpha}$ - це зліченна множина таких пар циклічного функціонального відношення $\mathbf{Q}$, серед яких немає жодних двох пар, що належать одному і тому ж його циклу, тобто серед елементів $\mathbf{Q}_{\phi_\alpha}$ немає жодних двох пар $\left(t_{m_1}^{\alpha}, f\left(t_{m_1}^{\alpha}\right)\right)$, $t_{m_1}^{\alpha} \in \mathbf{W}_{ц_{m_1}}$ та $\left(t_{m_2}^{\alpha}, f\left(t_{m_2}^{\alpha}\right)\right)$, $t_{m_2}^{\alpha} \in \mathbf{W}_{ц_{m2}}$, для яких би $\mathbf{W}_{ц_{m_1}} = \mathbf{W}_{ц_{m_2}}$.

Оскільки $\mathbf{Q}_{\phi_\alpha}$ - це сукупність бієктивно пов'язаних пар циклічного функціонального відношення, то згідно (2) для них усіх має місце рівність атрибутів, тобто:

$$p_{m_1}\left\langle\left(t_{m_1}^{\alpha}, f\left(t_{m_1}^{\alpha}\right)\right)\right\rangle = p_{m_2}\left\langle\left(t_{m_2}^{\alpha}, f\left(t_{m_2}^{\alpha}\right)\right)\right\rangle \in \mathbf{A}, t_{m_1}^{\alpha} \in \mathbf{W}_{ц_{m_1}}, t_{m_2}^{\alpha} \in \mathbf{W}_{ц_{m_2}}, m_1, m_2 \in \mathbf{Z}, t_{m_1}^{\alpha} \leftrightarrow t_{m_2}^{\alpha}. \quad (6)$$

Дамо означення фази циклічного функціонального відношення, що адекватно відображає поняття фази, стадії, етапу циклічного сигналу та коливного явища.

Означення 8. Упорядковане за індексом α розбиття $\mathbf{D}_{\mathbf{Q}}^{\phi} = \{\mathbf{Q}_{\phi_\alpha}, \alpha \in \mathbf{I}\}$ циклічного функціонального відношення $\mathbf{Q}$, елементи якого є функціональними відношеннями, що утворені згідно із (5), будемо називати **множиною фаз**, якщо кожний елемент множини $\mathbf{Q}_{\phi_\alpha}$ має одну і ту ж ознаку-атрибут, тобто має місце рівність (6) . Самі множини $\mathbf{Q}_{\phi_\alpha}$ будемо називати **фазами** циклічного функціонального відношення $\mathbf{Q}$.

Означення 9. Проекцію $\mathbf{A}_{\phi_\alpha} = \mathbf{Пр}_{\mathbf{\Psi}}\{\mathbf{Q}_{\phi_\alpha}\}$ функціонального відношення $\mathbf{Q}_{\phi_\alpha}$ на множину $\mathbf{\Psi}$ будемо називати ***областю значень фази*** $\mathbf{Q}_{\phi_\alpha}$.

Означення 10. Проекцію $\mathbf{W}_{\phi_\alpha} = \mathbf{Пр}_{\mathbf{W}}\{\mathbf{Q}_{\phi_\alpha}\}$ функціонального відношення $\mathbf{Q}_{\phi_\alpha}$ на множину $\mathbf{W}$ будемо називати ***областю визначення фази*** $\mathbf{Q}_{\phi_\alpha}$.

Отже, фаза $\mathbf{Q}_{\phi_\alpha}$ функціонального відношення $\mathbf{Q}$ є таким декартовим добутком:

$$\mathbf{Q}_{\phi_\alpha} = \mathbf{W}_{\phi_\alpha} \times \mathbf{A}_{\phi_\alpha}. \quad (7)$$

Множина проекцій $\{\mathbf{A}_{\phi_\alpha}, \alpha \in \mathbf{I}\}$ є впорядкованою за параметром α системою підмножин із $\mathbf{\Psi}$. Кожна множина $\mathbf{A}_{\phi_\alpha}$ визначається так:

$$\mathbf{A}_{\phi_\alpha} = \left\{f\left(t_m^{\alpha}\right): t_{m_1}^{\alpha} \leftrightarrow t_m^{\alpha}, m_1 = const, m \in \mathbf{Z}\right\}. \quad (8)$$

Відзначимо, що в загальному випадку множини $\mathbf{A}_{\phi_\alpha}$ є багатоелементними і можуть бути елементами розбиття або покриття лінійного простору $\mathbf{\Psi}$. У частинному випадку, коли значення однофазних пар функціонального відношення $\mathbf{Q}$ є рівними, то множини $\mathbf{A}_{\phi_\alpha}$ будуть одноелементними (наприклад, для періодичної функції).

Отже, упорядковане за областю визначення $\mathbf{W}$ циклічне функціональне відношення $\mathbf{Q}$ завжди можна подати у вигляді такого найдрібнішого розбиття на цикли, тобто:

$$\mathbf{Q} = \bigcup_{m \in \mathbf{Z}} \mathbf{Q}_{ц_m}, \ \mathbf{Q}_{ц_{m_1}} \bigcap \mathbf{Q}_{ц_{m_2}} = \varnothing, m_1 \neq m_2, m_1, m_2 \in \mathbf{Z}, \quad (9)$$

і для всіх бієктивно пов'язаних пар $\mathbf{Q}_{\phi_\alpha} = \{(t, f(t)), t \in \mathbf{W}_{\phi_\alpha}\} \subset \mathbf{Q}$, що у своїй сукупності утворюють фазу $\mathbf{Q}_{\phi_\alpha} \in \mathbf{D}_{\mathbf{Q}}^{\phi}$, має місце рівність (6).

Відзначимо той факт, що, на відміну від означення періодичної функції, в означенні циклічного функціонального відношення часова відстань між однофазними значеннями функції в різних сусідніх її циклах може бути різною, важливе лише збереження порядку слідування фаз у всіх циклах. Для характеристики часових закономірностей та співвідношень, що мають місце між однофазними відліками циклічної функції в різних її циклах, нижче введемо поняття структурної функції, а також введемо поняття функції ритму, яка формалізує поняття ритму та ритмічної структури циклічного сигналу.

Структурна функція та функція ритму циклічного функціонального відношення

Виходячи із означення циклічного функціонального відношення, сформулюємо наступну теорему.

Теорема 1. Для будь-якого циклічного за множиною атрибутів $\mathbf{A} = \{p_\beta, \beta \in \mathbf{B}\}$ функціонального відношення $\mathbf{Q} \subset \mathbf{W} \times \mathbf{\Psi}$ існує числова функція $y(t,n), t \in \mathbf{W}, n \in \mathbf{Z}$, для якої мають місце такі властивості:

1. a) $y(t,n) > t$, якщо $n > 0$ ($y(t,1) - t < \infty$);
   b) $y(t,n) = t$, якщо $n = 0$;
   c) $y(t,n) < t$, якщо $n < 0, t \in \mathbf{W}$. (10)
2. Для будь-яких $t_1 \in \mathbf{W}$ та $t_2 \in \mathbf{W}$, для яких $t_1 < t_2$, для функції $y(t,n)$ виконується строга нерівність:

$$y(t_1,n) < y(t_2,n), \forall n \in \mathbf{Z}, \tag{11}$$

та для циклічного функціонального відношення має місце рівність:

$$p\langle(t, f(t))\rangle = p\langle(y(t,n), f(y(t,n)))\rangle \in \mathbf{A}, t \in \mathbf{W}, n \in \mathbf{Z}, \tag{12}$$

причому для (12), існують такі $t_1, t_2 \in \mathbf{W}$, що $p\langle(t_1, f(t_1))\rangle \neq p\langle(t_2, f(t_2))\rangle$.

Якщо функція $y(t,n)$ є найменшою за модулем ($|y(t,n)| \le |y_\gamma(t,n)|$) серед усіх таких функцій $\{y_\gamma(t,n), \gamma \in \mathbf{\Gamma}\}$, які задовольняють (10) - (12), то така функція є лише одна і її будемо називати структурною функцією циклічного функціонального відношення.

І навпаки, якщо для функціонального відношення $\mathbf{Q} \subset \mathbf{W} \times \mathbf{\Psi}$ існує числова функція $y(t,n), t \in \mathbf{W}, n \in \mathbf{Z}$ із усіма вказаними вище властивостями та має місце рівність (12), то воно циклічне.

Доведення. Згідно з означенням циклічного функціонального відношення, будь-які його два цикли $\mathbf{Q}_{ц_{m_1}} = \{(t, f(t)), t \in \mathbf{W}_{ц_{m_1}}\}$ та $\mathbf{Q}_{ц_{m_2}} = \{(t, f(t)), t \in \mathbf{W}_{ц_{m_2}}\}$ є ізоморфними відносно порядку, причому цей ізоморфізм зумовлений ізоморфізмом областей їх визначення $\mathbf{W}_{ц_{m_1}}$ та $\mathbf{W}_{ц_{m_2}}$, що є звичайними числовими множинами. А ізоморфізм між числовими множинами $\mathbf{W}_{ц_{m_1}}$ та $\mathbf{W}_{ц_{m_2}}$ завжди встановлює деяка числова функція $t_{m_2} = y_{m_1 m_2}(t_{m_1}) \in \mathbf{W}_{ц_{m_2}}, t_{m_1} \in \mathbf{W}_{ц_{m_1}}$, тобто:

a) має місце бієкція між $\mathbf{W}_{ц_{m_1}}$ та $\mathbf{W}_{ц_{m_2}}$ ($m_1, m_2 \in \mathbf{Z}$), тобто: з будь-яким $t_{m_1} \in \mathbf{W}_{ц_{m_1}}$, зіставляється лише одне $t_{m_2} = y_{m_1 m_2}(t_{m_1}) \in \mathbf{W}_{ц_{m_2}}$, а з будь-яким $t_{m_2} \in \mathbf{W}_{ц_{m_2}}$ зіставляється лише одне $t_{m_1} = y_{m_2 m_1}(t_{m_2}) \in \mathbf{W}_{ц_{m_1}}$, причому для будь-яких різних $t_{m_1}, t'_{m_1} \in \mathbf{W}_{ц_{m_1}}$ їх образи $t_{m_2}, t'_{m_2} \in \mathbf{W}_{ц_{m_2}}$ є різними, і навпаки;

б) зберігається тип лінійного упорядкування множин $\mathbf{W}_{u_{m_1}}$ та $\mathbf{W}_{u_{m_2}}$, тобто: $\forall t_{m_1}, t'_{m_1} \in \mathbf{W}_{u_{m_1}}$, $\exists t_{m_2}, t'_{m_2} \in \mathbf{W}_{u_{m_2}}$, що $t_{m_2} = y_{m_1 m_2}(t_{m_1})$, $t'_{m_2} = y_{m_1 m_2}(t'_{m_1})$ та має місце відношення строгого порядку:

$$t_{m_2} = y_{m_1 m_2}(t_{m_1}) < y_{m_1 m_2}(t'_{m_1}) = t'_{m_2}, \text{ якщо } t_{m_1} < t'_{m_1}. \tag{13}$$

Отже, функція $t_{m_2} = y_{m_1 m_2}(t_{m_1}) \in \mathbf{W}_{u_{m_2}}$, $t_{m_1} \in \mathbf{W}_{u_{m_1}}$ є зростаючою числовою функцією, яка встановлює ізоморфізм між областями визначення $\mathbf{W}_{u_{m_1}}$ та $\mathbf{W}_{u_{m_2}}$, і як наслідок, обумовлює ізоморфізм між двома циклами $\mathbf{Q}_{u_{m_1}} = \{(t, f(t)), t \in \mathbf{W}_{u_{m_1}}\}$ та $\mathbf{Q}_{u_{m_2}} = \{(t, f(t)), t \in \mathbf{W}_{u_{m_2}}\}$ циклічного функціонального відношення.

У випадку, коли множини $\mathbf{W}_{u_{m_1}}$ та $\mathbf{W}_{u_{m_2}}$ є неперервними, числова функція $t_{m_2} = y_{m_1 m_2}(t_{m_1}) \in \mathbf{W}_{u_{m_2}}$, $t_{m_1} \in \mathbf{W}_{u_{m_1}}$ та обернена до неї функція $y_{m_2 m_1}(t_{m_2}) \in \mathbf{W}_{u_{m_1}}$, $t_{m_2} \in \mathbf{W}_{u_{m_2}}$ повинні бути неперервними, оскільки лише за цієї умови можна забезпечити бієкцію і, як наслідок, ізоморфізм відносно порядку між числовими множинами $\mathbf{W}_{u_{m_1}}$ та $\mathbf{W}_{u_{m_2}}$. Отже, у цьому випадку функція $t_{m_2} = y_{m_1 m_2}(t_{m_1})$ є гомеоморфізмом.

Оскільки пари $(t_{m_1}, f(t_{m_1})) \in \mathbf{Q}_{u_{m_1}}$ та $(t_{m_2}, f(t_{m_2})) = (y_{m_1 m_2}(t_{m_1}), f(y_{m_1 m_2}(t_{m_1}))) \in \mathbf{Q}_{u_{m_2}}$ є бієктивно пов'язаними і відносяться до однієї і тієї ж фази циклічного функціонального відношення $\mathbf{Q}$, то для них має місце таке співвідношення:

$$p_{m_1}\langle (t_{m_1}, f(t_{m_1})) \rangle = p_{m_2}\langle (t_{m_2}, f(t_{m_2})) \rangle = p_{m_2}\langle (y_{m_1 m_2}(t_{m_1}), f(y_{m_1 m_2}(t_{m_1}))) \rangle \in \mathbf{A},\ t_{m_1} \in \mathbf{W}_{u_{m_1}}, \tag{14}$$

тобто вони мають одну і ту ж ознаку-атрибут.

Врахувавши ізоморфізм між всіма можливими парами циклів циклічного функціонального відношення, введемо зліченновимірну матрицю зростаючих числових функцій, що встановлюють ізоморфізм між областями визначення відповідних його циклів, тобто таку матрицю:

$$\{y_{m_1 m_2}(t_{m_1}) \in \mathbf{W}_{u_{m_2}},\ t_{m_1} \in \mathbf{W}_{u_{m_1}},\ m_1, m_2 \in \mathbf{Z}\}, \tag{15}$$

причому на діагоналі функціональної матриці (15) при $m_1 = m_2 = m \in \mathbf{Z}$ будемо мати числові функціональні відношення тотожності, які є автоморфізмами відносно порядку, а при перестановці місцями індексів m_1 та m_2 функції $y_{m_1 m_2}(t_{m_1}) \in \mathbf{W}_{u_{m_2}}$, $t_{m_1} \in \mathbf{W}_{u_{m_1}}$ отримаємо обернену до неї числову зростаючу функцію $y_{m_2 m_1}(t_{m_2}) \in \mathbf{W}_{u_{m_1}}$, $t_{m_2} \in \mathbf{W}_{u_{m_2}}$.

Ввівши позначення $m_1 = m$, $m_2 = m + n, m, n \in \mathbf{Z}$ та врахувавши їх в індексах елементів матриці (15), тобто $t_{m+n} = y_{m,m+n}(t_m) = y(t_m, n)$, із матриці (15) отримаємо таку функціональну матрицю:

$$\{y(t_m, n) \in \mathbf{W}_{u_{m+n}},\ t_m \in \mathbf{W}_{u_m},\ m, n \in \mathbf{Z}\}, \tag{16}$$

кожен елемент якої встановлює ізоморфізм між областями визначення довільного m-ного циклу та $m+n$-ного циклу, що віддалений від нього на n циклів. Крім того, для всіх елементів матриці (16) мають місце такі нерівності:

a) $y(t_m, n) > t_m$, якщо $n > 0$, $\forall m \in \mathbf{Z}$;

b) $y(t_m, n) = t_m$, якщо $n = 0$, $\forall m \in \mathbf{Z}$;

c) $y(t_m, n) < t_m$, якщо $n < 0$, $\forall m \in \mathbf{Z}$. (17)

Перша властивість ($y(t_m, n) > t_m$, якщо $n > 0$) слідує з того, що $\forall t_m \in \mathbf{W}_{u_m}$, $m \in \mathbf{Z}$ та $\forall n > 0$, $\exists t_{m+n} = y(t_m, n) \in \mathbf{W}_{u_{m+n}}$, причому $t_{m+n} > t_m$, оскільки $n > 0$, а отже, $y(t_m, n) > t_m$.

Друга властивість ($y(t_m, n) = t_m$, якщо $n = 0$) слідує з того факту, що $t_{m+0} = t_m \in \mathbf{W}_{u_m}$, тому $y(t_m, 0) = t_m$.

Третя властивість ($y(t_m,n)<t_m$, якщо $n<0$) доводиться аналогічно першій: $\forall t_m \in \mathbf{W}_{ц_m}$, $m\in\mathbf{Z}$ та $\forall n<0$, $\exists t_{m+n}=y(t_m,n)\in\mathbf{W}_{ц_{m+n}}$, причому $t_{m+n}<t_m$, оскільки $n<0$, а отже, $y(t_m,n)<t_m$.

Оскільки для циклічного функціонального відношення $\mathbf{Q}\subset\mathbf{W}\times\mathbf{\Psi}$ існує ціла множина можливих його розбиттів $\{\mathbf{D}_{\mathbf{W}}^{ц_\alpha}, \alpha\in\mathbf{I}\}$ на цикли, то і відповідних цим розбиттям функціональних матриць (15) та (16) є множина, потужність якої така ж, як і потужність множини розбиттів $\{\mathbf{D}_{\mathbf{W}}^{ц_\alpha}, \alpha\in\mathbf{I}\}$ (потужність визначається потужністю індексної множини $\mathbf{I}$).

Однак, для всіх можливих функціональних матриць (16), що відповідають можливим розбиттям $\{\mathbf{D}_{\mathbf{W}}^{ц_\alpha}, \alpha\in\mathbf{I}\}$, існує одна і лише одна числова функція $y(t,n), t\in\mathbf{W}, n\in\mathbf{Z}$, яка рівна упорядкованому об'єднанню (сумі) елементів матриці (16) при фіксованому n:

$$\{(t,y(t,n)), t\in\mathbf{W}\}=\bigcup_{m\in\mathbf{Z}}\{(t_m,y(t_m,n)), t_m\in\mathbf{W}_{ц_m}\}, n\in\mathbf{Z}. \tag{18}$$

В силу упорядкованості об'єднання (18), числова функція $y(t,n), t\in\mathbf{W}, n\in\mathbf{Z}$, як і елементи матриці (16), є ізоморфізмом, а отже, для неї має місце строга нерівність (11), тобто при будь-якому фіксованому n функція $y(t,n), t\in\mathbf{W}, n\in\mathbf{Z}$ є зростаючою числовою функцією. Властивості (10) слідують із властивостей (17) компонент матриці (16), оскільки числова функція $y(t,n), t\in\mathbf{W}, n\in\mathbf{Z}$, власне, "зшита" із цих компонент.

Оскільки при фіксованому t ($t=const$) множина пар $\{(y(t,n), f(y(t,n))), n\in\mathbf{Z}\}$ є множиною бієктивно пов'язаних пар, що відносяться до однієї і тієї ж фази, а отже, мають одну і ту ж ознаку-атрибут, то для циклічного функціонального відношення завжди можна записати рівність (12). Тобто, відображення $p\langle(t,f(t))\rangle$ є упорядкованою по m сумою відображень $\{p_m\langle(t_m,f(t_m))\rangle\in\mathbf{A}, t_m\in\mathbf{W}_{ц_m}, m\in\mathbf{Z}\}$:

$$\{(t, p\langle(t,f(t))\rangle), t\in\mathbf{W}\}=\bigcup_{m\in\mathbf{Z}}\{(t_m, p_m\langle(t_m,f(t_m))\rangle), t_m\in\mathbf{W}_{ц_m}\}. \tag{19}$$

Відмітимо, що відображення $p\langle(t,f(t))\rangle$ не є константою, оскільки в теоремі 1 вимагається, щоб існували такі $t_1,t_2\in\mathbf{W}$, що $p\langle(t_1,f(t_1))\rangle\neq p\langle(t_2,f(t_2))\rangle$, а це завжди матиме місце, оскільки відображення $\{p_m\langle(t_m,f(t_m))\rangle\in\mathbf{A}, t_m\in\mathbf{W}_{ц_m}, m\in\mathbf{Z}\}$ не є константами.

Вимога обмеженості функції $y(t,n)-t$ при $n=1$ ($y(t,1)-t<\infty$), із необхідністю слідує з факту обмеженості тривалості циклів, що формально відображено у нерівностях $0<t_{m+1}-t_m<\infty$ та $0<t_{m+1,1}-t_{m,1}<\infty$ при розгляді розбиття $\mathbf{D}_{\mathbf{W}}^{ц}=\{\mathbf{W}_{ц_m}\subset\mathbf{W}, m\in\mathbf{Z}\}$. Вимога $|y(t,n)|\le|y_\gamma(t,n)|$ мінімальності модуля функції $y(t,n)$ серед функцій $\{y_\gamma(t,n), \gamma\in\mathbf{\Gamma}\}$, які задовольняють умовам (10) - (12), з необхідністю слідує із означення циклічного функціонального відношення, де вимагається існування найдрібнішого розбиття $\mathbf{D}_{\mathbf{Q}}^{ц}=\{\mathbf{Q}_{ц_m}, m\in\mathbf{Z}\}$.

Легко бачити, що, якщо для деякого функціонального відношення $\mathbf{Q}\subset\mathbf{W}\times\mathbf{\Psi}$ існує числова функція $y(t,n)$, яка задовольняє всім умовам теореми 1 та має місце рівність (12), то для нього існує найдрібніше розбиття на цикли $\mathbf{D}_{\mathbf{Q}}^{ц}=\{\mathbf{Q}_{ц_m}, m\in\mathbf{Z}\}$ та, як наслідок, розбиття на фази $\mathbf{D}_{\mathbf{Q}}^{\phi}=\{\mathbf{Q}_{\phi_\alpha}, \alpha\in\mathbf{I}\}$, а тому воно є циклічним.

Теорему 1 доведено.

Будемо розглядати адитивну форму зображення структурної функції $y(t,n)=t+T(t,n)$, де $T(t,n)$ - функція ритму циклічного функціонального відношення

$\mathbf{Q}$ [1, 2]. Відзначимо, що для задання структурної функції та функції ритму достатньо їх задати не на всій області визначення $\mathbf{W}$ циклічного функціонального відношення, а лише на області визначення $\mathbf{W}_{ц_m}$ його довільного m-ного циклу.

Розглянемо питання інтерпретації структурної функції $y(t,n), t \in \mathbf{W}, n \in \mathbf{Z}$ та модуля функції ритму $T(t,n)$. Структурна функція $y(t,n), t \in \mathbf{W}, n \in \mathbf{Z}$ - це функція, що є ізоморфізмом відносно порядку між циклами циклічного функціонального відношення, тобто вона встановлює ізоморфізм між довільним m-м циклом $\mathbf{Q}_{ц\, m}$ та $m+n$-ним циклом $\mathbf{Q}_{ц\, m+n}$ циклічного функціонального відношення $\mathbf{Q}$. Стосовно функції ритму можна вказати таке. Впорядкована множина $\mathbf{W}_{\phi_\alpha} = \mathbf{Пр}_{\mathbf{W}}\{\mathbf{Q}_{\phi_\alpha}\}$, що є областю визначення фази $\mathbf{Q}_{\phi_\alpha}$ ($\alpha = const$), є метричним простором ізольованих точок із метрикою:

$$\rho(t_m^\alpha, t_{m+n}^\alpha) = |t_{m+n}^\alpha - t_m^\alpha|, t_m^\alpha, t_{m+n}^\alpha \in \mathbf{W}_{\phi_\alpha}, m,n \in \mathbf{Z}, \qquad (20)$$

яка рівна модулю функції ритму $T(t,n)$, тобто

$$\rho(t_m^\alpha, t_{m+n}^\alpha) = |t_m^\alpha + T(t_m^\alpha, n) - t_m^\alpha| = |T(t_m^\alpha, n)|, m,n \in \mathbf{Z}. \qquad (21)$$

Отже, модуль функції $T(t,n), t \in \mathbf{W}_{ц_0}, n \in \mathbf{Z}$ є метрикою в просторі $\mathbf{W}_{\phi_t}$, що є областю визначення однофазних значень циклічної функції.

Знаючи функцію ритму $T(t,n)$, можна встановити залежності між метриками просторів, які є елементами розбиття $\mathbf{D}_{\mathbf{W}}^{ц} = \{\mathbf{W}_{ц_m} \subset \mathbf{W}, m \in \mathbf{Z}\}$. Покажемо це. Нехай маємо m-ну множину $\mathbf{W}_{ц_m}$, що є метричним числовим простором із метрикою:

$$\rho(t_m, t'_m) = |t'_m - t_m|, t_m, t'_m \in \mathbf{W}_{ц_m}, m \in \mathbf{Z}. \qquad (22)$$

Тоді $\forall t_m, t'_m \in \mathbf{W}_{ц_m}$, $t'_m > t_m$ із метрикою $\rho(t_m, t'_m) = t'_m - t_m$ та $\forall n \in \mathbf{Z}$, $\exists t_{m+n}, t'_{m+n} \in \mathbf{W}_{ц_{m+n}}$, що $t_{m+n} = t_m + T(t_m, n)$, $t'_{m+n} = t'_m + T(t'_m, n)$, оскільки в силу (11) має місце нерівність $t'_{m+n} > t_{m+n}$, для яких метрика дорівнює:

$$\rho(t_{m+n}, t'_{m+n}) = t'_{m+n} - t_{m+n} = t'_m + T(t'_m, n) - t_m - T(t_m, n) = \qquad (23)$$
$$= t'_m - t_m + T(t'_m, n) - T(t_m, n) = \rho(t_m, t'_m) + T(t'_m, n) - T(t_m, n), t_m, t'_m \in \mathbf{W}_{ц_m}, t_{m+n}, t'_{m+n} \in \mathbf{W}_{ц_{m+n}}.$$

Якщо $T(t,n) = n \cdot T$, то $\rho(t_{m+n}, t'_{m+n}) = \rho(t_m, t'_m)$, $\forall m,n \in \mathbf{Z}$, $\forall t_m, t'_m \in \mathbf{W}_{ц_m}$, $t_{m+n}, t'_{m+n} \in \mathbf{W}_{ц_{m+n}}$, тобто у цьому випадку маємо ізометричні відображення між областями визначення всіх циклів циклічного функціонального відношення, а отже, метричні деформації відсутні.

Виходячи із розглянутих вище фактів та базуючись на результатах робіт [1, 2], відзначимо, що лише чотири математичні об'єкти (область визначення $\mathbf{W}$, область значень $\mathbf{\Psi}$, множина атрибутів $\mathbf{A} = \{p_\beta, \beta \in \mathbf{B}\}$ та функція ритму $T(t,n)$) лежать в основі класифікації широкого класу математичних моделей циклічних сигналів, що вказує на достатню повноту та компактність розробленого підходу.

Термінологічно-понятійна база теорії моделювання та аналізу циклічних сигналів в інформаційних системах та розглянутий у роботі математичний формалізм адекватно, несуперечливо і вичерпно описують атрибутивні властивості коливних явищ та циклічних сигналів, дозволяють узагальнити, впорядкувати, уніфікувати та суттєво розширити математичні засоби опису коливних, циклічних явищ та сигналів.

Висновки

1. Дано означення циклічного функціонального відношення як узагальненої математичної моделі циклічних сигналів різної природи та часово-просторової структури. Як показано в роботах [1-9], введене поняття циклічного функціонального

відношення лежить в основі розробки математичного апарату теорії моделювання та аналізу циклічних явищ та сигналів як точної області науки. Це розширило множину математичних моделей, що описують циклічні сигнали як в детермінованому, так і стохастичному підходах та більш адекватно враховують особливості структури циклічного сигналу.

2. Такі базові поняття циклічного, коливного руху як цикл, фаза, ритм отримали чітку математичну інтерпретацію.

3. На основі доведеної теореми встановлено атрибутивні властивості циклічного функціонального відношення. Введено поняття та дано інтерпретацію структурної функції та функції ритму циклічного функціонального відношення.

Література

1. Лупенко С. Циклічні функції та їх класифікація в задачах моделювання циклічних сигналів та коливних систем // Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах. - 2005. - №1. - С. 177-185.
2. Лупенко С.А. Детермнированные и случайные циклические функции как модели колебательных явлений и сигналов: определение и классификация // Электронное моделирование.- 2006. –Т. 28, №4.– С.47-65.
3. Лупенко С.А. Статистичні методи сумісної обробки сукупності ритмічно пов’язаних циклічних випадкових процесів // Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах. - 2005. - №2. - С. 80-84.
4. Лупенко С.А. Статистичні методи обробки циклічного випадкового процесу // Електроніка та системи управління.- 2006. – №2 (8).-С.59-65.
5. Лупенко С.А, Луцків А.М. Імітаційне моделювання циклічних випадкових процесів на ЕОМ // Науковий вісник Національного лісотехнічного університету України.– 2006. - Вип.16.6. - С. 110-120.
6. Лупенко С. Особливості дискретизації циклічних функцій // Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах.– 2006. - №1. - С. 64-70.
7. Лупенко С.А. Задача інтерполяції функції ритму циклічної функції із відомою зонною структурою // Електроніка та системи управління.- 2007.- №2 (12). – С.27-35.
8. Лупенко С., Студена Ю. Математичне моделювання сигналів серця в задачах технічної кардіометрії на базі їх моделі у вигляді циклічного випадкового процесу // Вісник Тернопільського державного технічного університету.- 2006. -Т. 11, №1. -С.134-142.
9. Литвиненко Я., Лупенко С., Студена Ю. Методи статистичної обробки сигналів серця на базі їх моделі у вигляді циклічного випадкового процесу із зонною часовою структурою // Вісник Тернопільського державного технічного університету.- 2006. -Т. 11, №4. -С.189-200.

Одержано 05.07.2007 р.