

1. Горбунов А.Д., Шахов Ю.А. О приближенном решении задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений с наперед заданным числом верных знаков. I // Журн. вычислит. математики и матем. физики. – 1963. – Т. 3, № 2.- С. 239-253.
2. Пелех Я.М. Про один підхід до знаходження наближених розв'язків задачі Коші для нелінійних диференціальних рівнянь // Укр.матем.журнал. – 1992. – Т. 44. № 12. – С.1695–1701.
3. Ляшко И.И., Макаров В.Л., Скоробогатько А.А. Методы вычислений. – Киев: Вища школа, 1977. – 408 с.
4. Шахов Ю.А. Решение задачи Коши с наперед заданным числом верных знаков для обыкновенного дифференциального уравнения // Вопросы вычислительной математики – Труды ВЦ АН ГрузССР. - Тбилиси.- 1973. – Т. 12. № 1. – С. 105-117.
5. Деккер К., Вервер Я. Устойчивость методов Рунге-Кутты для жестких дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1988. – 332 с.

Одержано 14.07.2007 р.

УДК 621.793.927.7

**О.Шаблій, докт. фіз.-мат. наук; Ч.Пулька, докт. техн. наук;  
М.Михайлишин, канд. фіз.-мат. наук**

*Тернопільський державний технічний університет імені Івана Пулюя*

## **МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ОСТИГАННЯ ДИСКА ПІСЛЯ НАПЛАВЛЕННЯ НАГРІВАЛЬНОЮ СИСТЕМОЮ ІНДУКТОР, ТЕПЛОВИЙ ТА ЕЛЕКТРОМАГНІТНИЙ ЕКРАНИ**

*Отримано математичну модель для визначення температурного поля остигання диска після його наплавлення за допомогою нагрівальної системи, яка складається з індуктора, теплового та електромагнітного екранів (ITEE). Запропоновано формули для визначення температури диска в процесі остигання після індукційного наплавлення.*

**O.Shabliy, Ch.Pulka, M.Mykhailyshyn**

## **MATHEMATICAL MODEL OF COOLING THE DISC AFTER SURFACING BY MEANS OF HEATING SYSTEM INDUCTOR, THERMAL AND ELECTROMAGNETIC SCREENS**

*The mathematical model to determine the thermal field of cooling the disc being surfaced by means of the heating system consisting of inductor, thermal and electromagnetic screens (ITEMS) is obtained. The formula to determine the disc temperature under cooling after the inductive surfacing is proposed.*

В роботі [1] проведені теоретичні дослідження з оптимізації конструктивних параметрів нагрівальної системи, яка складається з індуктора, теплового та електромагнітного екранів (ITEE) [2], що дозволяє реалізувати енергоощадний режим нагрівання диска [3] з метою одночасного його наплавлення по всій робочій поверхні. Важливою технологічною операцією при індукційному наплавленні є остигання диска після наплавлення нагрівальною системою із забезпеченням в готовому виробі необхідних конструктивних розмірів.

Керуючи способом остигання (примусове, вільне) і його тривалістю, можна регулювати конструктивні розміри (прогини) готових дисків. Дана робота присвячена теоретичному та експериментальному дослідженню процесу остигання диска після наплавлення порошковим твердим сплавом ПГ-С1 (сормайт) на основний метал сталь Ст.3.

Після досягнення необхідної температури наплавлення джерело нагрівання вимикають і диск вільно остигає. На диск у цьому випадку діє тільки тепловий екран, який розміщений біля зовнішнього краю диска  $r = r_2$ , віднесеного до циліндричної системи координат.

Рівняння вільного остигання диска має вигляд:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} - m^2 T - \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} = 0, \quad (1)$$

де  $m^2 = \frac{Bi}{2h^2}$ ;  $Bi = \frac{2h\alpha}{\lambda}$ ;  $2h$  - товщина диска;  $\alpha$  - коефіцієнт тепловіддачі в середовищі при відсутності екрану;  $\lambda$  - коефіцієнт теплопровідності матеріалу диска;  $T = T_l - T_c$ ;  $T_l$  і  $T_c$  - відповідно температура диска і середовища;  $t$  - біжучий час.

Внаслідок того, що температура розподілена симетрично відносно центру диска, можемо записати таку умову:

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 0; \text{ при } r=0.$$

На краю диска, де маємо теплове екранування, гранична умова матиме вигляд

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial r} + K_T \alpha T = 0, \quad (2)$$

де  $K_T = \frac{\lambda_T}{d_T \alpha}$ ,  $d_T$  - товщина екрану,  $\lambda_T$  - коефіцієнт теплопровідності матеріалу екрану.

Будемо шукати розв'язок рівняння (1) у формі

$$T = C J_0(\nu r) e^{-a\lambda^2 t}. \quad (3)$$

Підставивши вираз (3) в граничну умову (2), отримаємо

$$C \nu [-J_1(\nu r_2)] e^{-a\lambda^2 t} + K_T \alpha C J_0(\nu r_2) e^{-a\lambda^2 t} = 0.$$

Звідси після ділення на  $C \cdot e^{-a\lambda^2 t}$  отримаємо рівняння для визначення  $\nu$ :

$$-\nu J_1(\nu r_2) + K_T \alpha J_0(\nu r_2) = 0. \quad (4)$$

Оскільки коренів цього рівняння - нескінченна кількість, то розв'язком рівняння (1) буде така лінійна комбінація

$$T = \sum_{j=1}^{\infty} C_j J_0(\nu_j r) \cdot e^{-a\lambda_j^2 t}. \quad (5)$$

Для знаходження коефіцієнтів  $C_j$  використаємо умову, що в момент початку остигання  $t = \tau$  температура рівна кінцевій температурі наплавлення  $T_\tau(r)$ .

Тобто

$$T = T_\tau(r) \text{ при } t = \tau. \quad (6)$$

Враховуючи те, що функції  $J_0(\nu_j r)$  і  $J_0(\nu_k r)$  є ортогональними на проміжку  $[0, r_2]$  з вагою  $r$  при  $j \neq k$  домножимо вираз для температури (5) на  $J_0(\nu_j r)$  і проінтегрувавши його в границях від 0 до  $r_2$ , будемо мати формулу

$$\int_0^{r_2} T_\tau J_0(\nu_j r) r dr = C_j e^{-a\lambda_j^2 \tau} \int_0^{r_2} [J_0(\nu_j r)]^2 r dr,$$

яка при  $t = \tau$  набуде вигляду

$$\int_0^{r_2} T_\tau(r) J_0(\nu_j r) r dr = C_j e^{-a\lambda_j^2 \tau} \int_0^{r_2} [J_0(\nu_j r)]^2 r dr.$$

З цієї формули знаходимо

$$C_j = \frac{\int_0^{r_2} T_\tau(r) J_0(\nu_j r) r dr}{e^{-a\lambda_j^2 \tau} \int_0^{r_2} [J_0(\nu_j r)]^2 r dr}. \quad (7)$$

Підставляючи коефіцієнти  $C_j$ , знайдені за формулою (7), у вираз для визначення температури (5), отримаємо кінцеву формулу для знаходження температури остигання диска:

$$T = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\int_0^{r_2} T_{\tau}(r) J_0(\nu_j r) r dr}{\int_0^{r_2} [J_0(\nu_j r)]^2 r dr} J_0(\nu_j r) \cdot e^{a \lambda_j^2 (\tau - t)}, \quad (8)$$

в якій корені  $\nu_j$  визначаються з рівняння (4).

З цієї формули також видно, що кінцева температура нагрівання однозначно визначає температуру остигання.

Для прикладу проведено обчислення температурного поля диска в процесі його остигання в різні моменти часу (наведені в таблиці).

На рис. 1 і 2 представлені графіки температурного поля при остиганні, знайдені за формулою (8), у випадку, коли товщина екрану  $d_T = 0,02$  м;  $\lambda_T = 0,17 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot ^\circ\text{C}}$ ;  $\alpha_T = 8,5 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot ^\circ\text{C}}$ , а ширина зони наплавлення відповідно дорівнює 50 мм і 20 мм (суцільні лінії).

Коефіцієнт теплового екрану  $K_T = 0,0192$ .

Розроблено також інженерний варіант визначення температурного поля, в якому допускається, що температура по ширині в зоні наплавлення є постійна.

Тоді в цій зоні має місце рівняння теплопровідності:

$$-m^2 T_{01} - \frac{1}{a} \frac{\partial T_{01}}{\partial t} = 0. \quad (9)$$

Його розв'язок при часовій умові  $T = T_{30}$  при  $t = \tau$  має вигляд:

$$T = T_{30} e^{am^2(\tau-t)} \text{ при } r_3 \leq r \leq r_2. \quad (10)$$

В зоні за межами наплавлення температурне поле добре апроксимується експоненціальною залежністю у вигляді

$$T = T_{30} e^{am^2(\tau-t)} \cdot e^{\frac{r-r_3}{\beta}}, [\beta] = m, r \leq r_3, \quad (11)$$

в якому  $\beta$  назвемо коефіцієнтом системи, який визначається з умови найкращого співпадання температури, визначеної за приблизною формулою (11) з температурою, яка знайдена за формулою (8) при  $t = \tau$ .

З графіків, представлених на рис.2, видно, що температура, визначена з допомогою формули (11), достатньо точно співпадає з температурою, знайденою за допомогою формули (8). Для збільшення точності визначення температури за приблизними формулами (10) і (11) тут також вводиться корегуючий коефіцієнт, який у вигляді множника  $m^2$  дорівнює 1,135. При підрахунках у формулах (10) і (11) слід ставити замість  $m^2$  –  $1,135m^2$ . Знайдена температура за уточненими формулами відрізняється від температури, визначеної з допомогою формули (8), не більше, як на 5...7,5% (суцільні лінії і лінії, зображені з допомогою трикутних знаків).

Отримані таким чином приблизні формули дають можливість проводити інженерні розрахунки температурного поля, яке створюється в диску даною нагрівальною системою.

На рис. 3 наведені режими нагрівання диска та його остигання в довільній точці зони наплавлення у випадках, коли ширина зони наплавлення дорівнює 50 і 20 мм. Нагрівання диска здійснюється за енергоощадним законом, а остигання – вільне. Температурні режими в зоні наплавлення практично однакові і не залежать від ширини зони наплавлення.







**Висновки**

1. Розроблена математична модель остигання диска після наплавлення нагрівальною системою ІТЕЕ дозволяє визначати температурне поле в диску за більш точним і інженерним варіантами, похибка між ними складає 5,0-7,5%.
2. Перевірені теоретично отримані величини температур з експериментальними даними при остиганні диска добре узгоджуються, розходження складає 1-5%.

**Література**

1. О.Шаблій, Ч.Пулька. Математична модель оптимізації конструктивних параметрів нагрівальної системи з урахуванням комбінованого екранування теплових та електромагнітних полів // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – 2007. – № 2. – С. 66-76.
2. Пристрій для регулювання потужності в зоні наплавлення. Деклараційний патент UA. №58943A, B23K13/00/Шаблій О.М., Пулька Ч.В., Михайлишин М.С. та ін. – №2002119491; Заявл. 28.11.2002; Опубл. 17.11.2003, Бюл. №11.
3. Шаблій О.М., Пулька Ч.В., Письменний О.С. Програмне керування процесом індукційного наплавлення по оптимальному режиму // Зб. наук. праць присвячений 100-річчю механіко-машинобудівного і 50-річчю зварювального факультетів. – Том IV. 1998. – С.344-345.

Одержано 03.07.2007 р.

УДК 319.216

**С. Лупенко, канд. техн. наук**

*Тернопільський державний технічний університет імені Івана Пулюя*

# **ЦИКЛІЧНЕ ФУНКЦІОНАЛЬНЕ ВІДНОШЕННЯ ЯК ОСНОВА МАТЕМАТИЧНОГО ФОРМАЛІЗМУ ТЕОРІЇ МОДЕЛЮВАННЯ ТА АНАЛІЗУ ЦИКЛІЧНИХ СИГНАЛІВ**

*У роботі дано означення циклічного функціонального відношення як узагальненої математичної моделі циклічних сигналів. Здійснено формалізацію поняття циклу, фази та ритму циклічного сигналу. У вигляді доведеної теореми записано атрибутивні властивості структурної функції циклічного функціонального відношення.*

**S. Lupenko**

## **CYCLE FUNCTIONAL RELATION AS THE BASE OF THE MATHEMATICAL FORMALISM OF THE THEORY OF MODELING AND ANALYSIS OF THE CYCLE SIGNALS**

*In the work, is given the definition of the cycle functional relation as the generalized mathematical model of the cycle signals. Has been realized the formalization of the conception of the cycle, phase and rhythm of the cycle signal. In the form of the proven theorem, have been written down the attributive properties of the structural function of the cycle functional relation.*

**Вступ**

У роботах [1, 2] введено поняття циклічної функції (циклічного функціонального відношення), яка формалізує структуру циклічних сигналів та в певній мірі узагальнює відомі математичні моделі коливних явищ. У роботах [3, 4] розроблено методи статистичного аналізу випадкових циклічних функціональних відношень - циклічних випадкових процесів, у роботі [5] запропоновано підходи до імітаційного моделювання циклічних випадкових процесів, у роботі [6] розроблено метод дискретизації циклічних функцій, а у роботі [7] запропоновано метод