моніторингу для прогнозування. Отримана модель дає можливість дослідження впливу факторів навколишнього середовища на поле концентрації викидів окислів азоту.

Література

1. Ивахненко А.Г., Мюллер Й.А. Самоорганизация прогнозирующих моделей. – К.: Техника, 1985.
2. Дивак М.П, Манжула В. І. Багатокритеріальний підхід структурної ідентифікації інтервальних моделей статичних систем //Міжнародний науково-технічний журнал "Інформаційні технології та комп'ютерна інженерія", Вінниця - 2005. - №2 - С. 37-44.

Одержано 16.06.2007 р.

УДК 519.9

О. Ковальчук, канд. фіз.–мат. наук

Тернопільський державний медичний університет імені Івана Горбачевського

РОЗВ'ЯЗАННЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ В АЕРОДИНАМІЧНИХ ДОСЛІДЖЕННЯХ З ДОПОМОГОЮ ТЕПЛІЦЕВИХ МАТРИЦЬ

У роботі запропоновано розв'язок аеродинамічних задач шляхом зведення до знаходження розв'язку системи алгебраїчних рівнянь з тепліцевою λ-матрицею. Визначено частоти змінних коливань консольного крила сталого перерізу. Досліджено збіжність обчислених власних значень інтегрального рівняння, що описує власні коливання консольно закріпленого крила з розподіленим вздовж нього вантажем. Розглянуто гідродинамічні задачі, при знаходженні розв'язку яких виникають матриці типу Тепліца.

O. Kovalchuk

SOLVING INTEGRAL EQUATIONS IN AERODYNAMIC PROBLEMS BY TOEPLITZ MATRICES

Solving aerodynamic problems by means of algebraic equation system with Toeplitz λ-matrices has been analyzed in the article. The certain frequency of the variable fluctuations of the constant section console wing has been determined. The convergence of calculated proper meanings of the integral equations describing proper fluctuations of the console fixed wing with cargo distributed along has been investigated. The hydrodynamic problems with Toeplitz matrices at solving have been studied.

Розв'язання аеродинамічних задач часто зводиться до проблеми знаходження частотного спектру інтегрального рівняння Фредгольма другого роду з параметром. При розв'язанні інтегральних рівнянь виникають, як правило, щільні матриці, ядра яких часто мають специфічний вигляд [1]. Крім того, в аеродинамічних задачах побудова матриць досить істотно залежить як від вигляду області інтегрування, так і від редукції до алгебраїчної задачі.

Якщо розглядати власні коливання консольно закріпленого крила з розподіленим вздовж нього навантаженням $q(x)$, то статичний прогин крила в точці x можна записати [2]

$$f(x) = \int_0^l G(x,s)q(s)ds\,, \tag{1}$$

де $G(x,s)$ – функція Гріна (функція впливу), яка визначає прогин в точці з абсцисою x під дією одиничної сили, прикладеної в точці з абсцисою s.

При коливаннях на крило буде діяти сила інерції $-m(s)\dfrac{\partial^2 f(s,t)}{\partial t^2}$ від навантаження $q(x)$, тут $m(s)=\dfrac{q(s)}{g}$. Тому рівняння (1) можна записати у вигляді

$$f(x,t)=-\int_0^l G(x,s)m(s)\frac{\partial^2 f(s,t)}{\partial t^2}ds\,. \tag{2}$$

Розділяючи в (2) змінні за методом Фур'є, приходимо до інтегрального рівняння Фредгольма другого роду з параметром λ, невідомою функцією $f(x)$ і ядром $K(x,s)=G(x,s)m(x,s)$:

$$f(x)=\lambda\int_0^l K(x,s)f(s)ds\,. \tag{3}$$

Ядро $K(x,s)$ при $m(x)=const$ буде симетричним, оскільки є симетричною функція Гріна $G(x,s)$. Як відомо, при деякому значенні λ існує розв'язок інтегрального рівняння (3), відмінний від нуля, тобто $f(x)\neq 0$; отже, λ є характеристичним числом або власним значенням ядра інтегрального рівняння (3). Кожний розв'язок $f(x)$ буде фундаментальною або власною функцією, яка відповідає власному значенню λ.

Розглядаючи рівняння (3) в ряді точок $i=x_i\in(0,l),\ i=\overline{1,N}$, зведемо його до системи алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}K(\lambda,x_k,x_j)f_j(x_j)=f_k(x_k), \tag{4}$$

де $K(\lambda,x_k,x_j)$ – матриця з елементами

$$\left.\begin{array}{c} K(\lambda,x_1,x_1)=\lambda G(x_1,x_1)m(x_1)\\ K(\lambda,x_1,x_2)=\lambda G(x_1,x_2)m(x_2)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ K(\lambda,x_1,x_n)=\lambda G(x_1,x_n)m(x_n)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ K(\lambda,x_n,x_1)=\lambda G(x_n,x_1)m(x_1)\\ K(\lambda,x_n,x_2)=\lambda G(x_n,x_2)m(x_2)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ K(\lambda,x_n,x_n)=\lambda G(x_n,x_n)m(x_n) \end{array}\right\}. \tag{5}$$

Якщо розглядати крило сталого перерізу при $m(x)=const$, ядро $K(x,s)$ інтегрального рівняння (3) буде симетричним, а матриця коефіцієнтів у системі алгебраїчних рівнянь (4) – тепліцевою λ-матрицею.

Для знаходження власних значень λ інтегрального рівняння (3) використаємо властивості рядів Фредгольма. На основі теорії Фредгольма функцію $D(x)$, що визначає величини власних значень λ, можна розкласти в ряд за степенями λ [3]:

$$D(\lambda)=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{a_n(\lambda)}{n!}\,. \tag{6}$$

Ряд (6) одержано шляхом переходу до границь у визначнику, який складається із коефіцієнтів при невідомих функціях систем лінійних алгебраїчних рівнянь (4), що апроксимують інтегральне рівняння (3).

Коефіцієнти $a_n(\lambda)$ визначаються за допомогою наступних детермінантних формул

$$a_n(\lambda)=\int_0^l\overset{n}{\cdots}\int_0^l\begin{vmatrix} K(\lambda,x_1,x_1) & K(\lambda,x_1,x_2) & \vdots & K(\lambda,x_1,x_n)\\ \cdots & \cdots & & \cdots\\ K(\lambda,x_n,x_1) & K(\lambda,x_n,x_2) & \vdots & K(\lambda,x_n,x_n)\end{vmatrix}dx_1\ldots dx_n\,, \tag{7}$$

де елементи визначника в (7) обчислюються за формулами (5).

З врахуванням (7) робимо висновок, що ряд (6) є степеневим рядом, що абсолютно збігається при всіх значеннях параметра λ, а самі власні значення λ шукаються як корені характеристичного рівняння $D(\lambda) = 0$.

Розглянемо крило сталого перерізу у випадку, коли розподілена маса крила $m(x) = const$. Тоді ядро інтегрального рівняння (1) буде симетричним, а матриці у формулах (3) будуть тепліцевими λ-матрицями.

Визначення частот коливань. Після обчислення коефіцієнтів $a_n(\lambda)$ можна визначити частоти коливань. Значення частот знаходяться як корені $D(\lambda) = 0$, яке є рівнянням частот коливань з врахуванням того факту, що власне значення $\lambda = p^2$, де p – частота коливань. Прирівняємо до нуля n членів ряду (2) і побудуємо алгебраїчне рівняння n-го порядку для визначення n перших частот коливань. Складемо, наприклад, рівняння для відшукання першої частоти в першому наближенні.

З рівняння (2) маємо:

$$1 - a_1\lambda = 0, \tag{8}$$

звідки

$$p_1 = \sqrt{\lambda} = \sqrt{\frac{1}{a_1}}. \tag{9}$$

Формула (9) дає нижню оцінку частоти.

При відшуканні першої частоти в другому наближенні та другої частоти в першому наближенні рівняння частот (2) будуть другого порядку відносно λ:

$$1 - a_1\lambda + \frac{a_2}{2}\lambda^2 = 0. \tag{10}$$

З рівняння (10) маємо $\lambda_{1,2} = \dfrac{a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 2a_2}}{a_2}$ і відповідно

$$p_1 = \sqrt{\frac{a_1 - \sqrt{a_1^2 - 2a_2}}{a_2}}, \tag{11}$$

$$p_2 = \sqrt{\frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 - 2a_2}}{a_2}}, \tag{12}$$

де p_1 – значення першої частоти в другому наближенні, а p_2 – значення другої частоти в першому наближенні.

При відшуканні першої частоти в третьому наближенні, другої частоти в другому наближенні та третьої частоти в першому наближенні рівняння частоти набуде вигляду $1 - a_1\lambda + \dfrac{a_2}{2}\lambda^2 - \dfrac{a_3}{6}\lambda^3 = 0$.

Аналогічно для визначення кожної з необхідних n частот, $n = 1, 2, \ldots$ будемо будувати окреме рівняння.

Коефіцієнти алгебраїчного рівняння (2) визначаються через тепліцеві матриці.

Змінні коливання консольного крила сталого перерізу. У цьому випадку $m(x) = const$ функцію впливу (функцію Гріна) запишемо у вигляді

$$G(\bar{x}, \bar{s}) = \frac{l^3}{EI}\int_0^{\bar{s}} (\bar{s} - \bar{u})(\bar{x} - \bar{u})\,du \text{ для } \bar{x} \ge \bar{s}, \tag{13}$$

де $\bar{x} = \dfrac{x}{l}$ – відносна координата перерізу від точки його закріплення, EI – змінна жорсткість крила, l – довжина крила. Проінтегруємо вираз (13) і отримаємо $G(\bar{x},\bar{s}) = \dfrac{l^3}{6EI}\bar{s}^2\left(3\bar{x}-\bar{s}\right)$ для $\bar{x} \ge \bar{s}$.

З врахуванням властивості симетрії функції Гріна $G(\bar{x},\bar{s}) = \dfrac{l^3}{6EI}\bar{x}^2\left(3\bar{s}-\bar{x}\right)$ для $\bar{x} \le \bar{s}$. Після цього знаходимо коефіцієнти a_1 і a_2.

Розглядаючи крило сталого перерізу на основі (3) з врахуванням (4) запишемо перший детермінантний коефіцієнт

$$a_1 = l\int_0^1 K\left(\bar{x},\bar{x}\right)d\bar{x} = ml\int_0^1 G\left(\bar{x},\bar{x}\right)d\bar{x} = \frac{ml^4}{3EI}\int_0^1 \bar{x}^3\,d\bar{x}.$$

Після інтегрування остаточно отримаємо

$$a_1 = \frac{1}{12}\frac{ml^4}{EI}. \tag{14}$$

Використовуючи (3) і враховуючи (4), маємо

$$a_2 = l^2\int_0^1\int_0^1 \begin{vmatrix} K(\bar{x},\bar{x}) & K(\bar{x},\bar{s}) \\ K(\bar{s},\bar{x}) & K(\bar{s},\bar{s}) \end{vmatrix} d\bar{x}d\bar{s} = m^2l^2\int_0^1\int_0^1 G(\bar{x},\bar{x})G(\bar{s},\bar{s})d\bar{x}d\bar{s} - m^2l^2\int_0^1\int_0^1 G(\bar{x},\bar{s})G(\bar{x},\bar{s})d\bar{x}d\bar{s} =$$

$$= m^2l^2\left[\int_0^1 G(\bar{x},\bar{x})d\bar{x}\right]^2 - m^2l^2\int_0^1\int_0^1\left[G(\bar{x},\bar{s})\right]^2 d\bar{x}d\bar{s} =$$

$$= \frac{m^2l^8}{9(EI)^2}\left[\int_0^1 \bar{x}^2 d\bar{x}\right]^2 - \frac{m^2l^8}{36(EI)^2}\int_0^1\left\{\int_0^{\bar{x}} \bar{s}^4\left(3\bar{x}-\bar{s}\right)^2 d\bar{s} + \int_{\bar{s}}^1 \bar{x}^2\left(3\bar{s}-\bar{x}\right)^2 d\bar{s}\right\}d\bar{x}.$$

Після інтегрування отримаємо

$$a_2 = \frac{m^2l^8}{2520(EI)^2}. \tag{15}$$

Для визначення частоти змінних коливань крила в першому наближенні підставимо (14) в (9) і отримаємо

$$p_1 = \frac{3{,}46}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{m}}. \tag{16}$$

Для визначення першої частоти в другому наближенні та другої частоти в першому наближенні підставимо (14) і (15) у вирази (11) та (12)

$$p_1 = \frac{3{,}516}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{m}},\ p_2 = \frac{20{,}19}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{m}}. \tag{17}$$

Нестаціонарна задача. Розглянемо інтегральне рівняння (2). Нехай в точках $x = x_i,\ i = \overline{1,n},\quad n < N$ проходить зменшення з часом t величини маси крила, наприклад, внаслідок витрати палива під час польоту (паливні баки знаходяться на крилі), тобто нехай $m_i(x_i,t) = m_i(x_i) - \Delta m(x_i) = m_i(x_i) - Ct = Qm_i(x_i),$ де $m_i(x_i) = m_i$ – значення маси в точці $x = x_i$ в момент часу $t = 0$, $\Delta m(x_i)$ – величина, на яку зменшується маса крила в точці x_i, Q – відомий коефіцієнт пропорційності.

Тоді рівняння коливань (2) можна записати таким чином

$$f(x,t) = -\int_0^l G(x,s)m(s)\frac{\partial^2 f(s,t)}{\partial t^2}ds - \sum_{i=1}^n G(x,s_i)Qm_i\frac{\partial^2 f(s_i,t)}{\partial t^2}ds. \quad (18)$$

Розділяючи змінні в (17), приходимо до інтегрального рівняння коливань крила з урахуванням зміни з часом t маси крила в окремих його точках:

$$f(x) = \lambda\left[\int_0^l G(x,s)m(s)f(s)ds + \sum_{i=1}^n G(x,s_i)QG_i(x,s_i)m_i f(s_i)\right]. \quad (19)$$

Розглянемо крило сталого перерізу $m(x) = const$. Рівняння (19) є інтегральним рівнянням Фредгольма другого роду з симетричним ядром, якщо інтеграл розглядати в понятті Стільтьєса. Запишемо його у вигляді

$$(S) \quad \int_0^l K(\lambda,x,s)f(s)dm(s), \quad (20)$$

де позначка (S) означає, що інтеграл розглядається в понятті Стільтьєса.

Розглянемо рівняння (20) в ряді точок $x_k \in (0,l),\ \ k = \overline{1,N}$, зведемо його до такої системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\sum_{k=1}^n\sum_{j=1}^N K(\lambda,x_k,x_j)f_j(x_j) = f_k(x_k). \quad (21)$$

У системі алгебраїчних рівнянь (21) елементи матриці K запишуться

$$K(\lambda,x_k,x_j) = \lambda\left[G(x_k,x_j) + Q\sum_{i=1}^n G(x_k,x_j)\right]m_j(x_j). \quad (22)$$

Таким чином, розв'язок нестаціонарної задачі (18) зведено до системи алгебраїчних рівнянь (21), де матриця $\left\|K(\lambda,x_k,x_j)\right\|$ є тепліцевою λ-матрицею.

Про збіжність обчислених власних значень. Власні значення λ інтегрального рівняння (3) знаходяться як корені характеристичного рівняння (6). Виникає питання про збіжність величин знайдених наближених власних значень для точних величин власних значень. Вважається, що похибка в самому процесі обчислень відсутня і виникає лише внаслідок застосування інтегрального рівняння (1), яке, в принципі, описує коливальний рух крила наближено.

Покажемо, що коли порядок матриць $\left\|K(\lambda,x_i,x_j)\right\|,\ i,j=\overline{1,n}$ в (4) буде необмежено зростати, тобто кількість точок x_n розбиття інтервалу інтегрування $(0,l)$ буде необмежено збільшуватись $(n\to\infty)$, то наближені величини власних значень $\lambda(n)$ будуть прямувати до точних величин власних значень λ.

Власні форми коливань крила як одновимірного об'єкта представляються інтегральним рівнянням

$$f(x) = \lambda\int_0^l G(x,s)m(s)f(s)ds. \quad (23)$$

Підставимо в це рівняння вираз

$$f^{(n)}(x) = f(x)\sqrt{m(x)}, \quad (24)$$

приходимо до інтегрального рівняння з симетричним ядром вигляду

$$f^{(n)}(x) = \lambda^{(n)}\int_0^l K^{(n)}(x,s)f^{(n)}(s)ds, \quad (25)$$

де $K^{(n)}(x,s) = G(x,s)\sqrt{m(x)m(s)}$.

Індекс n у виразах $f^{(n)}(x)$, $\lambda^{(n)}$, $K^{(n)}(x,s)$ показує порядок матриць $\left\| K^{(n)}(\lambda, x_i, x_j) \right\|$, тобто кількість точок $x_i \in (0,l)$, в яких беруться значення елементів ядра інтегрального рівняння (25).

Інтегральне рівняння точних власних форм коливань цього ж крила представимо у вигляді:

$$f_T(x) = \lambda \int_0^l G_T(x,s) m(s) f(s) ds . \tag{26}$$

Підставимо $f_T(x) = f_T(x)\sqrt{m(x)}$, рівняння (26) зведемо до інтегрального рівняння з симетричним ядром

$$f(x) = \lambda \int_0^l K(x,s) f(s) ds . \tag{27}$$

Рівняння (25) і (26) є однорідними рівняннями Фредгольма другого роду з симетричними ядрами, для яких справедлива теорема Гільберта–Шмідта [4, 5].

Припускається, що, збільшуючи число взятих на крилі точок x_i, можна отримати таку нерівність:

$$\left| K(x,s) - K^{(n)}(x,s) \right| \le \varepsilon , \tag{28}$$

де $\varepsilon > 0$ – достатньо мале значення.

Нехай $\lambda_i^{(n)}$ – i-е власне значення рівняння (25). Покажемо, що $\lambda_i^{(n)} \to \lambda_i$ при $n \to \infty$. Запишемо рівняння (26) і (27) в операторному вигляді

$$f^{(n)}(x) - \lambda^{(n)} B f^{(n)}(x) = 0 , \tag{29}$$

де $Bf^{(n)}(x) = \int_0^l K^{(n)}(x,s) f^{(n)}(s) ds$, а також

$$f(x) - \lambda A f(x) = 0 , \tag{30}$$

де $Af(x) = \int_0^l K(x,s) f(s) ds$.

Очевидно, що нерівність (28) еквівалентна двом нерівностям

$$\left| K(x,s) - K^{(n)}(x,s) \right| \le \varepsilon \ , \qquad \left| K^{(n)}(x,s) - K(x,s) \right| \le \varepsilon .$$

Ці нерівності мають рівноцінні значення при доведенні збіжності власних значень.

Представимо першу з цих нерівностей у вигляді

$$K(x,s) - K^{(n)}(x,s) = \zeta(x,s), \tag{31}$$

де $\zeta(x,s) \le \varepsilon$.

Оператори A і B, що входять у рівняння (29) і (30) як оператори Фредгольма, є достатньо неперервні і самоспряжені, тобто симетричні.

Для того, щоб довести збіжність власних значень, використаємо теорему Вейля [6].

Нехай B і $A=B+C$ – достатньо неперервні самоспряжені оператори в просторі Гільберта. Пронумеруємо додатні власні значення оператора A таким чином: $0 < \lambda_1^{(A)} \le \lambda_2^{(A)} \le \lambda_3^{(A)} \le \ldots$. Аналогічно пронумеруємо власні значення оперетора B: $0 < \lambda_1^{B} \le \lambda_2^{(B)} \le \lambda_3^{(B)} \le \ldots$ Тоді, згідно теоремою Вейля, має місце нерівність

$$\left| \frac{1}{\lambda_i^{(B)}} - \frac{1}{\lambda_i^{(A)}} \right| \le \|C\| , \tag{32}$$

де $\|C\|$ – норма оператора C, яка є достатньо малою. Із співвідношення (32) маємо

$$\left|\lambda_i^{(A)} - \lambda_i^{(B)}\right| \le \left|\lambda_i^{(A)}\right|\left|\lambda_i^{(B)}\right|\left\|C\right\|. \tag{33}$$

Використавши нерівність $\left|\lambda_i^{(A)}\right| \le \left|\lambda_i^{(A)} - \lambda_i^{(B)}\right| + \left|\lambda_i^{(B)}\right|$, з (33) отримаємо $\left|\lambda_i^{(A)} - \lambda_i^{(B)}\right| \le \left\{\left|\lambda_i^{(B)}\right| + \left|\lambda_i^{(A)} - \lambda_i^{(B)}\right|\right\}\left\|C\right\|\left|\lambda^{(B)}\right|$, звідки маємо таку оцінку для власних значень:

$$\left|\lambda_i^{(A)} - \lambda_i^{(B)}\right| \le \frac{\left|\lambda_i^{(B)}\right|^2\left\|C\right\|}{1-\left|\lambda_i^{(B)}\right|\left\|C\right\|}. \tag{34}$$

Ця нерівність вірна при умові, що $\left|\lambda_i^{(B)}\right|\left\|C\right\| < 1$.

Підставимо (31) в рівняння (30) і одержимо

$$f(x) - \lambda A f(x) = f(x) - \lambda \int_0^l \left[K^{(n)}(x,s) + \zeta(x,s)\right] f(s)ds,$$

звідки випливає рівність таких операторів: $A=N+C$, де $Nf(x) = \int_0^l K^{(n)}(x,s) f(s)ds$ і

$$Cf(x) = \int_0^l \zeta(x,s) f(s)ds.$$

Отже, оператор A задовольняє теорему Вейля.

Використовуючи нерівність (34), отримаємо

$$\left|\lambda_i^{(A)} - \lambda_i^{(B)}\right| \le \frac{\left\|C\right\|\left|\lambda_i^{(N)}\right|^2}{1-\left|\lambda_i^{(N)}\right|\left\|C\right\|}, \tag{35}$$

де $\lambda_i^{(N)}$ – власні значення оператора N, а $\lambda_i^{(A)}$ – точні власні значення.

Оскільки оператори N і B мають одне і те ж ядро, то власні значення цих операторів будуть співпадати [4, 7].

У результаті отримаємо $\left|\lambda_i^{(A)} - \lambda_i^{(B)}\right| \le \dfrac{\left\|C\right\|\left|\lambda_j^{(B)}\right|^2}{1-\left|\lambda_j^{(B)}\right|\left\|C\right\|}$.

Розглядаючи цю нерівність при $n \to \infty$, приходимо до висновку про збіжність знайдених наближених власних значень до величин точних власних значень, тобто $\lambda_i^{(B)} \to \lambda_i^{(A)}$ при $n \to \infty$, оскільки $\left\|C\right\| \to 0$.

Гідродинамічні задачі. При розв'язанні гідродинамічних задач у рівняннях гідродинаміки і крайових умовах також зустрічаються матриці типу тепліцевих. Замкнута система рівнянь руху в'язкості ньютонівської рідини, що не стискається, складається з рівняння нерозривності $\dfrac{\partial V_x}{\partial x} + \dfrac{\partial V_y}{\partial y} + \dfrac{\partial V_z}{\partial z} = 0$ та трьох рівнянь Нав'є–Стокса [8]:

$$\frac{\partial V_X}{\partial t} = V_X \frac{\partial V_X}{\partial X} + V_Y \frac{\partial V_Y}{\partial Y} + V_Z \frac{\partial V_Z}{\partial Z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial X} + \nu\left(\frac{\partial^2 V_X}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V_X}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 V_X}{\partial Z^2}\right) + g_X, \tag{36}$$

$$\frac{\partial V_Y}{\partial t} = V_X \frac{\partial V_Y}{\partial X} + V_Y \frac{\partial V_Y}{\partial Y} + V_Z \frac{\partial V_Y}{\partial Z} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial Y} + \nu\left(\frac{\partial^2 V_Y}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V_Y}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 V_Y}{\partial Z^2}\right) + g_Y, \tag{37}$$

$$\frac{\partial V_Z}{\partial t} = V_X \frac{\partial V_Z}{\partial X} + V_Y \frac{\partial V_Z}{\partial Y} + V_Z \frac{\partial V_Z}{\partial Z} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial Z} + \nu\left(\frac{\partial^2 V_Z}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V_Z}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 V_Z}{\partial Z^2}\right) + g_Z.$$

Рівняння (36), (37) записані в прямокутній декартовій системі координат; X, Y, Z – відповідні координати розглядуваної точки фізичного простору, t – час, g_X, g_Y, g_Z – компоненти вектора густини масової сили (наприклад, сили тяжіння), ν – кінематична в'язкість речовини. Шуканими величинами є три компоненти швидкості V_X, V_Y, V_Z і тиск p.

Розглянемо випадки, характерні для градієнтних потоків з неоднорідною структурою потоку. Довільне стаціонарне поле швидкостей $\overline{V}\left(\overline{R}\right)$ у середовищі, що не стискається, в околі точки $\overline{R}=0$, яку приймемо за початок відліку, наближено може бути представлене у вигляді двох членів розкладу в ряд Тейлора [9]:

$$V_k\left(\overline{R}\right)=V_k\left(\overline{0}\right)+G_{km}X_m\,,\ G_{km}\equiv\left(\frac{\partial V_k}{\partial X_m}\right)_{R=0}\,,\ G_{11}+G_{22}+G_{33}=0\,, \qquad (38)$$

де V_k і G_{km} – компоненти швидкості рідини і тензора зсуву в декартовій системі координат X_1, X_2, X_3.

Частковий випадок при $G_{km}=0$ відповідає випадку однорідного поступального потоку. При $V_k\left(\overline{0}\right)=0$ формула (39) описує поле швидкостей у довільному лінійному зсувному потоці. Будь-який тензор $\|G_{km}\|$ може бути представлений у вигляді суми симетричного і антисиметричного тензорів

$$\|G_{km}\|=\|E_{km}\|+\|\Omega_{km}\|,\ E_{km}=E_{mk}=\frac{1}{2}\left(G_{km}+G_{mk}\right),\ \Omega_{km}=-\Omega_{mk}=\frac{1}{2}\left(G_{km}-G_{mk}\right).$$

Серед лінійних зсувних потоків, що найчастіше розглядаються, можна виділити такі типи:

1. Простий зсув, або потік Куетта.

Розглядаються такі рівняння гідродинаміки

$$V_x=GY\,,\ V_y=0\,,\ V_z=0\,,$$

де матриці тензора зсуву записують у вигляді

$$\|G_{km}\|=\begin{Vmatrix}0 & G & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{Vmatrix},\ \|E_{km}\|=\begin{Vmatrix}0 & \frac{1}{2}G & 0\\ \frac{1}{2}G & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{Vmatrix},\ \|\Omega_{km}\|=\begin{Vmatrix}0 & \frac{1}{2}G & 0\\ -\frac{1}{2}G & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{Vmatrix}.$$

Величина G в даному випадку є градієнтом швидкості потоку або швидкістю деформації. Потік Куетта може бути реалізований між двома паралельними площинами, що рухаються.

2. Плоский безвихровий рух. Розглядаються такі гідродинамічні рівняння

$$V_x=\frac{1}{2}GY\,,\ V_y=\frac{1}{2}GX\,,\ V_z=0\,.$$

Матриці тензора зсуву запишемо

$$\|G_{km}\|=\begin{Vmatrix}0 & \frac{1}{2}G & 0\\ \frac{1}{2}G & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{Vmatrix},\ \|E_{km}\|=\begin{Vmatrix}0 & \frac{1}{2}G & 0\\ \frac{1}{2}G & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{Vmatrix},\ \|\Omega_{km}\|=\begin{Vmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{Vmatrix}.$$

Цей потік має таку ж деформаційну складову руху, як і простий зсув, але не має поворотної складової.

Висновки. При розв'язанні аеродинамічних та гідродинамічних задач, дослідженні збіжності обчислених власних значень інтегрального рівняння, що описує власні коливання консольно закріпленого крила з розподіленим вздовж нього вантажем, а також при вивченні плоского деформаційного зсуву, плоского обертання твердого тіла, осесиметричного зсуву та інших проблем є можливість звести розв'язання задачі до відшукання розв'язків системи лінійних алгебраїчних рівнянь з матрицею типу Тепліца. У цьому випадку для розв'язання системи можна застосувати відповідні економічні алгоритми [1], які базуються на використанні специфічних властивостей тепліцевих матриць. Порівняно з застосуванням алгоритмів для розв'язування СЛАР, які не враховують специфіки матриці, обчислювальні схеми для тепліцевих матриць [1] дають можливість скоротити кількість арифметичних операцій, які необхідно виконати для відшукання розв'язку СЛАР, на *n* (порядок системи).

Література

1. Ковальчук О.Я. Алгоритми для систем з тепліцевими λ-матрицями та їх застосування: Автореф. дис. к.ф.-м.н. – 01.05.02. – Київ: Інститут кібернетики імені В.М.Глушкова, 2005. – 20с.
2. Ананьев И.В., Тимофеев П.Г. Колебания упругих систем в авиационных конструкциях. – М.: Машиностроение, 1965.
3. Ананьев И.В., Колбин Н.М., Серебрянский Н.П. Динамика конструкций летательных аппаратов. – М.: Машиностроение, 1972. – 416с.
4. Болотин В.В. Динамическая устойчивость упругих систем.-М.: Гостехиздат, 1956.
5. Гантмахер Ф.Р., Крейн М.Г. Осцилляционные матрицы и малые колебания механических систем. – М.: Гостехиздат, 1940.
6. Мысовский И.Й. Об оценке ошибки, возникающей при решении интегрального уравнения способом механических квадратур // Вестник Ленинградского госуниверситета // математика, механика, астрономия, вып. 19. – 1956.
7. Михлин С.Г. Интегральные уравнения. – М.: Гостехиздат, 1957.
8. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. – М.:Наука, 1986. – 736с.
9. Кутенов А.М., Стерман Л.С., Стюшин Н.Г. Гидродинамика и теплообмен при парообразовании. – М.: Высшая школа, 1977. – 352с.

Одержано 05.06.2007 р.

УДК 519.876.5

І. Максимова

Тернопільський національний економічний університет

ІНТЕРВАЛЬНА МОДЕЛЬ ДИНАМІКИ КОНЦЕНТРАЦІЙ ШКІДЛИВИХ ВИКИДІВ

Розглянуто задачу параметричної ідентифікації інтервальної моделі динаміки концентрацій шкідливих викидів на основі інтервальних даних експерименту. Наведено приклад та програмне забезпечення ідентифікації інтервальної моделі динаміки концентрацій шкідливих викидів (на прикладі м. Тернополя).

I. Maksymova

INTERVAL MODEL OF DYNAMICS OF CONCENTRATIONS OF HARMFUL EMISSIONS

The task of parameters identification of interval model of dynamics of concentrations of harmful emissions on the basis of interval data of experiment is considered. The example and software of identification of interval model of dynamics of concentrations of harmful emissions are shown (on the example of Ternopil).