УДК 517.95

Ігор Добротвор, д. т. н., доц.
Тернопільський національний економічний університет, Україна

ХАРАКТЕРИСТИКА КІНЕТИКИ МІКРОСТРУКТУР КОМПОЗИТІВ УМОВАМИ КОЛИВНОСТІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Розглянуто характеристики динаміки поширення зовнішніх поверхневих шарів у композитах, як розв'язки звичайних диференціальних рівнянь вищих порядків та деяких типів рівнянь в частинних похідних із оператором Лапласа-Бельтрамі в просторах постійної кривини. Отримані достатні умови коливності розв'язків даних типів рівнянь для областей досліджуваних просторів в термінах коефіцієнтів (змінних чи постійних) цих рівнянь.

Ключові слова: поширення, кривина, розв'язок, коливність, усереднення.

Igor Dobrotvor

CHARACTERISTICS OF THE COMPOSITES MICROSTRUCTURE KINETICS OF THE DIFFERENTIAL EQUATIONS QUALITY CONDITIONS

The characteristics of the propagation dynamics of external surface layers in composites as solutions of ordinary differential equations of higher orders and some types of equations in partial derivatives with the Laplace-Beltrami operator in the spaces of constant curvature are considered. Sufficient conditions for the variation of the solutions of these equations types for the domains of the studied spaces are obtained in terms of coefficients (variables or constants) of these equations.

Keywords. distribution, curvature, solution, oscillation, averaging.

Ряд технологічних задач описують динамічні процеси формування мікроструктур в ході фізико-хімічних змін у полімерах [1]. Динаміка деяких процесів зшивання епоксипластів, зокрема поширення зовнішніх поверхневих шарів при наявності дисперсного чи волокнистого наповнювачів у композитних матеріалах може бути змодельована рівняннями, змінні яких міняються в просторах постійної кривини. За звичай під ними розуміють простори з евклідовою геометрією, проте існують і інші простори з кривиною відмінною від нуля і постійною для всіх точок простору, геометрії називають гіперболічними і сферичними. Такі геометрії реалізуються на добре відомих поверхнях евклідового простору. У випадку гіперболічної геометрії – це псевдосфери, а у випадку сферичної геометрії – звичайні сфери. Кривина сфери є постійною додатною величиною, а у псевдосфери - від'ємна.

Математичні моделі реальних процесів, зокрема задачах проблем кінетики мікроструктур епоксикомпозитів часто є зручним описувати диференціальними рівняннями, змінні яких вимірюються не лише в евклідовому просторі але і в інших просторах.

В приведених дослідженнях властивостей розв'язків диференціальних рівнянь будемо користуватись в основному слідуючими просторами: E^n – евклідовим, кривина якого рівна нулю; H^n – Лобачевского з від'ємною кривиною; S^n – сферичним, кривина якого додатня; тут n у всіх просторах вказує на розмірність. Не применшуючи загальності, в подальшому будемо вважати, що кривини просторів H^n і S^n рівні відповідно -1 та +1.

Однією із найважливіших проблем є питання коливності розв'язків [2]. Історично це питання вивчається давно і пов'язане, як правило, із вивченням розв'язності краєвих задач для диференціальних рівнянь. Відомо, що перетворення в нуль розв'язків диференціальних рівнянь другого порядку вказує на можливість розв'язності відповідної краєвої задачі. Така інтерпретація дозволяє узагальнити поняття коливності (осциляції) і на об'єкти більш складні, ніж скалярні рівняння, наприклад системи диференціальних рівнянь або рівняння з частинними похідними із змінними, що належать любому із вище згаданих просторів.

Означення 1. Розв'язок $y(t)$ скалярного рівняння

$$y'' + p_1(t)y' + p_2(t)y = 0, \tag{1}$$

де $t \in J$, $J = [a,\omega)$, $\omega \le \infty$ будемо називати осциляційним на інтервалі J , якщо знайдуться хоча б дві точки t_1 і t_2 із інтервалу *J*, в яких $y(t)$ набуває нульових значень, і не осциляційним у противному випадку.

Означення 2. Рівняння (1) будемо називати неосциляційним на інтервалі *J*, якщо всі його розв'язки є неосциляційними на *J*, і осциляційним в противному випадку.

Під коливним розв'язком на нескінченному інтервалі розуміють розв'язок із нескінченною кількістю нулів і неколивним, якщо кількість нулів є скінченною. Для лінійних рівнянь поняття коливних і осциляційних рівнянь є практично тотожними.

При дослідженні коливності рівнянь з частинними похідними, зокрема еліптичних рівнянь другого порядку

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(X)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(X)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(X)u = f(X), \tag{2}$$

де $X \in D \subset E^n$, а коефіцієнти (5.2), наприклад, із класу *C(D)* виникають значні труднощі, які стосуються означення коливності розв'язків, пов'язані із вивченням поведінки розв'язку в області зміни.

Означення 3. Розв'язок $u(X)$ рівняння (5.2) , будемо називати коливним в області *D*, якщо в ній знайдеться замкнута вузлова лінія *Г*, і неколивним у противному випадку.

Більш продуктивним означенням коливності для рівнянь вищих порядків на наш погляд є підхід до вивчення розв'язків на многовидах. Так, для рівнянь еліптичного типу (не залежно від його порядку) вводиться на розгляд функція усереднення

$$M_r[u(X), P_0] = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \iint_{S_r} u(X)\,dS, \tag{3}$$

де ω_n - площа *n* – вимірної сфери одиничного радіуса, S_r – сфера радіуса *r* з центром у деякій фіксованій точці $P_0 \in D$. В подальшому, де це не викликатиме сумнівів, усереднення (5.3) будемо записувати коротко: *M(r)*.

Означення 4. Розв'язок *u(X)* рівняння

$$\Delta u + f(X, u, u'_x) = 0, \tag{4}$$

де $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ - оператор Лапласа, будемо називати коливним в необмеженій області із E^n, якщо для любого r в області $E_r = \{X : |X| \geq r\}$ функція $M(r)$ є коливною.

Відмітимо обмеженість означення 4 в тому, що воно передбачає наявність в головній частині оператора Лапласа.

Основним інструментом наших досліджень служитиме формула, яка пов'язує розв'язки рівнянь з частинними похідними і звичайними диференціальними рівняннями.

Має місце формула:

$$\frac{d}{dr}(r^{n-1}\frac{dM_r u}{dr}) = \frac{1}{\omega_n}\iint_{S_r} \Delta u(X)dS, \tag{5}$$

В сферичних координатах

$$\begin{aligned} &x_1 = r\cos\theta_1, \\ &x_2 = r\sin\theta_1\cos\theta_2, \\ &........................... \\ &x_n = r\sin\theta_1...\sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1}; \end{aligned} \tag{6}$$

де $r = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}; \quad 0 \leq \theta_i \leq \pi, \quad i = 1,...,n-2; \quad 0 \leq \theta_{n-1} \leq 2\pi;$

оператор Лапласа має вид:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cdot(\sum_{j=1}^{n}\frac{\frac{\partial}{\partial\theta_j}(\sin^{n-j-1}\theta_j\frac{\partial}{\partial\theta_j})}{q_j\sin^{n-j-1}\theta_j}), \tag{7}$$

і радіальна частина його співпадає з лівою частиною формули (5):

$$L_r = \frac{1}{r^{n-1}}\cdot\frac{\partial}{\partial r}r^{n-1}\frac{\partial}{\partial r}.$$

Якщо для усереднення $M(r)$ (5.3) розглядати лише сферично симетричні розв'язки, то застосовуючи оператор L_r до M_r, отримаємо формулу в операторному виді:

$$L_r M = ML_r. \tag{8}$$

Остання інтерпретація дозволяє застосувати означення 4 для дослідження інших типів рівнянь з частинними похідними відмінними від еліптичних.

Усереднення (3) не випадково вибране для дослідження на коливніть рівнянь з частинними похідними. Воно безпосередньо зв'язане з перетворенням Радона, зокрема, усереднення по формулі (5) є таким перетворенням в евклідовому просторі E^n. Застосуємо перетворення Радона до досліджень коливності еліптичних і гіперболічних рівнянь.

Нехай f - функція з простору E^n , інтегрована на кожній гіперплощині, позначимо через P^n простір усіх гіперплощин в E^n, забезпечений очевидною топологією.

Означення 5. Перетворення

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\xi} f(X)dm(X), \tag{9}$$

де dm - евклідова міра на гіперплощині ξ, будемо називати перетворенням Радона.

Означення 6. Дуальним перетворенням Радона $\varphi \to \breve{\varphi}$ будемо називати перетворення, яке неперервній функції φ на P^n ставить у відповідність функцію $\breve{\varphi}$ на R^n по формулі:

$$\breve{\varphi}(X) = \int_{X \in \xi} \varphi(\xi)d\mu(\xi), \tag{10}$$

де $d\mu$ - міра на компактній множині $\{X \in \xi : \xi \in P^n\}$, інваріантна відносно групи поворотів навколо точки X і така, що повна міра всієї множини рівна одиниці.

Так, для E^2 гіперплощинами будуть прямі, $dm(X)=dX$, а компактною множиною, інваріантною відносно поворотів навколо точки X_0, буде коло S з центром $X_0 \in E^2$. Тоді:

$$\frac{1}{2\pi r}\int_S d\mu(X) = 1, \quad d\mu(X) = dS.$$

Аналогічний зміст формули (9) і (10) мають для любого $n \geq 2$, а тому дуальне перетворення Радона слід розуміти як усереднення по формулі (3). Відносно ж функції f у формулі (9) потрібно зробити припущення про існування інтегралу в правій частині формули.

Нашою метою буде використання перетворень Радона для дослідження поведінки розв'язків рівнянь з частинними похідними. Як уже згадувалось у вступі, це досягається шляхом приведення рівнянь з частинними похідними до звичайних. Для цього розглянемо рімановий простір, який задається квадратичною формою, котра хоча б локально, в підходящому базисі , може бути записана у виді:

$$ds^2 = dx_1^2 + ... + dx_p^2 - dx_{p+1}^2 - ... - dx_{p+q}^2, \tag{11}$$

де кількість від'ємних і додатних складових постійна для вибраного простору. Форма (11) залежить лише від головної частини оператора в частинних похідних. Так, для еліптичних рівнянь в (11) немає від'ємних складових, оскільки квадратична форма при старших похідних є додатною. Для рівнянь гіперболічного типу маємо p = 1. Простір із метрикою (11) називають псевдорімановим або псевдоевклідовим.

Означення 7. Сферою S_r в просторі X називатимемо множину всеможливих точок в X , які знаходяться на постійній відстані (дійсній чи уявній) у відповідній метриці від фіксованої точки X_0.

В гіперболічному просторі H^n формули перетворення координат аналогічні формулам (6):

$$\begin{aligned} &y_1 = r ch\theta_1, \\ &y_2 = r sh\theta_1 \cos\theta_2, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &y_n = r sh\theta_1 \ldots \sin\theta_{n-2} \cos\theta_{n-1}; \end{aligned} \tag{13}$$

а площа поверхні «сфери» в таких координатах задається формулою $A(r) = \omega_n sh^{n-1} r$.

Для випадку довільної кривини *k<0* функція $A(r) = \omega_n (\frac{sh\sqrt{-k}r}{\sqrt{-k}})^{n-1}$. Звідси зокрема, формально слідує, з допомогою граничного переходу при $k \to 0$, формула для площі *n* – вимірної сфери в просторі E^n: $A(r) = \omega_n \cdot r^{n-1}$.

Для хвильового рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \cdot \Delta u + pu = 0 \tag{14}$$

оператор $L = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \Delta$ при *a=1* має вид:

$$\Box = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^{\,2}} - \ldots - \frac{\partial^2}{\partial x_{n-1}^2}, \tag{15}$$

в просторі H^n можна записати як оператор Лапласа-Бельтрамі:

$$L = \frac{1}{\sqrt{g}} (\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} (\sum_{j=1}^{n} g^{ik} \sqrt{g} \frac{\partial}{\partial x_j})) \tag{16}$$

В позначеннях (16) $g_{ij} = g(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j})$- метричний тензор, що задає метрику простору, $\{g^{ij}\}$- обернена матриця до $\{g_{ij}\}$, $\sum_{j=1}^{n} g_{ij} g^{ik} = \delta_{ik}$, $\bar{g} = \left|\det(g_{ij})\right|$, δ_{ik} - символ Кронекера.

В координатах (13) ріманова структура (11) простору L^n задається формулою:

$$ds^2 = dr^2 + sh^2 r \cdot \sum_{i,j=0}^{n-2} g_{ij}(\theta_0, \ldots, \theta_{n-2}) d\theta_i d\theta_j. \tag{17}$$

Площа поверхні «сфери» в таких координатах задається формулою $A(r) = \omega_n \cdot sh^{n-1} r$, $0 \le r < \infty$. У формулі (17) окремо виділені функції, які залежать від *r* і, окремо від кутів θ_i, а тому як і у випадку рівняння Лапласа (в просторі E^n), для хвильового оператора (15), є можливість виділити радіальну частину. Цим підтверджується існування розв'язків рівняння (5.14), які залежать лише від відстані *r* і не залежать від кутів θ_i .

Міркування відносно «сферично симетричних розв'язків» не залежать від конкретного виду простору постійної кривини, а стосуються всіх трьох просторів: E^n, H^n, S^n.

Література.

1. Бардзокас Д.И., Зобнин А.И. Математическое моделирование физических процессов в композиционных материалах периодической структуры. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 376с.
2. Колеблемость решений дифференциальных уравнений в пространствах постоянной кривизны / М. К. Бугир, И. Г. Добротвор. – К. - ИМАН УССР, - 1988, -52с.