УДК 539.312

Андрій Пожуєв, доц.,к.ф.-м.н., Антон Фасоляк,к.т.н., Олена Міхайлуца, доц., к.т.н.
Запорізький національний університет, Україна
Запорізький національний технічний університет, Україна

МОДЕЛЮВАННЯ НЕСТАЦІОНАРНОЇ ДИНАМІКИ ПІДЗЕМНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБ'ЄКТІВ ІЗ ВИКОРИСТАННЯМ БІПОЛЯРНОЇ СИСТЕМИ КООРДИНАТ

Проаналізовано застосування біполярної системи координат для побудови математичної моделі динамічної поведінки оболонок у різних середовищах.
Ключові слова: математична модель, коефіцієнт динамічності, чисельний метод.

Andriy Pozhuyev, Anton Fasoliak, Olena Mikhailytsa

MODELING OF NON-STATIONARY DYNAMICS OF UNDERGROUND CYLINDER OBJECTS USING BIPOLAR COORDINATE SYSTEMS

The application of bipolar coordinate system for the construction of mathematical model of dynamic behavior of shells in different environments has been analyzed.
Keywords: mathematical model, coefficient of dynamism, numerical method.

Конструкції у вигляді циліндричних оболонок, оточених пружним середовищем, досить часто зустрічаються на практиці (підземні трубопроводи, тунелі метро, вертикальні шахтні стволи і т. і.). При цьому з математичної точки зору найбільш складними при моделюванні і розробці методів розрахунку таких споруд є, в першу чергу, врахування динамічних процесів і, зокрема, визначення коефіцієнту динамічності і, по-друге, мало дослідженим і складним є питання про вплив границі напівпростору і визначення глибини закладення, починаючи з якої цю границю обов'язково треба враховувати.

В даній роботі побудована математична модель динамічної поведінки системи циліндрична оболонка нескінченої довжини – пружне інерційне середовище, коли рух оболонки описується класичними або уточненими рівняннями, а для середовища використовуються точні динамічні рівняння теорії пружності. При цьому для розрахунку оболонок неглибоко залягання виникає необхідність урахування поверхні напівпростору (вільної або навантаженої). Крім того, значний теоретичний і практичний інтерес викликає дослідження взаємовпливу двох коаксіально розташованих оболонок у пружному середовищі при їх динамічному навантаженні і визначення відстані між ними, при якій цим взаємовпливом можна нехтувати. З математичної точки зору основна проблема полягає в тому, що рівняння різних елементів системи (оболонки і середовища) записані в різних системах координат і таким самим чином записані граничні умови, що унеможливлює їх одночасне задовольняння. У зв'язку з цим запропоновано чисельно-аналітичний підхід, який ґрунтується на застосуванні біполярної системи координат як для врахування впливу поверхні півпростору, так і при аналізі взаємовпливу двох оболонок [1].

Нехай оболонка та середовище віднесені до нерухомої декартової системи координат. Внутрішня поверхня оболонки задається рівнянням $x^2+(y+l)^2=b^2$, а поверхня контакту між півпростором та оболонкою – рівнянням $x^2+(y+l)^2=a^2$ (де l – відстань від центру оболонки до поверхні півпростору, $h=a-b$ – товщина оболонки). Поверхня півпростору в тій самій системі координат описується рівняння

$y = 0$. Вісь оболонки паралельна поверхні півпротору. Приймається, що динамічне навантаження на оболонку (або на поверхню півпростору) рівномірно розподілене за осьовою координатою, тобто не залежить від змінної *z*, тому початкова задача зводиться до плоскої задачі теорії пружності. Додатково приймається що навантаження прикладаються симетрично відносно осі *y*. У випадку двох коаксіальних оболонок внутрішня поверхня однієї з них задається рівнянням $x^2 + (y + l)^2 = b^2$, а іншої – $x^2 + (y - l)^2 = b^2$ ($2l$ – відстань між центрами). Осі оболонок та вісь *z* паралельні, а навантаження до обох оболонок прикладаються симетрично відносно осі *y*. Останнє припущення в обох задачах дозволяє зробити розріз, який враховується записом відповідних граничних умов для пружного середовища, та приводить до суттєвого зменшення обсягу обчислень.

Біполярна система координат задається співвідношеннями

$$x = \frac{a_0 \sin\beta}{ch\alpha + \cos\beta}, \qquad y = -\frac{a_0 sh\alpha}{ch\alpha + \cos\beta}, \qquad a_0 = \sqrt{l^2 - a^2},$$

де (*x*, *y*) – декартові координати точки, (*α*, *β*) – біполярні координати. Введена таким чином біполярна система координат є ортогональною та має наступні геометричні характеристики: $h_\alpha = h_\beta = \dfrac{a_0}{ch\alpha + \cos\beta}$, $g_{\alpha\alpha} = g_{\beta\beta} = h_\alpha^2$, де h_α, h_β – коефіцієнти Ламе, $g_{\alpha\alpha}$, $g_{\beta\beta}$ – компоненти метричного тензору. Зазначимо, що біполярна система координат може бути узагальнена до біциліндричної, яка також є ортогональною, її геометричні характеристики за осьовою координатою співпадають з відповідними характеристиками в циліндричній системі координат, тобто $h_z = 1$, $g_{zz} = 1$ [2].

Показано, як виходячи із динамічних рівнянь теорії пружності в довільній ортогональній системі координат отримати рівняння руху півпростору у біполярній системі, а з рівнянь теорії оболонок у довільній ортогональній системі перейти до рівнянь руху в тій самій, що й для середовища, біполярній системі. Після цього отримана система рівнянь у частинних похідних зі змінними коефіцієнтами розв'язувалася чисельним методом, що ґрунтується на методі скінчених різниць за просторовими координатами і θ-методі Вільсона за часовою змінною, який дозволяє звести розв'язання нестаціонарної задачі до розв'язання ітераційної послідовності квазістатичних задач. Проведено порівняння з результатами відповідних задач у статичній постановці, а також з результатами, які отримані авторами за допомогою методу скінчених елементів. Відмічена узгодженість між результатами за обома методами. З механічної точки зору найбільш важливими є знаходження залежності між відстанню до поверхні півпростору і радіусом оболонки, починаючи з якої стає справедливим моделювання оболонки в необмеженому просторі і аналогічний висновок про відстань між двома оболонками, при перевищенні якої взаємовплив стає незначним. Показана можливість розповсюдження запропонованого підходу на задачі динаміки оболонок у неоднорідному і акустичному середовищі.

Література

1. Пожуєв В.І., Пожуєв А.В., Фасоляк А.В. Моделювання динаміки циліндричної оболонки у пружному півпросторі за допомогою біполярної системи координат // Проблеми обчислювальної мех. і міцності конструкцій. - 2018. - Вип. 28. - С. 168-182.

2. Fasoliak A.V., Pozhuev V.I. Application of the bipolar coordinate system to modeling of the cylindrical shell dynamic in elastic medium with free surface // International Journal of Mechanical Engineering and Information Technology. - 2018. - Vol. 6. - P. 1820-1825.