УДК 621.372.061

Анатолій Якунін, к.т.н., доц.
Харківський національний університет міського господарства імені О. М. Бекетова, Україна

УЗАГАЛЬНЕНЕ ФУНКЦІОНАЛЬНО-ІНВАРІАНТНЕ ПОДАННЯ ПРОЦЕСІВ У ЛІНІЯХ З МАЛИМИ ВТРАТАМИ

Розглянуто диференціальне рівняння, що описує нестаціонарний струм у довгій лінії з малими втратами. Методом багатьох масштабів синтезовано наближений загальний розв'язок у вигляді комбінації двох затухаючих хвиль.

Ключові слова: електрична лінія, нестаціонарний процес, узагальнений функціонально-інваріантний розв'язок, метод багатьох масштабів.

Anatolii Yakunin, Ph.D, docent

GENERALIZED FUNCTIONALLY-INVARIANT REPRESENTATION OF PROCESSES IN LINES WITH SMALL LOSSES

Differential equation that describes a nonstationary current in a long line with small losses is considered. Approximate general solution as a combination of two damped waves is synthesized by the method of many scales.

Keywords: electrical line, nonstationary process, generalized functionally-invariant solution, method of many scales.

Перехідні режими електричних ланцюгів спостерігаються при комутаціях, передачі неперіодичних сигналів чи дії зовнішнього електромагнітного поля й описуються широким спектром зміни значень напруги та сили струму. Базовим поданням нестаціонарних процесів у довгій однорідній лінії з розподіленими параметрами, що характеризується індуктивністю L, ємністю C та малими активним опором $R = \varepsilon R_0$ і витоком $G = \varepsilon G_0$, служить система телеграфних рівнянь [1] :

$$\frac{\partial i}{\partial x} + C\frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon G_0 u = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \varepsilon R_0 i + L\frac{\partial i}{\partial t} = 0, \tag{1}$$

де величини R, L, C, G розподілені вздовж електричної лінії неперервно і рівномірно і розраховані на одиницю довжини; x – просторова координата вздовж лінії; t – час; $i = i(x,t)$ – сила струму; $u = u(x,t)$ – напруга; ε – малий параметр, $0 < \varepsilon << 1$.

У роботі [2] для дослідження довгого електричного ланцюга при малих втратах застосовується метод збурень до крайової задачі на півосі $x \in [0;+\infty)$ і знаходиться наближений аналітичний розв'язок кожного з рівнянь (1) у вигляді деформованої падаючої хвилі. При цьому нехтується нескінченно малими величинами другого та вищих порядків, не враховуються витоки та втрачається увага до відбитих хвиль.

Продиференціювавши відповідним чином співвідношення (1) і вилучивши одну з шуканих функцій $u = u(x,t)$ або $i = i(x,t)$, можна зазначену систему звести до вигляду, в якому кожне з рівнянь містить тільки одну з указаних функцій :

$$\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} - \nu^2\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} + 2\varepsilon\alpha\frac{\partial i}{\partial t} + \varepsilon^2\beta i = 0; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \nu^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\varepsilon\alpha\frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon^2\beta u = 0, \tag{2}$$

де $\nu = \sqrt{1/(LC)}$ – швидкість поширення біжучих хвиль, $\alpha = (1/2)\left(R_0/L + G_0/C\right)$ і $\beta = \left(R_0/L\right)\left(G_0/C\right)$ – сталі коефіцієнти.

Обидва рівняння (2) мають аналогічний запис, тому можна обмежитися розглядом тільки першого з них. Спираючись на наявність у задачі малого параметра, пропонується наближене подання загального розв'язку рівняння (2) для струму $i = i(x,t)$ як комбінації двох лінійно незалежних узагальнених функціонально-інваріантних розв'язків [3] за допомогою застосування методу багатьох масштабів [4] до незалежних змінних x і t.

Узагальнений функціонально-інваріантний розв'язок [3] характерний для рівнянь гіперболічного типу і має вигляд хвилі змінної амплітуди

$$i = A \cdot F(\tau), \tag{3}$$

де $A = A(x,t)$, $\tau = \tau(x,t)$ і $F = F(\tau)$ – відповідно амплітуда, фаза і профіль хвилі, причому залежності $A = A(x,t)$ і $\tau = \tau(x,t)$ визначаються з диференціального рівняння, а функція $F = F(\tau)$ – довільна.

Для прямої хвилі $i = A \cdot F(\tau)$ при малих втратах, з фізичних міркувань, можна знехтувати їхнім впливом на фазу та вважати $\tau = t - x/\nu$, а щоб врахувати незначні збурення амплітуди можна покласти $A = A(\eta)$, де $\eta = \varepsilon(t + \nu x)$ – повільна незалежна змінна. Тоді, переходячи в (2) до нових змінних, можна одержати

$$\varepsilon^2 \frac{d^2 A}{d\eta^2} F + 2\varepsilon \frac{dA}{d\eta} \cdot \frac{dF}{d\tau} + A \frac{d^2 F}{d\tau^2} - \varepsilon^2 \nu^4 \frac{\partial^2 A}{\partial \eta^2} F + 2\varepsilon \nu^2 \frac{dA}{d\eta} \cdot \frac{dF}{d\tau} - A \frac{d^2 F}{d\tau^2} +$$

$$+ 2\varepsilon^2 \alpha \frac{dA}{d\eta} F + 2\varepsilon\alpha A \frac{dF}{d\tau} + \varepsilon^2 \beta A F = 0. \tag{4}$$

Якщо привести подібні, потім поділити обидві частини на ε і згрупувати окремо члени з множниками $dF/d\tau$ і F, то співвідношення (4) набуває вигляду

$$2\left[(1+\nu^2)\frac{dA}{d\eta} + \alpha A\right] \cdot \frac{dF}{d\tau} + \varepsilon\left[(1-\nu^4)\frac{\partial^2 A}{\partial \eta^2} + 2\alpha \frac{dA}{d\eta} + \beta A\right] \cdot F = 0. \tag{5}$$

Обмежуючись пошуком розв'язку з точністю до членів першого порядку мализни відносно ε, можна у рівнянні (5) знехтувати другим доданком з множником F і отримати

$$\left[(1+\nu^2)\frac{dA}{d\eta} + \alpha A\right] \cdot \frac{dF}{d\tau} = 0.$$

Оскільки функція $F = F(\tau)$ – довільна, то вираз у дужках при множнику $dF/d\tau$ повинен дорівнювати нулю. Це приводить до диференціального рівняння

$$(1+\nu^2)\frac{dA}{d\eta} + \alpha A = 0,$$

розв'язком якого служить функція

$$A = B \exp\left(-\frac{\alpha\eta}{1+\nu^2}\right), \tag{6}$$

де B – довільна стала.

Підставляючи (6) у формулу (3), враховуючи довільність функції F та повертаючись до початкових аргументів x і t, можна отримати остаточний вираз для узагальненого функціонально-інваріантного розв'язку

$$i = \exp\left(-\frac{\varepsilon\alpha\,(t+\nu x)}{1+\nu^2}\right) \cdot F_1(t - x/\nu), \tag{7}$$

що відповідає падаючій хвилі, де F_1 – довільна функція.

Застосовуючи аналогічний підхід до розгляду відбитої хвилі $i = A \cdot F(\tau)$ при малих втратах, можна покласти $\tau = t + x/\nu$, $\eta = \varepsilon(t - \nu x)$ і одержати узагальнений функціонально-інваріантний розв'язок

$$i = \exp\left(-\frac{\varepsilon\alpha(t-\nu x)}{1+\nu^2}\right)\cdot F_2(t+x/\nu)\,, \tag{8}$$

що відповідає відбитій хвилі, де F_2 – довільна функція.

Легко переконатися, що розв'язки (7) і (8) – лінійно незалежні. Тоді загальний розв'язок рівняння (2) для струму можна наближено подати як їхню суму

$$i = \exp\left(-\frac{\varepsilon\alpha(t+\nu x)}{1+\nu^2}\right)\cdot F_1(t-x/\nu) + \exp\left(-\frac{\varepsilon\alpha(t-\nu x)}{1+\nu^2}\right)\cdot F_2(t+x/\nu)\,. \tag{9}$$

Підставляючи (9) у співвідношення (2) для струму, можна дістати вираз для нев'язки диференціального рівняння:

$$\Delta = \varepsilon^2(\beta-\alpha^2)\exp\left(-\frac{\varepsilon\alpha(t+\nu x)}{1+\nu^2}\right)\cdot F_1(t-x/\nu) + \varepsilon^2(\beta-\alpha^2)\exp\left(-\frac{\varepsilon\alpha(t-\nu x)}{1+\nu^2}\right)\cdot F_2(t+x/\nu)\,.$$

Для знаходження конкретних функцій F_1 і F_2 використовуються початкові та крайові умови. Зокрема дослідження довгого електричного ланцюга при малих втратах приводить до крайової задачі на півосі $x\in[0;+\infty)$ з межовими умовами

$$i(0,t) = \Phi(t),\quad t>0;\qquad \lim_{x\to+\infty} i(x,t) = 0,\ \ t>0\,, \tag{10}$$

де $\Phi(t)$ – задана функція.

Оскільки з другої умови (10) випливає, що у виразі (9) F_2=0, то перша умова (10) приводить до співвідношення

$$\exp\left(-\frac{\varepsilon\alpha t}{1+\nu^2}\right)\cdot F_1(t) = \Phi(t)\,.$$

Звідси

$$F_1(t) = \Phi(t)\exp\left(\frac{\varepsilon\alpha t}{1+\nu^2}\right).$$

Тоді

$$i = \exp\left(-\frac{\varepsilon\alpha(t+\nu x)}{1+\nu^2}\right)\cdot F_1(t-x/\nu) = \exp\left(-\frac{\varepsilon\alpha(t+\nu x)}{1+\nu^2}\right)\cdot \Phi(t-x/\nu)\exp\left(\frac{\varepsilon\alpha(t-x/\nu)}{1+\nu^2}\right) =$$

$$= \exp\left(-\frac{\varepsilon\alpha(\nu+1/\nu)x}{1+\nu^2}\right)\cdot\Phi(t-x/\nu) = \exp\left(-\frac{\varepsilon\alpha x}{\nu}\right)\cdot\Phi(t-x/\nu) \tag{11}$$

– закон зміни сили струму.

Співвідношення (11) показує, що в реальній лінії навіть при малих втратах хвилі струму затухають і тим інтенсивніше, чим менша швидкість їхнього поширення.

Література

1. Попов В. П. Основы теории цепей : учебник для вузов / В. П. Попов. 6-е изд., испр. – М. : Высш. шк., 2007. – 575 с.

2. Мартыненко М. А. Влияние малых сопротивлений на процессы в цепях с распределенными параметрами / М. А. Мартыненко, О. И. Новикова // Преобразование и стабилизация параметров электромагнитной энергии. – Киев : Ин-т электродинамики НАН Украины, 1996. – С. 119–123.

3. Никольский Э. В. Обобщенные функционально-инвариантные решения и эквивалентные системы уравнений математической физики : Аналитические и численные решения любых уравнений и систем 2-го порядка в частных производных / Э. В. Никольский. – Новосибирск : Наука, 1997. – 156 с.

4. Verhulst F. Methods and Applications of Singular Perturbations. Boundary Layers and Multiple Timescale Dynamics / F. Verhulst. – Berlin : Springer – Verlag, 2005. – 328 p.