УДК 517.3

Сеньків К.[1] - ст. гр. МБ-11, Подлеський Н.[2] – уч. гр. №33
[1]*Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя*
[2]*Тернопільське вище професійне училище сфери послуг та туризму*

ДОВЕДЕННЯ НЕРІВНОСТЕЙ МЕТОДАМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ

Науковий керівник: канд. фіз. – мат. наук, доцент Самборська О.М.

Senkiv K., Podleskyi N.
[1]*Ternopil Ivan Puluj National Technical University*
[2]*Ternopil Higher Vocational School of Service Industries and Tourism*

PROVING INEQUALITIES USING METHODS OF DIFFERENTIAL CALCULUS

Supervisor: Samborska O.

Ключові слова: нерівність, монотонність, екстремум
Keywords: inequality, monotonicity, extremum

Умови монотонності функції та методику дослідження функції на екстремум можна застосувати до доведення нерівностей.

Доведемо, що при $x>0$ справджується нерівність $\ln(1+x) > x - \frac{x^2}{2}$. Розглянемо функцію $f(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$. Похідна $f'(x) = \frac{x^2}{1+x}$. При $x>0$ $f'(x)>0$, тому функція $f(x)$ зростає при $x>0$. Оскільки $f(0)=0$, то $f(x)>0$, тобто $\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} > 0$ при $x>0$.

Доведемо нерівність: $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x,\ (x>0)$. Доведемо, що $\sin x < x$ при $x>0$. Розглянемо функцію $f_1(x) = \sin x - x$. $f_1'(x)\cos x - 1 < 0$ при всіх $x>0$, крім точок $x = 2k\pi\ (k=1,2,...)$. Отже функція $f_1(x)$ спадає при $x>0$. Оскільки $f_1(0)=0$, то $f_1(x)<0$ при $x>0$, тобто $\sin x < x$ при $x>0$.

Доведемо також,що $\sin x > x - \frac{x^3}{6}$ при $x>0$. Візьмемо функцію $f_2(x)\sin x - x + \frac{x^3}{6}$ і дослідимо її поведінку при $x>0$.

$$f_2'(x) = \cos - 1 + \frac{x^2}{2};\quad f_2''(x) = -\sin x + x;\quad f_2''(x) > 0 \text{ при } x>0.$$

Тому $f_2'(x)$ зростає при $x>0$. Оскільки $f_2'(0)=0$, то $f_2'(x)>0$ при $x>0$.

Отже, функція $f_2(x)$ зростає при $x>0$.Враховуючи, що $f_2(0)=0$, одержимо, що $f_2(x)>0$ при $x>0$, тобто $\sin x - x + \frac{x^3}{6} > 0$.

Доведемо нерівність $x+\frac{1}{x}\geq 2,\ \left(x>0\right)$. Розглянемо функцію $f\left(x\right)=x+\frac{1}{x}$ при $x>0$. Похідна $f'\left(x\right)=f-\frac{1}{x^2}=\frac{x^2-1}{x^2}$. При $0<x<1$ $f'\left(x\right)<0$, а при $1<x<+\infty$ $f'\left(x\right)>0$. Тому в точці $x=1$ ця функція має мінімум. Єдиний мінімум при $x>0$ визначає найменше значення функції $f\left(1\right)=2$. Отже, $x+\frac{1}{x}\geq 2$ при $x>0$.

Доведено також нерівності:

$$\cos x>1-\frac{x^2}{2},\ \left(x>0\right);\quad \sin x>\frac{2}{\pi}x,\ \left(0<x<\frac{\pi}{2}\right);\ e^x>1+x,\ \left(x\neq 0\right).$$

$$\frac{a-b}{a}<\ln\frac{a}{b}<\frac{a-b}{b},\ \left(0<b<a\right).$$

Розглянемо функцію $f\left(x\right)=x^{\alpha}-\alpha x,\ 0<\alpha<1.$ Нехай $x\geq 0.$ $f'\left(x\right)=\alpha\left(x^{\alpha-1}-1\right).$ $f'\left(x\right)>0$ при $0<x<1;$ $f'\left(x\right)<0$ при $1<x<+\infty$. Отже, в точці $x=1$ функція $f\left(x\right)$ має максимум. Оскільки $f\left(1\right)=1-\alpha$, то при $x>0$ справджується нерівність

$$x^{\alpha}-\alpha x\leq 1-\alpha \qquad (1)$$

Застосовуючи нерівність (1), можна довести низку класичних нерівностей. Підставимо в (1) $x=\frac{a}{b}$, де $a,\ b$ – довільні додатні числа і позначимо $1-\alpha=\beta$. Отримаємо:

$$a^{\alpha}b^{\beta}\leq \alpha a+\beta b,\ \left(\alpha,\beta,a,b>0,\ \alpha+\beta=1\right) \qquad (2)$$

Нерівність (2) можна узагальнити на випадок будь-якого скінченного числа множників:

$$a_1^{q_1}\ a_2^{q_2}\ \dots\ a_n^{q_n}\leq q_1a_1+q_2a_2+\dots+q_na_n, \qquad (3)$$
$$\left(a_1,a_2,\dots,a_n,\ q_1,q_2,\dots,q_n>0;\ q_1+q_2+\dots+q_n=1\right)$$

Можна взяти $q_i=\frac{p_i}{\sum\limits_{j=1}^{n}p_j}$,

де p_i – довільно додатні числа. Нерівність (3) матиме вигляд:

$$\left(a_1^{p_1}a_2^{p_2}\dots a_n^{p_n}\right)^{\frac{1}{\sum_j p_j}}\leq\frac{p_1a_1+p_2a_2+\dots+p_na_n}{p_1+p_2+\dots+p_n} \qquad (4)$$
$$\left(a_1,\dots,a_n,\ p_1,\dots,p_n>0\right)$$

Якщо $p_1=p_2=\dots=p_n=1$, то отримаємо:

$$\sqrt[n]{a_1a_2\dots a_n}\leq\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n} \qquad (5)$$

Тобто доведено, що середнє геометричне додатних чисел не перевищує їхнього середнього арифметичного.