УДК 536.2

Курило Д. – ст.гр. ММ – 21
Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

РОЗВ'ЯЗОК ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ В ЗАДАЧІ ЗГИНУ ПЛАСТИНКИ

Науковий керівник: канд. фіз. – мат. наук, доцент Шелестовський Б.Г.

Kurylo.D.
Ternopil Ivan Puluj National Technical University

SOLUTION OF THE DIFFERENTIAL EQUATION IN THE PLATE BENDING TASK

Supervisor: Shelestovsky B.

Ключові слова: диференціальне рівняння, прогин, згин, навантаження.
Key words: differential equation, deflection, bending, load.

Диференціальне рівняння зігнутої поверхні прямокутної пластинки на яку діє розподілене по поверхні навантаження має вигляд:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q_0}{D}\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}, \qquad (1)$$

тут $q = q_0 \sin\frac{\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{b}$ синусоїдальне навантаження, що діє на пластину.

Граничні умови:

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad x = 0 \text{ та } x = a, \qquad (2)$$

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad y = 0 \text{ та } y = b \qquad (3)$$

Граничні умови будуть задовольнятись, якщо візьмемо для прогинів w вираз

$$w = c \cdot \sin\frac{\pi x}{a} \cdot \sin\frac{\pi y}{b}, \qquad (4)$$

де стала C повинна бути взята такою, щоб задовольнялось рівняння (1). Підставивши вираз (4) у рівняння (1), знайдемо:

$$\pi^4 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)^2 C = \frac{q_0}{D},$$

звідси робимо висновок, що шуканим рівнянням зігнутої поверхні, для якої задовольняються рівняння (1) і граничні умови (2), (3) буде:

$$w = \frac{q_0}{\pi^4 D\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)^2} \sin\frac{\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{b}, \qquad (5)$$

якщо закон синусоїдального розподілу навантаження заданий рівнянням

$$q = q_0 \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b},$$

то одержимо

$$w = \frac{q_0}{\pi^4 D \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} . \qquad (6)$$

Розглянемо випадок, коли на пластинку діє навантаження, яке задане рівнянням

$$q = f\left(x, y\right) \qquad (7)$$

Розкладемо функцію $f\left(x, y\right)$ в подвійний тригонометричний ряд

$$f\left(x, y\right) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} , \qquad (8)$$

де

$$a_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b f\left(x,\ y\right) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx\, dy . \qquad (9)$$

Здійснивши інтегрування для заданої $f\left(x, y\right)$, знайдемо коефіцієнти ряду (8) і таким чином подамо задане нам навантаження як суму частинних синусоїдальних навантажень. Скориставшись виразом (6), запишемо:

$$w = \frac{1}{\pi^4 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n-1}^{\infty} \frac{a_{mn}}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \qquad (10)$$

Розглянемо випадок навантаження, яке рівномірно розподілене: $f\left(x, y\right) = q_0$. Формула (9) для цього випадку дає:

$$a_{mn} = \frac{4q_0}{ab} \int_0^a \int_0^b \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx\ dy = \frac{16 q_0}{\pi^2 mn} \qquad (11)$$

де *m* і *n* – непарні числи.

Підставляючи ці значення в (10), маємо:

$$w = \frac{16 q_0}{\pi^6 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} . \qquad (12)$$

При рівномірному навантаженні поверхня прогинів є симетричною відносно прямих $x = \frac{a}{2},\ y = \frac{b}{2}$. Максимальний прогин пластинки *w* буде в центрі:

$$w_{\max} = \frac{16 q_0}{\pi^6 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(-1\right)^{\frac{m+n}{2} - 1}}{mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} . \qquad (13)$$