Секція: МАТЕМАТИКА ТА ФІЗИКА
Голови: доц. Б Шелестовський, проф. Л. Дідух, доц. Л. Скоренький
Вчений секретар: доц. О. Крамар

УДК 517.9

Г. Габрусєв, канд. фіз.-мат. наук, доц., І. Габрусєва, канд. техн. наук
Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя, Україна

МЕТОДИКА ПОБУДОВИ РОЗВ'ЯЗКУ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ В КОНТАКТНИХ ЗАДАЧАХ МЕХАНІКИ ДЕФОРМІВНОГО ТВЕРДОГО ТІЛА

H. Habrusiev, Ph.D., Assoc. Prof.; I. Habrusieva, Ph.D.

THE METHOD OF SOLUTION OF INTEGRAL EQUATIONS IN CONTACT PROBLEMS OF SOLID MECHANICS

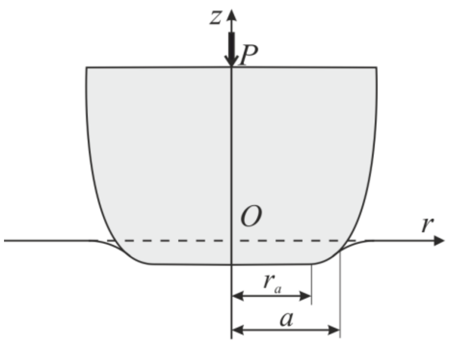

Рис. 1. Схема контактної взаємодії

Розглянемо задачу, про втиснення постійною силою P жорсткого параболічного штампа складної конфігурації у попередньо деформований пружній півпростір. Штамп утворено обертанням кривої, що складається із вітки параболи та відрізка перпендикулярного осі параболи, які з'єднано у вершині. Для розв'язання задачі скористаємося апаратом лінеаризованої теорії пружності [1]. Виберемо циліндричну систему координат $Or\theta z$ так, щоб координатна площина $Or\theta$ збігалася з граничною площиною півпростору, а вісь Oz – із лінією дії сили P (рис. 1).

Із збільшенням сили P, розміри ділянки контакту також збільшуються. Вважатимемо, що її радіус a відомий, тоді величина прикладеної сили визначається із умови

$$P = -2\pi \int_0^a r\sigma_{zz}(r,0)\,dr, \tag{1}$$

а граничні умови поставленої задачі мають вигляд

$$\sigma_{rz}(r) = 0,\ 0 \le r < \infty; \tag{2}$$

$$\sigma_{zz}(r) = 0,\ a \le r; \tag{3}$$

$$u_z(r) = u_z(a) + \omega(r),\ 0 \le r \le a. \tag{4}$$

Тут $\omega(r)$ – функція, що відповідає формі поверхні, що обмежує штамп

$$\omega(r) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2R}(r_a - a)^2,\ 0 \le r \le r_a, \\ \dfrac{1}{2R}\left[(r_a - r)^2 - (r_a - a)^2\right],\ r_a < r \le a, \end{cases}$$

а R – фокальний параметр параболи, r_a – довжина відрізка.

Вважатимемо залишкові напруження, що виникли у півпросторі, однорідними. Задовольнивши граничну умову (2), вирази для нормальних напружень та вертикальних переміщень можна записати у вигляді [2]

$$\sigma_{zz}(r) = c_{44}(1+m_1)(s-s_0)l_1 \int_0^\infty \alpha^3 F_2 J_0(\alpha r)\,d\alpha; \tag{5}$$

$$u_z(r) = \frac{m_1(s_1 - s_0)}{\sqrt{n_1}} \int_0^\infty \alpha^2 F_2 J_0(\alpha r)\, d\alpha\,. \tag{6}$$

де c_{44}, m_1, n_1, l_1, s, s_0, s_1 – константи, що залежать від пружного потенціалу й обираються у кожному окремому випадку відповідно до його характеру, F_2 – невідома функція, що визначається із граничних умов задачі.

Граничні умови (3) та (4) приводять до парних інтегральних рівнянь. За допомогою невідомої функції $x(r)$, визначеної на відрізку $[0,a]$, продовжимо спочатку перше рівняння, на всю додатну піввісь

$$c_{44}(1+m_1)(s-s_0)l_1 \int_0^\infty \alpha^3 F_2 J_0(\alpha r)\, d\alpha = x(r)\eta(a-r),\ 0 \le r < \infty\,, \tag{7}$$

де $\eta(r)$ – одинична функція Гевісайда.

Функція $x(r)$ визначає розподіл контактних напружень під штампом. Подамо її у вигляді відрізка узагальненого ряду Фур'є

$$\sigma_{zz}(r) = x(r) = \sum_{n=1}^{N} a_n J_0\left(\frac{\lambda_n}{a} r\right), \quad 0 \le r \le a\,, \tag{8}$$

де λ_n, $n = \overline{1,N}$ – додатні корені функції Бесселя $J_0(\lambda_n) = 0$, a_n – невідомі коефіцієнти. Застосувавши формулу обернення інтегрального перетворення Ганкеля до співвідношення (7), та використавши (6) і граничну умову (4) одержуємо систему систему N лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих a_n. При її розв'язанні доцільно зробити заміну

$$a_n = \frac{1}{2k_1 R} a_n^*\,,\ \ k_1 = \frac{m_1(s_1 - s_0)}{c_{44}(1+m_1)(s-s_0)l_1\sqrt{n_1}}\,. \tag{9}$$

Зв'язок між фокальним параметром параболи R та величиною прикладеної сили встановлюється співвідношенням (1), звідки

$$R = \frac{-\pi}{2k_1 P} \sum_{n=1}^{N} a_n^* K_n\,,\ \ K_n = \int_0^a r J_0\left(\frac{\lambda_n}{a} r\right) dr. \tag{10}$$

Врахувавши (10), за допомогою (8) та (9) отримуємо закони розподілу контактних напружень та вертикальних переміщень у вигляді

$$\sigma_{zz}(r) = -\frac{P}{2\pi} \frac{\sum_{n=1}^{N} a_n^* J_0\left(\frac{\lambda_n}{a} r\right)}{\sum_{n=1}^{N} a_n^* K_n},\ u_z(r) = -\frac{k_1 P}{2\pi} \frac{\sum_{n=1}^{N} a_n^* \int_0^\infty \Psi_n(\alpha) J_0(\alpha r)\, d\alpha}{\sum_{n=1}^{N} a_n^* K_n}\,,$$

$$\Psi_n(\alpha) = \int_0^a r J_0\left(\frac{\lambda_n}{a} r\right) J_0(\alpha r)\, dr.$$

Описану методику можна застосовувати для розв'язання інтегральних рівнянь широкого кола осесиметричних контактних задач механіки деформівного твердого тіла.

Література.

1. Габрусєв Г. В. Вплив початкових деформацій товстої плити на її контактну взаємодію із параболічним штампом / Г. Габрусєв, І. Габрусєва // Вісник ТНТУ. — Т. : ТНТУ, 2017. — Том 85. — № 1. — С. 29–37.
2. Habrusiev H. Contact interaction of punch with prestressed half-plane / Hryhorii Habrusiev, Oleh Panchuk, Borys Shelestovs'kyi // Scientific Journal of TNTU. — Tern. : TNTU, 2018. — Vol 90. — No 2. — P. 72–78.