

УДК 623.407

В. Медвідь, І. Бєлякова, В. Пісьціо

Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

МЕТОДИКА ОПТИМІЗАЦІЇ П'ЄЗОТРАНСФОРМАТОРІВ

V. Medvid, I. Belyakova, V. Piscio

PIEZOTRANSFORMERS OPTIMIZATION APPROACH

Розглянемо оптимізацію форми плоского п'єзотрансформатора струму (ПТ) з поляризацією за товщиною пластини. Нехай бічні поверхні п'єзотрансформатора вільні від електродів, а верхня і нижня поверхні покриті системою електродів, зазор між якими наближається до 0. Нехай збудження коливань в площині x_1, x_2 здійснюється різницею електричних потенціалів $U_0 e^{i\omega t}$, прикладеною до електродів, що повністю покривають поверхні пластини $x_3 = \pm h/2$. Для спрощення технології виготовлення ПТ виконують у вигляді пластини із криволінійною бічною поверхнею постійної товщини. З умов зручності поляризації ПТ виконують із напрямком вектора поляризації, що однаковий у всьому елементу. А для зменшення втрат енергії ПТ закріплюють так, щоб його поверхні не передавали зусилля на закріплення, що приводить до граничної умови: $\sigma_{ij} n_j = 0$, де n_j - вектор зовнішньої нормалі. При розгляді задачі оптимізації ПТ можна скористатись умовами узагальненого плоского напруженого стану для механічних складових поля, тому . Отже рівняння можуть бути записані у слабкій постановці у вигляді [1]:

$$\int_V \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \left(c_{11} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + c_{12} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \left(c_{12} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + c_{11} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) + \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) c_{66} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) dV + \int_V \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) \frac{e_{31}}{h} \varphi dV + \int_V \rho \omega^2 (v_1 u_1 + v_2 u_2) dV = 0. \quad (1)$$

Так як п'єзотрансформатор працює у режимі близькому до резонансу, складові з φ можуть бути відкинуті і остаточна слабка форма задачі набуде вигляду:

$$\int_V \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \left(c_{11} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + c_{12} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \left(c_{12} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + c_{11} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) + \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) c_{66} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) dV + \int_V \rho \omega^2 (v_1 u_1 + v_2 u_2) dV = 0, \quad (2)$$

де u_i - переміщення, v_i - пробні функції. Струм через елементарну площадку рівний:

$$dI = \omega \left(d_{31} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) - \varepsilon_{33} \frac{\varphi}{h} ds \right). \quad (3)$$

У якості критерію оптимальності приймемо максимізацію струмів, що пов'язані із передачею енергії через п'єзотрансформатор при заданому значенні допустимих напружень у матеріалі при сталому об'ємі матеріалу. Максимальний струм через електроди буде отриманий тоді, коли електроди будуть включені так, щоб струму через елементарні площадки сумувались. Нехтуючи другим доданком, котрий не пов'язаний із передачею енергії, отримаємо функцію мети:

$$I = \omega \int_V |d_{31} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})| ds \rightarrow \max. \quad (4)$$

Так як матеріал п'єзокераміки крихкий, а коливання проходять за гармонійним законом і фаза зміни напружень однакова логічно скористатись обмеженням на напруження:

$$\sigma_e = \frac{1}{2} \left(|\sigma_{11} + \sigma_{22}| + \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2} \right) \leq [\sigma], \quad (5)$$

де $[\sigma]$ - допустимі напруження у матеріалі. Також слід обмежити максимальну робочу частоту п'єзоелемента: $\omega < \omega_{\max}$ і ввести обмеження на довжину, припустивши, що довжина п'єзоелемента по осі Ox_1 рівна $2L$. У такому випадку границю по осі Ox_2 зручно описати у вигляді ряду Фур'є:

$$y_{\Gamma}(x_1) = \pm \sum_{k=0}^N a_k \cos\left(\frac{\pi k x_1}{L}\right) + \sum_{k=1}^N b_k \sin\left(\frac{\pi k x_1}{L}\right). \quad (6)$$

При симетрії границі відносно осі Ox_2 функція границі $x_2 = \pm y_{\Gamma}(x_1)$ має володіти властивістю $y_{\Gamma}(x_1) = y_{\Gamma}(-x_1)$, що можливо якщо $b_i = 0$. Об'єм ПТ

$V = h \int_{-L}^L y_{\Gamma}(x_1) dx_1$ запишеться у вигляді: $V_0 = 4 a_0 h L$. Отже введення обмеження на

об'єм еквівалентно обмеженню на коефіцієнт a_0 . При практичній реалізації оптимізації у якості початкового наближення використовується скінченноелементна модель області у вигляді прямокутника із нерівномірною триангуляційною сіткою, зображеною на рис. 1 а. У процесі оптимізації сітка деформується (рис. 1 б) за законом :

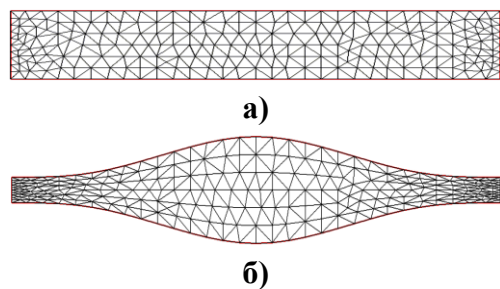


Рис. 1. Зміна форми ПТ та триангуляційної сітки у процесі оптимізації

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \sum_{k=0}^N a_k \cos\left(\frac{\pi k x_1}{L}\right) \end{bmatrix}. \quad (7)$$

де X_i - нові координати точок.

Процес оптимізації здійснюється у програмі FreeFem++. Він полягає у зміні коефіцієнтів a_k , таким чином, щоб значення корисної функції збільшувалось. Як алгоритм оптимізації

використовується метод Нейделя-Мідла [2].

Підпрограма обчислення функції мети отримує вектор змінних котрі описують пропоновану геометрію. У першу чергу перевіряється коректність пропонованої геометрії. Якщо вона не коректна, наприклад, є самопересічення границі, функція мети набуває випадкового значення у межах $-200..-100$ (обрання випадкового значення запобігає зациклюванню алгоритму). Якщо ж форма є коректною формуються квадратичні форми, котрі відповідають функціоналам:

$$V_B(v,u) = \int_V \rho \omega^2 (v_1 u_1 + v_2 u_2) dV ;$$

$$V_A(v,u) = \int_V \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \left(c_{11} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + c_{12} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \left(c_{12} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + c_{11} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) + \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) c_{66} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) dV$$

.(8)

На їх основі визначаються матриці A та B , за допомогою котрих з використанням бібліотеки ARPACK, що входить у FreeFem++ будується набір із 10 власних форм коливань та відповідних їм власних чисел λ_i . Для кожного власного вектора коливань обчислюється значення максимальних напружень і значення функції мети, знаходиться форма коливань із максимальним значенням функції мети яка і повертається основній програмі. Обчислення кількох власних функцій необхідно із-за того, що серед власних коливань є коливання згину п'єзопластини, котрі мають функцію мети близьку до 0.

Література

1 Медвідь В. Р., Белякова І, Пісьціо В., Шкодзінський О.К. Оптимізація п'єзотрансформатора //Матеріали Міжнародної науково-технічної конференції „Фундаментальні та прикладні проблеми сучасних технологій “до 100 річчя з дня заснування НАН України та на вшанування пам'яті Івана Пулюя (100 річчя з дня смерті). – 2018. – с. 261-262.

2 Банди. Методы оптимизации. Вводный курс: Пер. с англ. - М. Радио и связь, 1988. 128 с.