

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
ТЕРНОПІЛЬСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
ІМЕНІ ІВАНА ПУЛЮЯ

**ДМИТРОЦА ЛЕСЯ ПАВЛІВНА**

УДК 004.942:519.876.5

**МОДЕЛІ, МЕТОДИ ТА ІНФОРМАЦІЙНА ТЕХНОЛОГІЯ  
АНАЛІЗУ ПРОЦЕСІВ ЗІ ЗМІННИМ ПЕРІОДОМ**

05.13.06 – інформаційні технології

**АВТОРЕФЕРАТ**  
дисертації на здобуття наукового ступеня  
кандидата технічних наук

Тернопіль – 2019

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Тернопільському національному технічному університеті імені Івана Пулюя Міністерства освіти і науки України.

**Науковий керівник:** доктор технічних наук, професор  
**Приймак Микола Володимирович,**  
Тернопільський національний технічний університет  
імені Івана Пулюя,  
професор кафедри комп'ютерних наук.

**Офіційні опоненти:** доктор технічних наук, професор  
**Антощук Світлана Григорівна,**  
Одеський національний політехнічний університет,  
директор Інституту комп'ютерних систем;

доктор технічних наук, професор  
**Бойко Іван Федорович,**  
Національний авіаційний університет,  
професор кафедри електроніки.

Захист відбудеться «4» квітня 2019 року об 11<sup>00</sup> годині на засіданні спеціалізованої вченої ради К 58.052.06 у Тернопільському національному технічному університеті імені Івана Пулюя за адресою: 46001, м. Тернопіль, вул. Руська, 56, ауд. 79.

З дисертацією можна ознайомитися у бібліотеці Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя за адресою: 46001, м. Тернопіль, вул. Руська, 56.

Автореферат розісланий «27» лютого 2019 р.

Вчений секретар  
спеціалізованої вченої ради



Фриз М.Є.

## ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

**Актуальність теми.** Сьогодні широко використовують інформаційні технології (ІТ) для вирішення різноманітних задач, пов'язаних із аналізом процесів (явищ, сигналів), оцінкою їх параметрів, прийняттям на основі отриманих даних відповідних рішень. Ефективність прийняття рішень багато в чому визначається повнотою та достовірністю інформації про об'єкти та процеси, що досліджуються. Значну увагу привертають процеси, основною характерною особливістю яких є періодичність (ритмічність, циклічність). Такі процеси зустрічаються в метеорології, економіці, системах масового обслуговування, акустиці, медицині тощо. Для їх аналізу розроблені методи та програмні засоби цифрової обробки, зокрема спектрального аналізу, що реалізовані в комп'ютерних пакетах (Maple, MuPAD, Mathematica, Mathcad, MATLAB). В основі цих методів лежать фундаментальні результати теорії функцій (Д.Бернуллі, Л.Ейлер, Ж.Лагранж, Ж.Д'Аламбер, К.Вейерштрас), рядів Фур'є (Ж.Фур'є, М.Лузін, С.Бернштейн). Розроблені також інформаційні технології спектрально-кореляційного аналізу стаціонарних та періодичних процесів і послідовностей (О.Хінчин, Є.Слуцький, О.Коронкевич, Я.Драган, І.Яворський, М.Приймак), дискретного та швидкого перетворення Фур'є (J.Tukey, J.Cooley). Для випадків, коли невідомим є період функцій, розглядалися питання оцінки їх періоду (метод Бюй-Балло), гармонічного аналізу (A.Schuster).

Проведений аналіз показав, що існуючі методи та прикладні програми не враховують особливості широкого класу процесів, які теж є періодичними, але при цьому їх період вже не є постійним, а певним чином змінюється. До таких процесів можна віднести електрокардіограми (ЕКГ), отримані під час чи після дії на організм людини фізичного навантаження чи іншого збудника психофізичного стану. Приклади аналогічних періодичних процесів зі змінним періодом існують у технічних системах – гідро- та віброакустичні сигнали, отримані під час роботи двигунів, дизель-генераторів в перехідних режимах, наприклад, після зміни зовнішнього навантаження.

Огляд літературних джерел показав, що ступінь повноти подання інформації про процеси зі змінним періодом із застосуванням відомих методів спектрального аналізу, вейвлет-аналізу є недостатнім для прийняття обґрунтованих рішень в багатьох практичних застосуваннях. Для його підвищення запропоновано використовувати функції зі змінним періодом, що введені в роботах Приймака М.В., але які не знайшли свого відображення при розробці інформаційних технологій для автоматизації аналізу процесів зі змінним періодом.

Робота, яка націлена на вирішення науково-практичного завдання підвищення ступеня повноти подання інформації про процеси зі змінним періодом та рівня автоматизації їх аналізу шляхом розробки відповідних моделей, методів та інформаційних технологій, є актуальною.

**Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.** Дисертаційна робота виконана в межах науково-дослідних робіт кафедри комп'ютерних наук Тернопільського національного технічного університету імені І. Пулюя, зокрема «Інформаційні технології дослідження процесів із характерними особливостями періодичності» (номер державної реєстрації 0116U006601), держбюджетної теми «Розроблення методів прогнозування довговічності сплавів з ефектом пам'яті форми за змінної амплітуди навантаження» (номер державної реєстрації 0117U002241), в

яких автор була виконавцем окремих етапів, завдань та розділів, пов'язаних із розробкою методів та програмного забезпечення аналізу досліджуваних процесів.

**Мета і завдання дослідження.** Метою дисертаційної роботи є підвищення ступеня повноти подання інформації про процеси зі змінним періодом та рівня автоматизації аналізу цих процесів шляхом розробки моделі, методів та інформаційної технології для підтримки прийняття рішень.

У відповідності до мети в дисертаційній роботі були поставлені наступні завдання:

- провести аналіз проблеми дослідження процесів зі змінним періодом;
- розробити математичну модель для формалізації подання періодичних процесів зі змінним періодом;
- побудувати ортогональну систему тригонометричних функцій зі змінним періодом та розробити алгоритм побудови рядів Фур'є періодичних функцій зі змінним періодом, що є основою інформаційної технології для аналізу процесів зі змінним періодом;
- розробити метод оцінки змінного періоду для електрокардіограми, отриманої після фізичного навантаження та запропонувати нові діагностичні ознаки варіабельності серцевого ритму;
- створити інформаційну технологію аналізу процесів зі змінним періодом.

*Об'єкт дослідження* – процеси зі змінним періодом.

*Предмет дослідження* – моделі, методи та засоби аналізу періодичних процесів зі змінним періодом.

**Методи дослідження.** Вирішення завдань, поставлених в дисертаційній роботі, виконано з використанням методів теорії функцій і функціонального аналізу, теорії рядів Фур'є, чисельних методів, теорії алгоритмів, програмування та комп'ютерного експерименту.

#### **Наукова новизна отриманих результатів:**

- набула подальшого розвитку математична модель процесів зі змінним періодом за рахунок розробки та систематизації способів аналітичного подання функцій зі змінним періодом, що дозволило здійснювати перевірку правильності теоретичних положень теорії рядів для періодичних функцій зі змінним періодом;
- вперше розроблено метод побудови рядів Фур'є періодичних функцій зі змінним періодом за рахунок подальшого розвитку ортогональної системи тригонометричних функцій зі змінним періодом та визначення коефіцієнтів Фур'є, що дозволило здійснювати спектральний аналіз процесів зі змінним періодом;
- вперше запропоновано метод оцінювання віддалі між періодичною функцією зі змінним періодом і її наближенням скінченним рядом Фур'є, що дає можливість оцінити точність та повноту подання інформації щодо процесів зі змінним періодом;
- вперше запропоновано метод оцінки змінного періоду з врахуванням математичної моделі процесів зі змінним періодом, який за рахунок отримання додаткових параметрів дозволив підвищити ступінь автоматизації аналізу таких процесів.

**Практичне значення отриманих результатів.** Розроблена на основі теоретичних досліджень нова інформаційна технологія дає можливість здійснювати

аналіз процесів зі змінним періодом. Використання цієї технології в практичній діяльності дозволяє:

- будувати ряди Фур'є періодичних функцій зі змінним періодом, їх амплітудний та фазовий спектри, що надзвичайно важливо для задач класифікації, розпізнавання емпіричних періодичних процесів зі змінним періодом в кардіології, гідро- та віброакустиці тощо;

- отримувати додаткові параметри варіабельності серцевого ритму після дії на організм людини фізичного навантаження, що розширило інформативність діагностичних ознак для підтримки прийняття рішень в кардіології при дослідженні функціонального стану серцево-судинної системи людини, що підтверджено відповідними актами.

Інформаційна технологія аналізу процесів зі змінним періодом, яка реалізована в програмних пакетах «Фур'є-аналіз функцій зі змінним періодом» та «Аналіз *RR*-інтервалів та оцінка варіабельності серцевого ритму», суттєво доповнюють відомі комп'ютерні пакети (Maple, Mathematica, Mathcad, MATLAB), може бути використана як для аналізу електрокардіограми після навантаження, так і інших процесів зі змінним періодом.

Результати дисертаційної роботи впроваджено і використовуються у Збаразькій центральній районній комунальній лікарні (м. Збараж, Тернопільська обл., акт про впровадження від 4.04.2018 р.); в Інституті електродинаміки НАН України (м. Київ, акт про впровадження від 20.06.2018 р.); в навчальному процесі кафедри комп'ютерних наук Тернопільського національного технічного університету ім. І. Пулюя (акт про впровадження від 24.07.2018 р.); у Комунальному підприємстві “Тернопільський міський лікувально-діагностичний центр” Тернопільської міської ради (м. Тернопіль, акт про впровадження від 6.08.2018 р.); у навчальному процесі кафедри медичної інформатики Тернопільського державного медичного університету імені І.Я. Горбачевського при вивченні дисциплін «Комп'ютерне моделювання у фармації», «Медична інформатика», а також застосовано розроблену комп'ютерну програму як додаток до «Інформаційної системи оцінки фізичної реабілітації» для оцінки адаптаційних механізмів організму після фізичного навантаження (м. Тернопіль, акт про впровадження від 21.08.2018 р.).

**Особистий внесок здобувача.** Наукові положення та основні результати, які містяться в дисертації, отримані здобувачем самостійно. В роботах, опублікованих у співавторстві, дисертанту належать: [1, 10, 25] – аналіз експериментальних даних, проведення апроксимації змінної частоти серцебиття після фізичного навантаження; [2, 23] – наведення прикладів тригонометричних функцій зі змінним періодом та їх подання в явному вигляді, побудова графіків функцій та їх змінних періодів; [3, 18] – узагальнення методу отримання тригонометричних функцій зі змінним періодом; [4, 19] – розроблення способів аналітичного задання функцій зі змінним періодом, запис виразів їх змінних періодів, обчислення коефіцієнтів Фур'є та побудова рядів Фур'є; [5, 22] – розробка інформаційної технології обчислення коефіцієнтів Фур'є для функцій зі змінним періодом та функцій з постійним періодом на прикладі періодичних коливань прямокутної форми, порівняння результатів, побудова графіків функцій та їх рядів Фур'є; [6] – проведення експериментів з відбору даних для досліджень варіабельності серцевого ритму після фізичного навантаження та обчислення параметрів оцінки змінного періоду електрокардіограм; [8, 9, 10] –

обчислення коефіцієнтів ряду Фур'є для функції зі змінним періодом та їх порівняння на різних інтервалах ортогональності, побудова графіків функцій зі змінним періодом; [12, 17] – знаходження інтервалів ортогональності, перевірка ортогональності системи функцій зі змінним періодом; [13] – перевірка твердження про взаємозв'язок змінних періодів системи тригонометричних функцій зі змінним періодом; [16] – аналіз літературних джерел в напрямку дослідження періодичних функцій та процесів; [21] – реалізація алгоритму наближення функцій зі змінним періодом; [24] – обґрунтування можливості використання пульсометра для проведення експериментальних досліджень варіабельності серцевого ритму після фізичного навантаження; [26] – розроблення програмного забезпечення для обчислення коефіцієнтів Фур'є та побудови рядів Фур'є для функцій зі змінним періодом; [27] – розроблення програмного забезпечення для оцінки варіабельності серцевого ритму після фізичного навантаження.

**Апробація результатів дисертації.** Результати роботи опубліковано та обговорювались на міжнародних та всеукраїнських наукових конференціях, зокрема на: I науково-технічній конференції «Інформаційні моделі, системи та технології» (м. Тернопіль, 2011 р.); Всеукраїнській науковій конференції «Застосування математичних методів в науці і техніці» (м. Луцьк, 2011 р., 2013 р.); Всеукраїнській науковій конференції «Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу» (м. Івано-Франківськ, 2012 р.); II науково-технічній конференції «Інформаційні моделі, системи та технології» (м. Тернопіль, 2012 р.); XVII науковій конференції «Природничі науки та інформаційні технології» (м. Тернопіль, 2013 р.); 15-й і 17-й міжнародних наукових конференціях ім. акад. М. Кравчука (м. Київ, 2014 р., 2016 р.); Міжнародних науково-технічних конференціях Харківського національного університету ім. В. Каразіна (м. Харків, 2014 р., 2016 р.); XII Міжнародній конференції «Контроль і управління в складних системах (КУСС-2014)» (м. Вінниця, 2014 р.); VI Міжнародній науково-практичній конференції "Обробка сигналів і негаусівських процесів" (м. Черкаси, 2017 р.); VI Міжнародній науково-технічній конференції молодих учених та студентів «Актуальні задачі сучасних технологій» (м. Тернопіль, 2017 р.); Міжнародній науковій конференції «Сучасні проблеми математичного моделювання, обчислювальних методів та інформаційних технологій» (м. Рівне, 2018 р.). Матеріали дисертації обговорювались на наукових семінарах кафедри комп'ютерних наук Тернопільського національного технічного університету ім. І. Пулюя.

**Публікації.** За результатами дисертаційних досліджень опубліковано 27 наукових праць, в тому числі 7 статей у наукових фахових виданнях України (одноосібних статей – 1), 3 з них входять до наукометричних баз даних з міжнародним індексом цитування (1 – Index Copernicus, Polish Scholarly Bibliography, 1 – Directory of Open Access Journals (DOAJ), 1 – Ulrich's Web та Index Copernicus), 18 тез доповідей у працях міжнародних та всеукраїнських наукових та науково-технічних конференцій, отримано 2 свідоцтва про авторське право на комп'ютерні програми.

**Структура і обсяг роботи.** Дисертаційна робота складається зі вступу, чотирьох розділів, загальних висновків, списку використаних джерел та додатків. Загальний обсяг дисертації становить 186 сторінок, з яких 125 сторінок основного тексту, 5 додатків на 19 сторінках, список літератури налічує 154 найменування.

## ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі обґрунтовано актуальність теми дисертації, визначено зв'язок роботи з науковими темами, сформульовано мету і завдання дослідження, визначено об'єкт, предмет і методи дослідження, показано наукову новизну отриманих результатів, їх практичне значення, а також розкрито питання апробації результатів дисертації та їх висвітлення в наукових працях.

**Перший** розділ присвячений аналізу існуючих моделей та інформаційних технологій аналізу періодичних процесів, сигналів з постійним та змінним періодом. Показано, що в прикладних дослідженнях існують періодичні процеси, період яких не є постійним, а певним чином змінюється. Наглядним прикладом таких процесів є ЕКГ, отримані після дії на організм певного збудника спокою, в найпростішому випадку – фізичного навантаження (рис.1). На рисунку 1 наведено фрагменти ЕКГ, отримані після дії навантаження: через 60 с (а), через 120 с (б) та через 180 с (в) відповідно.



Рисунок 1 – Фрагменти електрокардіограми, отримані через різні проміжки часу після дії навантаження

Із рисунку 1 видно, що форма ЕКГ приблизно повторюється, але при цьому період повторюваності змінюється, а саме збільшується, та із плином часу стабілізується. Процеси з подібними властивостями називають періодичними процесами зі змінним періодом (ППЗП). Подібною до кардіограм є поведінка спірограм, отриманих після дії збудників спокою; гідро- та віброакустичні сигнали під час роботи двигунів, дизель-генераторів в перехідних режимах.

Огляд літературних джерел показав недосконалість існуючих аналітичних методів та інформаційних технологій аналізу процесів зі змінним періодом, які дозволяли б одночасно враховувати періодичність та змінність періоду. В цьому зв'язку обґрунтовано необхідність підвищення ступеня повноти подання інформації про процеси зі змінним періодом та рівня автоматизації їх аналізу. Сформульовані основні завдання дисертаційного дослідження. Завдання і загальна методика їх вирішення охоплюються тріадою «модель-алгоритм-програма» (О.А.Самарський). На першому етапі вибирається модель процесів у вигляді періодичних функцій зі змінним періодом (ПФЗП). На другому – на основі моделі розробляються методи, які включають в себе побудову рядів Фур'є ПФЗП. На третьому етапі розробляється відповідне програмне забезпечення та інформаційна технологія для визначення варіабельності ЕКГ після дії на організм людини фізичного навантаження.

У випадку, коли період є невідомим (наприклад для ЕКГ після фізичного навантаження) важливою є задача оцінки змінного періоду, розв'язання якої дозволить автоматизувати аналіз такої ЕКГ та більш повно подати інформацію про стан серцево-судинної системи людини при дослідженні варіабельності серцевого ритму.

У другому розділі на основі означення періодичних функцій зі змінним періодом, розроблено та систематизовано способи аналітичного подання функцій зі змінним періодом, як математичної моделі процесів зі змінним періодом.

Функція  $f(x)$  дійсного аргументу  $x \in I \subseteq R$  називається **функцією зі змінним періодом**  $T(x) > 0$ , якщо для всіх  $x \in I$  таких, що  $x + T(x) \in I$ , виконується рівність:

$$f(x) = f(x + T(x)). \quad (1)$$

Функція  $T(x)$ , що описує змінний період (ЗП), вважається диференційованою. Із (1) при  $T(x) = T = \text{const}$  випливає, що  $f(x)$  є періодичною функцією з періодом  $T$  в звичайному розумінні. Область визначення  $I = [a, b]$  в кожному конкретному випадку уточнюється.

Приклад функції ЗП  $T(x)$  наведено на рис. 2. В точці  $x_1$  період функції  $f(x)$  дорівнює  $T(x_1)$ , тому значення функції в точках  $x_1$  і  $x_1 + T(x_1)$  рівні:  $f(x_1) = f(x_1 + T(x_1))$ . В точці  $x_2$  періодом є число  $T(x_2)$ , причому значення періоду  $T(x)$  в точках  $x_1$  і  $x_2$  різні:  $T(x_1) > T(x_2)$ .

Показано, що на відміну від періодичної функції  $g(x)$  з постійним періодом  $T$ , для якої виконується рівність  $g(x) = g(x + T) = g(x - T)$ , для функції  $f(x)$  із ЗП  $T(x)$  аналогічна рівність  $f(x) = f(x + T(x)) = f(x - T(x))$  в загальному не виконується. Тому для випадку, коли аргумент  $x$  зменшується, необхідно розглядати ще змінний період функції  $f(x)$ , який позначимо через  $T^-(x)$ . При цьому, якщо точки  $x$  і  $x - T^-(x)$  належать області визначення  $I$ , то  $f(x) = f(x - T^-(x))$ .

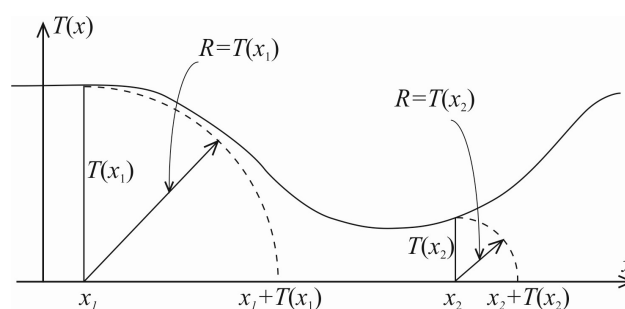


Рисунок 2 – Графік функції змінного періоду  $T(x)$

Розглянуто способи аналітичного задання ПФЗП. Найпростішими з них є тригонометричні функції

$$\sin x^\alpha \text{ та } \cos x^\alpha, \alpha > 0, x \geq 0. \quad (2)$$

Для функцій (2) їх змінні періоди  $T_\alpha(x)$  та  $T_\alpha^-(x)$  визначаються наступним чином:

$$T_\alpha(x) = -x + (x^\alpha + 2\pi)^{1/\alpha}, x \in [0, \infty), \quad (3)$$



$$T_{\alpha}^{-}(x) = x - (x^{\alpha} - 2\pi)^{1/\alpha}, \quad x \in [T(0), \infty). \quad (4)$$

Індекс  $\alpha$  в періодах  $T_{\alpha}(x)$  та  $T_{\alpha}^{-}(x)$  вказує на їх залежність від цього індексу.

Проведено аналіз тригонометричних функцій зі ЗП та аналітичних виразів ЗП.

**Приклад 1.** Тригонометрична функція з ЗП –  $f_1(x) = \sin x^{3/4}$ ,  $x \geq 0$  (рис. 3а). Для порівняння на рисунку наведено функцію  $f_2(x) = \sin x$ . Аналіз показав, що період функції  $f_1(x) = \sin x^{3/4}$  ( $0 < \alpha < 1$ ) із зростанням аргументу збільшується. На відрізку  $[0, 30]$  для цієї функції вкладається два періодичних коливання, для функції  $\sin x$  на цьому ж інтервалі розміщується більше чотирьох коливань. Враховуючи (3) і (4), для функції  $f(x) = \sin x^{3/4}$  змінні періоди визначаються як:

$$T(x) = -x + (x^{3/4} + 2\pi)^{4/3}, \quad x \in [0, \infty), \quad T^{-}(x) = x - (x^{3/4} - 2\pi)^{4/3}, \quad x \in [T(0), \infty).$$

Оскільки  $T(0) = (2\pi)^{4/3} \approx 11,594$ , то останній вираз має вигляд:  $T^{-}(x) = x - (x^{3/4} - 2\pi)^{4/3}$ ,  $x \in [11,594, \infty)$ .

Графіки змінних періодів функції  $f(x) = \sin x^{3/4}$  наведені на рис. 3б. Для порівняння подано також період  $T(x) = T = 2\pi$  функції  $\sin x$ .

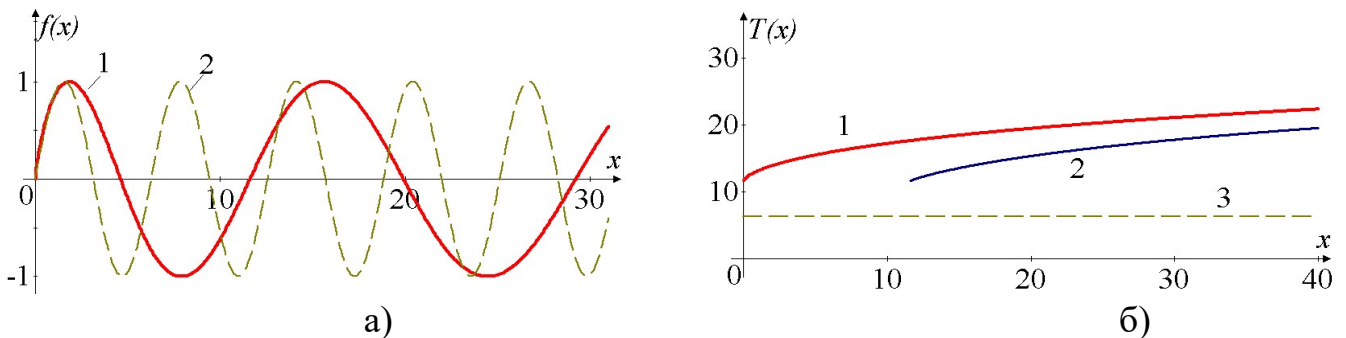


Рисунок 3 – Графіки функцій (а)  $f_1(x) = \sin x^{3/4}$  (1),  $f_2(x) = \sin x$  (2) та періодів (б)  $T(x)$  (1),  $T^{-}(x)$  (2),  $T = 2\pi$  (3) для функції  $\sin x$

Аналіз функцій ЗП  $T(x)$  та  $T^{-}(x)$  підтвердив міркування щодо поведінки функції  $\sin x^{3/4}$ : в бік зростання аргументу  $x$  вона «розтягується», тобто її період зростає, при цьому період  $T(x)$ , як видно із рисунка 3, також є зростаючою функцією. Навпаки, в бік спадання аргументу  $x$  функція  $\sin x^{3/4}$  «стискається», відповідно її період  $T^{-}(x)$  є спадною функцією.

Якщо  $\alpha > 1$ , наприклад  $\alpha = 4/3$ , то функція  $f_1(x) = \sin x^{4/3}$ ,  $x \geq 0$ , зі зростанням аргументу стискається, відповідно її період  $T(x) = -x + (x^{4/3} + 2\pi)^{3/4}$ ,  $x \in [0, \infty)$  спадає.

Крім тригонометричних функцій  $\sin x^{\alpha}$ ,  $\cos x^{\alpha}$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\alpha \neq 1$ , а також  $\operatorname{tg} x^{\alpha}$ ,  $\operatorname{ctg} x^{\alpha}$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\alpha \neq 1$ , в розділі розроблено ще інші способи аналітичного задання функцій зі змінним періодом та наведено їх графіки. Деякі із таких функцій та їх змінні періоди наведені нижче:

- a) показникова функція:  $f(x) = a^{g(x)}$ , де число  $a > 0$ ,  $g(x)$  – тригонометрична функція із змінним періодом, найчастіше  $g(x) = \sin x^\alpha$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\alpha \neq 1$ , або  $g(x) = \cos x^\alpha$ ;
- b) степенева функція:  $f(x) = (g(x))^a$ , де число  $a$  та функція  $g(x)$  такі ж, як і в пункті а) ;
- c) модуль функції:  $f(x) = |g(x)|$ ,  $g(x)$  – тригонометрична функція зі змінним періодом;
- d) знак (сигнум) функції:  $f(x) = \text{sign } g(x)$ ,  $g(x)$  – тригонометрична функція зі змінним періодом;
- e) дробова частина:  $f(x) = \{g(x)\}^a$ , де  $a > 0$ ,  $\{\bullet\}$  – дробова частина,  $g(x)$  – деяка нелінійна неперервна строго монотонна функція;
- f) суперпозиція функцій зі змінним періодом.

**Приклад 2.** Степенева функція  $f(x) = \left(\sin x^{4/3} + 1/2\right)^2$  та її змінні періоди

$$T(x) = -x + \left(x^{4/3} + 2\pi\right)^{3/4}, x \geq 0, T^-(x) = x - \left(x^{4/3} - 2\pi\right)^{3/4}, x \geq (2\pi)^{3/4} \approx 3,968 \text{ (рис. 4).}$$

**Приклад 3.** Суперпозиція степеневої функції та функції «дробова частина»:

$f(x) = \left\{x^{3/5}\right\}^2$ . Графік цієї функції (коливання пилкоподібної форми зі змінним

періодом  $T(x) = -x + \left(x^{3/5} + 1\right)^{5/3}$ ) зображений на рис. 5.

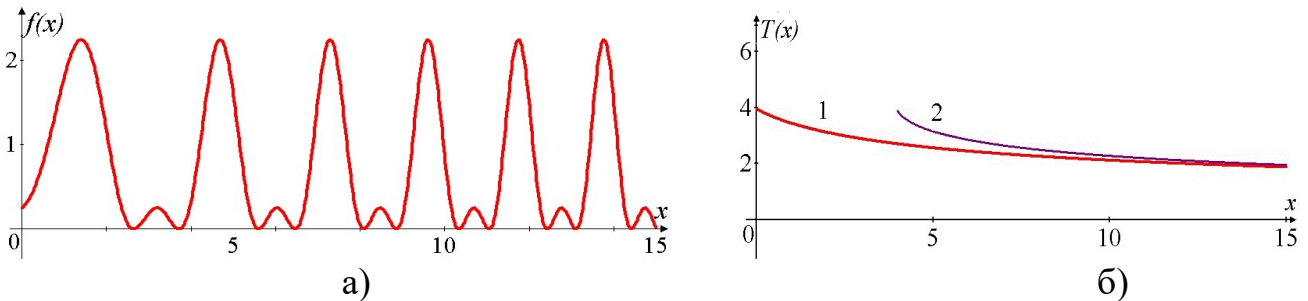


Рисунок 4 – Графіки функції  $f(x) = \left(\sin x^{4/3} + 1/2\right)^2$  (а) та її періодів (б)  $T(x)$  (1),  $T^-(x)$  (2)

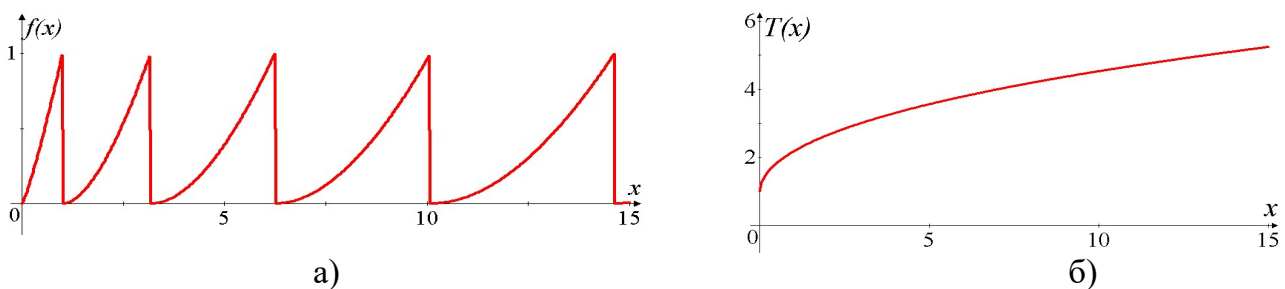


Рисунок 5 – Графік функції  $f(x) = \left\{x^{3/5}\right\}^2$  (а) та її змінного періоду  $T(x)$  (б)

Наявність методів аналітичного задання ПФЗП та їх змінних періодів дозволила вирішити задачу побудови рядів Фур'є ПФЗП, що розглянуто нижче.

У **третьому** розділі запропоновано метод побудови рядів Фур'є періодичних функцій зі змінним періодом. Наголошено, що для побудови ряду Фур'є повинна виконуватися наступна умова: змінний період функції, яка досліджується, та змінний період відповідної ортогональної тригонометричної системи повинні співпадати.

На основі елементарних тригонометричних функцій зі змінним періодом розглянуто ортогональну систему тригонометричних функцій

$$\sin mx^\alpha, \cos mx^\alpha, x \geq 0, \alpha > 0, m = 1, 2, \dots, \quad (5)$$

для якої змінний період  $T_\alpha(x) = -x + (x^\alpha + 2\pi)^{1/\alpha}, x \geq 0$ . В роботі показано, що система (5) є ортогональною із ваговою функцією  $\rho_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}$  на довільному інтервалі ортогональності

$$[x, x + T_\alpha(x)], \quad (6)$$

причому норма кожної із функцій системи (5) рівна  $\sqrt{\pi}$ . Важливо наголосити, що довжина інтервалу ортогональності (6) вже не є постійною, а змінюється у відповідності до значення періоду  $T_\alpha(x), x \geq 0$ , де точка  $x$  – лівий кінець інтервалу ортогональності.

За рахунок наявності ортогональних систем тригонометричних ФЗП, побудовано ряд Фур'є ПФЗП. Якщо  $f(x)$  – функція зі змінним періодом

$$T_\alpha(x) = -x + (x^\alpha + 2\pi)^{1/\alpha}, x \geq 0, \quad (7)$$

то ряд Фур'є цієї функції може бути представленим наступним чином:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx^\alpha + b_k \sin kx^\alpha). \quad (8)$$

Коефіцієнти Фур'є ряду (8) визначаються формулами:

$$a_0 = \frac{\alpha}{\pi} \int_{\tau}^{\tau+T_\alpha(\tau)} x^{\alpha-1} f(x) dx, \quad a_k = \frac{\alpha}{\pi} \int_{\tau}^{\tau+T_\alpha(\tau)} x^{\alpha-1} f(x) \cos kx^\alpha dx, \quad (9)$$

$$b_k = \frac{\alpha}{\pi} \int_{\tau}^{\tau+T_\alpha(\tau)} x^{\alpha-1} f(x) \sin kx^\alpha dx,$$

де точка  $\tau \geq 0$ , тобто лівий кінець інтервалу інтегрування, вибирається довільно. Враховуючи (7), інтервалом інтегрування є відрізок:

$$[\tau, \tau + T(\tau)] = \left[ \tau, (\tau^\alpha + 2\pi)^{1/\alpha} \right]. \quad (10)$$

Нерівність Бесселя має вигляд:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi} \|f(x)\|^2. \quad (11)$$

Норма ПФЗП  $f(x)$  визначається згідно виразу:  $\|f(x)\|^2 = (f, f) = \frac{\alpha}{\pi} \int_x^{x+T(x)} x^{\alpha-1} f^2(x) dx$ .

**Приклад 4.** Для функції  $f(x) = \text{sign}\left(\sin x^{5/7}\right)$  (рис. 6) змінний період  $T(x) = -x + \left(x^{5/7} + 2\pi\right)^{7/5}$ . Якщо ліва точка інтервалу інтегрування  $\tau = 20$ , то в цій

точці період  $T(20) = -20 + \left(20^{5/7} + 2\pi\right)^{7/5} \approx 23,4095$ . Згідно (9), (10) для знаходження коефіцієнтів Фур'є інтегрування здійснено на інтервалі  $[20; 20 + T(20)] \approx [20; 43,4095]$ . Результати обчислення коефіцієнтів зведені в таблиці 1. Крім цього наведені коефіцієнти Фур'є цієї ж функції, але обчислені на інтервалі  $[35; 61,5001]$ . Для порівняння обчислені згідно (9) і представлені в правій частині таблиці 1 коефіцієнти Фур'є для цієї ж функції, але при  $\alpha = 1$ . В передостанньому рядку таблиці 1 наведені результати обчислень виразів, що входять в нерівність (11).

На основі обчислених коефіцієнтів на рис. 6 відтворений графік скінченної суми ряду Фур'є функції  $f(x) = \text{sign}\left(\sin x^{5/7}\right)$  (суцільна лінія) і зображений графік самої функції (пунктирна лінія). Аналіз цих графіків показав, що скінченна сума ряду Фур'є  $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left(a_k \cos kx^{5/7} + b_k \sin kx^{5/7}\right)$  вже при  $n = 9$  достатньо добре відтворює форму самої функції. Такі ж висновки зроблені і щодо порівняння скінченної суми ряду Фур'є для функції з постійним періодом.

Таблиця 1 – Коефіцієнти Фур'є на різних інтервалах ортогональності

№ коефіцієнта	Коефіцієнти Фур'є					
	Функція зі змінним періодом $f(x) = \text{sign}\left(\sin x^{5/7}\right)$				Функція з постійним періодом $f(x) = \text{sign}(\sin x)$	
	Інтервал аналізу $[20; 43,4095]$		Інтервал аналізу $[35; 61,5001]$		Інтервал аналізу $[0; 2\pi] = [0; 6,2831]$	
	$a_k, k = \overline{0,9}$	$b_k, k = \overline{1,9}$	$a_k, k = \overline{0,9}$	$b_k, k = \overline{1,9}$	$a_k, k = \overline{0,9}$	$b_k, k = \overline{1,9}$
0	0		-0,00001		0	
1	0	1,27324	0	1,27324	0	1,27324
2	-0,00002	0	-0,00004	0	0	0
3	0,00001	0,42444	0	0,42441	0	0,42441
4	-0,00001	0	-0,00004	0	0	0
5	0	0,25465	0	0,25465	0	0,25465
6	-0,00001	0	-0,00004	0	0	0
7	0,00001	0,18189	0	0,1819	0	0,18189
8	-0,00001	0	-0,00004	0	0	0
9	0,00001	0,14147	0	0,14151	0	0,14147
	$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^9 (a_k^2 + b_k^2) = 1,91926$		$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^9 (a_k^2 + b_k^2) = 1,91922$		$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^9 (a_k^2 + b_k^2) = 1,91921$	
	$\frac{1}{\pi} \ f(x)\ ^2 = 1,9999$		$\frac{1}{\pi} \ f(x)\ ^2 = 1,9999$		$\frac{1}{\pi} \ f(x)\ ^2 = 2$	

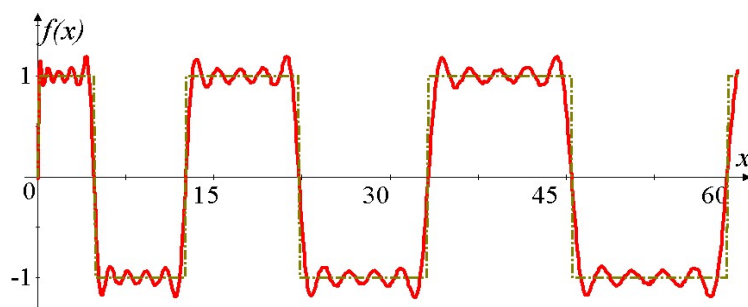


Рисунок 6 – Функція  $f(x) = \text{sign}\left(\sin x^{5/7}\right), x \in [0, 60]$ , (пунктирна лінія)  
та її ряд Фур'є (перші дев'ять доданків, суцільна лінія)

Аналіз даних, що наведені у таблиці 1 показує, що результати обчислень коефіцієнтів Фур'є для цих функцій практично співпадають (абсолютна похибка  $\Delta \leq 0,00004$ ).



Рисунок 7 – Узагальнена схема методу побудови рядів Фур'є ПФЗП

Щодо самої нерівності Бесселя, то із порівняння результатів обчислень для  $\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2)$  і  $\frac{1}{\pi} \|f(x)\|^2$  видно, що суми  $\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^9 (a_k^2 + b_k^2)$ , що є нормами рядів Фур'є відповідних функцій  $f(x) = \text{sign}\left(\sin x^{5/7}\right)$  і  $f(x) = \text{sign}(\sin x)$ , теж практично близькі до норм самих функцій. Це свідчить про те, що побудована в роботі скінченна сума ряду Фур'є функції із змінним періодом наближається до самої функції.

Розроблений метод побудови рядів Фур'є періодичних функцій зі змінним періодом, узагальнена схема якого зображена на рис. 7, дозволить здійснювати спектральний аналіз процесів зі змінним періодом.

В цьому ж розділі запропоновано метод оцінювання віддалі між ПФЗП ( $f(x)$ ) і її скінченною сумою ряду Фур'є  $\bar{f}(x)$  за формулою

$$\rho(f, \bar{f}) = \left( \int_{\tau}^{\tau+T_{\alpha}(\tau)} p(x) (f(x) - \bar{f}(x))^2 dx \right)^{1/2} = \left( \alpha \int_{\tau}^{\tau+T_{\alpha}(\tau)} x^{\alpha-1} (f(x) - \bar{f}(x))^2 dx \right)^{1/2}, \quad (12)$$

де  $p(x) = \alpha x^{\alpha-1}$  – вагова функція.

Для функції  $f(x) = \text{sign}\left(\sin x^{5/7}\right)$  при числі коефіцієнтів  $n = 10$  і  $n = 40$  віддаль відповідно  $\rho(f(x), \bar{f}(x))^{n=10} = 0,50379$  і  $\rho(f(x), \bar{f}(x))^{n=40} = 0,084778$ . Аналіз результатів свідчить про наближення (збіжність) ряду до самої функції.

Для Фур'є-аналізу ПФЗП розроблено програмне забезпечення, що є однією із складових інформаційної технології аналізу процесів зі змінним періодом. Інтерфейс програми передбачає введення користувачем вхідної функції для здійснення Фур'є-аналізу, результатом якого є обчислені коефіцієнти ряду Фур'є функції зі змінним періодом, побудований графік досліджуваної функції та її скінченної суми ряду Фур'є, а також візуалізація графіка амплітудного спектру.

Розроблені методи побудови рядів Фур'є періодичних функцій зі змінним періодом та оцінювання віддалі між функцією зі змінним періодом та її скінченною сумою ряду Фур'є є складовими ІТ, яка дозволяє здійснювати спектральний аналіз процесів зі змінним періодом і цим самим дає можливість забезпечити точність, та підвищити ступінь повноти інформації про процеси з характерною періодичністю, що змінюється за певним правилом.

В четвертому розділі запропоновано метод оцінювання змінного періоду ЕКГ, отриманої після дії на організм людини фізичного навантаження та запропоновано нові діагностичні ознаки варіабельності серцевого ритму зі змінним періодом.

На першому етапі експерименту пацієнт піддавався фізичному навантаженню (двадцять глибоких присідань). Зразу ж після присідання здійснювався відбір  $RR$ -інтервалів, тобто значень його змінного періоду  $T(t)$  в моменти часу  $t_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ :  $T_k = t_{k+1} - t_k$ , де  $t_k$  – момент появи  $k$ -го  $R$ -зубця ЕКГ. За значеннями ЗП  $T_k$  обчислювалися значення змінної частоти (ЗЧ)  $\nu_k = 1/T_k$ . Кожне десяте значення  $T_k$  та  $\nu_k$  показані на рис. 9, графіки 2б і 1б.

Аналіз динаміки зміни  $T_k$  та  $\nu_k$  показав, що спочатку доцільно було провести апроксимацію ЗЧ  $\nu_k$  експоненціальною залежністю виду

$$\nu(t) = a + be^{-\alpha t}, t \in (0, \infty). \quad (13)$$

Тоді змінний період має вигляд

$$T(t) = \frac{1}{a + be^{-\alpha t}}. \quad (14)$$

Методом найменших квадратів були обчислені коефіцієнти  $a$ ,  $b$  і параметр  $\alpha$ :  $a = 1,176$ ,  $b = 0,995$ ,  $\alpha = 0,014$ .

Графіки функцій  $\nu(t) = a + be^{-\alpha t} = 1,176 + 0,995 \times e^{-0,014t}$  та  $T(t) = \frac{1}{1,176 + 0,995 \times e^{-0,014t}}$  показані на рис. 9 (графіки 1а і 2а відповідно).

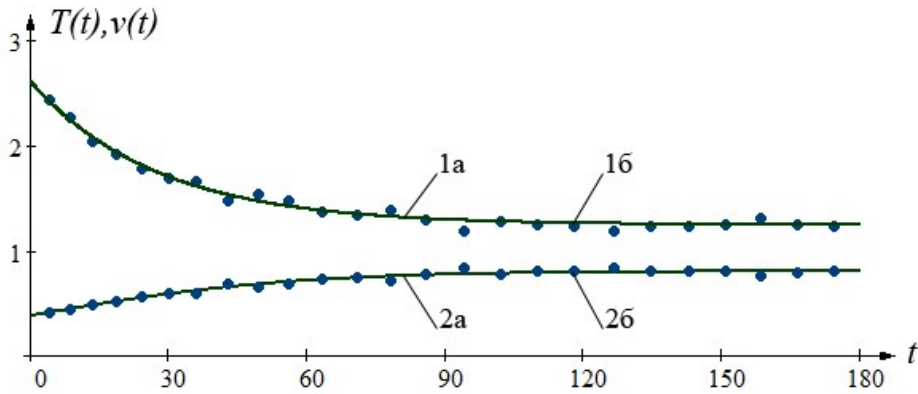


Рисунок 9 – Експериментальні значення ЗЧ  $v_k$  та функція ЗЧ  $v(t)$  (графіки 1б і 1а), значення ЗП  $T_k$  та функція ЗП  $T(t)$  (графіки 2б і 2а)

Мірою квадратичного відхилення функції апроксимації  $T(t)$  від значень  $T_k, k = 1, 2, \dots, n$ , є величина  $S_T^2 = \sum_{k=1}^n (T_k - T(t_k))^2 = \sum_{k=1}^n \left( T_k - \frac{1}{a + be^{-\alpha t_k}} \right)^2$ . Відповідне їй середньоквадратичне відхилення  $\sigma_T = \sqrt{\frac{S_T^2}{n}}$ . Аналогічно обчислюється  $S_v^2$  та  $\sigma_v$ . Експериментальні значення цих параметрів, а також значення середньоквадратичних відхилень  $\sigma_v$  і  $\sigma_T$ , наведені в таблиці 2.

Таблиця 2 – Експериментальні значення параметрів, що входять в апроксимуючу функцію змінного періоду

Номер експерименту	Параметри змінного періоду та середньоквадратичні відхилення				
	$a$	$b$	$\alpha$	$\sigma_v$	$\sigma_T$
1	1,148	1,015	0,013	0,04	0,016
2	1,23	1,407	0,036	0,039	0,022
3	0,7001	0,1572	0,0438	0,7949	0,6829
4	0,7687	0,1341	0,0444	0,5675	0,5062
5	0,8438	0,1452	0,0453	0,3626	0,3234
6	0,8025	0,1387	0,0421	0,4324	0,4064

З позицій кардіологічного аналізу параметр  $a$  означає частоту пульсу (серцевих скорочень), яка наступить через деякий час після його стабілізації (частоту пульсу в стані спокою). Параметр  $b$  вказує на яку величину зростає частота пульсу в порівнянні із частотою в стані спокою, параметр  $\alpha$  характеризує «швидкість» стабілізації пульсу.

Розроблений метод оцінки змінного періоду, зокрема варіабельності серцевого ритму, який реалізований в програмі «Аналіз RR-інтервалів та оцінка варіабельності серцевого ритму», дає можливість визначити нові діагностичні ознаки електрокардіограми, отриманої після дії на організм людини певного збудника спокою, зокрема фізичного навантаження і автоматизувати аналіз такої ЕКГ. Структурна схема інформаційної технології оцінювання змінного періоду ЕКГ після фізичного навантаження зображена на рис. 10.



Рисунок 10 – Структурна схема інформаційної технології оцінювання змінного періоду ЕКГ та визначення діагностичних ознак варіабельності серцевого ритму

На основі розроблених методів запропонована інформаційна технологія аналізу процесів зі змінним періодом, схема якої зображена на рис. 11.

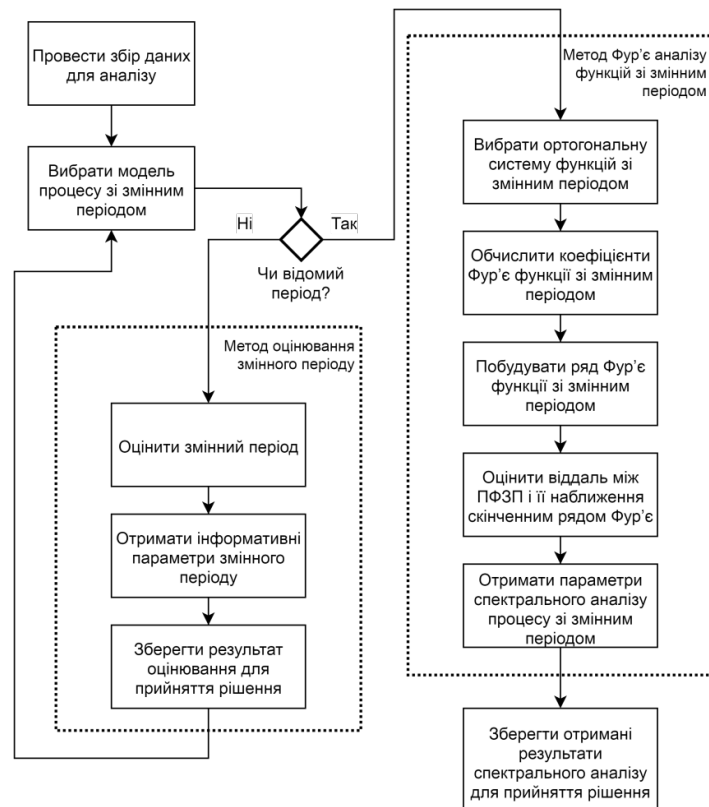


Рисунок 11 – Функціональна схема ІТ аналізу процесів зі змінним періодом



Результати дослідження підтвердили ефективність запропонованої інформаційної технології аналізу процесів зі змінним періодом, яка дозволяє більш повно подавати інформацію про такі процеси за рахунок знаходження додаткових параметрів та автоматизувати їх аналіз з метою підтримки прийняття рішень, які вирішуються ІТ.

## ВИСНОВКИ

В дисертації вирішено актуальне наукове завдання підвищення ступеня повноти подання інформації про процеси зі змінним періодом та рівня автоматизації аналізу цих процесів шляхом розробки моделі, методів та інформаційної технології для підтримки прийняття рішень, зокрема в задачах кардіології для оцінювання варіабельності серцевого ритму після дії на організм пацієнта фізичного навантаження.

Основні наукові й практичні результати роботи полягають в наступному:

1. В результаті аналізу проблеми дослідження процесів зі змінним періодом показано, що існуючі методи не дозволяють повно подати інформацію про процеси зі змінним періодом для прийняття відповідних рішень. Обґрунтовано, що для розробки інформаційної технології аналізу процесів зі змінним періодом доцільно використати підхід, що охоплюється схемою «модель–алгоритм–програма» з орієнтацією на побудову рядів Фур'є ПФЗП та їх застосування для задач оцінювання варіабельності серцевого ритму після дії на організм людини фізичного навантаження.

2. Розроблено та систематизовано способи аналітичного подання функцій зі змінним періодом як математичної моделі процесів зі змінним періодом, що дозволило здійснювати перевірку правильності теоретичних положень теорії рядів для періодичних функцій зі змінним періодом.

3. Розроблено метод побудови рядів Фур'є періодичних функцій зі змінним періодом. Досліджено та перевірено ортогональність тригонометричних систем функцій зі змінним періодом, причому перевірка здійснювалася на різних інтервалах ортогональності та з використанням відповідної вагової функції. Побудова рядів Фур'є дозволила здійснювати спектральний аналіз процесів зі змінним періодом, зокрема обчислювати амплітудний та фазовий спектри, що надзвичайно важливо для задач класифікації, розпізнавання процесів зі змінним періодом в кардіології, гідро- та віброакустиці тощо.

4. Запропоновано метод оцінювання віддалі між ПФЗП і її скінченим рядом Фур'є, що дає можливість оцінити точність наближення, це дозволяє використовувати ряд як наближений варіант функції, тобто її «замінник», а тому результати аналізу властивостей ряду вважати за властивості самої функції, як моделі процесу зі змінним

5. Запропоновано метод оцінки змінного періоду для електрокардіограми, отриманої після дії на організм людини фізичного навантаження, який за рахунок отримання додаткових параметрів варіабельності серцевого ритму дозволив розширити множину діагностичних ознак для підтримки прийняття рішень в кардіології при дослідженні функціонального стану серцево-судинної системи людини і цим самим дозволив підвищити інформативність та ступінь автоматизації аналізу ЕКГ, як процесу зі змінним періодом.

6. Розроблені в роботі моделі, методи та інформаційна технологія аналізу процесів зі змінним періодом, яка реалізована в програмних пакетах «Фур'є-аналіз ПФЗП» та «Аналіз RR-інтервалів та оцінка варіабельності серцевого ритму», що суттєво доповнюють відомі комп'ютерні пакети (Maple, Mathematica, Mathcad, MATLAB), можуть бути використані для аналізу процесів зі змінним періодом, зокрема в прикладних задачах кардіології.

## СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Приймак М.В. Оцінка змінного періоду та змінної частоти / М.В. Приймак, Р.О. Сарабун, Л.П. Дмитроца // Міжнародний науково-технічний журнал. Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах. – Хмельницький технологічний ун-т Поділля. – 2011. – №2. – С. 76-82 .

2. Приймак М.В. Сигнали зі змінним періодом та їх модель / М.В. Приймак, Я.П. Василенко, Л.П. Дмитроца // Вісник НТУУ «КПІ». Інформатика, управління та обчислювальна техніка: Зб. наук. пр. – К.: Век+, 2013. – № 59. – С. 116-121 (*Directory of Open Access Journals (DOAJ)*).

3. Василенко Я.П. Клас функцій зі змінним періодом / Я.П. Василенко, Л.П. Дмитроца, М.В. Приймак // Вісник Харківського національного університету імені В.Н.Каразіна Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»: Зб. наук. п. – №1105. – Харків: ХНУ, 2014. – С. 21-33.

4. Василенко Я.П. Способи задання функцій зі змінним періодом та їх наближення / Я.П. Василенко, Л.П. Дмитроца, М.З. Олійник, М.В. Приймак // Вісник Харківського національного університету імені В.Н.Каразіна. Серія "Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління" Випуск 30. – Харків: ХНУ, 2016. – С. 36-47.

5. Приймак М.В. Аналітичні способи задання функцій із змінним періодом та інформаційні технології визначення їх коефіцієнтів Фур'є / Приймак М.В., Дмитроца Л.П., Олійник М.З. // Вісник нац. ун-ту «Львівська політехніка» – Збірник наукових праць, №854. – Серія: Інформаційні системи та мережі. – Львів, вид-во Львівської політехніки, 2016. – С. 138-148.

6. Pryimak M. Fourier series of periodic functions with variable period and evaluation of their variable period for determination of heart rhythm variability / Mykola Pryjmak, Yaroslav Vasylenko, Lesia Dmytrotsa, Mariya Oliynyk // Computational Problems of Electrical Engineering. – Volume 7, No 2, 2017.– С. 108-116 (*Ulrich's Web ma Index Copernicus*).

7. Dmytrotsa L. Software for Fourier-analysis of functions with variable period / Dmytrotsa L. // Вісник Хмельницького університету – Хмельницький: Видавництво ХНУ, 2018. – № 4 (263). – С.159-166 (*Index Copernicus, Polish Scholarly Bibliography*).

8. Дмитроца Л. Інтервали ортогональності для тригонометричної системи функцій із змінним періодом та можливість знаходження на будь-якому із них коефіцієнтів Фур'є / Л. Дмитроца, М. Приймак, Р. Сарабун // Матеріали першої науково-технічної конференції «Інформаційні моделі, системи та технології» (20 травня 2011). – Тернопіль: ТНТУ, 2011. – С. 12.

9. Дмитроца Л. Варіанти побудови рядів Фур'є для функцій зі змінним періодом / Л. Дмитроца, М. Приймак, Р. Сарабун // Матеріали першої науково-

технічної конференції «Інформаційні моделі, системи та технології» (20 травня 2011). – Тернопіль: ТНТУ, 2011. – С. 11.

10. Приймак М.В. Апроксимація змінного періоду та частоти та їх використання в задачах діагностики / Приймак М.В., Сарабун Р.О., Дмитроца Л.П. // Збірник тез доповідей Всеукраїнська наукова конференція «Застосування математичних методів в науці і техніці» (25-26 листопада 2011). – Луцьк: ЛНТУ, 2011. – С. 72-74.

11. Приймак М.В. Коефіцієнти Фур'є функцій із змінним періодом / Приймак М.В., Дмитроца Л.П., Сарабун Р.О. // Всеукраїнська наукова конференція «Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу» // Тези доповідей. – Івано-Франківськ, 2012. – С. 52-54.

12. Дмитроца Л. Незалежність коефіцієнтів Фур'є функцій із змінним періодом від змінного інтервалу ортогональності / Л. Дмитроца, М. Приймак // Матеріали II науково-технічної конференції «Інформаційні моделі, системи та технології» Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя (м. Тернопіль, 25 квітня 2012). – Тернопіль: ТНТУ, 2012. – С. 22.

13. Приймак М. Змінні періоди функції із змінним періодом та їх взаємозв'язок / М. Приймак, Л. Дмитроца // Матеріали XVI наукової конференції Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя, Том I. Природничі науки та інформаційні технології: збірник тез доповідей (м. Тернопіль, 5-6 грудня 2012 року). – Тернопіль: ТНТУ, 2012. – С. 61.

14. Дмитроца Л.П. Про наближення функцій зі змінним періодом / Л.П. Дмитроца // Матеріали XVII наукової конференції Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя, Том I. Природничі науки та інформаційні технології: збірник тез доповідей (м. Тернопіль, 20-21 листопада 2013 року). – Тернопіль: ТНТУ, 2013. – С. 9.

15. Дмитроца Л.П. Приклади задання функцій зі змінним періодом / Дмитроца Л.П. // Застосування математичних методів в науці і техніці: збірник тез доповідей II Всеукраїнської наукової конференції, 22-23 листопада 2013. – Луцьк: РВВ ЛНТУ, 2013. – С. 41-44.

16. Приймак М.В. Розвиток теорії періодичних функцій та їх узагальнення – функції із змінним періодом / М.В. Приймак, Л.П. Дмитроца // П'ятнадцята міжнародна наукова конференція ім. акад. Михайла Кравчука, 15–17 травня, 2014 р., Київ: Матеріали конф. Т. 2. Алгебра. Геометрія. Математичний аналіз. – Київ: НТУУ «КПІ», 2014. – С. 156-158.

17. Приймак М.В. Система тригонометричних функцій із змінним періодом та деякі її властивості / Приймак М.В., Дмитроца Л.П. // Науково-технічна Міжнародна конференція «Комп'ютерне моделювання у наукоємних технологіях (КМНТ-2014)» Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, м. Харків, 28-31 травня 2014. Труды научно-технической конференции с международным участием. – Харків: ХНУ, 2014. – С. 327-328.

18. Приймак М.В. Функції із змінним періодом як узагальнення періодичних функцій / М.В. Приймак, Л.П. Дмитроца // Контроль і управління в складних системах (КУСС-2014). XII Міжнародна конференція. Тези доповідей. Вінниця, 14-16 жовтня 2014 року. – Вінниця: ВНТУ, 2014. – С.31.

19. Приймак М.В. Аналітичне задання функцій зі змінним періодом та їх змінні періоди / Приймак М.В., Дмитроца Л.П., Василенко Я.П., Олійник М.З.//

Шістнадцята міжнародна наукова конференція ім. акад. Михайла Кравчука, 14–15 травня, 2015р., Київ: Матеріали конф. Т. 2. Алгебра. Геометрія. Математичний аналіз. – Київ: НТУУ «КПІ», 2015. – С. 156-159.

20. Дмитроца Л.П. Задача створення інформаційної системи моніторингу і реєстрації стану кардіонавантаження / Л.П. Дмитроца // Матеріали XIX наукової конференції ТНТУ ім.І.Пулюя, 18-19 травня 2016 року. – Тернопіль: ТНТУ, 2016. – С. 85-86.

21. Приймак М.В. Про наближення функцій зі змінним періодом / М.В. Приймак, Л.П. Дмитроца, М.З. Олійник // Сімнадцята міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука. 19-20 травня 2016 р., Київ: Матеріали конф. Т.2. Алгебра. Геометрія. Математичний аналіз. – Київ: НТУУ «КПІ», 2016. – С. 155-159.

22. Приймак М.В. Інформаційні технології представлення функцій зі змінним періодом тригонометричними рядами / Приймак М.В., Дмитроца Л.П., Олійник М.З. // Міжнародна науково-технічна конференція Харківського національного університету імені В.Н.Каразіна. 26-31 травня 2016 року. Труды международной научно-технической конф. «Компьютерное моделирование в наукоемких технологиях (КМНТ-2016)». – Харків.: ХНУ, 2016. – С.282-284.

23. Приймак М.В. Функції зі змінним періодом та їх наближення рядами Фур'є / Приймак М.В., Дмитроца Л.П., Олійник М.З. // Праці VI Міжнародної науково-практичної конференції "Обробка сигналів і негаусівських процесів": тези допов.– Черкаси: ЧДТУ, 2017. – С.128-130.

24. Дмитроца Л.П. Порівняльний аналіз приладів для реєстрації RR-інтервалів / Л.П. Дмитроца, Р.І. Черевик // Актуальні задачі сучасних технологій: зб. тез доповідей VI Міжнародної наук-техн. конф. молодих учених та студентів (Тернопіль, 16-17 листопада 2017). – Том II. – Тернопіль : ТНТУ, 2017. – С.54.

25. Приймак М.В. Інформаційні технології дослідження періодичних функцій із змінним періодом та їх застосування для оцінки варіабельності серцевого ритму / Приймак М.В., Василенко Я.П., Дмитроца Л.П., Олійник М.З. // Сучасні проблеми математичного моделювання, обчислювальних методів та інформаційних технологій: Матеріали Міжнародної наукової конференції 2–4 березня 2018 року. – Рівне: НУВГП, РДГУ, 2018. – С. 285-288.

26. Дмитроца Л.П. Комп'ютерна програма “Аналіз RR-інтервалів та оцінка варіабельності серцевого ритму”: свід. про реєстр. автор. права на твір № 79650 від 07.06.2018 / Дмитроца Леся Павлівна, Палій Володимир Михайлович, Приймак Микола Володимирович, Василенко Ярослав Пилипович. – Зареєстр. в Управлінні державних реєстрацій Департаменту інтелектуальної власності Міністерства економічного розвитку і торгівлі України заявка від 22.05.2018 № 80656.

27. Дмитроца Л.П. Комп'ютерна програма “Фур'є-аналіз функцій зі змінним періодом”: свід. про реєстр. автор. права на твір № 79651 від 07.06.2018 / Дмитроца Леся Павлівна, Палка Олег Вікторович, Приймак Микола Володимирович, Василенко Ярослав Пилипович. – Зареєстр. в Управлінні державних реєстрацій Департаменту інтелектуальної власності Міністерства економічного розвитку і торгівлі України заявка від 22.05.2018 № 80657.

## АНОТАЦІЯ

**Дмитроца Л.П. Моделі, методи та інформаційні технології аналізу процесів зі змінним періодом.** – На правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук за спеціальністю 05.13.06 – Інформаційні технології. – Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя, Тернопіль, 2019.

Дисертація присвячена розв'язку науково-практичної задачі підвищення ступеня повноти подання інформації про процеси зі змінним періодом та рівня автоматизації аналізу цих процесів шляхом розробки моделі, методів та інформаційної технології для прийняття обґрунтованих рішень в багатьох практичних застосуваннях, зокрема в задачах кардіології при оцінці варіабельності серцевого ритму після дії на організм пацієнта фізичного навантаження. При цьому розроблено та систематизовано способи аналітичного подання функцій зі змінним періодом як математичної моделі процесів зі змінним періодом, розроблено метод побудови їх рядів Фур'є, здійснена перевірка точності наближення функції скінченним рядом Фур'є. У випадку, коли період є невідомим, розроблено метод його оцінки на прикладі ЕКГ, отриманої після дії на організм фізичного навантаження, що дало можливість отримувати нові інформативно-діагностичні ознаки варіабельності серцевого ритму. Створено інформаційну технологію аналізу процесів зі змінним періодом, яка дозволяє більш повно подати інформацію про такі процеси за рахунок знаходження додаткових параметрів та автоматизувати їх аналіз для підвищення об'єктивності та достовірності аналізу процесів зі змінним періодом з метою прийняття певних рішень.

**Ключові слова:** процес зі змінним періодом, змінний період, ряд Фур'є періодичних функцій зі змінним періодом, інформаційна технологія аналізу процесів зі змінним періодом, Фур'є-аналіз функцій зі змінним періодом, варіабельність серцевого ритму після фізичного навантаження.

## АННОТАЦИЯ

**Дмитроца Л.П. Модели, методы та информационная технология анализа процессов с переменным периодом.** – На правах рукописи.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук по специальности 05.13.06 – Информационные технологии. – Тернопольский национальный технический университет имени Ивана Пулюя, Тернополь, 2019.

Диссертация посвящена решению научно-практической задачи повышения степени полноты представления информации о процессах с переменным периодом и уровня автоматизации анализа этих процессов путем разработки модели, методов и информационной технологии для принятия обоснованных решений во многих практических приложениях, в частности в задачах кардиологии при оценке вариабельности сердечного ритма после воздействия на организм пациента физической нагрузки. При этом разработаны и систематизированы способы аналитического представления функций с переменным периодом как математической модели процессов с переменным периодом, разработан метод построения их рядов Фурье, осуществлена проверка точности приближения функции рядом. В случае, когда период неизвестен, разработан метод его оценки, в частности для ЭКГ после воздействия на организм физической нагрузки, что

позволило получать новые информационно-диагностические признаки variability сердечного ритма. Создана информационная технология анализа процессов с переменным периодом, которая позволяет более полно представить информацию о таких процессах за счет нахождения дополнительных параметров и автоматизировать их анализ для повышения объективности и достоверности анализа процессов с переменным периодом с целью принятия определенных решений.

**Ключевые слова:** процесс с переменным периодом, переменный период, ряд Фурье периодических функций с переменным периодом, информационная технология анализа процессов с переменным периодом, Фурье-анализ функций с переменным периодом, variability сердечного ритма после физической нагрузки.

## ABSTRACT

**Dmytrotsa L. Models, methods and information technology for analysis of processes with variable period.** – Manuscript copyright.

Ph. D. thesis in Engineering on specialism 05.13.06 – Information technologies. – Ternopil Ivan Puluj National Technical University, Ternopil, 2019.

The thesis deals with the solution of the important scientific and practical problem of increasing the completeness degree of information about processes with a variable period and the level of these processes analysis automation by developing the model, methods and information technology for reasonable decision-making in various practical applications, particularly, in cardiology problems while evaluating heart rate variability after exercise stress effect on the patient body.

While developing the information technology for the analysis of processes with a variable period in operation, an approach, the essence of which is concentrated in the triad "model-algorithm-program", is offered. In the first stage, the model of processes in the form of periodic functions with a variable period (PFVP) is chosen. In the second stage, on base of the model, methods including construction of Fourier series of PFVP are developed. In the third stage, appropriate software and information technology for determination the electrocardiogram variability obtained after exercise stress effect on the human body as a process with a variable period are developed. In the first stage of the triad, the simplest examples of periodic functions with the variable period – trigonometric functions with the variable period are investigated, the analytical expressions of their periods are recorded and graphs of certain functions and their periods are presented. Methods of analytical representation of functions with the variable period are developed and systematized; their variable periods allowing to verify the correctness of the theoretical positions of the series theory for periodic functions with the variable period are recorded in this paper. The developed methods of the analytical PFVP specifying and their variable periods have their independent significance since they generalize and thus considerably extend the set of analytically given periodic functions with the constant period.

On the basis of elementary trigonometric functions with the variable period, the system of trigonometric functions with the variable period is constructed and it is shown that the system is orthogonal with weight function, moreover the orthogonality interval is variable. The method of constructing Fourier series of periodic functions with the variable period is developed. Formulas for determining the coefficients of the Fourier series of such functions are obtained. Using the formula for distance estimation between the PFVP and

its Fourier series, it is established that, with the growth of coefficients amount, PFVP Fourier series approximates to the function itself proving the correctness of the model and algorithms for Fourier series construction. Information technology including developed algorithms and created software "Fourier-analysis of functions with the variable period" makes it possible to carry out spectral analysis of processes with the variable period.

In cases where the variable period is unknown, the method of its estimation is offered. Due to additional parameters obtaining this method enables to increase the degree of automation of analysis of processes with the variable period. On the basis of the algorithm of the variable period evaluation the information technology for evaluation of heart rate variability after exercise stress effect on the human body is developed. The main component of this information technology is "Analysis of  $R-R$  intervals and evaluation of heart rate variability" software. The developed IT allows to automate ECG analysis after exercise stress and, due to new informative parameters, to submit the information about the state of the cardiovascular system of a person while testing the cardiac rate variability after physical activity more completely. By means of developed methods and software, the effectiveness of the offered information technology of process analysis with the variable period allowing to submit information about such processes more completely due to the additional parameters determination and to automate their analysis for the purpose of supporting decision-making is proved.

**Keywords:** process with variable period, information technology of analysis of processes with the variable period, Fourier series of periodic functions with the variable period, Fourier-analysis of functions with the variable period, evaluation of the variable period, heart rate variability after exercise stress.

Підписано до друку 25.02.2019. Формат 60×90, 1/16.  
Друк лазерний. Папір офсетний. Гарнітура TimesNewRoman.  
Умовно-друк. арк. 0,9. Наклад – 100 прим.  
Замовлення № 250219

\*\*\*\*\*

Друк ФОП Паляниця В. А.  
Свідоцтво ДК №4870 від 20.03.2015 р.  
м. Тернопіль, вул. Б. Хмельницького, 9а, оф.38.  
тел. (0352) 528-777.