

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
ТЕРНОПІЛЬСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
ІМЕНІ ІВАНА ПУЛЮЯ

Кваліфікаційна наукова  
праця на правах рукопису

**Дмитроца Леся Павлівна**

УДК 004.942:519.876.5

ДИСЕРТАЦІЯ  
**МОДЕЛІ, МЕТОДИ ТА ІНФОРМАЦІЙНА ТЕХНОЛОГІЯ АНАЛІЗУ  
ПРОЦЕСІВ ЗІ ЗМІННИМ ПЕРІОДОМ**

05.13.06 – інформаційні технології  
(шифр і назва спеціальності)

05 «Технічні науки»  
(галузь знань)

Подається на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей,  
результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

---

(підпис, ініціали та прізвище здобувача)

Науковий керівник –  
Приймак Микола Володимирович,  
доктор технічних наук, професор

*Ідентичність всіх примірників дисертації*

**ЗАСВІДЧУЮ:**

*Вчений секретар спеціалізованої вченої ради*

*/М.Є.Фриз/*

Тернопіль – 2018

## АНОТАЦІЯ

*Дмитроца Л.П.* Моделі, методи та інформаційна технологія аналізу процесів зі змінним періодом. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук (доктора філософії) за спеціальністю 05.13.06 – Інформаційні технології. – Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя, Тернопіль, 2018.

Дисертація присвячена вирішенню актуальної науково-практичної задачі підвищення ступеня повноти подання інформації про процеси зі змінним періодом та рівня автоматизації аналізу цих процесів шляхом розробки моделі, методів та інформаційної технології для прийняття обґрунтованих рішень в багатьох практичних застосуваннях, зокрема в задачах кардіології при оцінці варіабельності серцевого ритму після дії на організм пацієнта фізичного навантаження. Об'єктом дослідження є процеси зі змінним періодом. Вирішення задач, поставлених в дисертаційній роботі, виконано з використанням методів теорії функцій і функціонального аналізу, теорії рядів Фур'є, чисельних методів, теорії алгоритмів та технологій програмування.

У вступі обґрунтовано актуальність теми дисертаційної роботи, сформульовано мету та основні завдання дослідження, визначено об'єкт, предмет і методи дослідження, показано наукову новизну отриманих результатів, їх практичне значення, визначено зв'язок роботи з науковими темами, а також подано відомості про апробації результатів дисертації та їх висвітлення в наукових працях.

У першому розділі дисертаційної роботи показано, що в прикладних дослідженнях існують періодичні процеси, період яких не є постійним, а певним чином змінюється. Наглядним прикладом таких процесів є електрокардіограми, отримані після дії на організм фізичного навантаження. Проведений аналіз існуючих моделей та інформаційних технологій аналізу періодичних процесів, сигналів з постійним та змінним періодом показав їх недосконалість, оскільки

існуючі методи не дозволяють одночасно враховувати періодичність та змінність періоду. Обґрунтована необхідність створення інформаційної технології аналізу процесів зі змінним періодом, яка дозволить підвищити ступінь повноти подання інформації про такі процеси та рівня автоматизації їх аналізу.

При розробці інформаційної технології аналізу процесів зі змінним періодом в роботі запропоновано підхід, суть якого концентрується в тріаді «модель-алгоритм-програма». На першому етапі вибирається модель процесів у вигляді періодичних функцій зі змінним періодом (ПФЗП). На другому – на основі моделі розробляються методи, які включають в себе побудову рядів Фур'є ПФЗП. На третьому етапі розробляється відповідне програмне забезпечення та інформаційна технологія для визначення варіабельності електрокардіограми, отриманої після дії на організм людини фізичного навантаження, як процесу зі змінним періодом. У випадку, коли період є невідомим (наприклад для ЕКГ після фізичного навантаження) важливою є задача оцінки змінного періоду, розв'язання якої дозволить автоматизувати аналіз такої ЕКГ та більш повно подати інформацію про стан серцево-судинної системи людини при дослідженні варіабельності серцевого ритму

У другому розділі дисертації набула подальшого розвитку математична модель процесів зі змінним періодом у вигляді періодичних функцій зі змінним періодом, досліджено найпростіші приклади – тригонометричні функції із змінним періодом, записано аналітичні вирази їх періодів та для наочності наведено графіки деяких із цих функцій та їх періодів. В роботі вперше розроблено та систематизовано способи аналітичного задання функцій зі змінним періодом, записано їх змінні періоди, що дозволило здійснювати перевірку правильності теоретичних положень теорії рядів для періодичних функцій зі змінним періодом. Розроблені методи аналітичного задання ПФЗП та їх змінних періодів мають самостійне значення, оскільки узагальнюють і тим значно розширюють множину аналітично заданих періодичних функцій із постійним періодом.

У третьому розділі вперше розроблено метод побудови рядів Фур'є періодичних функцій зі змінним періодом. На основі елементарних тригонометричних функції зі змінним періодом побудовано систему тригонометричних функцій зі змінним періодом і показано, що вона є ортогональною із ваговою функцією, причому інтервал ортогональності є змінним. Кожний інтервал ортогональності має певну довжину, яка для певної точки визначається значенням змінного періоду. Отримано формули визначення коефіцієнтів ряду Фур'є таких функцій. Показано, що коефіцієнти Фур'є не залежать від значення лівої точки інтервалу ортогональності, тобто цей інтервал може бути розміщений довільно, лише б він належав області визначення наближуваної функції. Використовуючи формулу для знаходження віддалі між ПФЗП та її рядом Фур'є, перевірено, що зі збільшенням числа коефіцієнтів ряд Фур'є ПФЗП наближається до самої функції, а це підтверджує правильність моделі та алгоритмів побудови рядів Фур'є. Інформаційна технологія, що включає розроблені алгоритми і створене програмне забезпечення «Фур'є-аналіз функцій зі змінним періодом», дозволила здійснювати спектральний аналіз процесів зі змінним періодом.

У четвертому розділі запропоновано метод оцінювання змінного періоду, який за рахунок отримання додаткових параметрів, дозволив підвищити ступінь автоматизації аналізу процесів зі змінним періодом. Задачу оцінки змінного періоду розглянуто на прикладі електрокардіограми, отриманої після дії на організм фізичного навантаження. Процес побудови оцінки змінного періоду ЕКГ розділено на два етапи. На першому проведено експериментальні дослідження, які полягали у відборі послідовності значень змінного періоду ( $R-R$  інтервали) на протязі деякого часового інтервалу після фізичного навантаження. На другому – методом апроксимації побудовано функцію, яка і є оцінкою змінного періоду. Параметри, що входять у функцію змінного періоду, а також середньоквадратичні відхилення апроксимації запропоновано використовувати як нові інформативно-діагностичні ознаки в задачах класифікації, розпізнавання, де досліджуються функції чи процеси зі змінним

періодом. Це може стосуватися, наприклад, медичної діагностики загального призначення при оцінці стану організму, ефективності лікування чи реабілітаційного процесу. В питаннях спортивної, космічної медицини, задачах судової експертизи ці параметри можуть виявитися досить інформативними при оцінці стану та поведінки організму в стресових ситуаціях, при значних фізичних навантаженнях тощо. З позицій кардіологічного аналізу параметри змінного періоду ЕКГ означають:  $a$  – частота пульсу (серцевих скорочень), яка наступить через деякий час після його стабілізації (частоту пульсу в стані спокою);  $b$  – величина, на яку зростає частота пульсу в порівнянні із частотою в стані спокою,  $\alpha$  – характеризує «швидкість» стабілізації пульсу.

На основі алгоритму оцінки змінного періоду розроблено інформаційну технологію оцінювання варіабельності серцевого ритму після дії на організм фізичного навантаження, основною складовою якої є програмне забезпечення «Аналіз  $R-R$  інтервалів та оцінка варіабельності серцевого ритму». Розроблена ІТ дозволяє автоматизувати аналіз ЕКГ після фізичного навантаження і, за рахунок нових інформативних параметрів, більш повно подати інформацію про стан серцево-судинної системи людини при дослідженні варіабельності серцевого ритму після фізичного навантаження.

За допомогою розроблених методів і програмних засобів доведено ефективність запропонованої інформаційної технології аналізу процесів зі змінним періодом, яка дозволяє більш повно подавати інформацію про такі процеси за рахунок знаходження додаткових параметрів та автоматизувати їх аналіз з метою підтримки прийняття рішень.

За результатами дисертаційних досліджень опубліковано 27 наукових праць, в тому числі 7 статей у наукових фахових виданнях України з технічних наук (одноосібних статей – 1), 3 з них входять до наукометричних баз даних з міжнародним індексом цитування (Index Copernicus, Polish Scholarly Bibliography, Directory of Open Access Journals (DOAJ), Ulrich's Web), 18 тез доповідей у працях міжнародних та всеукраїнських наукових та науково-

технічних конференцій, а також отримано 2 свідоцтва про авторське право на комп'ютерні програми

*Ключові слова:* процес зі змінним періодом, змінний період, інформаційна технологія аналізу процесів зі змінним періодом, коефіцієнти Фур'є періодичних функцій зі змінним періодом, ряд Фур'є періодичних функцій зі змінним періодом, Фур'є-аналіз функцій зі змінним періодом, оцінка змінного періоду, варіабельність серцевого ритму після фізичного навантаження.

### Список публікацій здобувача

*Наукові праці, в яких опубліковано основні наукові результати дисертації:*

1. Приймак М.В. Оцінка змінного періоду та змінної частоти / М.В. Приймак, Р.О. Сарабун, Л.П. Дмитроца // Міжнародний науково-технічний журнал. Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах. – Хмельницький технологічний ун-т Поділля. – 2011. – №2. – С. 76-82 .

2. Приймак М.В. Сигнали зі змінним періодом та їх модель / М.В. Приймак, Я.П. Василенко, Л.П. Дмитроца // Вісник НТУУ «КПІ». Інформатика, управління та обчислювальна техніка: Зб. наук. пр. – К.: Век+, 2013. – № 59. – С. 116-121.

3. Василенко Я.П. Клас функцій зі змінним періодом / Я.П. Василенко, Л.П. Дмитроца, М.В. Приймак // Вісник Харківського національного університету імені В.Н.Каразіна Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»: Зб. наук. п. – №1105. – Харків: ХНУ, 2014. – С. 21-33.

4. Василенко Я.П. Способи задання функцій зі змінним періодом та їх наближення / Я.П. Василенко, Л.П. Дмитроца, М.З. Олійник, М.В. Приймак // Вісник Харківського національного університету імені В.Н.Каразіна. Серія "Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління" Випуск 30. – Харків: ХНУ, 2016. – С. 36-47.

5. Приймак М.В. Аналітичні способи задання функцій із змінним періодом та інформаційні технології визначення їх коефіцієнтів Фур'є /

Приймак М.В., Дмитроца Л.П., Олійник М.З. // Вісник нац. ун-ту «Львівська політехніка» – Збірник наукових праць, №854. – Серія: Інформаційні системи та мережі. – Львів, вид-во Львівської політехніки, 2016. – С. 138-148.

6. Pryimak M. Fourier series of periodic functions with variable period and evaluation of their variable period for determination of heart rhythm variability / Mykola Pryjmak, Yaroslav Vasylenko, Lesia Dmytrotsa, Mariya Oliynyk // Computational Problems of Electrical Engineering. – Volume 7, No 2, 2017.– С. 108-116.

7. Dmytrotsa L. Software for Fourier -analysis of functions with variable period / Dmytrotsa L. // Вісник Хмельницького університету – Хмельницький: Видавництво ХНУ, 2018. – № 4 (263). – С.159-166.

*Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:*

8. Дмитроца Л. Інтервали ортогональності для тригонометричної системи функцій із змінним періодом та можливість знаходження на будь-якому із них коефіцієнтів Фур'є / Л. Дмитроца, М. Приймак, Р. Сарабун // Матеріали першої науково-технічної конференції «Інформаційні моделі, системи та технології» (20 травня 2011). – Тернопіль: ТНТУ, 2011. – С. 12.

9. Дмитроца Л. Варіанти побудови рядів Фур'є для функцій зі змінним періодом / Л. Дмитроца, М. Приймак, Р. Сарабун // Матеріали першої науково-технічної конференції «Інформаційні моделі, системи та технології» (20 травня 2011). – Тернопіль: ТНТУ, 2011. – С. 11.

10. Приймак М.В. Апроксимація змінного періоду та частоти та їх використання в задачах діагностики / Приймак М.В., Сарабун Р.О., Дмитроца Л.П. // Збірник тез доповідей Всеукраїнська наукова конференція «Застосування математичних методів в науці і техніці» (25-26 листопада 2011). – Луцьк: ЛНТУ, 2011. – С. 72-74.

11. Приймак М.В Коефіцієнти Фур'є функцій із змінним періодом / Приймак М.В, Дмитроца Л.П., Сарабун Р.О. // Всеукраїнська наукова

конференція «Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу»  
// Тези доповідей. – Івано-Франківськ, 2012. – С. 52-54.

12. Дмитроца Л. Незалежність коефіцієнтів Фур'є функцій із змінним періодом від змінного інтервалу ортогональності / Л. Дмитроца, М. Приймак // Матеріали II науково-технічної конференції «Інформаційні моделі, системи та технології» Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя (м. Тернопіль, 25 квітня 2012). – Тернопіль: ТНТУ, 2012. – С. 22.

13. Приймак М. Змінні періоди функції із змінним періодом та їх взаємозв'язок / М. Приймак, Л. Дмитроца // Матеріали XVI наукової конференції Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя, Том I. Природничі науки та інформаційні технології: збірник тез доповідей (м. Тернопіль, 5-6 грудня 2012 року). – Тернопіль: ТНТУ, 2012. – С. 61.

14. Дмитроца Л.П. Про наближення функцій зі змінним періодом / Л.П. Дмитроца // Матеріали XVII наукової конференції Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя, Том I. Природничі науки та інформаційні технології: збірник тез доповідей (м. Тернопіль, 20-21 листопада 2013 року). – Тернопіль: ТНТУ, 2013. – С. 9.

15. Дмитроца Л.П. Приклади задання функцій зі змінним періодом / Дмитроца Л.П. // Застосування математичних методів в науці і техніці: збірник тез доповідей II Всеукраїнської наукової конференції, 22-23 листопада 2013. – Луцьк: РВВ ЛНТУ, 2013. – С. 41-44.

16. Приймак М.В. Розвиток теорії періодичних функцій та їх узагальнення – функції із змінним періодом / М.В. Приймак, Л.П. Дмитроца // П'ятнадцята міжнародна наукова конференція ім. акад. Михайла Кравчука, 15–17 травня, 2014 р., Київ: Матеріали конф. Т. 2. Алгебра. Геометрія. Математичний аналіз. – Київ: НТУУ «КПІ», 2014. – С. 156-158.

17. Приймак М.В. Система тригонометричних функцій із змінним періодом та деякі її властивості / Приймак М.В., Дмитроца Л.П. // Науково-технічна Міжнародна конференція «Комп'ютерне моделювання у наукоємних технологіях (КМНТ-2014)» Харківський національний університет імені



В.Н. Каразіна, м.Харків, 28-31 травня 2014. Труды научно-технической конференции с международным участием. — Харків: ХНУ, 2014. — С. 327-328.

18. Приймак М.В. Функції із змінним періодом як узагальнення періодичних функцій / М.В Приймак, Л.П Дмитроца // Контроль і управління в складних системах (КУСС-2014). XII Міжнародна конференція. Тези доповідей. Вінниця, 14-16 жовтня 2014 року. — Вінниця: ВНТУ, 2014. — С.31.

19. Приймак М.В. Аналітичне задання функцій зі змінним періодом та їх змінні періоди / Приймак М.В., Дмитроца Л.П., Василенко Я.П., Олійник М.З.// Шістнадцята міжнародна наукова конференція ім. акад. Михайла Кравчука, 14–15 травня, 2015р., Київ: Матеріали конф. Т. 2. Алгебра. Геометрія. Математичний аналіз. — Київ: НТУУ «КПІ», 2015. — С. 156-159.

20. Дмитроца Л.П. Задача створення інформаційної системи моніторингу і реєстрації стану кардіонавантаження / Л.П. Дмитроца // Матеріали ХІХ наукової конференції ТНТУ ім.І.Пулюя, 18-19 травня 2016 року. — Тернопіль: ТНТУ, 2016. — С. 85-86.

21. Приймак М.В. Про наближення функцій зі змінним періодом / М.В. Приймак, Л.П. Дмитроца, М.З. Олійник // Сімнадцята міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука. 19-20 травня 2016 р., Київ: Матеріали конф. Т.2. Алгебра. Геометрія. Математичний аналіз. — Київ: НТУУ «КПІ», 2016. — С. 155-159.

22. Приймак М.В. Інформаційні технології представлення функцій зі змінним періодом тригонометричними рядами / Приймак М.В., Дмитроца Л.П., Олійник М.З. // Міжнародна науково-технічна конференція Харківського національного університету імені В.Н.Каразіна. 26-31 травня 2016 року. Труды международной научно-технической конф. «Компьютерное моделирование в наукоемких технологиях (КМНТ-2016)». — Харків.: ХНУ, 2016. — С.282-284.

23. Приймак М.В. Функції зі змінним періодом та їх наближення рядами Фур'є / Приймак М.В., Дмитроца Л.П., Олійник М.З. // Праці VI Міжнародної науково-практичної конференції "Обробка сигналів і негаусівських процесів": тези допов.— Черкаси: ЧДТУ, 2017. — С.128-130.

24. Дмитроца Л.П. Порівняльний аналіз приладів для реєстрації RR-інтервалів / Л.П. Дмитроца, Р.І. Черевик // Актуальні задачі сучасних технологій: зб. тез доповідей VI Міжнародної наук-техн. конф. молодих учених та студентів (Тернопіль, 16-17 листопада 2017). – Том II. – Тернопіль : ТНТУ, 2017. – С.54.

25. Приймак М.В. Інформаційні технології дослідження періодичних функцій із змінним періодом та їх застосування для оцінки варіабельності серцевого ритму / Приймак М.В., Василенко Я.П., Дмитроца Л.П., Олійник М.З. // Сучасні проблеми математичного моделювання, обчислювальних методів та інформаційних технологій: Матеріали Міжнародної наукової конференції 2–4 березня 2018 року. – Рівне: НУВГП, РДГУ, 2018. – С. 285-288.

*Наукові праці, які додатково відображають наукові результати дисертації:*

26. Дмитроца Л.П. Комп'ютерна програма “Аналіз RR-інтервалів та оцінка варіабельності серцевого ритму”: свід. про реєстр. автор. права на твір № 79650 від 07.06.2018 / Дмитроца Леся Павлівна, Палій Володимир Михайлович, Приймак Микола Володимирович, Василенко Ярослав Пилипович. – Зареєстр. в Управлінні державних реєстрацій Департаменту інтелектуальної власності Міністерства економічного розвитку і торгівлі України заявка від 22.05.2018 № 80656.

27. Дмитроца Л.П. Комп'ютерна програма “Фур'є-аналіз функцій зі змінним періодом”: свід. про реєстр. автор. права на твір № 79651 від 07.06.2018 / Дмитроца Леся Павлівна, Палка Олег Вікторович, Приймак Микола Володимирович, Василенко Ярослав Пилипович. – Зареєстр. в Управлінні державних реєстрацій Департаменту інтелектуальної власності Міністерства економічного розвитку і торгівлі України заявка від 22.05.2018 № 80657.

## ABSTRACT

*Dmytrotsa L.* Information technology for the study of functions with variable period and their application for evaluation of heart rhythm variability. – Qualifying scientific work on the rights of the manuscript.

Thesis for the scientific degree of the candidate of technical science (doctor of philosophy) on specialty 05.13.06 – Information technologies. – Ternopil Ivan Puluj National Technical University, Ternopil, 2019.

The thesis deals with the solution of the important scientific and practical problem of increasing the completeness degree of information about processes with a variable period and the level of these processes analysis automation by developing the model, methods and information technology for reasonable decision-making in various practical applications, particularly, in cardiology problems while evaluating heart rate variability after exercise stress effect on the patient body. The object of the study is processes with a variable period. The solution of the tasks set in the dissertation is accomplished using the methods of the theory of functions and functional analysis, the theory of Fourier series, numerical methods, the theory of algorithms and programming technologies.

In the introduction the relevance of the topic of the dissertation is substantiated, research purpose and main goals are formulated, the research object, subject and methods are defined, the scientific novelty of the results and their practical significance are shown, relationship with scientific themes is defined, as well as information on the approbation of the dissertation and its coverage in scientific works are given.

In the first section of the dissertation, it is shown that in applied research there are periodic processes, the period of which is not constant, but changes in some way. An illustrative example of such processes is electrocardiograms obtained after exercise stress effect on the patient body. The analysis of existing models and information technologies for the analysis of periodic processes, signals with a constant and variable period showed their imperfection, since existing methods do not allow simultaneously to take into account periodicity and period variability. The necessity of creation of information technology of analysis of processes with a variable period, which will

increase the degree of completeness of information about such processes and the level of automation of their analysis, is substantiated.

While developing the information technology for the analysis of processes with a variable period in the dissertation, an approach, the essence of which is concentrated in the triad "model-algorithm-program", is offered. In the first stage, the model of processes in the form of periodic functions with a variable period (PFVP) is chosen. In the second stage, on base of the model, methods including construction of Fourier series of PFVP are developed. In the third stage, appropriate software and information technology for determination the electrocardiogram variability obtained after exercise stress effect on the human body as a process with a variable period are developed. In the case that the period is unknown (for example, ECG after exercise stress effect), the task of estimating an alternating period is important, the solution of which will allow to automate the analysis of such an ECG and to more fully represent information on the state of the cardiovascular system of a person in the study of the variability of the heart rate.

In the second section of the dissertation, the mathematical model of processes with a variable period in the form of periodic functions with a variable period has been further developed, the simplest examples – trigonometric functions with a variable period are investigated, the analytical expressions of their periods are written and the graphs of some of these functions and their periods are presented. In the work, for the first time, methods of analytical expressions of functions with a variable period were developed and systematized, their variables were recorded, which allowed to verify the correctness of the theoretical positions of the theory of series for periodic functions with a variable period. The developed methods of the analytical expressions of the PFVP and their variable periods are of independent significance since they generalize and thus considerably extend the set of analytically given periodic functions with a constant period.

In the third section, for the first time, we have developed a method for constructing Fourier series of periodic functions with a variable period. On the basis of elementary trigonometric functions with a variable period, a system of trigonometric

functions with a variable period is constructed and it is shown that it is orthogonal with a weight function, and the interval of orthogonality is variable. Each interval of orthogonality has a certain length, which for a certain point is determined by the value of the variable period. Formulas for determining the coefficients of the Fourier series of such functions are obtained. It is shown that the Fourier coefficients do not depend on the value of the left point of the orthogonality interval, that is, this interval can be arbitrarily placed only if it belongs to the area of definition of the approximate function. Using the formula for finding the distance between the PFVP and its Fourier series, it was verified that, with increasing number of coefficients, the Fourier series of the PFVP is close to the function itself, which confirms the correctness of the model and algorithms for constructing Fourier series. Information technology, which includes developed algorithms and created software "Fourier analysis of functions with a variable period", allowed to carry out spectral analysis of processes with a variable period.

The fourth section proposes a method for estimating the variable period, which, by obtaining additional parameters, allowed to increase the degree of automation of process analysis with a variable period. The task of estimating the variable period is considered on an example of an electrocardiogram obtained after exercise stress effect on the patient body. The process of constructing an estimation of the variable period of the ECG is divided into two stages. At the first, experimental studies were carried out, which consisted of selecting the sequence of values of the variable period ( $R-R$  intervals) for some time interval after physical activity. On the second, by the approximation method, a function is constructed which is an estimate of the variable period. Parameters included in the variable-period function, as well as mean square deviation of approximation, are proposed to be used as new informative-diagnostic features in classification tasks, recognition, where functions or processes with a variable period are investigated. This may be relevant, for example, general-purpose medical diagnostics in assessing the body's state, the effectiveness of the treatment or rehabilitation process. In questions of sports medicine, space medicine, the tasks of forensic examination, these parameters can be very informative in assessing the state

and behavior of the organism in stressful situations, with significant physical activity, etc. From the standpoint of cardiological analysis, the parameters of the variable period of the ECG mean:  $a$  – the pulse rate (heart contractions), which will come on some time after its stabilization (pulse rate in rest);  $b$  – the value at which the pulse rate increases in comparison with the rate in a resting state,  $\alpha$  - characterizes the "rapidity" of the stabilization of the pulse.

On the basis of the algorithm of the estimation of the variable period, an information technology for estimating the variability of the heart rate after exercise stress effect on the patient body, was developed the main component of which is the software "Analysis of  $R-R$  intervals and estimating of heart rate variability". The developed IT allows to automate ECG analysis after physical activity and, due to new informative parameters, to represent more complete information about the state of the cardiovascular system of a person in the study of cardiac rhythm variability after physical activity.

With the help of developed methods and software, the effectiveness of the proposed information technology of process analysis with a variable period is proved, which allows to represent information about such processes more completely by finding additional parameters and to automate their analysis in order to support decisions-making.

According to the results of the dissertation research, 27 scientific papers, including 7 articles in the scientific professional editions of Ukraine on technical sciences (individual articles - 1), are published, 3 of them are included in the scientometric databases with the international index of citation (Index Copernicus, Polish Scholarly Bibliography, Directory of Open Access Journals (DOAJ), Ulrich's Web), 18 theses of reports in international and national scientific and practical conferences, as well as 2 certificates of copyright in computer programs were received.

*Keywords:* process with variable period, variable period, information technology of analysis of processes with a variable period, Fourier coefficients of periodic functions with a variable period, Fourier series of periodic functions with a variable

period, Fourier analysis of functions with a variable period, estimation variable period, heart rate variability after physical activity.

### List of applicant publications

*Scientific papers, in which the main scientific results of the dissertation are published:*

1. Pryimak M.V. Otsinka zminnoho periodu ta zminnoi chastoty / M.V. Pryimak, R.O. Sarabun, L.P. Dmytrotsa // Mizhnarodnyi naukovo-tekhnichnyi zhurnal. Vymiriuvalna ta obchysliuvalna tekhnika v tekhnolohichnykh protsesakh. – Khmelnytskyi tekhnolohichnyi un-t Podillia. – 2011. – №2. – S. 76-82.

2. Pryimak M.V. Syhnaly zi zminnym periodom ta yikh model / M.V. Pryimak, Ya.P. Vasylenko, L.P. Dmytrotsa // Visnyk NTUU «KPI». Informatyka, upravlinnia ta obchysliuvalna tekhnika: Zb. nauk. pr. – K.: Vek+, 2013. – № 59. – S. 116-121.

3. Vasylenko Ya.P. Klas funktsii zi zminnym periodom / Ya.P. Vasylenko, L.P. Dmytrotsa, M.V. Pryimak // Visnyk Kharkivskoho natsionalnoho universytetu imeni V.N.Karazina Seriiia «Matematychno modeliuвання. Informatsiini tekhnolohii. Avtomatyzovani systemy upravlinnia»: Zb. nauk. p. – №1105. – Kharkiv: KhNU, 2014. – S. 21-33.

4. Vasylenko Ya.P. Sposoby zadannia funktsii zi zminnym periodom ta yikh nablyzhannia / Ya.P. Vasylenko, L.P. Dmytrotsa, M.Z. Oliinyk, M.V. Pryimak // Visnyk Kharkivskoho natsionalnoho universytetu imeni V.N.Karazina. Seriiia "Matematychno modeliuвання. Informatsiini tekhnolohii. Avtomatyzovani systemy upravlinnia" Vypusk 30. – Kharkiv: KhNU, 2016. – S. 36-47.

5. Pryimak M.V. Analitychni sposoby zadannia funktsii iz zminnym periodom ta informatsiini tekhnolohii vyznachennia yikh koefitsientiv Furie / Pryimak M.V., Dmytrotsa L.P., Oliinyk M.Z. // Visnyk nats. un-tu «Lvivska politekhnika» – Zbirnyk naukovykh prats, №854. – Seriiia: Informatsiini systemy ta merezhi. – Lviv, vyd-vo Lvivskoi politekhniki, 2016. – S. 138-148.

6. Pryimak M. Fourier series of periodic functions with variable period and evaluation of their variable period for determination of heart rhythm variability /

Mykola Pryjmak, Yaroslav Vasylenko, Lesia Dmytrotsa, Mariya Oliynyk // Computational Problems of Electrical Engineering. – Volume 7, No 2, 2017. – C. 108-116.

7. Dmytrotsa L. Software for Fourier -analysis of functions with variable period / Dmytrotsa L. // Visnyk Khmelnytskoho universytetu – Khmelnytskyi: Vydavnytstvo KhNU, 2018. – № 4 (263). – S.159-166.

*Scientific works certifying the testing of the dissertation materials:*

8. Dmytrotsa L. Intervaly ortohonalnosti dlia tryhonometrychnoi systemy funktsii iz zminnym periodom ta mozhlyvist znakhodzhennia na liubomu iz nykh koefitsientiv Furie / L. Dmytrotsa, M. Pryimak, R. Sarabun // Materialy pershoi naukovo-tekhnichnoi konferentsii «Informatsiini modeli, systemy ta tekhnolohii» (20 travnia 2011). – Ternopil: TNTU, 2011. – S. 12.

9. Dmytrotsa L. Varianty pobudovy riadiv Furie dlia funktsii zi zminnym periodom / L. Dmytrotsa, M. Pryimak, R. Sarabun // Materialy pershoi naukovo-tekhnichnoi konferentsii «Informatsiini modeli, systemy ta tekhnolohii» (20 travnia 2011). – Ternopil: TNTU, 2011. – S. 11.

10. Pryimak M.V. Aproksymatsiia zminnoho periodu ta chastoty ta yikh vykorystannia v zadachakh diahnostryky / Pryimak M.V., Sarabun R.O., Dmytrotsa L.P. // Zbirnyk tez dopovidei Vseukrainska naukova konferentsiia «Zastosuvannia matematychnykh metodiv v nautsi i tekhnitsi» (25-26 lystopada 2011). – Lutsk: LNTU, 2011. – S. 72-74.

11. Pryimak M.V Koefitsiienty Furie funktsii iz zminnym periodom / Pryimak M.V, Dmytrotsa L.P., Sarabun R.O. // Vseukrainska naukova konferentsiia «Suchasni problemy teorii ymovirnosti ta matematychnoho analizu» // Tezy dopovidei. – Ivano-Frankivsk, 2012. – S. 52-54.

12. Dmytrotsa L. Nezalezhnist koefitsientiv Furie funktsii iz zminnym periodom vid zminnoho intervalu ortohonalnosti / L. Dmytrotsa, M. Pryimak // Materialy II naukovo-tekhnichnoi konferentsii «Informatsiini modeli, systemy ta



tehnolohii» Ternopilskoho natsionalnogo tekhnichnogo universytetu imeni Ivana Puliuia (m. Ternopil, 25 kvitnia 2012). – Ternopil: TNTU, 2012. – S. 22.

13. Pryimak M. Zminni perody funktsii iz zminnym periodom ta yikh vzaiemozviazok / M. Pryimak, L. Dmytrotsa // Materialy KhVI naukovoï konferentsii Ternopilskoho natsionalnogo tekhnichnogo universytetu imeni Ivana Puliuia, Tom I. Pryrodnychi nauky ta informatsiini tekhnolohii: zbirnyk tez dopovidei (m. Ternopil, 5-6 hrudnia 2012 roku). – Ternopil: TNTU, 2012. – S. 61.

14. Dmytrotsa L.P. Pro nablyzhennia funktsii zi zminnym periodom / L.P. Dmytrotsa // Materialy KhVII naukovoï konferentsii Ternopilskoho natsionalnogo tekhnichnogo universytetu imeni Ivana Puliuia, Tom I. Pryrodnychi nauky ta informatsiini tekhnolohii: zbirnyk tez dopovidei (m. Ternopil, 20-21 lystopada 2013 roku). – Ternopil: TNTU, 2013. – S. 9.

15. Dmytrotsa L.P. Pryklady zadannia funktsii zi zminnym periodom / Dmytrotsa L.P. // Zastosuvannia matematychnykh metodiv v nautsi i tekhnitsi: zbirnyk tez dopovidei II Vseukrainskoi naukovoï konferentsii, 22-23 lystopada 2013. – Lutsk: RVV LNTU, 2013. – S. 41-44.

16. Pryimak M.V. Rozvytok teorii periodychnykh funktsii ta yikh uzahalnennia – funktsii iz zminnym periodom / M.V. Pryimak, L.P. Dmytrotsa // Piatnadtsiata mizhnarodna naukova konferentsiia im. akad. Mykhaila Kravchuka, 15–17 travnia, 2014 r., Kyiv: Materialy konf. T. 2. Alhebra. Heometriia. Matematychnyi analiz. – Kyiv: NTUU «KPI», 2014. – S. 156-158.

17. Pryimak M.V. Systema tryhonometrychnykh funktsii iz zminnym periodom ta deiaki yii vlastyvoli / Pryimak M.V., Dmytrotsa L.P. // Naukovo-tekhnichna Mizhnarodna konferentsiia «Kompiuterne modeliuvannia u naukoiemnykh tekhnolohiiakh (KMNT-2014)» Kharkivskyi natsionalnyi universytet imeni V.N. Karazina, m. Kharkiv, 28-31 travnia 2014. Труды научно-технической конференциы с международным участием. — Kharkiv: KhNU, 2014. – S. 327-328.z.

18. Pryimak M.V. Funktsii iz zminnym periodom yak uzahalnennia periodychnykh funktsii / M.V. Pryimak, L.P. Dmytrotsa // Kontrol i upravlinnia v

skladnykh systemakh (KUSS-2014). KhII Mizhnarodna konferentsiia. Tezy dopovidei. Vinnytsia, 14-16 zhovtnia 2014 roku. – Vinnytsia: VNTU, 2014. – S.31.

19. Pryimak M.V. Analitychne zadannia funktsii zi zminnym periodom ta yikh zminni periody / Pryimak M.V., Dmytrotsa L.P., Vasylenko Ya.P., Oliinyk M.Z. // Shistnadtsiata mizhnarodna naukova konferentsiia im. akad. Mykhaila Kravchuka, 14–15 travnia, 2015r., Kyiv: Materialy konf. T. 2. Alhebra. Heometriia. Matematychnyi analiz. – Kyiv: NTUU «KPI», 2015. – S. 156-159.

20. Dmytrotsa L.P. Zadacha stvorennia informatsiinoi systemy monitorynhu i reiestratsii stanu kardionavantazhennia / L.P. Dmytrotsa // Materialy XIX naukovoï konferentsii TNTU im.I.Puliuia, 18-19 travnia 2016 roku. – Ternopil: TNTU, 2016. – S. 85-86.

21. Pryimak M.V. Pro nablyzhennia funktsii zi zminnym periodom / M.V. Pryimak, L.P. Dmytrotsa, M.Z. Oliinyk // Simnadtsiata mizhnarodna naukova konferentsiia imeni akademika Mykhaila Kravchuka. 19-20 travnia 2016 r., Kyiv: Materialy konf. T.2. Alhebra. Heometriia. Matematychnyi analiz. – Kyiv: NTUU «KPI», 2016. – S. 155-159.

22. Pryimak M.V. Informatsiini tekhnolohii predstavlennia funktsii zi zminnym periodom tryhonometrychnymy riadamy / Pryimak M.V., Dmytrotsa L.P., Oliinyk M.Z. // Mizhnarodna naukovo-tekhnichna konferentsiia Kharkivskoho natsionalnoho universytetu imeni V.N.Karazyna. 26-31 travnia 2016 roku. Trudy mezhdunarodnoi nauchno-tekhnycheskoi konf. «Kompiuternoe modelyrovanye v naukoemkykh tekhnolohiyakh (KMNT-2016)». – Kharkiv.: KhNU, 2016. – S.282-284.

23. Pryimak M.V. Funktsii zi zminnym periodom ta yikh nablyzhennia riadamy Fur"ie / Pryimak M.V., Dmytrotsa L.P., Oliinyk M.Z. // Pratsi VI Mizhnarodnoi naukovo-praktychoi konferentsii "Obrobka syhnaliv i nehausivskykh protsesiv": tezy dopov.– Cherkasy: ChDTU, 2017. – S.128-130.

24. Dmytrotsa L.P. Porivnialnyi analiz pryladiv dlia reiestratsii RR-intervaliv / L.P. Dmytrotsa, R.I. Cherevyk // Aktualni zadachi suchasnykh tekhnolohii: zb. tez dopovidei VI Mizhnarodnoi nauk-tekhn. konf. molodykh uchenykh ta studentiv (Ternopil, 16-17 lystopada 2017). – Tom II. – Ternopil : TNTU, 2017. – S.54.

25. Pryimak M.V. Informatsiini tekhnolohii doslidzhennia periodychnykh funktsii iz zminnym periodom ta yikh zastosuvannia dlia otsinky variabelnosti sertsevoho rytmu / Pryimak M.V., Vasylenko Ya.P., Dmytrotsa L.P., Oliinyk M.Z. // Suchasni problemy matematychnoho modeliuвання, obchysliuvalnykh metodiv ta informatsiinykh tekhnolohii: Materialy Mizhnarodnoi naukovoї konferentsii 2–4 bereznia 2018 roku. – Rivne: NUVHP, RDHU, 2018. – S. 285-288.

*Scientific works, which additionally reflect the scientific results of the dissertation:*

26. Dmytrotsa L.P. Kompiuterna prohrama “Analiz RR-intervaliv ta otsinka variabelnosti sertsevoho rytmu”: svid. pro reiestr. avtor. prava na tvir № 79650 vid 07.06.2018 / Dmytrotsa Lesia Pavlivna, Pali Volodymyr Mykhailovych, Pryimak Mykola Volodymyrovych, Vasylenko Yaroslav Pylypovych. – Zareiestr. v Upravlinni derzhavnykh reiestratsii Departamentu intelektualnoi vlasnosti Ministerstva ekonomichnoho rozvytku i torhivli Ukrainy zaiavka vid 22.05.2018 № 80656.

Dmytrotsa L.P. Kompiuterna prohrama “Furie-analiz funktsii zi zminnym periodom”: svid. pro reiestr. avtor. prava na tvir № 79651 vid 07.06.2018 / Dmytrotsa Lesia Pavlivna, Palka Oleh Viktorovych, Pryimak Mykola Volodymyrovych, Vasylenko Yaroslav Pylypovych. – Zareiestr. v Upravlinni derzhavnykh reiestratsii Departamentu intelektualnoi vlasnosti Ministerstva ekonomichnoho rozvytku i torhivli Ukrainy zaiavka vid 22.05.2018 № 80657

## ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ ТА СКОРОЧЕНЬ.....	22
ВСТУП.....	23
РОЗДІЛ 1 ДОСЛІДЖЕННЯ ПРОБЛЕМ АНАЛІЗУ ПРОЦЕСІВ ЗІ ЗМІННИМ ПЕРІОДОМ .....	30
1.1 Процеси зі змінним періодом .....	30
1.2 Огляд існуючих моделей періодичних процесів та методів їх аналізу ...	37
1.2.1 Методи та програмні засоби аналізу періодичних функцій.....	37
1.2.2 Вейвлет-аналіз.....	42
1.2.3 Майже періодичні функції.....	43
1.2.4 Аналіз стохастично періодичних процесів .....	44
1.3 Аналіз існуючих методів дослідження процесів зі змінним періодом....	47
1.3.1 Методи дослідження біоритмічних процесів.....	47
1.3.2 Аналіз електрокардіограми як періодичного процесу .....	49
1.4 Постановка задачі дослідження.....	54
Висновки до першого розділу.....	57
РОЗДІЛ 2 МОДЕЛЬ ПЕРІОДИЧНИХ ПРОЦЕСІВ ЗІ ЗМІННИМ ПЕРІОДОМ.	58
2.1 Змінний період та його властивості .....	58
2.2 Тригонометричні функції зі змінним періодом та їх змінні періоди.....	60
2.3 Способи задання періодичних функцій зі змінним періодом .....	68
2.3.1 Способи задання періодичних функцій з постійним періодом.....	69
2.3.2 Способи задання періодичних функцій зі змінним періодом .....	74
2.4 Приклади аналітичного задання періодичних функцій зі змінним періодом та їх графічне зображення .....	75
2.5 Узагальнений метод отримання тригонометричних функцій зі змінним періодом .....	81
Висновки до другого розділу .....	84

	21
РОЗДІЛ 3 ІНФОРМАЦІЙНА ТЕХНОЛОГІЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ПРОЦЕСІВ ЗІ ЗМІННИМ ПЕРІОДОМ МЕТОДАМИ ФУР'Є-АНАЛІЗУ .....	86
3.1 Ортогональні системи тригонометричних функцій зі змінним періодом .....	87
3.2 Побудова ряду Фур'є періодичних функцій зі змінним періодом.....	91
3.3 Приклади побудови рядів Фур'є періодичних функцій зі змінним періодом .....	94
3.4 Програмна реалізація розробленої інформаційної технології аналізу ПФЗП.....	101
Висновки до розділу 3 .....	118
РОЗДІЛ 4 МЕТОД ОЦІНКИ ЗМІННОГО ПЕРІОДУ ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ ДО АНАЛІЗУ ВАРІАБЕЛЬНОСТІ СЕРЦЕВОГО РИТМУ.....	120
4.1 Постановка задачі оцінки змінного періоду емпіричних функцій зі змінним періодом.....	122
4.2 Відбір експериментальних даних для оцінки змінного періоду ЕКГ....	123
4.3 Алгоритм оцінки змінного періоду ЕКГ після фізичного навантаження.....	126
4.4 Інформативно-діагностичні параметри варіабельності серцевого ритму після фізичного навантаження.....	133
4.5 Програмне забезпечення для оцінки варіабельності серцевого ритму після фізичного навантаження.....	136
Висновки до розділу 4 .....	146
ВИСНОВКИ.....	148
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	150
ДОДАТКИ.....	168

## ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ ТА СКОРОЧЕНЬ

ІТ – інформаційна технологія

ПФЗП – періодичні функції зі змінним періодом

ППЗП – періодичні процеси зі змінним періодом

ЗП – змінний період

ЗЧ – змінна частота

$T(x)$  – змінний період

$T(x_0)$  – значення змінного періоду в точці  $x_0$

$f(x)$  – ПФЗП

$\tilde{f}(x)$  – ряд Фур'є для ПФЗП  $f(x)$

$\bar{f}(x)$  – скінченна сума ряду Фур'є для ПФЗП  $f(x)$

$p(x)$  – вагова функція

$\rho(f(x), \tilde{f}(x))$  – віддаль між ПФЗП  $f(x)$  і її рядом Фур'є  $\tilde{f}(x)$

ЕКГ – електрокардіограма

ЧСС – частота серцевих скорочень

ВСР – варіабельність серцевого ритму

ПЗ – програмне забезпечення

$R-R$  інтервал – віддаль між максимальними зубцями ЕКГ

$T(t)$  – змінний період серцевих скорочень (ЕКГ)

$v(t) = a + be^{-\alpha t}, t \in (0, \infty)$  – функція апроксимації змінної частоти серцевих скорочень ЕКГ

$a$  – частота серцевих скорочень в стані спокою

$b$  – величина, на яку зростає ЧСС після дії на організм людини фізичного навантаження

$\alpha$  – параметр, що характеризує швидкість стабілізації ЧСС після фізичного навантаження

$\sigma_g$  – середньоквадратичне відхилення ЧСС від оцінки ЗЧ

$\sigma_T$  – середньоквадратичне відхилення  $R-R$  інтервал від оцінки ЗП

## ВСТУП

**Актуальність теми.** Сьогодні широко використовують інформаційні технології (ІТ) для вирішення різноманітних задач, пов'язаних із аналізом процесів (явищ, сигналів), оцінкою їх параметрів, прийняттям на основі отриманих даних відповідних рішень. Ефективність прийняття рішень багато в чому визначається повнотою та достовірністю інформації про об'єкти та процеси, що досліджуються. Значну увагу привертають процеси, основною характерною особливістю яких є періодичність (ритмічність, циклічність). Такі процеси зустрічаються в метеорології, економіці, системах масового обслуговування, акустиці, медицині тощо. Для їх аналізу розроблені методи та програмні засоби цифрової обробки, зокрема спектрального аналізу, що реалізовані в комп'ютерних пакетах (Maple, MuPAD, Mathematica, Mathcad, MATLAB). В основі цих методів лежать фундаментальні результати теорії функцій (Д.Бернуллі, Л.Ейлер, Ж.Лагранж, Ж.Д'Аламбер, К.Вейерштрас), рядів Фур'є (Ж.Фур'є, М.Лузін, С.Бернштейн). Розроблені також інформаційні технології спектрально-кореляційного аналізу стаціонарних та періодичних процесів і послідовностей (О.Хінчин, Є.Слуцький, О.Коронкевич, Я.Драган, І.Яворський, М.Приймак), дискретного та швидкого перетворення Фур'є (J.Tukey, J.Cooley). Для випадків, коли невідомим є період функцій, розглядалися питання оцінки їх періоду (метод Бюй-Балло), гармонічного аналізу (A.Schuster).

Проведений аналіз показав, що існуючі методи та прикладні програми не враховують особливості широкого класу процесів, які теж є періодичними, але при цьому їх період вже не є постійним, а певним чином змінюється. До таких процесів можна віднести електрокардіограми (ЕКГ), отримані під час чи після дії на організм людини фізичного навантаження чи іншого збудника психофізичного стану. Приклади аналогічних періодичних процесів зі змінним періодом існують у технічних системах – гідро- та віброакустичні сигнали, отримані під час роботи двигунів, дизель-генераторів в перехідних режимах, наприклад, після зміни зовнішнього навантаження.

Огляд літературних джерел показав, що ступінь повноти подання інформації про процеси зі змінним періодом із застосуванням відомих методів спектрального аналізу, вейвлет-аналізу є недостатнім для прийняття обґрунтованих рішень в багатьох практичних застосуваннях. Для його підвищення запропоновано використовувати функції зі змінним періодом, що введені в роботах Приймака М.В., але які не знайшли свого відображення при розробці інформаційних технологій для автоматизації аналізу процесів зі змінним періодом.

Робота, яка націлена на вирішення науково-практичного завдання підвищення ступеня повноти подання інформації про процеси зі змінним періодом та рівня автоматизації їх аналізу шляхом розробки відповідних моделей, методів та інформаційних технологій, є актуальною.

**Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.** Дисертаційна робота виконана в межах науково-дослідних робіт кафедри комп'ютерних наук Тернопільського національного технічного університету імені І. Пулюя, зокрема «Інформаційні технології дослідження процесів із характерними особливостями періодичності» (номер державної реєстрації 0116U006601), держбюджетної теми «Розроблення методів прогнозування довговічності сплавів з ефектом пам'яті форми за змінної амплітуди навантаження» (номер державної реєстрації 0117U002241), в яких автор була виконавцем окремих етапів, завдань та розділів, пов'язаних із розробкою методів та програмного забезпечення аналізу досліджуваних процесів.

**Мета і завдання дослідження.** Метою дисертаційної роботи є підвищення ступеня повноти подання інформації про процеси зі змінним періодом та рівня автоматизації аналізу цих процесів шляхом розробки моделі, методів та інформаційної технології для підтримки прийняття рішень.

У відповідності до мети в дисертаційній роботі були поставлені наступні завдання:

- провести аналіз проблеми дослідження процесів зі змінним періодом;



– розробити математичну модель для формалізації подання періодичних процесів зі змінним періодом;

– побудувати ортогональну систему тригонометричних функцій зі змінним періодом та розробити алгоритм побудови рядів Фур'є періодичних функцій зі змінним періодом, що є основою інформаційної технології для аналізу процесів зі змінним періодом;

– розробити метод оцінки змінного періоду для електрокардіограми, отриманої після фізичного навантаження та запропонувати нові діагностичні ознаки варіабельності серцевого ритму;

– створити інформаційну технологію аналізу процесів зі змінним періодом.

*Об'єкт дослідження* – процеси зі змінним періодом.

*Предмет дослідження* – моделі, методи та засоби аналізу періодичних процесів зі змінним періодом.

**Методи дослідження.** Вирішення завдань, поставлених в дисертаційній роботі, виконано з використанням методів теорії функцій і функціонального аналізу, теорії рядів Фур'є, чисельних методів, теорії алгоритмів, програмування та комп'ютерного експерименту.

**Наукова новизна отриманих результатів:**

– набула подальшого розвитку математична модель процесів зі змінним періодом за рахунок розробки та систематизації способів аналітичного подання функцій зі змінним періодом, що дозволило здійснювати перевірку правильності теоретичних положень теорії рядів для періодичних функцій зі змінним періодом;

– вперше розроблено метод побудови рядів Фур'є періодичних функцій зі змінним періодом за рахунок подальшого розвитку ортогональної системи тригонометричних функцій зі змінним періодом та визначення коефіцієнтів Фур'є, що дозволило здійснювати спектральний аналіз процесів зі змінним періодом;

– вперше запропоновано метод оцінювання віддалі між періодичною функцією зі змінним періодом і її наближенням скінченним рядом Фур'є, що дає можливість оцінити точність та повноту подання інформації щодо процесів зі змінним періодом;

– вперше запропоновано метод оцінки змінного періоду з врахуванням математичної моделі процесів зі змінним періодом, який за рахунок отримання додаткових параметрів дозволив підвищити ступінь автоматизації аналізу таких процесів.

**Практичне значення отриманих результатів.** Розроблена на основі теоретичних досліджень нова інформаційна технологія дає можливість здійснювати аналіз процесів зі змінним періодом. Використання цієї технології в практичній діяльності дозволяє:

– будувати ряди Фур'є періодичних функцій зі змінним періодом, їх амплітудний та фазовий спектри, що надзвичайно важливо для задач класифікації, розпізнавання емпіричних періодичних процесів зі змінним періодом в кардіології, гідро- та віброакустиці тощо;

– отримувати додаткові параметри варіабельності серцевого ритму після дії на організм людини фізичного навантаження, що розширило інформативність діагностичних ознак для підтримки прийняття рішень в кардіології при дослідженні функціонального стану серцево-судинної системи людини, що підтверджено відповідними актами.

Інформаційна технологія аналізу процесів зі змінним періодом, яка реалізована в програмних пакетах «Фур'є-аналіз функцій зі змінним періодом» та «Аналіз *RR*-інтервалів та оцінка варіабельності серцевого ритму», суттєво доповнюють відомі комп'ютерні пакети (Maple, Mathematica, Mathcad, MATLAB), може бути використана як для аналізу електрокардіограми після навантаження, так і інших процесів зі змінним періодом.

Результати дисертаційної роботи впроваджено і використовуються у Збаразькій центральній районній комунальній лікарні (м. Збараж, Тернопільська обл., акт про впровадження від 4.04.2018 р.); в Інституті електродинаміки НАН

України (м. Київ, акт про впровадження від 20.06.2018 р.); в навчальному процесі кафедри комп'ютерних наук Тернопільського національного технічного університету ім. І. Пулюя (акт про впровадження від 24.07.2018 р.); у Комунальному підприємстві “Тернопільський міський лікувально-діагностичний центр” Тернопільської міської ради (м. Тернопіль, акт про впровадження від 6.08.2018 р.); у навчальному процесі кафедри медичної інформатики Тернопільського державного медичного університету імені І.Я. Горбачевського при вивченні дисциплін «Комп'ютерне моделювання у фармації», «Медична інформатика», а також застосовано розроблену комп'ютерну програму як додаток до «Інформаційної системи оцінки фізичної реабілітації» для оцінки адаптаційних механізмів організму після фізичного навантаження (м. Тернопіль, акт про впровадження від 21.08.2018 р.).

**Особистий внесок здобувача.** Наукові положення та основні результати, які містяться в дисертації, отримані здобувачем самостійно. В роботах, опублікованих у співавторстві, дисертанту належать: [1, 10, 25] – аналіз експериментальних даних, проведення апроксимації змінної частоти серцебиття після фізичного навантаження; [2, 23] – наведення прикладів тригонометричних функцій зі змінним періодом та їх подання в явному вигляді, побудова графіків функцій та їх змінних періодів; [3, 18] – узагальнення методу отримання тригонометричних функцій зі змінним періодом; [4, 19] – розроблення способів аналітичного задання функцій зі змінним періодом, запис виразів їх змінних періодів, обчислення коефіцієнтів Фур'є та побудова рядів Фур'є; [5, 22] – розробка інформаційної технології обчислення коефіцієнтів Фур'є для функцій зі змінним періодом та функцій з постійним періодом на прикладі періодичних коливань прямокутної форми, порівняння результатів, побудова графіків функцій та їх рядів Фур'є; [6] – проведення експериментів з відбору даних для досліджень варіабельності серцевого ритму після фізичного навантаження та обчислення параметрів оцінки змінного періоду електрокардіограм; [8, 9, 10] – обчислення коефіцієнтів ряду Фур'є для функції зі змінним періодом та їх порівняння на різних інтервалах ортогональності, побудова графіків функцій зі

змінним періодом; [12, 17] – знаходження інтервалів ортогональності, перевірка ортогональності системи функцій зі змінним періодом; [13] – перевірка твердження про взаємозв'язок змінних періодів системи тригонометричних функцій зі змінним періодом; [16] – аналіз літературних джерел в напрямку дослідження періодичних функцій та процесів; [21] – реалізація алгоритму наближення функцій зі змінним періодом; [24] – обґрунтування можливості використання пульсометра для проведення експериментальних досліджень варіабельності серцевого ритму після фізичного навантаження; [26] – розроблення програмного забезпечення для обчислення коефіцієнтів Фур'є та побудови рядів Фур'є для функцій зі змінним періодом; [27] – розроблення програмного забезпечення для оцінки варіабельності серцевого ритму після фізичного навантаження.

**Апробація результатів дисертації.** Результати роботи опубліковано та обговорювались на міжнародних та всеукраїнських наукових конференціях, зокрема на: I науково-технічній конференції «Інформаційні моделі, системи та технології» (м. Тернопіль, 2011 р.); Всеукраїнській науковій конференції «Застосування математичних методів в науці і техніці» (м. Луцьк, 2011 р., 2013 р.); Всеукраїнській науковій конференції «Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу» (м. Івано-Франківськ, 2012 р.); II науково-технічній конференції «Інформаційні моделі, системи та технології» (м. Тернопіль, 2012 р.); XVII науковій конференції «Природничі науки та інформаційні технології» (м. Тернопіль, 2013 р.); 15-й і 17-й міжнародних наукових конференціях ім. акад. М. Кравчука (м. Київ, 2014 р., 2016 р.); Міжнародних науково-технічних конференціях Харківського національного університету ім. В. Каразіна (м. Харків, 2014 р., 2016 р.); XII Міжнародній конференції «Контроль і управління в складних системах (КУСС-2014)» (м. Вінниця, 2014 р.); VI Міжнародній науково-практичній конференції "Обробка сигналів і негаусівських процесів" (м. Черкаси, 2017 р.); VI Міжнародній науково-технічній конференції молодих учених та студентів «Актуальні задачі сучасних технологій» (м. Тернопіль, 2017 р.); Міжнародній

науковій конференції «Сучасні проблеми математичного моделювання, обчислювальних методів та інформаційних технологій» (м. Рівне, 2018 р.). Матеріали дисертації обговорювалися на наукових семінарах кафедри комп'ютерних наук Тернопільського національного технічного університету ім. І. Пулюя.

**Публікації.** За результатами дисертаційних досліджень опубліковано 27 наукових праць, в тому числі 7 статей у наукових фахових виданнях України (одноосібних статей – 1), 3 з них входять до наукометричних баз даних з міжнародним індексом цитування (1 – Index Copernicus, Polish Scholarly Bibliography, 1 – Directory of Open Access Journals (DOAJ), 1 – Ulrich's Web та Index Copernicus), 18 тез доповідей у працях міжнародних та всеукраїнських наукових та науково-технічних конференцій, отримано 2 свідоцтва про авторське право на комп'ютерні програми.

**Структура і обсяг роботи.** Дисертаційна робота складається зі вступу, чотирьох розділів, загальних висновків, списку використаних джерел та додатків. Загальний обсяг дисертації становить 186 сторінок, з яких 125 сторінок основного тексту, 5 додатків на 19 сторінках, список літератури налічує 154 найменування.

## РОЗДІЛ 1

### ДОСЛІДЖЕННЯ ПРОБЛЕМ АНАЛІЗУ ПРОЦЕСІВ ЗІ ЗМІННИМ ПЕРІОДОМ

Для вирішення різноманітних задач, пов'язаних із аналізом процесів (явищ, сигналів), оцінкою їх параметрів, прийняттям на основі отриманих даних управлінських рішень широко використовуються інформаційні технології. Серед різноманітних процесів значну увагу привертають процеси та сигнали, основною характерною особливістю яких є періодичність (ритмічність, циклічність). Вони зустрічаються в техніці, метеорології, економіці, системах масового обслуговування, акустиці, медицині, зокрема це робота двигунів, різного роду генератори струму, спалахи на Сонці, магнітні бурі, робота серця, дихальний процес. Проте крім періодичних, період яких є постійним, зустрічаються процеси, період яких змінюється.

#### 1.1 Процеси зі змінним періодом

Процес зі змінним періодом – це процес, для якого характерна періодичність, але при цьому період повторюваності певним чином змінюється, тобто є деякою функцією. Ця функція і є змінним періодом.

Значна кількість таких процесів спостерігається в людському організмі. Для їх вивчення сформувався науковий напрямок «біоритмологія». Як зазначається в [149, с.15], з 30-х років ХХ ст. почався прогрес в дослідженні біологічних ритмів і була створена нова галузь наукових знань – хронобіологія (від *chronos* – час, *biology* – біологія) – термін, в широкому сенсі, позначає напрямок в біології, що досліджує періодичні (циклічні) феномени, що протікають в живих організмах з бігом часу, адаптуючись при цьому до сонячних і місячних ритмів і породжуваних ними періодичних кліматичних і погодних змін на Землі. Ці цикли називають біологічними ритмами. Тому в сучасній науці

паралельно із терміном «хронобіологія» використовуються як рівнозначний також термін «біоритмологія».

Хронобіологія включає в себе проблеми генетики і фізіологічних механізмів коливних процесів, синхронізації їх один з одним та із зовнішніми факторами середовища [150, с.206]. В багатьох питаннях хронобіологія перетинається із хрономедициною, що включає проблеми хронотерапії, хронофармакології, хронобіології спорту [151, с.231, 232]. На даний час в організмі людини вже відстежують близько 150 біоритмів, які «відповідають» за різні фізіологічні процеси (понад 900 фізіологічних функцій, що мають циркаціанну ритмічність [149, с.27]).

Існує класифікація біоритмів за різними ознаками [42, с.12-19; 148, с.7; 152, с.17-37], зокрема, за причиною їх виникнення (екзогенні і ендогенні); величиною (тривалістю) періоду та характером періоду (постійний чи змінний) тощо.

Відповідно до екзогенних, що виникають при періодичній дії зовнішніх факторів, і ендогенних, що породжуються всередині системи, ритмів розрізняють два типи коливних процесів: адаптивні ритми або біоритми – коливання з періодами, близькими до основних геофізичних циклів, роль яких полягає в адаптації організму до періодичних змін довкілля; фізіологічні або робочі ритми – коливання, що відображають діяльність фізіологічних систем організму [149, с.19].

За величиною періода розрізняють такі найважливіші види біологічних ритмів (за основу взята класифікація Н. Л. Асланяна [149, с.19,20]): білясекундні (з періодом близько 1-ї секунди) – циклічна активність серця, протягом приблизно секунди в серцевому м'язі відбувається суттєва зміна концентрації аденозинтриортофосфатної кислоти; біляхвилинні (з періодом близько 1-ї хвилини) – циклічні зміни електричної активності головного мозку, що реєструються на електроенцефалограмі; білягодинні (з періодом близько 1 години) – ритмшлункової моторики; ультрадіанні (з періодом 3-20 годин) – динаміка загального білірубину і трансамінази в сироватці крові; циркадіанні (білядобові, від лат. *Circa* – близько, кругом і лат. *Dies* – день, з періодом від 22 до

28 годин) – головні біоритми організму; інфрадінні – ритми з періодом 28-96 годин; білянедільні – ритми з періодом 4-10 днів; білямісячні (з періодом 25-35 днів); циркані (сезонні) – ритми з періодом 2-4 місяці; білярічні або циркааннуальні (від лат. *Annus* – рік) ритми – пов'язані з одним оборотом Землі навколо Сонця і спостерігаються в постійних умовах. Їх період становить приблизно 10-13 місяців [91, с.16]; багаторічні (близько 4, 11, 100 років) – біоритми пов'язані з сонячною активністю і характерні не тільки для окремих організмів, але і для цілих популяцій, поколінь, соціальних і історичних процесів.

Щодо характеру періоду (постійний чи змінний), то із наведеної вище класифікації біоритмів видно, що майже перед кожною назвою стоїть приставка біля (або близько – від лат. *Circa*), що означає відсутність стабільного періоду та наявність певних меж його зміни. Для прикладу можна вказати, що згідно з правилом Ашоффа [91, с.15], період циркадіанного ритму активності зі збільшенням інтенсивності освітлення у денних тварин, розміщених в умови постійного освітлення, зменшується, а у нічних – зростає.

Центральне місце серед ритмічних процесів займає циркадіанний (білядобовий, близькодобовий) ритм, який має найбільше значення для організму. Період циркадіанних ритмів триває у рослин 23-28 годин, у тварин 23-25 годин. Оцінюючи коливання циркадіанних ритмів, Г.Б. Федосєєв, Н.А. Агаджанян і І.Б. Воронов (1987) і ін. наголошують: «Найбільш інтригуючою загадкою біоритмології є питання, чому ритми, що погоджують життєдіяльність органів з «хронометром», точним до часток секунди (астрономічна доба), самі мають систематичну «похибку» до декількох годин?» Можна припустити, що саме ця «помилка» дає можливість синхронізувати між собою різні біоритми. [149, с.20].

В багатьох літературних джерелах наводяться результати експериментальних досліджень, які підтверджують наявність біоритмів, які мають періодичний характер, проте строга періодичність відсутня, тобто їх період відносно основного періоду (доба, рік тощо) зазнає певних змін. На



рис. 1.1 подані циркадіанні адаптивні ритми трьох показників працездатності – швидкості обчислень, швидкості реакції на зоровий стимул і сила стискання кисті руки. Кожна крива усереднена по  $n$  досліджуваних [42, с.365].

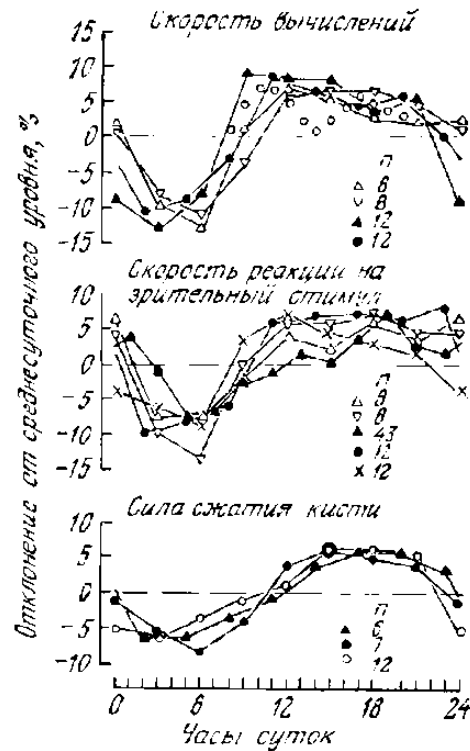


Рисунок 1.1 – Циркадіанні ритми трьох показників працездатності: швидкості обчислень, швидкості реакції на зоровий стимул і сила стиснення кисті руки

Циркадіанний характер має температура тіла. Це наглядно видно із рисунка 1.2, на якому відтворені результати експериментальних даних [152, с.31].

В цій же роботі наведені емпіричні графіки, на яких проілюстровано періодичні білясекундні фізіологічні біоритми (ритми з короткими періодами).

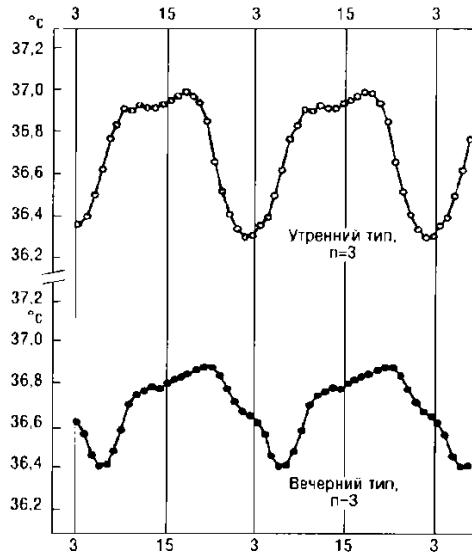


Рисунок 1.2 – Середньодобова зміна температури тіла трьох досліджуваних ранішнього і вечірнього типів

На рис. 1.3 зображено середні добові фізіологічні коливання частоти дихання у 50 досліджуваних в лежачому положенні [152, с.84], на рис 1.4 – коливання частоти пульсу, кровопостачання шкіри (вимірювання теплопровідності) і дихання [152, с.116].

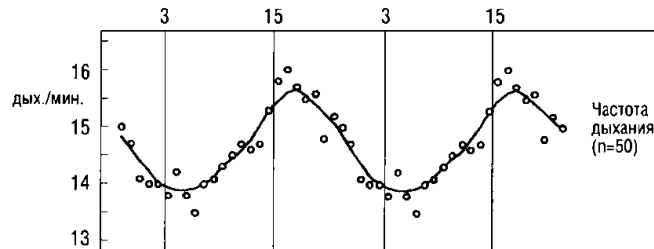


Рисунок 1.3 – Середні добові фізіологічні коливання частоти дихання у 50 досліджуваних в лежачому положенні

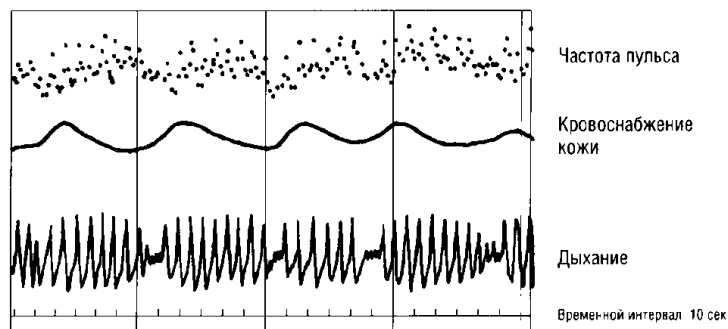
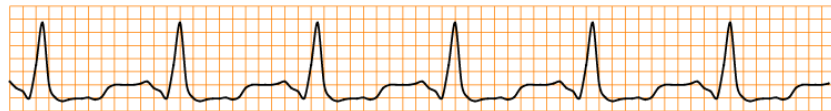


Рисунок 1.4 – Зміна частоти пульсу, кровопостачання шкіри (вимірювання теплопровідності) і спонтанного дихання

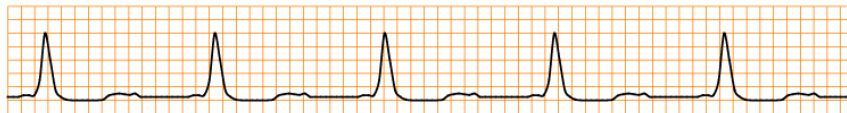
Наглядним і добре відомим прикладом процесу зі змінним періодом є електрокардіограми (ЕКГ), отримані під час чи після дії на організм пацієнта фізичного навантаження чи іншого збудника «спокою». На рисунку 1.5, графік 1а, – наведено відрізок ЕКГ, отриманої через 60 с. після дії навантаження, на графіках 1б і 1в – відрізки ЕКГ такої ж довжини, але отримані через 120 с. і 180 с. після навантаження. Аналізуючи графіки, можна стверджувати, що форма електрокардіограми має характер повторюваності як на кожному із графіків, так і на різних графіках. Але при цьому легко бачити, що період повторюваності змінюється, а саме збільшується, та із плином часом стабілізується, що з медичної точки зору відповідає зменшенню частоти пульсу.



а) 1 хвилина після навантаження



б) 2 хвилини після навантаження



в) 3 хвилини після навантаження

Рисунок 1.5 – Фрагменти електрокардіограми, отримані через різні проміжки часу після дії навантаження

Очевидно, подібною до ЕКГ буде поведінка спірограм, теж отриманих після дії на організм людини навантаження чи іншого збудника психофізичного стану.

Крім процесів зі змінним періодом, що зустрічаються в медицині, аналогічні процеси існують у технічних системах – гідро- та віброакустичні сигнали, отримані під час роботи двигунів, дизель-генераторів в перехідних режимах, наприклад, після зміни зовнішнього навантаження, звук сирени машини під час руху (віддалення чи приближення), гідроакустичні коливання

надводних і підводних об'єктів при зміні швидкості руху, робота різноманітних машин і механізмів в перехідних режимах. За даними Міжнародної служби обертання Землі добовий період обертання Землі є змінним.

Для автоматизації та спрощення аналізу процесів зі змінним періодом, а також для підвищення рівня об'єктивності та достовірності аналізу таких процесів важлива наявність інформаційних технологій (ІТ). ІТ – це сукупність методів, виробничих процесів і програмно-технічних засобів, об'єднаних у технологічний ланцюжок, що забезпечує збір, зберігання, обробку, висновок і поширення інформації для зниження трудомісткості процесів використання інформаційних процесів, підвищення їх надійності та оперативності [92]. Основні функції інформаційної технології зображені на рисунку 1.6

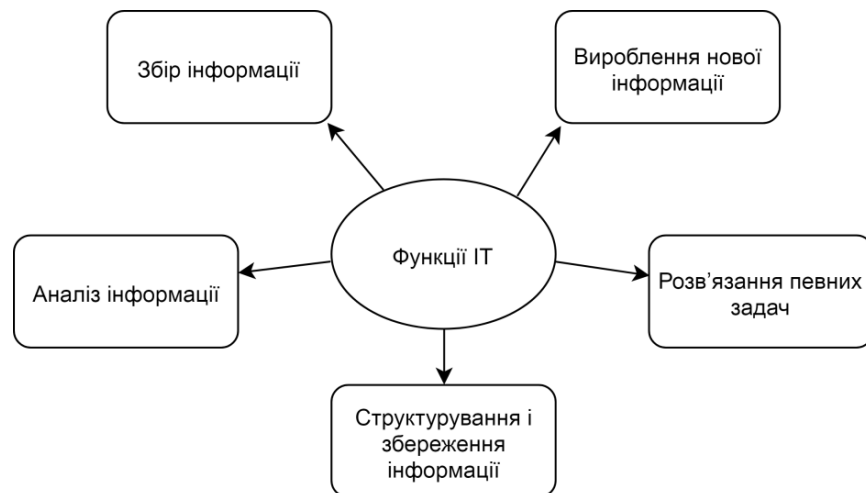


Рисунок 1.6 – Основні функції інформаційних технологій

ІТ аналізу процесів з властивістю періодичності можна подати у вигляді схеми, зображеної на рисунку 1.7.

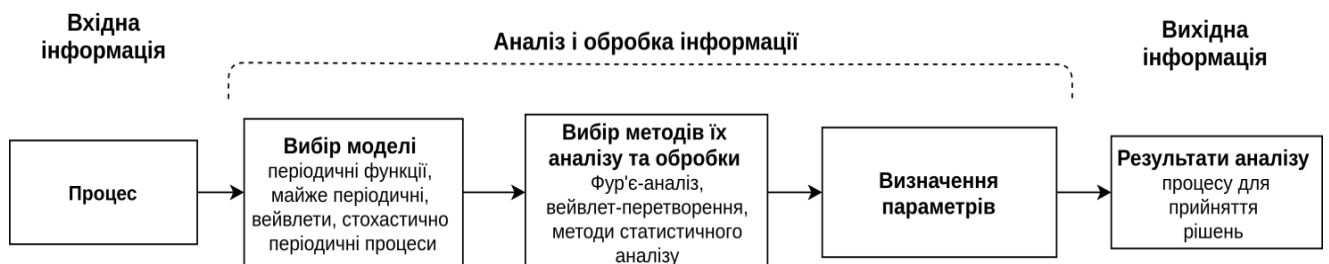


Рисунок 1.7 – Схема ІТ аналізу періодичних процесів

Дослідження періодичності здійснювалось протягом тривалого відрізка часу, при цьому отримано ряд важливих результатів.

## 1.2 Огляд існуючих моделей періодичних процесів та методів їх аналізу

Це питання є важливим, оскільки деякі із існуючих методів дослідження процесів з постійним періодом будуть використані при вивченні процесів зі змінним періодом.

### 1.2.1 Методи та програмні засоби аналізу періодичних функцій

Згідно [87, с.455] функція  $f(x)$ , визначена на множині  $I$ , називається періодичною, якщо існує таке число  $T > 0$ , що для довільного  $x \in I$ , такого що значення  $x + T$  також належить  $I$ , виконується рівність

$$f(x) = f(x + T).$$

Методи дослідження періодичних функцій ґрунтуються на теорії функцій та теорії тригонометричних рядів Фур'є. Щодо виникнення самих рядів, то часто їх пов'язують саме із Ж.Б.Фур'є (1768-1830). Наприклад, в [31, с.569] говориться, що «Фур'є в 1811 році розробив вчення про подання функції у вигляді тригонометричного ряду». У своїй статті про розповсюдження тепла всередині твердих тіл Фур'є записав тригонометричний ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx \quad (1.1)$$

для «довільно заданої» функції  $f(x)$ ,  $x \in [0, 2\pi]$ , і дав правило обчислення коефіцієнтів  $a_k$  і  $b_k$  цього ряду [32, с.323], тобто записав формули

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx dx \quad (1.2)$$

Формули (1.2) для визначення коефіцієнтів ряду (1.1) розв'язали «спір про коливання струни», а самі коефіцієнти зразу ж отримали ім'я «формули Фур'є» («коефіцієнти Фур'є»).

Поняття функції, а також поняття її ряду Фур'є уточнялося, вдосконалювалося. Наприклад, якщо функція  $f(x)$  в загальному є періодичною з періодом  $T$ , то її ряд Фур'є записується у вигляді

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{2k\pi x}{T} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{2k\pi x}{T}, \quad (1.3)$$

а коефіцієнти ряду визначаються за формулами

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos \frac{2k\pi x}{T} dx, \quad k=0,1,2,\dots, \quad b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin \frac{2k\pi x}{T} dx, \quad k=1,2,\dots \quad (1.4)$$

Знак  $\approx$  в (1.3) означає, що функція  $f(x)$  і її ряд Фур'є не обов'язково співпадають. Рівність може виконуватися лише при певних умовах, накладених на функцію. Наприклад, коли функція  $f(x)$  є диференційованою на інтервалі  $[0, T]$ , то функція  $f(x)$  і її ряд Фур'є співпадають, тобто

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{2k\pi x}{T} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{2k\pi x}{T}.$$

Якщо для періодичної функції  $f(x)$  замість її періоду  $T$  використати частоту  $\omega = \omega_1 \stackrel{def}{=} \frac{2\pi}{T}$  та позначення  $\omega_k = k\omega_1$ , то ряд Фур'є і його коефіцієнти можна записати у вигляді:

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \omega_k x + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \omega_k x. \quad (1.5)$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos \omega_k x dx, \quad k=0,1,2,\dots, \quad b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin \omega_k x dx, \quad k=1,2,\dots \quad (1.6)$$

В прикладних дослідженнях (акустика, радіо- та електротехніка, механіка) [27] ряд Фур'є зручно подавати у вигляді

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos(\omega_k x + \varphi_k), \quad (1.7)$$

де

$$A(\omega_k) = A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \quad (1.8)$$

$$\varphi(\omega_k) = \varphi_k = -\arctg\left(\frac{b_k}{a_k}\right), \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi_k \leq \frac{\pi}{2}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad \omega_0 = 0.$$

Ряд Фур'є у вигляді (1.7) отримав назву тригонометричної форми ряду Фур'є. Послідовність коефіцієнтів  $A_k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , що входять в (1.7), називають амплітудним спектром функції. Для наочності амплітудний спектр зображають у вигляді графіка, показаного на рисунку 1.8, де у відповідність частотам  $\omega_k$  поставлені коефіцієнти  $A_k$ .

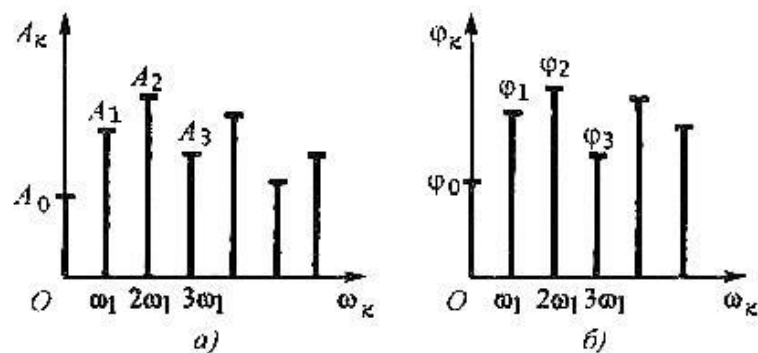


Рисунок 1.8 – Спектри періодичного сигналу: а) амплітудний, б) фазовий

Послідовність фаз  $\{\varphi_k, k = 0, 1, 2, \dots\}$ , які входять в (1.7), називають фазовим спектром функції і подібно до амплітудного спектру його теж можна зобразити графічно. Амплітудний і фазовий спектри відображають амплітудні та відповідно частотні характеристики функції (сигналу, процесу). Дослідження цих спектрів (в першу чергу амплітудного спектру) часто називають спектральним аналізом функції [145].

Для побудови рядів Фур'є із використанням обчислювальних засобів, зокрема комп'ютерів, використовують квадратурні формули, які дозволяють

знайти наближені значення коефіцієнтів  $a_0, a_k, b_k$ , які позначимо відповідно через  $\tilde{a}_0, \tilde{a}_k, \tilde{b}_k$ . Такими формулами замість (1.4) будуть відповідні їм інтегральні суми [27, 43]

$$\tilde{a}_0 = \frac{2}{N\Delta t} \sum_{i=0}^{N-1} f_i \Delta x = \frac{2}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f_i$$

$$\tilde{a}_k = \frac{2}{N\Delta t} \sum_{i=1}^{N-1} f_i \cos(\omega_i x_i) \Delta t = \frac{2}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f_i \cos(\omega_i x_i), \quad (1.9)$$

$$\tilde{b}_k = \frac{2}{N\Delta t} \sum_{i=0}^{N-1} f_i \sin(\omega_i x_i) \Delta t = \frac{2}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f_i \sin(\omega_i x_i), \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

де  $\Delta x = \frac{T}{N}$  – крок дискретизації,  $x_i = i \cdot \Delta x$ ,  $i = 0, \dots, N-1$ , – дискретні значення аргументу  $x$ ,  $f_i = f(i\Delta x) = f(x_i)$  – дискретні значення функції  $f(x)$ .

Якщо тепер розглядати ряд Фур'є на дискретній множині точок  $x_i$ ,  $i = 0, \dots, N-1$ , причому за коефіцієнти Фур'є взяти значення  $\tilde{a}_0, \tilde{a}_k, \tilde{b}_k$ , обчислені згідно (1.9), то в цьому випадку на відміну від (1.5) отримаємо «дискретний варіант» ряду Фур'є, тобто ряд Фур'є в дискретній множині точок  $x_i = i \cdot \Delta x$ :

$$f_i = f(x_i) \approx \frac{\tilde{a}_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{a}_k \cos \omega_k x_i + \tilde{b}_k \sin \omega_k x_i, \quad i = 0, \dots, N-1. \quad (1.10)$$

Подібно до (1.7) ряд Фур'є (1.10) можна записати у вигляді

$$f(x_i) \approx \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{A}_k \cos(\omega_k x + \tilde{\varphi}_k), \quad (1.11)$$

де

$$\tilde{A}(\omega_k) = \tilde{A}_k = \sqrt{\tilde{a}_k^2 + \tilde{b}_k^2},$$

$$\tilde{\varphi}(\omega_k) = \tilde{\varphi}_k = -\arctg\left(\frac{\tilde{b}_k}{\tilde{a}_k}\right), \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi_k \leq \frac{\pi}{2}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad \omega_0 = 0. \quad (1.12)$$



В розкладі (1.11) послідовності  $\tilde{A}_k$  і  $\varphi_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , – амплітудний і фазовий спектри дискретного ряду Фур'є.

Оскільки при реальних обчисленнях ми можемо використовувати лише скінченну кількість доданків ряду (1.10), то таке обмеження буде одним із джерел похибок при представленні значень функції рядом Фур'є. Якщо взяти скінчену суму доданків в (1.10) і позначити її через  $f_i$ , то виходить, що скінчений ряд Фур'є на дискретній множині точок обчислюються за формулою

$$f_i \approx \tilde{f}_i = \frac{\tilde{a}_0}{2} + \sum_{k=1}^M \tilde{a}_k \cos \omega_k x_i + \tilde{b}_k \sin \omega_k x_i, \quad i = 0, \dots, N-1. \quad (1.13)$$

Відзначимо, що сукупність алгоритмів і програмних засобів дослідження періодичних функцій, тобто побудова їх рядів Фур'є та знаходження їх амплітудного і фазового спектрів іноді називають Фур'є-аналізом періодичних функцій. Метод Фур'є-аналізу є однією із основних складових інформаційних технологій аналізу періодичних функцій, як моделі періодичних процесів. Фур'є-аналіз можна використовувати не тільки для періодичних функцій, але також для функцій, що розглядаються на довільному відрізку  $[0, T]$ . При цьому, хоча сама функція не є періодичною, ряд Фур'є є періодичним із періодом  $T$ .

Отже, Фур'є-аналіз періодичних функцій ґрунтується на формулі (1.5) ряду Фур'є, на формулах (1.6), згідно яких знаходяться коефіцієнти ряду, та на формулах (1.7) і (1.8) для визначення амплітудного і фазового спектрів досліджуваної функції. Для дискретного варіанту такими формулами є (1.9), (1.10) і (1.11), (1.12). Ці розрахункові формули включені практично у всі відомі універсальні системи (Derive, Maple, MuPAD, Mathematica, Mathcad, MATLAB тощо) [141]. Для прикладу на рисунку 1.9 показано результати Фур'є-аналізу з використанням системи MATLAB [58].

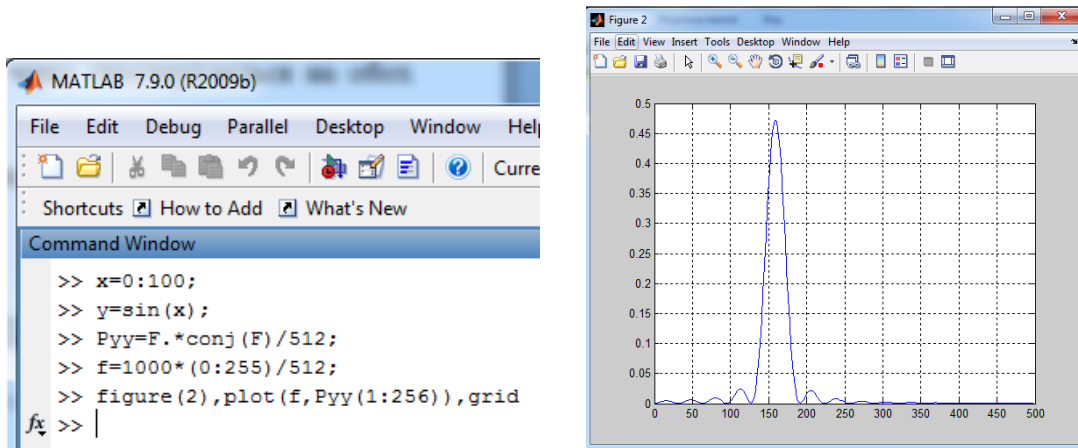


Рисунок 1.9 – Вікно дискретного прямого перетворення Фур'є у MATLAB

Зліва наведено заповнення масивів аргументу, а справа – графічне представлення дискретного перетворення Фур'є.

### 1.2.2 Вейвлет-аналіз

Для дослідження процесів використовують вейвлет-перетворення [1, 30, 59, 63, 81]. Слово вейвлет (англ.: wavelet) означає коротку (маленьку) хвилю або хвилі, що ідуть одна за одною. Основна суть вейвлет-перетворення полягає в тому, що він є різновидністю спектрального аналізу, задача якого зводиться до розкладу в ряд довільної функції (сигналу). Сукупність базисних функцій, по яких здійснюється розклад, утворюється з однієї і тієї ж функції-прототипу (функції, що породжує) за допомогою її зсувів та розтягів. При цьому середнє значення кожної функції в області визначення дорівнює нулю (умова допустимості). Такі базисні функції називаються вейвлетами. По локалізації у часовому та частотному представленні вони займають проміжну нішу між гармонійними функціями локалізованими по частоті і функцією Дірака, локалізованою в часі. Методи вейвлет-перетворення дозволяють акцентувати увагу на дрібних деталях функції, які на різних інтервалах досліджуваної функції можуть бути різними. Недоліком вейвлет-перетворення є те, що вибір конкретного виду вейвлета та оптимальні значення параметрів вейвлет-перетворення залежать від характеристик досліджуваної функції і від цілей

проведення аналізу, і повинні підбиратися з використанням чисельних експериментів.

### 1.2.3 Майже періодичні функції

До детермінованих моделей періодичних сигналів, функцій іноді відносять майже періодичні функції. Говорять, що майже періодична функція – це функція, значення якої при додаванні до аргументу певним чином обраних постійних чисел (майже періодів) приблизно повторюються. Більш точно: неперервна функція  $f(x)$ , визначена для всіх дійсних значень  $x$ , називається майже періодичною, якщо для кожного  $\varepsilon > 0$  можна вказати таке  $l = l(\varepsilon)$ , що в кожному інтервалі осі  $x$  довжини  $l$  знайдеться хоча б одне число  $\tau = \tau(\varepsilon)$ , для якого при будь-якому  $x$  виконується нерівність  $|f(x + \tau) - f(x)| < \varepsilon$ . Число  $\tau$  називають майже періодом функції  $f(x)$ . Одним із найпростіших прикладів майже періодичної функції є функція  $f(x) = \cos x + \cos \sqrt{2}x$ .

Теорією майже періодичних займалися різні вчені. Вперше побудова неперервних майже періодичної функції була зроблено датським математиком Г. Бором (1923). Раніше у 1893р. окремий випадок майже періодичних функцій – так звані квазіперіодичні функції – вивчав латвійський математик П. Боль. Нову побудову теорії майже періодичних функцій дав М.Боголюбов (1930). Узагальнення теорії майже періодичних функцій на випадок розривних функції вперше було дано В.Степановим (1925), а пізніше Г.Вейлем і А.Безиковичем. Узагальнення іншого роду було дано радянським математиком Б.Левітаном (1938) та С.Бохнером [10, 33, 73].

Зазначимо, що згідно літературних джерел, майже періодичні функції мають деяке теоретичне значення, проте їх використання для задач практики зустрічаються рідко.

#### 1.2.4 Аналіз стохастично періодичних процесів

Серед періодичних процесів оточуючого нас світу чільне місце займають стохастично періодичні (іноді говорять ритмічні, циклічні) процеси (явища, сигнали, поля, системи). Під цим розуміється, що вони мають стохастичний (тобто зумовлений випадковістю) характер, але при цьому їх певні ймовірнісні характеристики повторюються, змінюються періодично. Приклади стохастично періодичних процесів можна навести як із повсякденного життя, так із багатьох областей науки і техніки. Стохастично періодично із періодом  $T = 24$  год. змінюється температура навколишнього середовища, освітленість, причому для цих метеофакторів, крім добової періодичності, має місце також сезонна (річна) періодичність. Для більшості систем масового обслуговування стохастично періодичними є їх вхідні потоки вимог (викликів, подій). Це, зокрема, виклики на швидку допомогу, інформаційні потоки в інтернет-мережах, потоки автомобільного транспорту на АЗС, інтенсивність злетів і посадок літаків в аеропортах. Стохастично періодичними є навантаження енергосистем, графіки газо-, водоспоживання. До стохастичних належать багато шумоподібних сигналів. Це віброакустичні шуми багатьох машин, механізмів; шуми кавітації гребних гвинтів кораблів і підводних човнів; акустичні шумові сигнали, що виникають при циклічних навантаженнях конструкційних матеріалів. Ритмічно пульсує випромінювання зірок, всередині яких відбуваються циклічні ядерні реакції. Стохастична періодичність спостерігається також і для сонячної активності, яку характеризують числами Вольфа – інтегральними показниками числа сонячних плям. Дослідження показали [21], що для сонячної активності її період  $T = 11.125$  років за Шустером ( $T = 10.6$  років за Юлом). Рух місяця викликає циклічні коливання рівня моря, морські припливи і відливи. В стохастично періодичному режимі функціонують багато біологічних систем.

Щодо методів дослідження стохастично періодичних процесів, то важливо наголосити, що в їх основі суттєво використовуються методи та алгоритми статистичного аналізу стаціонарних послідовностей, в першу чергу стаціонарних в широкому розумінні, та стаціонарних ланцюгів Маркова.

## Послідовність випадкових величин

$$\xi_1, \dots, \xi_i, \dots \quad (1.14)$$

називається стаціонарною в широкому розумінні (слабо стаціонарною або стаціонарною за Хінчиним, іноді стаціонарною другого порядку) [65], якщо її математичне сподівання і дисперсія є постійними, а кореляційна функція залежить лише від різниці аргументів, тобто

$$M\xi_i = m = \text{const}, i = 1, 2, \dots, \quad D\xi_i = M(\xi_i - m)^2 = d = \text{const}, i = 1, 2, \dots, \\ M([\xi_i - m][\xi_j - m]) = R(j - i) = R(\tau), \tau = j - i.$$

Середньоквадратичне відхилення  $\sigma = \sqrt{d}$ .

Для стаціонарних послідовностей побудовані і досліджені оцінки їх основних параметрів [65].

Огляд основних моделей стохастичної періодичності та методів її дослідження здійснено згідно робіт [68, 103]. На перших порах спроби вивчення стохастично періодичних процесів зводилися до застосування при цьому так званого методу «приведення реальних нестаціонарних процесів до стаціонарних». Суть його полягає в тому, що для опису процесів, які не є стаціонарними, використовують певні модифікації стаціонарних процесів. Наприклад, у випадку, коли стаціонарність може бути обґрунтована на відносно невеликих часових інтервалах, вважають, що його моделлю є кусково (локально) стаціонарний процес.

До перших моделей, які хоч в певній мірі дозволяють враховувати стохастичну періодичність, можна віднести адитивну і мультиплікативну моделі. Адитивна модель має вигляд

$$\xi(t) = f(t) + \xi_1(t), t \in (a, b), \quad (1.15)$$

де  $f(t)$  – тренд, що являє собою періодичну функцію,  $\xi_1(t)$  – стаціонарний процес. В технічних застосуваннях модель (1.15) використовується при описі сингалів на фоні завад. В [144] цю модель було використано для опису та аналізу графіків енергонавантажень.

Крім (1.15), для врахування стохастичної періодичності процесів пульсуючого характеру іноді використовують мультиплікативну модель

$$\xi(t) = f(t) \cdot \xi_1(t), \quad (1.16)$$

де  $f(t)$  і  $\xi_1(t)$  мають такий самий зміст, що і в (1.16).

Першою моделлю, яка на строгому математичному рівні дає можливість враховувати стохастичну періодичність процесів, є клас періодично корельованих випадкових процесів (ПКВП), вперше розглянутий О.Коронкевичем [70]. Випадковий процес  $\xi(t), M|\xi(t)|^2 < \infty, t \in (-\infty, \infty)$  є періодично корельованим, якщо його математичне сподівання і кореляційна функція є періодичними, тобто

$$M\xi(t) = M\xi(t+T), \quad R(t_1, t_2) = M\left(\overset{\circ}{\xi}(t_1) \cdot \overset{\circ}{\xi}(t_2)\right) = R(t_1 + T, t_2 + T),$$

де  $\overset{\circ}{\xi}(t) = \xi(t) - M\xi(t)$  – центрований процес,  $T > 0$  – період кореляції.

Як наслідок, дисперсія ПКВП також є періодичною з періодом  $T$ :

$$D\xi(t) = R(t, t) = R(t+T, t+T) = D\xi(t+T).$$

Оцінка періоду для ПКВП вперше була побудована в [41,116]. Щодо методів статистичного аналізу, то оцінки періодичних математичного сподівання ПКВП, кореляційної функції, дисперсії розглядалися в ряді робіт Я.Драгана, зокрема в роботі [54].

Для більш глибокого дослідження стохастично періодичних процесів з врахуванням періодичності їх ймовірнісних характеристик в рамках функції розподілу можуть бути використані періодичні випадкові процеси (ПВП) [65, 135].

Для таких процесів також розроблені методи їх дослідження [25, 54, 55, 68, 71, 83, 85, 96, 97, 103, 116, ].

Основну увагу нижче ми звернемо на методи дослідження процесів зі змінним періодом.

### **1.3 Аналіз існуючих методів дослідження процесів зі змінним періодом**

#### **1.3.1 Методи дослідження біоритмічних процесів**

Перше експериментальне вивчення ритму змін фізіологічного стану організму було проведено в 1667 р Санкторіусом [149, с.10]. В цій же роботі містяться подальші кроки дослідження біоритмів, зокрема вказується, що приблизно через 100 років після дослідів Санкторіуса з'явилися публікації, що розширюють рамки знань про біоперіодичність. Де Кортер (1736 р.), потім Мартін (1773 р.) повідомили про добові коливання температури тіла.

Христофор Гуфелянд, який в 1797 р, розглядаючи коливання температури тіла у здорових і хворих пацієнтів, висловив припущення про те, що в організмі існує «внутрішній годинник», хід якого визначається обертанням Землі навколо своєї осі. Він вперше звернув увагу на універсальність ритмічних процесів у біологічних об'єктів. Раніше, в 1729 р. французький астроном, математик і фізик Жан Жаку де Мерані, вивчаючи особливості сонячного світла і обертання Землі, встановив, що в умовах темряви і постійної температури рослини зберігають властиву їм двадцяти чотирьох годинну періодичність руху листя, зв'язавши тим самим цей феномен не з освітленістю, а з обертанням нашої планети. [149, с.11]

Незважаючи на досить велику кількість результатів експериментальних досліджень біоритмічних процесів [42, 91, 148-152], арсенал методів їх обробки, статистичного аналізу досить обмежений, за винятком деяких елементарних досліджень. Так в [152, с.67, 68] йдеться, що для обробки біоритмічних процесів можуть використовуватися методи аналізу часових рядів, які частково проводяться за допомогою комп'ютерних програм. Періоди більшості біоритмів є змінними, як приклад, на рисунку 1.10 показаний частотний розподіл періодів серцевого ритму, ритму дихання, артеріального тиску і кровообігу [152, с.35].

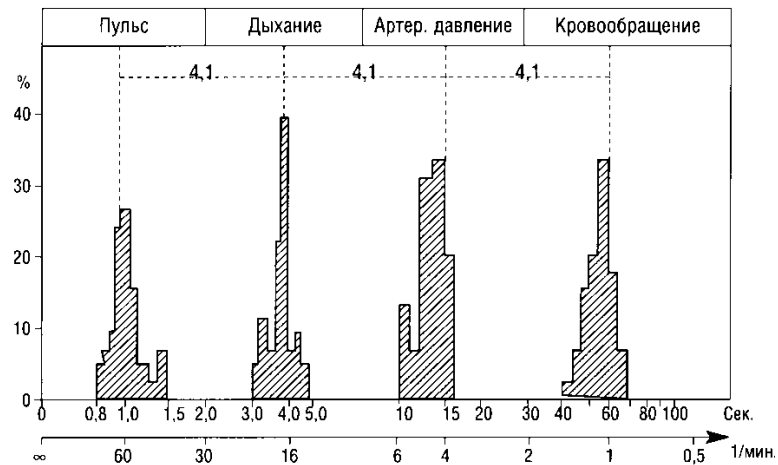


Рисунок 1.10 – Частотний розподіл періодів серцевого ритму, ритму дихання, артеріального тиску і кровообігу

Значна увага в біоритмології приділяється механізмам виникнення біоритмічних процесів, причинам їх породження, наявності взаємозв'язку різних біоритмічних процесів. Найбільш відомою є координація ритму між серцевим ритмом і диханням. Для здорової людини це співвідношення становить 4:1. Подібні співвідношення виявляються і у теплокровних тварин; а у риб ритм дихання може бути більш частим, ніж серцебиття [152, с.33]. Результат такого аналізу зображений на рисунку 1.11, де наведені середні показники і довірчі інтервали співвідношення пульс/дихання у 15 пацієнтів під час різних лікувальних курсів в умовах високогір'я [152, с.49].

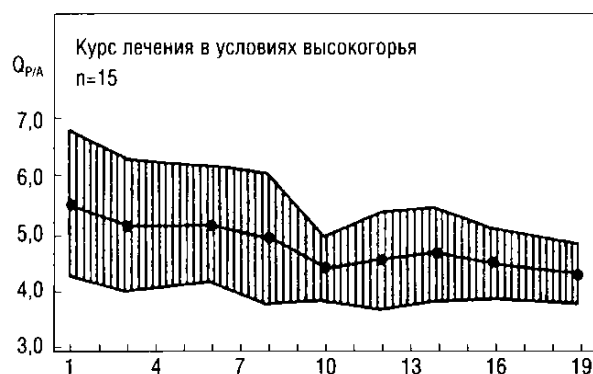


Рисунок 1.11 – Середні показники і довірчі інтервали співвідношення пульс/дихання у 15 пацієнтів під час різних лікувальних курсів в умовах високогір'я



Як видно із попереднього огляду, дослідження біоритмічних процесів має епізодичний характер. Ряд питань залишаються мало дослідженими, деяким із них практично ніякої уваги не приділялося. Про такий стан і його причини стверджується в [150, с.17]: «Ритмічність природних процесів не викликає сумнівів, спостережлива людина відзначить циклічність явищ неозброєним оком. Однак, коли мова заходить далі описових трактувань і спостережень, дослідник стикається з цілою низкою труднощів, оскільки подальша робота вимагає не тільки медико-біологічної трактування, а й знань математики, статистики, програмування». Нижче в цій же роботі наголошується: «На сьогоднішній момент існує безліч друкованих робіт по хронобіології на найрізноманітніші тематики, але розділ обчислювальних методів аналізу біологічних ритмів залишається нерозкритим і одночасно вкрай затребуваним» [150, с.18].

Такий же погляд описано в роботі [151, с.235]: «... проблеми геліобіології знаходяться на стику багатьох дисциплін: фізики, біології, медицини, математики. .... рішення багатьох питань не підвладне фахівцеві в одній області, а необхідно обговорення на міждисциплінарному рівні, із спеціалістами суміжних областей, залучати до дослідження фахівців в різних галузях і спільними зусиллями вирішувати поставлені на сьогоднішній день перед наукою проблеми».

Серед розглянутих процесів зі змінним періодом особливу увагу привертають електрокардіограми, отримані після дії на організм людини фізичного навантаження чи іншого збудника спокою.

### **1.3.2 Аналіз електрокардіограми як періодичного процесу**

При дослідженні ЕКГ, в першу чергу проводять аналіз серцевого ритму, адже правильний ритм забезпечує оптимальне кровопостачання організму при мінімальних навантаженнях на серцевий м'яз. Тому важливою характеристикою ЕКГ є ритм та варіабельність серцевого ритму. Нагадаємо [66], що варіабельність

серцевого ритму – це нерівномірність частоти серцевих скорочень обумовлена впливом на неї різноманітних регуляторних процесів в організмі.

Можна виділити два основних рівні, що використовуються для дослідження ЕКГ. Це емпіричний і теоретичний рівні. Емпіричні методи дослідження ЕКГ переважно використовують в кардіологічній практиці і здебільшого мають умоглядний характер. Спрямовані такі методи на аналіз форми ЕКГ загалом та на її окремі фрагменти: зубці, інтервали, комплекси, їх амплітудно-часову поведінку, тривалості і ймовірнісні властивості  $R-R$  інтервалів та ін. [9, 66, 22, 23, 24, 20, 89, 142, 143]. Проте багато методів емпіричного рівня залишаються без теоретичних досліджень, теоретичного підґрунтя. Для наочності на рисунку 1.12 показаний один із фрагментів ЕКГ, взятий із [142] та зображений  $R-R$  інтервал, що являє собою віддаль між двома сусідніми  $R$ -зубцями, а зубець  $R$  – це найбільш виражений зубець ЕКГ [66].

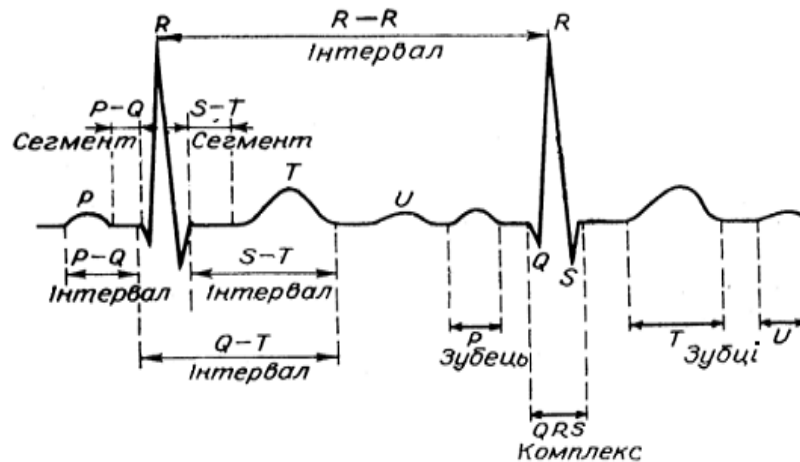


Рисунок 1.12 – Фрагмент нормальної ЕКГ в одному відведенні

В роботах теоретичного характеру дослідження ЕКГ значна увага звертається на використання понять, визначень, моделей, алгоритмів, теорії рядів Фур'є, теорії випадкових процесів, математичної статистики, інформаційних технологій тощо. Тут варто виділити декілька основних напрямків досліджень.

Дослідження амплітудно-частотних та фазо-частотних характеристик ЕКГ проводять методами Фур'є-аналізу. Про існуючі методи йдеться в [2, 18, 66, 89, 142]. Для отримання чисельних результатів обробки ЕКГ згідно цих методів можуть бути використані можливості сучасних програмних засобів комп'ютерної математики (Derive, Maple, MuPAD, Mathematica, Mathcad, MATLAB).

Значна увага приділяється статистичним методам дослідження ЕКГ, в першу чергу аналізу  $R$ - $R$  інтервалів як послідовності випадкових величин [7, 8, 14, 22, 24, 66, 89, 142, 149]. При умові, що ця послідовність є стаціонарною, оцінки математичного сподівання, дисперсії, кореляційної функції середньоквадратичного відхилення є надзвичайно інформативними при встановленні варіабельності серцевого ритму.

В роботах [53, 56] запропоновано дослідження ЕКГ на основі періодично корельованих випадкових процесів. Розроблені для цих процесів методи дозволяють знаходити оцінки періодичних ймовірнісних характеристик ЕКГ – математичного сподівання, дисперсії, кореляційної функції середньоквадратичного відхилення. По суті це дослідження просторово-часової структури (просторово-часові характеристики) ЕКГ із врахуванням періодичності і випадковості в рамках перших двох моментних функцій.

Згадаємо роботи [77, 78], в яких за модель сигналів серця вибрано лінійні періодичні випадкові процеси. З їх допомогою обґрунтовано моделі сигналів в електроенергетиці, акустиці [94, 13, 79, 38], причиною виникнення стохастичної періодичності яких є дія на лінійну систему періодичних білих шумів [38, 54, 79, 94, 106, 115]. Для лінійних періодичних процесів розроблені інформаційні технології їх статистичного аналізу та прогнозу [94, 79, 23], розпізнавання гіпотез [84].

Зустрічаються поодинокі роботи, що стосуються обробки ЕКГ в фазовому просторі координат [4, 5, 142, 154].

Щодо задачі дослідження ЕКГ, отриманих після дії на організм фізичного навантаження чи іншого збудника спокою, то для її розв'язку використовуються

підходи, в основі яких лежать методи дослідження послідовностей  $R-R$  інтервалів [56, 139]. Але такі послідовності вже не є стаціонарними, і в загальному випадку не існує теорії статистичних методів їх аналізу та обробки, а тому дослідження ЕКГ в цілому ще далеке від достатньо повного вирішення.

Аналіз ЕКГ з навантаженням – найбільш ефективний метод дослідження роботи серцевого м'яза, що дозволяє виявити приховані патології і призначити адекватне лікування. ЕКГ з навантаженням проводиться для дослідження людей, що займаються професійним спортом, особам, які працюють в рятувальних службах, спецпідрозділах, також дітям, яким необхідно уточнити можливість займатися яким-небудь видом спорту, уточнити причину прискорених серцебиття, болі в області грудної клітини. Показники, отримані в ході процедури, використовують або для підтвердження діагнозу, або для його виключення. Таке дослідження дозволяє проконтролювати ефективність призначеної терапії серцево-судинних патологій перед реабілітаційним періодом після перенесеного інфаркту міокарда або оперативних втручань на серці. Кардіограма з навантаженням проводиться методом функціональних проб, велоергометрією (на велотренажері), методом Тредміл (на біговій доріжці), методом холтерівського моніторингу. У вигляді функціональних проб використовується бігова проба (біг на місці протягом 15 секунд); спосіб Мартіне (20 присідань за 30 секунд і зняття показів перед початком виконання вправи, після його закінчення, через 3 хвилини після запропонованої навантаження); степ-тест (20 вправ на степ-площадці); кліно-ортостатичні проби (для дослідження дітей, у яких є ознаки серцевої патології).

При холтерівському моніторингу прикріплений датчик, що зчитує показання серцевого ритму не тільки в період активності, але і під час сну, фіксує всі зміни в протягом доби. Недоліком є необхідність ведення пацієнтом щоденника, в який записуються всі навантаження, прийом медикаментів. Далі проводиться зчитування інформації фахівцем і проводиться ретроспективний аналіз. Зазвичай висновок видається на наступний день.

У працях медичного характеру [2, 4, 5, 8, 9, 17, 18, 60, 61, 66, 82, 142, 143, 146, 153], описується дослідження варіабельності серцевого ритму для контролю, порівняння та відслідковування динаміки функціонального стану й рівня здоров'я організму, авторами яких є Баєвський Р.М., Парин В.В, Жемайтідє Д.І., Нідеккер І.Г., Власов Ю.А., Кудрявцева В.І., Вентцель М.Д., Нікуліна Г.А, Кирилов, О.І., Клецкин СЗ., Яблучанский Н. И, Файнзільберг Л.С., Malik M., Pagani M., Sayers B., Schmidt G.

За даними Баєвського Р.М., особливості адаптаційних реакцій організму можна оцінити за допомогою аналізу варіабельності серцевого ритму, оскільки його специфіка дає можливість отримати прогностичну інформацію про загальні активності регуляторних механізмів та функціонального стану організму в цілому. Для вивчення вегетативної регуляції серця використовують показники спектрального аналізу коротких (5-хвилинних) фрагментів кардіоритмограм: три основних діапазони частот у спектрі коливань ритму серця: Very Low Frequency (VLF) – наднизькі (від 0,003 до 0,04 Гц), Low Frequency (LF) – низькі (від 0,04 до 0,15 Гц) і High Frequency (HF) – високі (від 0,2 до 0,4 Гц) частоти. Аналізують часові показники ВСР: ЧСС, максимальна тривалість N–N інтервалів упродовж 5 хв ( $R-R_{max}$ ), мінімальна тривалість N–N інтервалів упродовж 5 хв ( $R-R_{min}$ ), середня тривалість нормальних інтервалів  $R-R$  ( $RRNN$ ); відношення K30/15, що характеризує реактивність парасимпатичного відділу вегетативної нервової системи. Використовують показники кардіоінтервалографії:  $M_o$  (мода – значення  $R-R$  інтервалу, що найбільш часто трапляються),  $A_{M_o}$  (амплітуда моди – відсоток кардіоінтервалів  $R-R$ , відповідний значенню моди); ПАПР – показник адекватності процесів регуляції ( $ПАПР=A_{M_o}/M_o$ ) та ІН – індекс напруження регуляторних систем ( $ІН=A_{M_o}/2 \cdot VP \cdot M_o$ ), запропоновані Баєвським Р.М.

Проведений аналіз існуючих методів дослідження ЕКГ після фізичного навантаження вказує на відсутність інформаційних технологій їх аналізу, коли одночасно враховувалася б періодичність та змінність її періоду.

#### 1.4 Постановка задачі дослідження

Для ЕКГ після навантаження існуючі методи дослідження не дозволяють автоматизувати обробку даних і повно подати інформацію як про процес з періодом, що змінюється неперервно за певним правилом, а наявних інформативних показників (середня ЧСС протягом доби, ВРС, наявність, кількість та градація шлуночкових порушень ритму) недостатньо, щоб виявити приховані патології серцево-судинної системи та оцінити ризик раптової смерті і синкопальні стани.

Огляд літературних джерел показує, що перші основоположні кроки при дослідженні періодичних процесів (сигналів), в яких період є змінним, зроблені в роботі [115], де вперше введено новий клас функцій – періодичних функцій зі змінним періодом (ПФЗП), а для випадкових процесів – клас періодичних процесів зі змінним періодом (ППЗП). Наведемо ці визначення.

Функція  $f(x)$ ,  $x \in (-\infty, \infty)$ , називається періодичною зі змінним періодом, якщо значення функції повторюється через деякий період, який в свою чергу, теж є функцією, тобто виконується рівність

$$f(x) = f(x + T(x)). \quad (1.17)$$

де  $T(x)$  – змінний період, і є неперервною функцією часу. Якщо в (1.17)  $T(x) = T = const$ , отримуємо класичне означення періодичної функції. Випадковий процес  $\xi(t)$ ,  $t \in (-\infty, \infty)$ , називається періодичним процесом зі змінним періодом, якщо періодичною зі змінним періодом  $T(t)$  є його багатовимірна функція розподілу:

$$F(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = F(x_1, \dots, x_n; t_1 + T(t_1), \dots, t_n + T(t_n)), t_i \in (-\infty, \infty), i = \overline{1, n}.$$

Наявність ПФЗП і ППЗП викликала низку задач щодо їх дослідження, при цьому основна увага приділялася ПФЗП. Деякі із отриманих результатів досліджень ПФЗП опубліковані в матеріалах конференцій, зокрема в [16, 99, 102, 104, 105, 107, 108, 110, 113]. В цих роботах наводилися приклади ПФЗП у вигляді тригонометричних функцій зі змінним періодом, записувались їх змінні періоди

тощо. Проте ці результати мають фрагментарний характер, скорочені варіанти, іноді є важкодоступними, і не знайшли свого відображення при розробці інформаційних технологій для автоматизації аналізу процесів зі змінним періодом.

При розробці сучасних інформаційних технологій рекомендується використовувати підхід, суть якого концентрується в тріаді «**модель-алгоритм-програма**», запропонований О.А.Самарським [131, 132.]. Згідно цього підходу на першому етапі обґрунтовується модель процесу (явища, сигналу, емпіричної функції), на другому – розробляються аналітичні методи та алгоритми його дослідження, на третьому етапі створюється відповідне програмне забезпечення. В даному випадку, на першому етапі вибирається модель процесів у вигляді періодичних функцій зі змінним періодом (ПФЗП); на другому – розробляються методи, які включають в себе побудову рядів Фур'є ПФЗП; на третьому етапі розробляється відповідне програмне забезпечення та інформаційна технологія для визначення варіабельності ЕКГ після дії на організм людини фізичного навантаження. Загальну схему архітектури ІТ аналізу процесів зі змінним періодом подамо на рис.1.13.

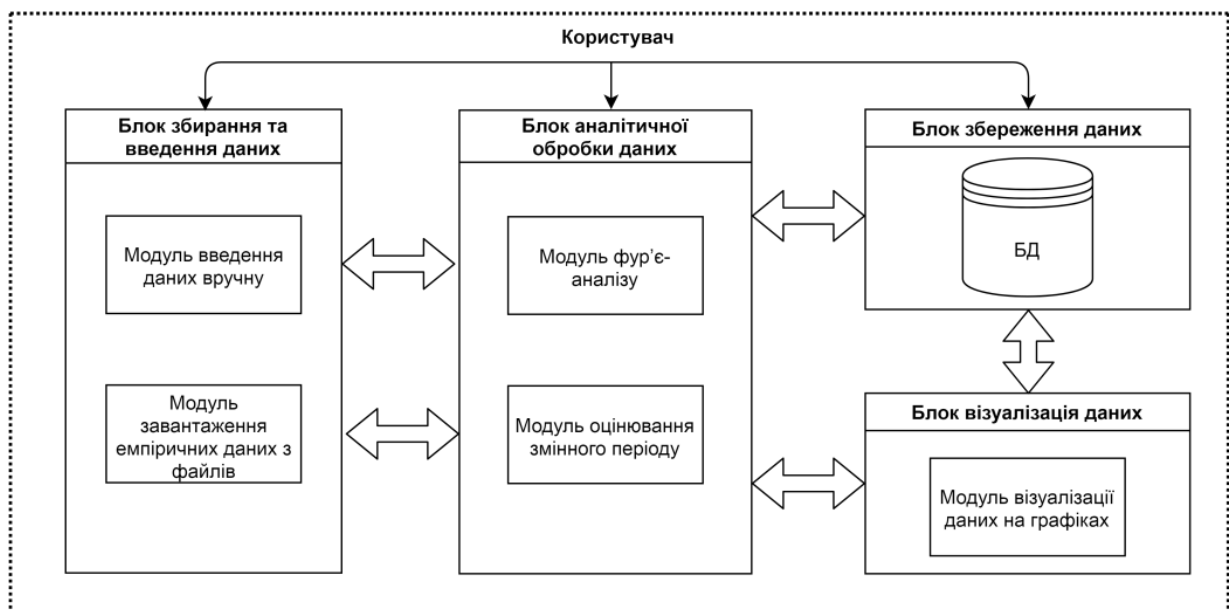


Рисунок 1.13 – Архітектура ІТ аналізу процесів зі змінним періодом

Сформулюємо основні завдання, що стосуються розробки інформаційної технології аналізу процесів зі змінним періодом, при умові, що він є відомим. А у випадку, коли змінний період є невідомим, як це має місце для ЕКГ після фізичного навантаження, це задача оцінки змінного періоду та її прикладне застосування в кардіологічних дослідженнях (медичній діагностиці загального призначення при оцінці стану організму, ефективності лікування чи реабілітаційного процесу).

Отже, основні завдання, вирішенню яких присвячена дана робота:

1. Провести загальне дослідження ПФЗП, як моделі періодичних процесів зі змінним періодом, навести приклади тригонометричних функцій зі змінним періодом, записати їх змінні періоди та дослідити властивості цих періодів.
2. Розробити способи аналітичного задання ПФЗП та записати їх змінні періоди.
3. Побудувати ортогональну систему тригонометричних функцій зі змінним періодом, дослідити інтервал ортогональності і на цій основі ввести скалярний добуток ПФЗП.
4. Розробити метод побудови рядів Фур'є ПФЗП та знайти амплітудний і фазовий спектри ПФЗП.
5. Перевірити правильність визначення коефіцієнтів та побудови ряду Фур'є на аналітично заданих ПФЗП.
6. Розробити метод оцінки змінного періоду для електрокардіограми, отриманої після фізичного навантаження, визначити параметри цієї оцінки та запропонувати їх як діагностичні ознаки варіабельності серцевого ритму після фізичного навантаження.
7. Створити інформаційну технологію аналізу процесів зі змінним періодом, яка містить пакет комп'ютерних програм Фур'є-аналізу ПФЗП та оцінки варіабельності серцевого ритму після дії на організм фізичного навантаження.



## Висновки до першого розділу

1. Виявлено, що крім періодичних процесів (період яких є постійним) існують процеси, для яких теж має місце повторюваність їх значень, однак період вже є змінним.
2. Проведено огляд моделей та методів аналізу періодичних (із постійним періодом) процесів, як складових інформаційної технології їх дослідження з метою, щоб досвід створення таких технологій перейняти до розробки інформаційних технологій аналізу процесів зі змінним періодом.
3. Встановлено неможливість використання відомих моделей та методів аналізу періодичних процесів, оскільки вони не дозволяють врахувати змінності періоду і більш повно описати процеси зі змінним періодом.
4. Обґрунтована необхідність створення інформаційної технології, що реалізує методи та алгоритми аналізу періодичних функцій зі змінним періодом, як моделі таких процесів та суттєво доповнить відомі універсальні системи Maple, Mathematica, Mathcad, MATLAB, що в свою чергу дозволить підвищити ступінь повноти подання інформації про процеси зі змінним періодом.
5. Сформульована задача побудови оцінки змінного періоду для ЕКГ, отриманої після фізичного навантаження, як процесу зі змінним періодом, розв'язання якої дозволить автоматизувати аналіз такої ЕКГ за рахунок використання параметрів оцінки як діагностичних ознак, та більш повно подати інформацію про стан серцево-судинної системи людини при дослідженні варіабельності серцевого ритму.

## РОЗДІЛ 2

### МОДЕЛЬ ПЕРІОДИЧНИХ ПРОЦЕСІВ ЗІ ЗМІННИМ ПЕРІОДОМ

Як відзначалося в першому розділі, крім періодичних функцій і випадкових процесів, період яких без будь-яких застережень вважається постійним, зустрічаються процеси (сигнали, емпіричні функції), для яких теж характерна періодичність, але при цьому її період вже не є постійним, а певним чином змінюється. Один із прикладів таких процесів – це ЕКГ, отримані після дії на організм певного збудника спокою, наприклад, фізичного навантаження. Подібні сигнали зустрічаються в механіці, акустиці.

Огляд літературних джерел показав, що результативним при дослідженні процесів зі змінним періодом є підхід, суть якого вкладається в тріаду «модель-алгоритм-програма» [131]. Основним в цьому підході, безумовно, є перший етап – побудова моделі, оскільки від адекватності об'єкта і його моделі залежить успішність розв'язку наступних задач тріади.

Щодо першого етапу – моделі процесів зі змінним періодом, то в [115] наведено означення функції зі змінним періодом. Для детермінованих періодичних процесів зі змінним періодом – це періодичної функції зі змінним періодом (ПФЗП), а для процесів із наявною в них випадковістю – періодичні процеси зі змінним періодом. В цій роботі основна увага приділяється лише ПФЗП. Наявність ПФЗП викликає найрізноманітніші питання і задачі щодо цих функцій. Розпочнемо зі змінного періоду і його властивостей.

#### 2.1 Змінний період та його властивості

Нагадаємо [115], що функція  $f(x)$ ,  $x \in I \subseteq R$ , називається функцією зі змінним періодом  $T(x) > 0$ , якщо для всіх  $x \in I$  таких, що  $x + T(x) \in I$ , виконується рівність

$$f(x) = f(x + T(x)). \quad (2.1)$$

Функція  $T(x)$ , яку називається змінним періодом, вважається диференційованою функцією. Вважатимемо надалі, що область визначення  $I = [a, b]$  в кожному конкретному випадку повинна уточнюватися, що буде зустрічатися нижче.

Приклад змінного періоду  $T(x)$  показано на рисунку 2.1. В точці  $x_1$  період функції  $f(x)$  дорівнює  $T(x_1)$ , тому значення функції в точках  $x_1$  і  $x_1 + T(x_1)$  рівні:  $f(x_1) = f(x_1 + T(x_1))$ . В точці  $x_2$  періодом є число  $T(x_2)$ , причому значення періоду  $T(x)$  в точках  $x_1$  і  $x_2$  різні:  $T(x_1) > T(x_2)$ .

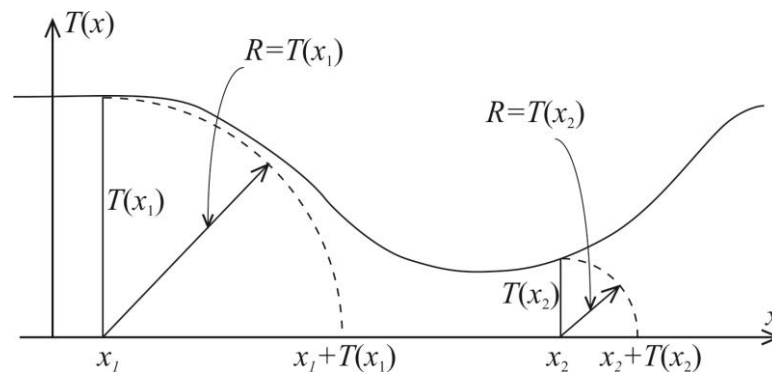


Рисунок 2.1 – Графік функції змінного періоду  $T(x)$

Відомо, що для періодичної функції  $g(x)$  з постійним періодом  $T$  виконується рівність  $g(x) = g(x+T) = g(x-T)$ . Нескладні міркування, зокрема звернення до рисунку 2.1, показують, що для функції  $f(x)$  зі змінним періодом  $T(x)$  аналогічна рівність  $f(x) = f(x+T(x)) = f(x-T(x))$  в загальному не виконується. Тому для випадку, коли аргумент  $x$  зменшується, змінний період повторюваності функції  $f(x)$  позначимо через  $T^-(x)$ . При цьому, якщо  $x$  і  $x - T^-(x)$  належать області визначення  $I$ , то  $f(x) = f(x - T^-(x))$ .

Зауважимо, що між періодами  $T(x)$  і  $T^-(x)$  існує взаємозв'язок, що виражається формулами

$$T(x) = T^-(x + T(x)), \quad (2.2)$$

$$T^-(x) = T(x - T^-(x)).$$

Функція  $T(x)$ , як змінний період функції  $f(x)$ , повинна задовольняти певним умовам. Як було сказано у визначенні, вона повинна бути неперервною. Неважко також показати, що її похідна повинна бути більшою за  $-1$ :  $T'(x) > -1$ . Дійсно, оскільки  $x + \Delta x > x$ , то для відповідних точок  $x + T(x)$  і  $x + \Delta x + T(x + \Delta x)$ , взятих через період, теж повинна виконуватися нерівність  $x + \Delta x + T(x + \Delta x) > x + T(x)$  або  $T(x + \Delta x) - T(x) > -\Delta x$ . З останньої нерівності випливає, що  $\frac{T(x + \Delta x) - T(x)}{\Delta x} > -1$ . При граничному переході отримуємо, що для змінного періоду  $T(x)$  його похідна

$$T'(x) > -1, x \in I. \quad (2.3)$$

Із (2.3) видно, що коли на певних інтервалах період  $T(x)$  спадає, то це спадання повинно відбуватися більш повільно, ніж спадання функції  $y(x) = -x$ . Виявлення інших властивостей змінного періоду  $T(x)$  потребує окремих досліджень

## 2.2 Тригонометричні функції зі змінним періодом та їх змінні періоди

Наявність визначення ПФЗП викликає питання прикладів задання таких функцій аналітично, тобто у вигляді формули. Для цього скористаємося найпростішими періодичними функціями з постійним періодом – тригонометричними функціями  $\sin t$  та  $\cos t$ . Якщо для даних функцій зробити заміну аргумента  $t = x^\alpha$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\alpha \neq 1$ , то тригонометричні функції  $\sin x^\alpha$ ,  $\cos x^\alpha$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\alpha \neq 1$ ,  $x \in I$ , будуть періодичними, але їх періоди вже будуть змінними. Область визначення  $I$  кожної із цих функцій залежить від значення  $\alpha$  та парності функції, і може бути одним із інтервалів  $[0, \infty)$  або  $(-\infty, \infty)$ . Для спрощення деяких міркувань будемо вважати, що  $I = [0, \infty)$ .

Наведемо приклади найпростіших тригонометричних функцій зі змінним періодом. На рисунку 2.2 зображена функція  $f_1(x) = \sin x^{3/4}$ ,  $x \geq 0$ , (неперервна лінія), та для порівняння функція  $f_2(x) = \sin x$  (пунктирна лінія).

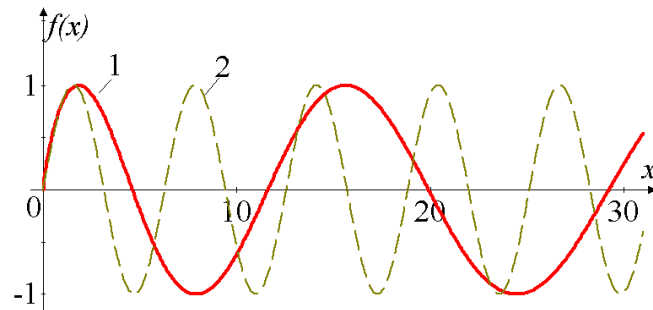


Рисунок 2.2 – Функції  $f_1(x) = \sin x^{3/4}$  (1),  $f_2(x) = \sin x$  (2)

Аналізуючи графіки, видно, що функція  $f_1(x) = \sin x^{3/4}$ ,  $x \geq 0$ , із зростанням аргументу «розтягується», тобто її період збільшується. На відрізку  $[0,30]$  для цієї функції вкладається два періодичних коливання, для функції  $\sin x$  на цьому ж інтервалі розміщується більше чотирьох коливань.

Для тригонометричних функцій  $\sin x^\alpha$  та  $\cos x^\alpha$ ,  $\alpha > 0$ ,  $x \geq 0$  їх змінні періоди  $T_\alpha(x)$  та  $T_\alpha^-(x)$  визначаються наступним чином:

$$T_\alpha(x) = -x + (x^\alpha + 2\pi)^\alpha, \quad x \geq 0. \quad (2.4)$$

$$T_\alpha^-(x) = x - (x^\alpha - 2\pi)^\alpha, \quad x \in [T(0), \infty). \quad (2.5)$$

До цього твердження зробимо деякі зауваження.

✓ Наявність індексу  $\alpha$  у виразах для змінних періодів  $T_\alpha(x)$  та  $T_\alpha^-(x)$  вказує на їх залежність від  $\alpha$ , і коли не виникає непорозумінь, індекс  $\alpha$  іноді може опускатися.

✓ Якщо у виразах змінного періоду (2.4) і (2.5) параметр  $\alpha = 1$ , то легко бачити, що в цьому частинному випадку періоди набувають значень  $T_1(x) = 2\pi$  і  $T_1^-(x) = 2\pi$ , тобто отримуємо період функцій  $\sin x$  і  $\cos x$ .

✓ Умова  $x \in [T(0), \infty)$  у виразі (2.5) означає наступне: коли рухатися вздовж осі  $OX$  в сторону зменшення аргументу  $x$ , то враховуючи, що для функцій  $\sin x^\alpha$  і  $\cos x^\alpha$  їх область визначення  $I = [0, \infty)$ , для значень аргументу  $x$ , таких, що  $0 \leq x \leq T(0)$ , не існує точок зліва від них, в яких би значення функцій  $\sin x^\alpha$  і  $\cos x^\alpha$  повторювалися через період  $T_\alpha^-(x)$ .

Розглянемо питання змінних періодів функції  $f(x) = \sin x^{3/4}$ .

Дана функція є періодичною зі змінним періодом, про що свідчать результати наступних обчислень: нехай  $x_1 = 5$ , тоді значення функції в цій точці  $f(5) = \sin 5^{3/4} \approx -0,201$ , а значення змінного періоду в точці  $x_1 = 5$  знайдемо за формулою (2.4)  $T(5) \approx 15,479$ . Наступна точка через період  $x_2 = 5 + 15,479 = 20,479$ , значення функції  $f(20,479) \approx -0,201$ , а це вказує на періодичність функції  $f(x) = \sin x^{3/4}$  через період, який визначається залежністю (2.4). Щоб переконатись в правильності цього твердження, знайдемо ще одну точку, для цього обчислимо період в точці  $x_2$   $T(20,479) \approx 19,536$ , тоді значення функції при  $x_3 = 20,479 + 19,536 = 40,015$ ,  $f(40,015) \approx -0,201$ .

Враховуючи (2.4) і (2.5), її зміні періоди

$$T(x) = -x + \left(x^{3/4} + 2\pi\right)^{4/3}, \quad x \in [0, \infty),$$

$$T^-(x) = x - \left(x^{3/4} - 2\pi\right)^{4/3}, \quad x \in [T(0), \infty).$$

Оскільки  $T(0) = 11,594$ , то останній вираз ще можемо записати у вигляді  $T^-(x) = x - \left(x^{3/4} - 2\pi\right)^{4/3}$ ,  $x \geq (2\pi)^{4/3} \approx 11,594$ . Графіки цих періодів показані на рисунку 2.3. Для порівняння подано також період функції  $\sin x$ , тобто  $T(x) = T = 2\pi$ .

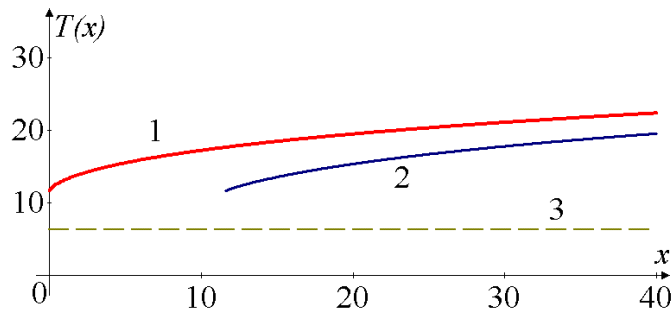


Рисунок 2.3 – Графік змінних періодів для функції  $\sin x^{3/4}$ :

$$T(x) = -x + \left(x^{3/4} + 2\pi\right)^{4/3} \quad (1), \quad T^-(x) = x - \left(x^{3/4} - 2\pi\right)^{4/3}, \quad x \geq (2\pi)^{4/3} \approx 11,594 \quad (2),$$

та графік періоду  $T = 2\pi$  для функції  $\sin x$  (3)

Поведінка періодів  $T(x)$  та  $T^-(x)$  підтверджує проведений вище аналіз поведінки самої функції  $\sin x^{3/4}$ . Так в точці  $x=0$  період  $T(0) \approx 11,594$ , для  $x=15$  період  $T(15) \approx 18,427$ , що перевищує значення  $T(0)$  і свідчить про його зростання. Період  $T^-(15) \approx 13,519$ , є меншим, ніж  $T(15) \approx 18,427$ . Це є підтвердженням поведінки самої функції  $\sin x^{3/4}$ : в сторону зростання аргументу вона «розтягується», в сторону зменшення – «стискається».

Вище було наведено твердження, згідно якого між періодами  $T(x)$  і  $T^-(x)$  існує взаємозв'язок, що виражається формулами (2.2). Покажемо правильність цього твердження для змінних періодів тригонометричних функцій  $\sin x^\alpha$  та  $\cos x^\alpha$ ,  $\alpha > 0$ ,  $x \geq 0$ , для яких змінні періоди  $T_\alpha(x) = -x + (x^\alpha + 2\pi)^{1/\alpha}$ ,  $x \geq 0$ , та  $T_\alpha^-(x) = x - (x^\alpha - 2\pi)^{1/\alpha}$ ,  $x \geq (2\pi)^{1/\alpha}$ .

Перевіримо рівність (2.2), підставивши у вираз  $T^-(x + T(x))$  змінний період  $T(x) = -x + (x^\alpha + 2\pi)^{1/\alpha}$ , маємо

$$\begin{aligned} T^-(x + T(x)) &= T^-\left(x - x + (x^\alpha + 2\pi)^{1/\alpha}\right) = T^-\left((x^\alpha + 2\pi)^{1/\alpha}\right) = \\ &= (x^\alpha + 2\pi)^{1/\alpha} - \left[\left((x^\alpha + 2\pi)^{1/\alpha}\right)^\alpha - 2\pi\right]^{1/\alpha} = (x^\alpha + 2\pi)^{1/\alpha} - (x^\alpha + 2\pi - 2\pi)^{1/\alpha} = \\ &= (x^\alpha + 2\pi)^{1/\alpha} - x = -x + (x^\alpha + 2\pi)^{1/\alpha} = T(x). \end{aligned}$$

Таким чином рівність  $T(x) = T^-(x + T(x))$  виконується. Аналогічно можна показати виконання рівності  $T^-(x) = T(x - T^-(x))$ .

Розглянемо приклад функції  $\sin x^\alpha$  для випадку, коли  $\alpha > 1$ . Нехай  $\alpha = \frac{4}{3}$ , при цьому функція  $f(x) = \sin x^{\frac{4}{3}}$ . Графік цієї функції та для порівняння функції  $\sin x$  наведені на рис. 2.4, а змінні періоди цієї функції  $T(x) = -x + \left(x^{\frac{4}{3}} + 2\pi\right)^{\frac{3}{4}}$ ,  $T^-(x) = x - \left(x^{\frac{4}{3}} - 2\pi\right)^{\frac{3}{4}}$ , та період  $T(x) = T = 2\pi$  функції  $\sin x$  показані на рис. 2.5.

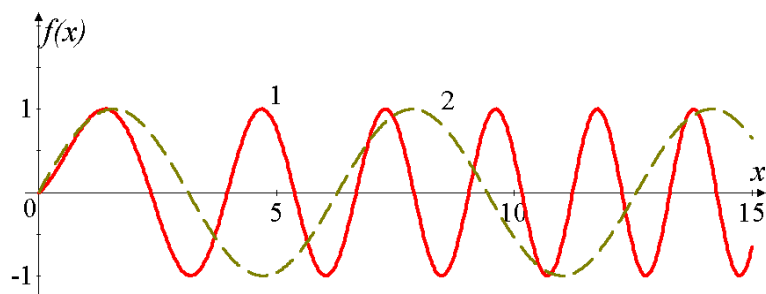


Рисунок 2.4 – Графік функцій  $\sin x^{\frac{4}{3}}$  (1) та  $\sin x$  (2)

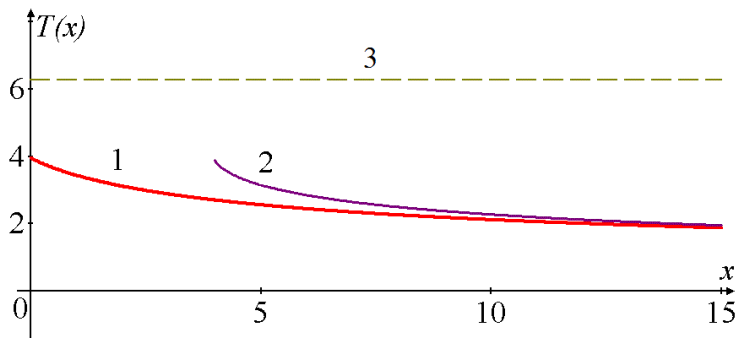
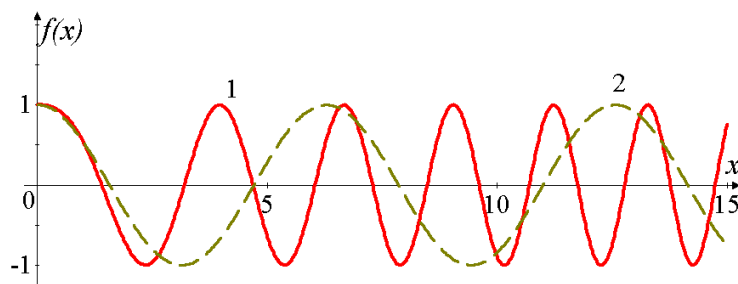
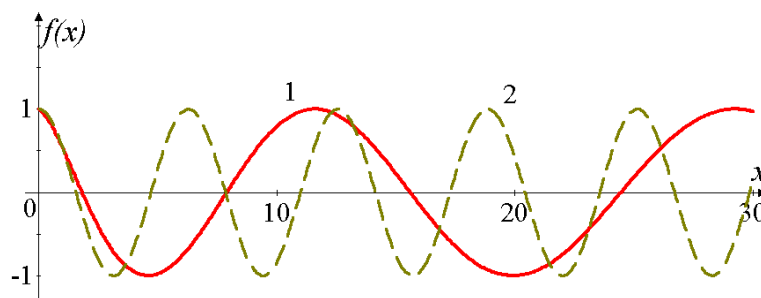


Рисунок 2.5 – Графік періодів  $T(x) = -x + \left(x^{\frac{4}{3}} + 2\pi\right)^{\frac{3}{4}}$ ,  $x \geq 0$  (1);

$T^- = x - \left(x^{\frac{4}{3}} - 2\pi\right)^{\frac{3}{4}}$ ,  $x \geq (2\pi)^{\frac{3}{4}} \approx 3,968$  (2), період  $T = 2\pi$  для функції  $\sin x$  (3)

Подібною до поведінки функцій  $\sin x^{\frac{3}{4}}$  і  $\sin x^{\frac{4}{3}}$  та їх періодів буде поведінка функцій  $\cos x^{\frac{4}{3}}$  і  $\cos x^{\frac{3}{4}}$  та їх періодів (рис. 2.6, 2.7).



Рисунок 2.6 – Графік функцій  $\cos x^{4/3}$  (1) та  $\cos x$  (2)Рисунок 2.7 – Графік функцій  $\cos x^{3/4}$  (1) та  $\cos x$  (2)

Функції  $\sin x^\alpha$  та  $\cos x^\alpha$ ,  $\alpha > 0$ ,  $x \geq 0$ , можуть бути використані як база утворення ортогональних тригонометричних систем зі змінним періодом. Це питання буде розглядатися в наступному розділі.

Крім тригонометричних функцій зі змінним періодом  $\sin x^\alpha$ ,  $\cos x^\alpha$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\alpha \neq 1$ ,  $x \in I$ , періодичними зі змінними періодами будуть функції

$$\operatorname{tg} x^\alpha, \operatorname{ctg} x^\alpha, \dots \quad (2.6)$$

їх змінні періоди

$$\begin{aligned} T_\alpha^+(x) &= -x + (x^\alpha + \pi)^{1/\alpha}, \quad x \in [0, \infty), \\ T_\alpha^-(x) &= x - (x^\alpha - \pi)^{1/\alpha}, \quad x \in [T(0), \infty). \end{aligned} \quad (2.7)$$

На рис. 2.8 зображено графік функції  $\operatorname{tg} x^{13/16}$  (неперервні лінії) та для порівняння графік функції  $\operatorname{tg} x$  (штрих-пунктирні лінії). Із рисунка видно, що зі збільшенням аргументу функція  $\operatorname{tg} x^{13/16}$ , в порівнянні із функцією  $\operatorname{tg} x$ ,

розтягується, тобто її періоди є зростаючими функціями. Про це свідчить поведінка періодів цієї функції, знайдених на основі формул (2.7)

$$T(x) = -x + \left(x^{13/16} + \pi\right)^{16/13}, \quad x \geq 0,$$

$$T^-(x) = x - \left(x^{13/16} - \pi\right)^{16/13}, \quad x \in [T(0) \approx 4.092, \infty),$$

Графіки цих періодів подані на рисунку 2.9 і для порівняння період  $T = \pi$  функції  $\operatorname{tg} x$ .

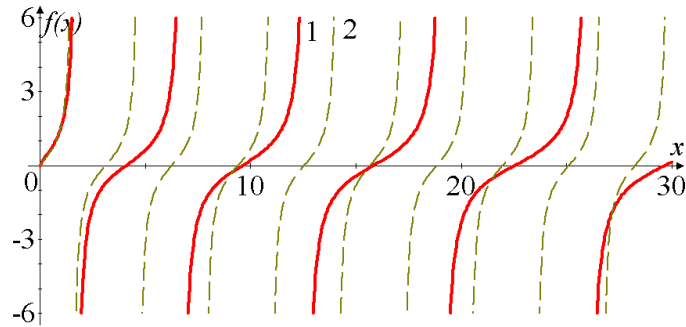


Рисунок 2.8 – Графіки функцій  $\operatorname{tg} x^{13/16}$  (1) та  $\operatorname{tg} x$  (2)

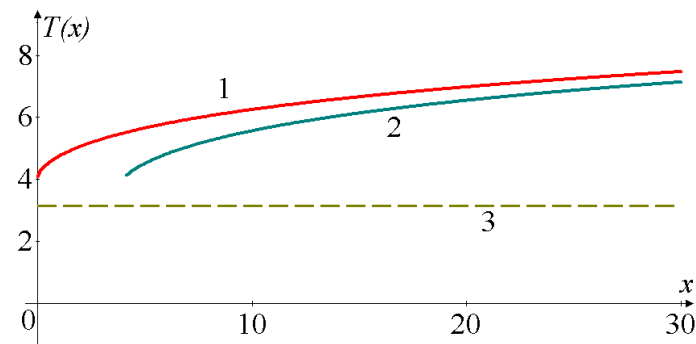


Рисунок 2.9 – Графіки змінних періодів для функції  $\operatorname{tg} x^{13/16}$ :  $T(x)$ ,  $x \geq 0$  (1),

$T^-(x)$ ,  $x \in [4.092, \infty)$  (2). Період  $T(x) = \pi$  (3) для функції  $\operatorname{tg} x$

Розглянемо ще тригонометричну функцію  $\operatorname{tg} x^\alpha$ ,  $x \geq 0$  при  $\alpha > 1$ , наприклад,  $\alpha = 7/5$ . На рис. 2.10 зображено графік функції  $f(x) = \operatorname{tg} x^{7/5}$  та для порівняння графік функції  $\operatorname{tg} x$ .

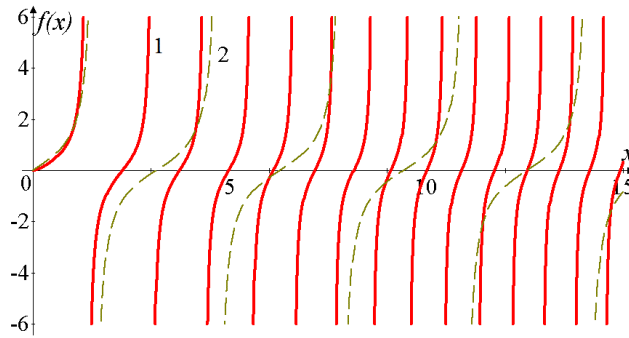


Рисунок 2.10 – Графіки функцій  $tg x^{7/5}$  (1) та  $tg x$  (2)

Для функції  $tg x^{7/5}, x \geq 0$ , її зміні періоди  $T(x) = -x + (x^{7/5} + \pi)^{5/7}, x \in [0, \infty)$ ,  $T^-(x) = x - (x^{7/5} - \pi)^{5/7}$  графіки яких подані на рис. 2.11. Для порівняння показано також графік періоду  $T(x) = T = \pi$  функції  $tg x$ .

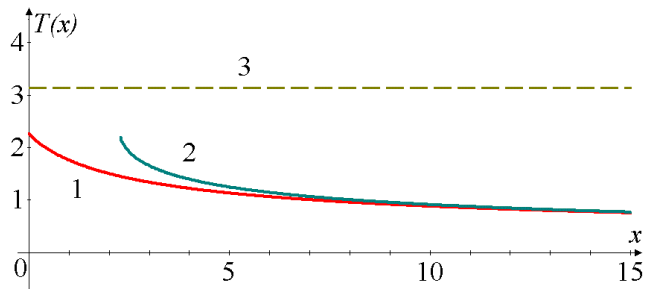


Рисунок 2.11 – – Графіки змінних періодів для функції  $tg x^{7/5}: T(x), x \geq 0$ , (1),  $T^-(x)$  (2); графік періоду  $T(x) = \pi$  (3)

Подібною до поведінки функцій  $tg x^\alpha$  буде поведінка функцій  $ctg x^\alpha$  при  $\alpha = 3/5$  та  $\alpha = 5/3$  відповідно (рис. 2.12, 2.13).

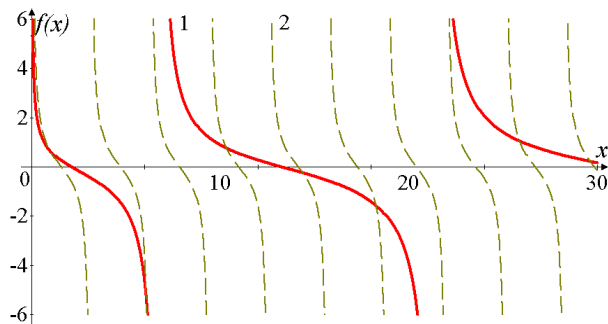


Рисунок 2.12 – Графіки функцій  $ctg x^{3/5}$  (1) та  $ctg x$  (2)

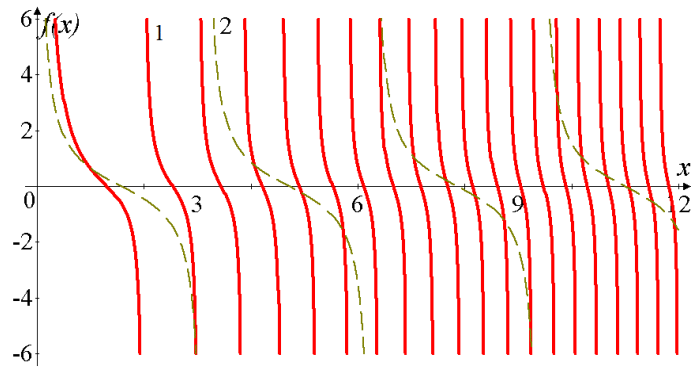


Рисунок 2.13 – Графіки функцій  $ctg x^{5/3}$  (1) та  $ctg x$  (2)

Отже, найпростішими функціями зі змінним періодом є тригонометричні функції

$$\sin x^\alpha, \cos x^\alpha, tg x^\alpha, ctg x^\alpha, \alpha > 0, \alpha \neq 1, x \geq 0. \quad (2.8)$$

Для цих функцій характерними є декілька особливостей, зокрема:

- має місце повторюваність їх значень, тобто спостерігається своєрідна періодичність;
- при значеннях аргументу  $\alpha$  таких, що  $0 < \alpha < 1$ , ці функції із збільшенням аргументу  $x$  «розтягуються», тобто періоди їх повторюваності є зростаючими функціями;
- якщо  $\alpha > 1$ , графіки цих функції із зростанням аргументу «стискаються», тобто періоди їх повторюваності є спадними функціями;
- в частинному випадку, коли  $\alpha = 1$ , отримаємо добре відомі функції  $\sin x, \cos x, tg x, ctg x$ , періоди яких є постійними: для функцій  $\sin x$  і  $\cos x$  період  $T = 2\pi$ , для  $tg x$  і  $ctg x$  період  $T = \pi$ .

### 2.3 Способи задання періодичних функцій зі змінним періодом

Орієнтуючись на розгляд основної задачі цієї роботи – побудову рядів Фур'є ПФЗП, виникне питання перевірки правильності їх побудови. Один із методів перевірки полягає у побудові ряду Фур'є для аналітично заданої функції

і порівняння цього ряду із самою функцією. При цьому важливою необхідною умовою можливості такої перевірки є наявність аналітично заданих ПФЗП, відмінних від розглянутих вище тригонометричних функцій зі змінним періодом.

Для розробки способів задання ПФЗП цілком природно скористатися способами задання періодичних функцій з постійним періодом. Для цього спочатку проведемо аналіз існуючих способів задання періодичних функцій з постійним періодом.

### 2.3.1 Способи задання періодичних функцій з постійним періодом

Аналіз літературних джерел, зокрема [19, 39, 62], показує, що для задання періодичних функцій з постійним періодом в основному використовують три різновидності способів (методів, підходів). Це графічно-описові способи [19, с.23-25], аналітичні способи, метод «зсуву» [19, с. 34].

Графічний спосіб в основному використовується в літературі технічного спрямування. Для прикладу звернемось до добре відомої спеціалістам із радіотехніки роботи [39]. На сторінці 23 цієї книги функція, що має форму періодичних коливання прямокутної форми, задається у вигляді графіка, із якого видно, що на проміжку  $[-T/2, 0)$  функція приймає значення  $-1$ , на проміжку  $[0, -T/2)$  – значення  $1$ . При цьому вказується, що за межами інтервалу  $[-T/2, T/2)$  графік функції продовжується періодично. Аналогічно задаються періодичні коливання пилоподібної форми [39, с.25], періодичні коливання уніполярних імпульсів [39, с.25], періодична послідовність прямокутних імпульсів із великою скважністю [39, с.26] (скважність – відношення  $T/\tau_1$ , де  $T = \tau_1 + \tau_0$  – період прямокутних імпульсів,  $\tau_1$  – інтервал, на якому функція приймає значення  $1$ ,  $\tau_0$  – інтервал, на якому функція приймає значення  $0$ ).

Способи аналітичного задання періодичних функцій – це певним чином побудована суперпозиція спеціально підібраних функцій. Серед функцій, що входять в суперпозицію, можуть бути тригонометричні функції, деякі

елементарні функції, зокрема показникова і степенева функції. Використовуються також функції, що вже не відносяться до класу елементарних функцій. Це:

a) модуль функції  $f$ , тобто  $|f|$ ;

b) знак (сигнум) функції:  $sign f = \begin{cases} 1, & f > 0, \\ 0, & f = 0, \\ -1, & f < 0. \end{cases}$ ;

c) дробова частина функції:  $\{f\} = f - [f]$ , де  $[f]$  – ціла частина.

Наведемо приклади аналітичного задання періодичних функцій (з постійним періодом).

a) Тригонометричні функції  $\sin x, \cos x, tg x, ctg x$ . Найбільш використовують перші дві із цих функцій –  $\sin x$  та  $\cos x$  або їх узагальнення  $A \sin(\omega x + \varphi)$  та  $A \cos(\omega x + \varphi)$ .

b) Скінчений тригонометричний ряд (поліном)  
 $f(x) = \sum_{k=1}^n a_k \cos kx + b_k \sin kx$ . Коефіцієнтами цього ряду можуть бути коефіцієнти Фур'є деякої функції  $g(x)$ , або ж взяті довільно, причому  $|a_1| + |b_1| > 0$ .

c) Показникова функція:  $f(x) = a^{g(x)}$ , де  $a > 0$ ,  $g(x)$  – тригонометрична функція, найчастіше  $g(x) = \sin x$  або  $g(x) = \cos x$ .

Наприклад, для  $a = 2$  і  $g(x) = \sin x$  графік функції  $f(x) = 2^{\sin x}$  поданий на рисунку 2.14, її період  $T = 2\pi$ .

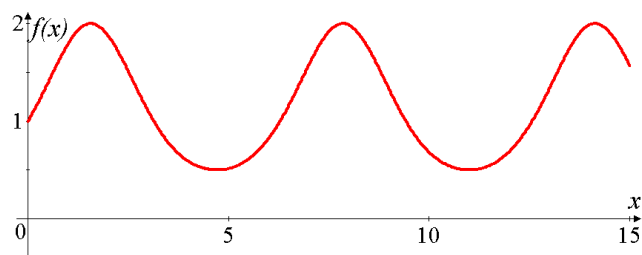


Рисунок 2.14 – Графік функції  $f(x) = 2^{\sin x}$

d) Степенева функція:  $f(x) = (g(x))^a$ ,  $a > 0$ ,  $g(x)$  – тригонометрична функція

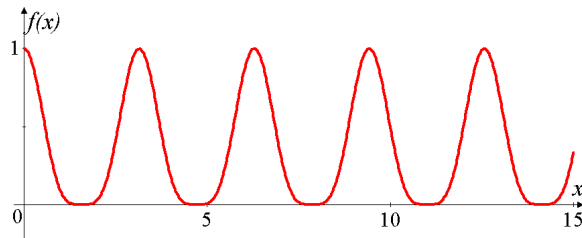


Рисунок 2.15 – Графік функції  $f(x) = (\cos x)^4$

e) Модуль функції  $f(x) = |g(x)|$ , де  $g(x)$  – тригонометрична функція. В більш загальному випадку  $f(x) = h(|g(x)|)$ ,  $h(\bullet) \in$  неперервна функція.

Наприклад,  $f(x) = |\sin x|$  (рис. 2.16). Період цієї функції  $T = \pi$ .

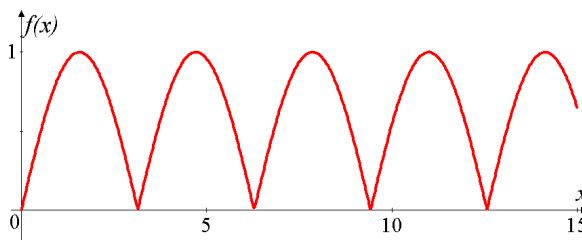


Рисунок 2.16 – Графік функції  $|\sin x|$

f) Знак (сигнум) функції:  $f(x) = \text{sign } g(x)$ ,  $g(x)$  – тригонометрична функція. Наприклад, функція  $f(x) = \text{sign}(\sin x)$ . Її графік (рис. 2.17) – це періодичні з періодом  $T = 2\pi$  коливання прямокутної форми (меандр) [19].

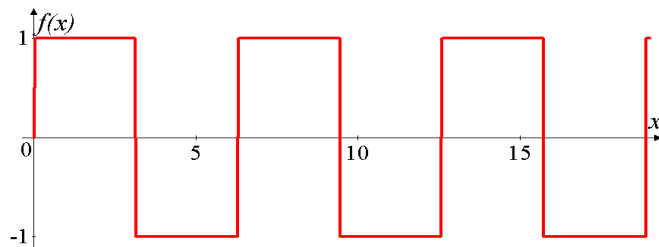


Рисунок 2.17 – Графік функції  $f(x) = \text{sign}(\sin x)$

g) Дробова частина функції:  $f(x) = g(\{x\})$ , де  $g(\bullet)$  – неперервна зростаюча (спадна) функція,  $\{x\}$  – дробова частина числа (аргумента)  $x$ .

Якщо  $g(x) = x, x \in (-\infty, \infty)$ , то прикладом такої функції є:  $f(x) = \{x\} = x - [x]$ . Графік цієї функції – це періодичні з періодом  $T = 1$  коливання пилкоподібної форми (рис. 2.18), добре відомі в електро- та радіотехніці [39].

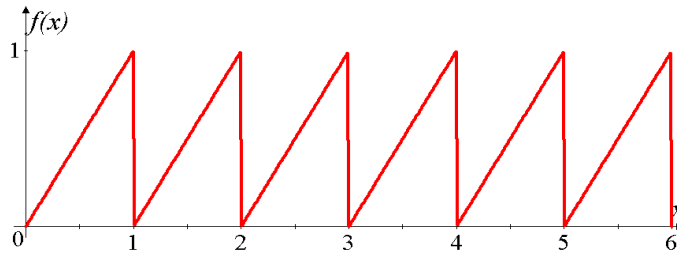


Рисунок 2.18 – Графік функції  $f(x) = \{x\}$

Періодичні функції можна також отримувати із вже побудованих шляхом їх певних перетворень. Це може бути розтяг чи стиснення вздовж осей  $Ox$  і  $Oy$  та зсув по осі  $Ox$  вправо чи вліво, по осі  $Oy$  – вверх, вниз.

Для цього випадку розглянемо функцію  $f(x) = 1 - \{x\}^a, a \neq 0$ . Для  $a = 4$  графік функції  $1 - \{x\}^4$  зображений на рисунку 2.19, її період  $T = 1$ .

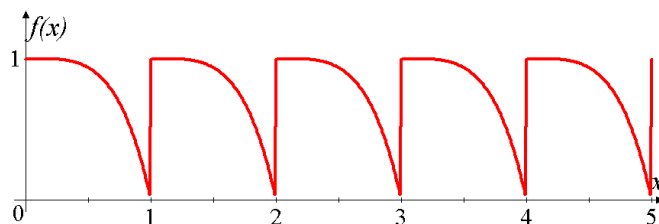


Рисунок 2.19 – Графік функції  $f(x) = 1 - \{x\}^4$

Функція  $f(x) = \{x\}^2$ , але розтягнута вздовж осі  $Ox$  в два рази, стиснута по осі  $Oy$  в два рази та піднята по цій же осі на  $\frac{1}{2}$  приймає вигляд:



$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} x \right\}^2$ . Графік цієї функції зображений на рисунку 2.20, її період  $T = 2$ .

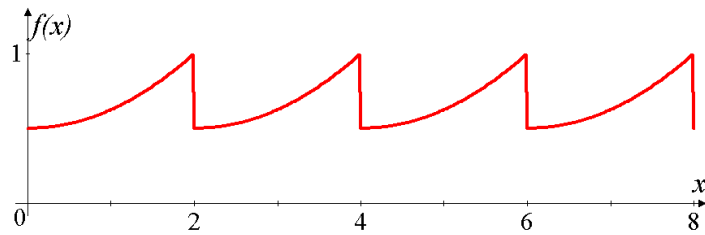


Рисунок 2.20 – Графік функції  $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} x \right\}^2$

Функція  $f(x) = a \left( \frac{1}{b} \{x\} \right)$ ,  $b > 0$ ,  $b \neq 0$ . Для  $a = 2$ ,  $b = 2$  графік функції  $f(x) = 2 \left( \frac{1}{2} \{x\} \right)$  наведений на рисунку 2.21, її період  $T = 1$ .

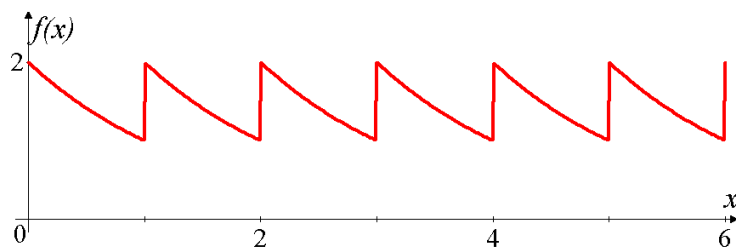


Рисунок 2.21 – Графік функції  $f(x) = 2 \left( \frac{1}{2} \{x\} \right)$

Ще один із способів задання періодичних функцій – це графічний спосіб в поєднанні із оператором зсуву. Про цей спосіб йдеться в підручнику [19, с. 34], випущеному під редакцією Колмогорова: «... для побудови графіка періодичної функції з періодом  $T$  достатньо провести побудову на відрізку  $[0, T)$  і потім отриману криву **паралельно перенести** на віддаль  $nT$ ,  $n = \pm 1, \pm 2, \dots$ , вправо і вліво вздовж осі  $Ox$ ». Проте яким чином здійснити таке перенесення, в [19] не вказується.

Зауважимо, що реалізація алгоритму зсуву (паралельного перенесення) можлива лише із залученням теорії рядів Фур'є. Якщо функція  $f(x)$  і її ряд Фур'є співпадають на відрізку  $[0, T)$ , то в силу того, що ряд Фур'є є періодичним, тим самим періодично продовжується і сама функція  $f(x)$ . Якщо ж функція і її ряд

Фур'є відмінні на деякій множині точок відрізка  $[0, T]$ , то, звичайно, що періодично продовжується не сама функція, а лише її ряд Фур'є. Цю ж точку зору щодо отримання періодичних функцій шляхом паралельного переносу зустрічаємо, наприклад, в [140, с. 29]: «... говорити про ряд Фур'є для  $f(x)$ , заданої на  $[-\pi, \pi]$  – це все одно, що говорити про ряд Фур'є для функції, отриманої із  $f(x)$  **періодичним продовженням** її на всю вісь  $Ox$ ».

### 2.3.2 Способи задання періодичних функцій зі змінним періодом

Для побудови способів задання ФЗП будемо використовувати підходи, в деякій мірі подібні до розглянутих вище способів отримання періодичних функцій (із постійним періодом). Відмінність полягає в тому, що замість «звичайних» тригонометричних функцій використовуються тригонометричні функції зі змінним періодом, а лінійні функції, що входять в «суперпозицію», замінюються деякими нелінійними функціями:

а) Розглянуті вище тригонометричні функції  $\sin x^\alpha$ ,  $\cos x^\alpha$ ,  $tg x^\alpha$ ,  $ctg x^\alpha$ ,  $\alpha > 0, \alpha \neq 1$ . Найбільш використовують перші дві із цих функцій –  $\sin x^\alpha$  та  $\cos x^\alpha$  або їх узагальнення  $A \sin(kx^\alpha + \phi)$  та  $A \cos(kx^\alpha + \phi)$ .

б) Скінчений тригонометричний ряд (поліном)  

$$f(x) = \sum_{k=1}^n a_k \cos kx^\alpha + b_k \sin kx^\alpha$$
. Коефіцієнтами цього ряду можуть бути коефіцієнти Фур'є деякої функції  $g(x)$ , або ж взяті довільно, причому  $|a_k| + |b_k| > 0$ .

в) Показникова функція:  $f(x) = a^{g(x)}$ , де число  $a > 0$ ,  $g(x)$  – тригонометрична функція зі змінним періодом, найчастіше  $g(x) = \sin x^\alpha, \alpha > 0, \alpha \neq 1$ , або  $g(x) = \cos x^\alpha$ .

г) Степенева функція:  $f(x) = (g(x))^a$ , де  $a > 0$ ,  $g(x)$  – тригонометрична функція зі змінним періодом.

д) Модуль функції:  $f(x) = |g(x)|$ ,  $g(x)$  – тригонометрична функція зі змінним періодом.

f) Знак (сигнум) функції:  $f(x) = \text{sign } g(x)$ ,  $g(x)$  – тригонометрична функція зі змінним періодом.

g) Дробова частина:  $f(x) = \{g(x)\}^\alpha$ , де  $a > 0$ ,  $\{\bullet\}$  – дробова частина,  $g(x)$  – деяка нелінійна, неперервно зростаюча (спадна) функція.

h) Трансформація функцій зі змінним періодом. Розглянуті вище приклади (способи) отримання функцій зі змінним періодом можуть бути узагальнені шляхом застосування до них певних перетворень. В першу чергу це стосується найпростіших перетворень:

- паралельний перенос (зсув) вздовж осі ординат:  $f(x) \rightarrow f(x) + a$ ;
- паралельний перенос (зсув) вздовж осі абсцис:  $f(x) \rightarrow f(x + b)$ ;
- стиснення (розтяг) вздовж осі абсцис:  $f(x) \rightarrow f(kx)$ ;
- стиснення (розтяг) вздовж осі ординат:  $f(x) \rightarrow Af(x)$ .

## 2.4 Приклади аналітичного задання періодичних функцій зі змінним періодом та їх графічне зображення

**Приклад 1.** Тригонометричні функції  $\sin x^\alpha$ ,  $\cos x^\alpha$ ,  $\text{tg } x^\alpha$ ,  $\text{ctg } x^\alpha$ ,  $\alpha > 0, \alpha \neq 1$ .

Для функції  $\sin x^{5/7}$  (рис. 2.22) її змінний період  $T(x) = -x + \left(x^{5/7} + 2\pi\right)^{7/5}$  показаний на рисунку 2.24 (неперервний графік) та для порівняння зображено період  $T = 2\pi$  (пунктирна лінія).

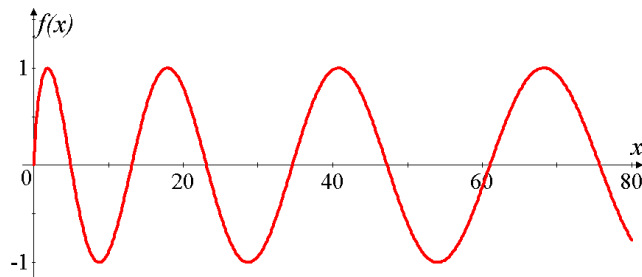


Рисунок 2.22 – Графік функції  $f(x) = \sin x^{5/7}$

**Приклад 2.** Тригонометричний ряд (поліном)

$f(x) = \sum_{k=1}^n a_k \cos kx^\alpha + b_k \sin kx^\alpha$ ,  $\alpha > 0, \alpha \neq 1$ , де  $a_k, b_k$  – довільні числа,

$\sum_k |a_k| + |b_k| > 0$ . Нехай  $\alpha = 7/5$ . Підібравши певним чином коефіцієнти, ряд

$f(x) = 2 \sin x^{7/5} + \frac{5}{12} \sin 3x^{7/5} + \frac{1}{11} \sin 5x^{7/5}$  задає послідовність трапецеєвидних

імпульсів (рис. 2.23). Для цього ряду його змінний період  $T(x) = -x + (x^{7/5} + 2\pi)^{5/7}$  показаний на рисунку 2.24 (штрих-пунктирний графік).

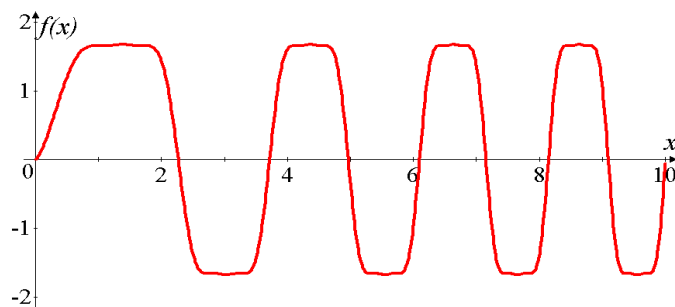


Рисунок 2.23 – Графік функції  $f(x) = 2 \sin x^{7/5} + \frac{5}{12} \sin 3x^{7/5} + \frac{1}{11} \sin 5x^{7/5}$

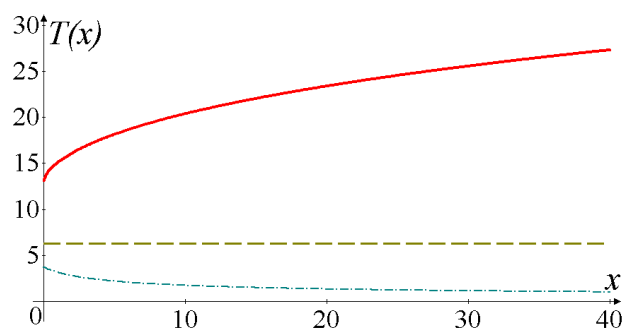


Рисунок 2.24 – Графіки періодів:  $T(x) = -x + (x^{5/7} + 2\pi)^{7/5}$  (суцільна лінія);

$T(x) = -x + (x^{7/5} + 2\pi)^{5/7}$  (штрих-пунктирна лінія);  $T(x) = T = 2\pi$  (пунктирна)

**Приклад 3.** Показникова функція  $f(x) = a^{g(x)}$ , де число  $a > 0$ ,  $g(x)$  – тригонометрична функція зі змінним періодом, найчастіше  $g(x) = \sin x^\alpha$ ,  $\alpha > 0, \alpha \neq 1$ , або  $g(x) = \cos x^\alpha$ .

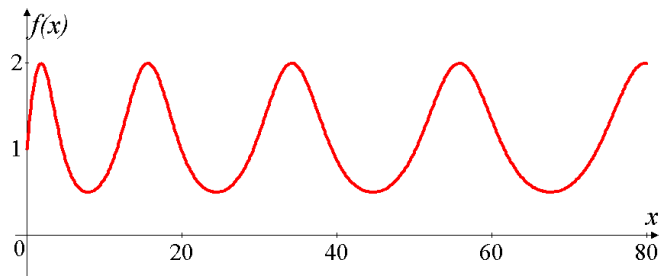


Рисунок 2.25 – Графік функції  $f(x) = 2^{\sin x^{3/4}}$

**Приклад 4.** Степенева функція:  $f(x) = (g(x))^a$ , де  $a > 0$ ,  $g(x)$  – тригонометрична функція, наприклад  $f(x) = \left(\sin x^{4/3} + \frac{1}{2}\right)^2$  (рис. 2.26), її змінний період  $T(x) = -x + \left(x^{4/3} + 2\pi\right)^{3/4}$ .

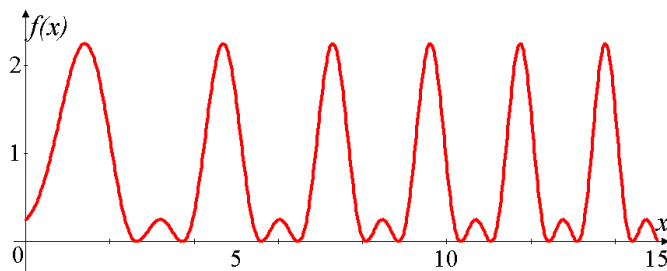


Рисунок 2.26 – Графік функції  $f(x) = \left(\sin x^{4/3} + \frac{1}{2}\right)^2$

**Приклад 5.** Модуль функції:  $f(x) = |g(x)|$ ,  $g(x)$  – тригонометрична функція зі змінним періодом, наприклад  $f(x) = \left|\sin x^{3/4}\right|$  (рис. 2.27), її змінний період  $T(x) = -x + \left(x^{3/4} + 2\pi\right)^{4/3}$ .

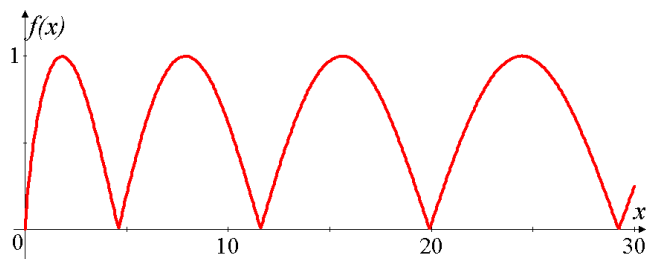


Рисунок 2.27 – Графік функції  $f(x) = \left|\sin x^{3/4}\right|$

**Приклад 6.** Знак (сигнум) функції:  $f(x) = \text{sign } g(x)$ ,  $g(x)$  – тригонометрична функція зі змінним періодом. Функція  $f(x) = \text{sign}(\sin x^{5/7})$ . Її графік – це періодичні коливання прямокутної форми (рис. 2.28), але вже зі змінним періодом  $T(x) = -x + (x^{5/7} + 2\pi)^{7/5}$ .

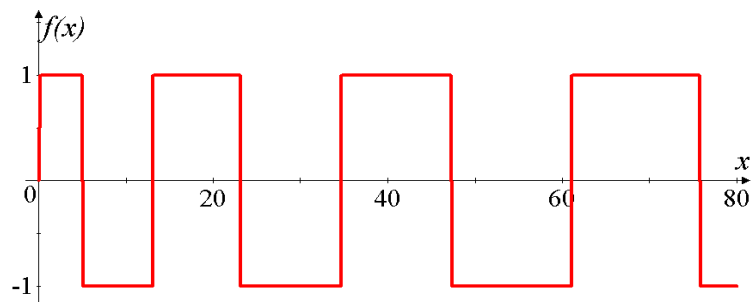


Рисунок 2.28 – Графік функції  $f(x) = \text{sign}(\sin x^{5/7})$

**Приклад 7.** Дробова частина:  $f(x) = \{g(x)\}^a$ , де  $a > 0$ ,  $\{\bullet\}$  – дробова частина,  $g(x)$  – деяка нелінійна неперервна зростаюча (спадна) функція.

Суперпозиція степеневі функції та функції «дробова частина»:  $f(x) = \left\{x^{3/5}\right\}^2$ . Графік цієї функції – це коливання пілкоподібної форми (рис. 2.29) зі змінним періодом  $T(x) = -x + (x^{3/5} + 1)^{5/3}$ , графік якого зображений на рисунку 2.30.

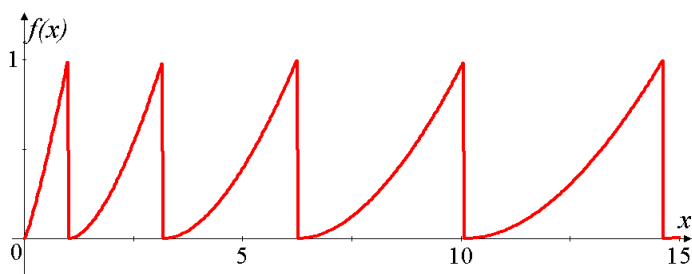


Рисунок 2.29 – Графік функції  $f(x) = \left\{x^{3/5}\right\}^2$

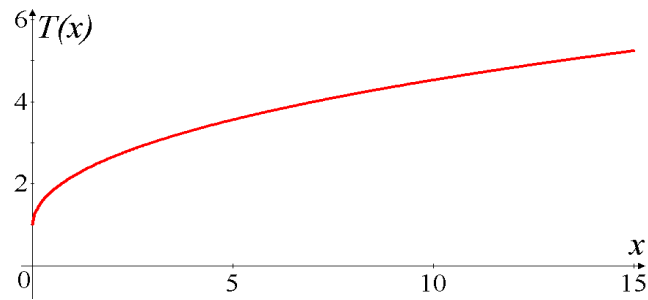


Рисунок 2.30 – Графік змінного періоду  $T(x) = -x + \left(x^{3/5} + 1\right)^{5/3}$

**Приклад 8.** Трансформація функцій зі змінним періодом. Розглянуті вище приклади (способи) отримання функцій зі змінним періодом можуть бути узагальнені шляхом застосування до них певних перетворень. В першу чергу це стосується найпростіших перетворень:

- паралельний перенос (зсув) вздовж осі ординат:  $f(x) \rightarrow f(x) + a$ ;
- паралельний перенос (зсув) вздовж осі абсцис:  $f(x) \rightarrow f(x + b)$ ;
- стиснення (розтяг) вздовж осі абсцис:  $f(x) \rightarrow f(kx)$ ;
- стиснення (розтяг) вздовж осі ординат:  $f(x) \rightarrow Af(x)$ .

Застосуємо до функції  $f(x) = \left\{x^{3/5}\right\}^2$  перетворення: стиснення вздовж осі  $Ox$  в два рази; розтяг вздовж осі  $Oy$  в два рази; зсув по осі  $Oy$  вниз на  $-1$ . В результаті отримаємо функцію  $f(x) = 2\left\{2x^{3/5}\right\}^2 - 1$ . Її графік наведений на рисунку

2.31. Змінний період цієї функції  $T(x) = -x + \left(x^{3/5} + \frac{1}{2}\right)^{5/3}$  зображений на рисунку

2.32 (пунктирна лінія).

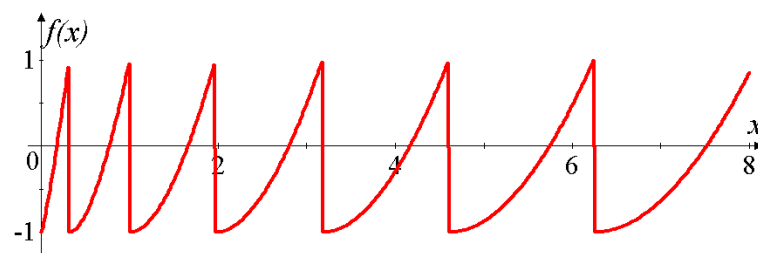


Рисунок 2.31 – Графік функції  $f(x) = 2\left\{2x^{3/5}\right\}^2 - 1$

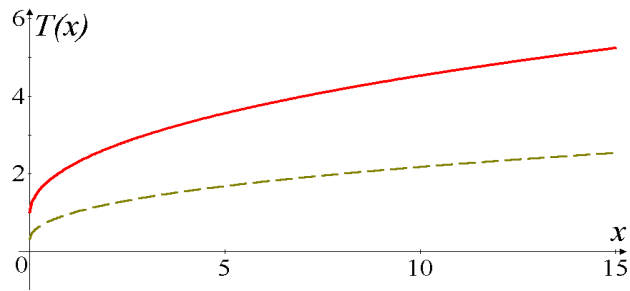


Рисунок 2.32 – Графіки змінних періодів:  $T(x) = -x + \left(x^{\frac{3}{5}} + 1\right)^{\frac{5}{3}}$  – суцільна лінія;

$$T(x) = -x + \left(x^{\frac{3}{5}} + \frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{3}} \text{ – штрих-пунктирна лінія}$$

Ще один приклад – суперпозиція логарифмічної функції та функції «дробова частина»:  $f(x) = \{\log_c x\}$ ,  $x \geq 1, c > 1$ . При  $c = 3$  графік функції  $f(x) = \{\log_3 x\}$  показаний на рисунку 2.33.

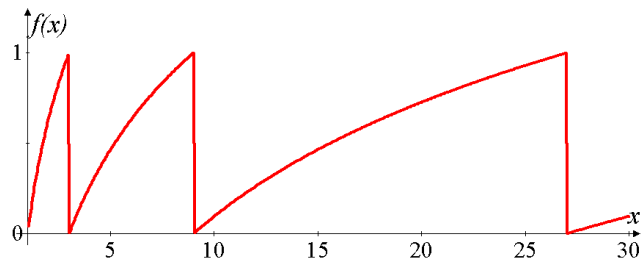


Рисунок 2.33 – Графік функції  $f(x) = \{\log_3 x\}$

Варто звернути увагу, що для цієї функції її змінний період  $T(x) = x(c - 1)$ , тобто є лінійною функцією з коефіцієнтом  $k = c - 1$ , в даному випадку  $T(x) = 2x$  (рис. 2.34).

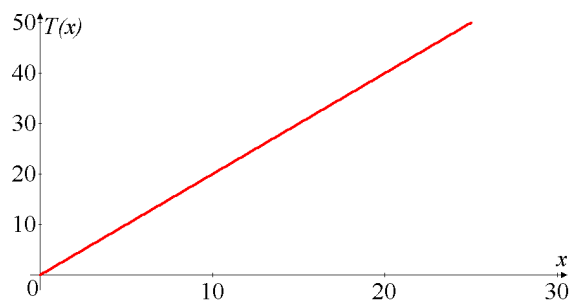


Рисунок 2.34 – Графік періоду  $T(x) = 2x$  функції  $f(x) = \{\log_3 x\}$



Як і у випадку функцій з постійним періодом приклади аналітичного задання функцій зі змінним періодом можна продовжити.

## 2.5 Узагальнений метод отримання тригонометричних функцій зі змінним періодом

Метод отримання елементарних тригонометричних функцій зі змінним періодом можна узагальнювати. Розглянемо деякі випадки таких узагальнень. Нехай функція  $g(x)$ ,  $x \in I = [a, b]$  – строго зростаюча (спадна) диференційована функція, причому:

- ✓ відноситься до класу елементарних функцій;
- ✓ в області визначення  $I = [a, b]$  її варіація  $V_a^b(g) \gg 2\pi$ .

При цих умовах функції

$$\sin g(x), \cos g(x), tg g(x), ctg g(x), \alpha > 0, x \in I \quad (2.9)$$

є елементарними періодичними функціями.

Якщо для функції  $g(\bullet)$  існує обернена функція  $g^{-1}(\bullet)$ , то для функцій (2.9) можна записати їх змінні періоди. Для функцій  $\sin g(x)$ ,  $\cos g(x)$  змінні періоди визначаються формулами

$$T(x) = -x + g^{-1}(g(x) + 2\pi), x \geq 0. \quad (2.10)$$

$$T^-(x) = x - g^{-1}(g(x) - 2\pi), x \in [T(0), \infty). \quad (2.11)$$

Для функцій  $tg g(x)$ ,  $ctg g(x)$  їх змінні періоди

$$T(x) = -x + g^{-1}(g(x) + \pi), x \geq 0. \quad (2.12)$$

$$T^-(x) = x - g^{-1}(g(x) - \pi), x \in [T(0), \infty). \quad (2.13)$$

Розглянемо приклад аналітичного задання ПФЗП у вигляді (2.9). При  $g(x) = e^{\sqrt{x}}$  отримаємо тригонометричну функцію  $\sin e^{\sqrt{x}}$ ,  $x \geq 0$ . Графік цієї функції, а також для порівняння графік функції  $\sin x$ , показаний на рисунку 2.35.

Із рисунка видно, що графік функції  $\sin e^{\sqrt{x}}$  із збільшенням аргументу швидко «стискається»: якщо на інтервалі  $[0, 15]$  розміщується менше двох з половиною періодичних коливань функції  $\sin x$ , то для функції  $\sin e^{\sqrt{x}}$  таких коливань спостерігається вже більше семи.

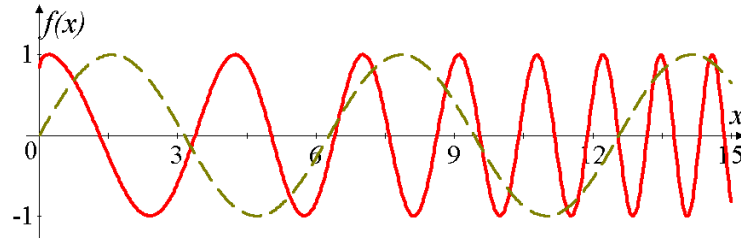


Рисунок 2.35 – Графіки функцій  $\sin e^{\sqrt{x}}$  (неперервна лінія) та  $\sin x$  (пунктирна лінія)

Змінні періоди функції  $\sin e^{\sqrt{x}}$ , знайдені на основі формул (2.10) і (2.11), мають вигляд

$$T(x) = -x + \ln^2(e^{\sqrt{x}} + 2\pi), \quad x \geq 0, \quad (2.14)$$

$$T^-(x) = x - \ln^2(e^{\sqrt{x}} - 2\pi), \quad x \in [T(0) \approx 3.942, \infty). \quad (2.15)$$

Графіки цих періодів зображені на рисунку 2.36: період  $T(x) = -x + \ln^2(e^{\sqrt{x}} + 2\pi)$ ,  $x \geq 0$ , – неперервна лінія,  $T^-(x) = x - \ln^2(e^{\sqrt{x}} - 2\pi)$ ,  $x \in [T(0) \approx 3.942, \infty)$ , – пунктирна лінія. Для порівняння показано також період  $T(x) = T = 2\pi$  функції  $\sin x$  (штрих-пунктирна лінія).

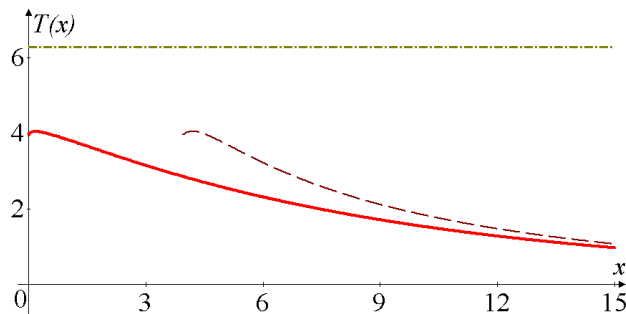


Рисунок 2.36 – Графіки змінних періодів для функції  $\sin e^{\sqrt{x}}$ :  $T(x)$ ,  $x \geq 0$ , (неперервна лінія),  $T^-(x)$ ,  $x \in [3.942, \infty)$  (пунктирна лінія). Період  $T(x) = 2\pi$  (штрих-пунктирна лінія)

Поведінка змінних періодів  $T(x)$  і  $T^-(x)$  підтверджує зроблені вище зауваження про те, функція  $\sin e^{\sqrt{x}}$  із зростанням аргументу  $x$  стискається. Про швидкість стиснення можна судити по значеннях періодів, обчислених для деяких значень аргументу. Результати обчислення наведені в таблиці 2.1. (зауважимо, що згідно (2.15) період  $T^-(x)$  для аргументу  $x=0$  не визначений).

Таблиця 2.1 – Значення періодів  $T(x)$  і  $T^-(x)$  в дискретних точках

$x$	0	5	10	20	100	1000
$T(x)$	3,94248	2,56145	1,54715	0,62476	$5,70439 \times 10^{-3}$	$7,16227 \times 10^{-12}$
$T^-(x)$	–	3,73944	1,85992	0,66060	$5,70585 \times 10^{-3}$	$7,50333 \times 10^{-12}$

Множину тригонометричних функцій зі змінним періодом можна розширювати. Один із таких методів розширення полягає в застосуванні до функцій  $\sin g(x)$ ,  $\cos g(x)$ ,  $tg g(x)$ ,  $ctg g(x)$ ,  $x \in I$ , які є суперпозицією функцій, нових суперпозицій і чотирьох основних арифметичних операцій – додавання, віднімання, множення і ділення. Якщо, наприклад, до функції зі змінним періодом  $\sin g(x)$  застосувати операцію додавання, а суперпозицію провести з використанням показникової функції, то отримаємо нову функцію

$$(\sin g(x) + s)^\theta. \quad (2.16)$$

період якої теж буде змінним. В (2.16) параметри  $\theta > 0$ ,  $s$  – деякі числа. Метод отримання проілюструємо наступним прикладом.

Застосуємо до функції  $\sin e^{\sqrt{x}}$  перетворення типу (2.16), взявши значення  $s = 1$ ,  $\theta = 2$ . В результаті отримаємо функцію  $(\sin e^{\sqrt{x}} + 1)^2$ . Її графік зображений на рисунку 2.37 (неперервна лінія), а для порівняння показано також графік функції  $(\sin x + 1)^2$  (пунктирна лінія).

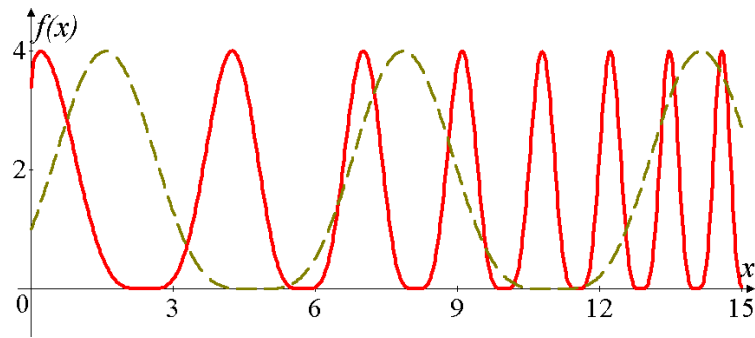


Рисунок 2.37 – Графіки функції  $(\sin e^{\sqrt{x}} + 1)^2$  (неперервна лінія) та функції  $(\sin x + 1)^2$  (пунктирна лінія)

Із поведінки графіків добре видно, що періоди функції  $(\sin e^{\sqrt{x}} + 1)^2$  із зростанням аргумента зменшуються. Графіки змінних періодів цієї функції, що теж визначаються за формулами (2.14) і (2.15), мають такий самий вигляд, як і графіки змінних періодів функції  $\sin e^{\sqrt{x}}$ , які були показані вище на рисунку 2.36.

Розглянуті методи аналітичного задання ПФЗП та їх змінних періодів мають самостійне значення, оскільки узагальнюють і тим значно розширюють множину аналітично заданих періодичних функцій із постійним періодом. Крім цього наявність таких функцій є важливою підмогою на шляху до вирішення задачі побудови рядів Фур'є ПФЗП, оскільки можуть бути використані для перевірки правильності побудованих рядів Фур'є шляхом порівняння функцій і їх рядів як чисельними, так і аналітичними методами. В наступному розділі розглянемо методи отримання ортогональних тригонометричних систем зі змінним періодом та побудову рядів Фур'є по цих системах.

### Висновки до другого розділу

1. Обґрунтовано, що для ПФЗП крім змінного періоду, який використовується у випадках, коли функція чи її період розглядаються при зростанні їх аргумента, введено змінний період у випадку спадання аргумента. Для розрізнення введено окремі позначення цих періодів та встановлено їх взаємозв'язок.

2. Вперше введено нові елементарні функції, а саме тригонометричні функції зі змінним періодом та записані формули їх змінних періодів. Важливо, що синусоїдальні функції є базою утворення ортогональних тригонометричних систем зі змінним періодом з подальшим їх використанням для побудови рядів Фур'є ТФЗП.
3. Розроблено способи аналітичного задання ПФЗП та записано їх змінні періоди. Ці функції окрім самостійного значення, як розширення множини аналітично заданих періодичних функцій із постійним періодом, можуть бути використані для перевірки правильності побудованих рядів Фур'є шляхом визначення віддалі між функцією та її рядом.

### РОЗДІЛ 3

## ІНФОРМАЦІЙНА ТЕХНОЛОГІЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ПРОЦЕСІВ ЗІ ЗМІННИМ ПЕРІОДОМ МЕТОДАМИ ФУР'Є-АНАЛІЗУ

Наявність ПФЗП (як емпіричних, так і аналітично заданих) ставить питання яким чином вивчати такі функції, які методи використовувати при їх дослідженні? Звичайно, що тут цілком природно скористатися досвідом дослідження функцій, зокрема періодичних функцій [26, 29, 67, 90, 140], в основі якого лежить «алгоритм наближення». Його суть полягає в заміні досліджуваної функції  $f \in F$ , де  $F$  – клас наближуваних функцій (в нашому випадку це клас ПФЗП), іншою функцією  $g \in G$ , де  $G$  – множина наближуваних функцій. Припускається, що функція  $g$  має ряд необхідних властивостей, і в першу чергу:

- ✓ є аналітичною і подається у вигляді відповідного ряду;
- ✓ є «близькою» до досліджуваної функції;
- ✓ придатна до якісного вивчення і обчислення з подальшим перенесенням отриманих результатів на «оригінал», тобто на досліджувану функцію.

Реалізація алгоритму наближення, тобто знаходження наближувачої функції, розпадається на ряд кроків, які, дотримуючись [29, 90, 140], сформулюємо таким чином:

а) **Вибір методу наближення.** За метод наближення ми вибираємо розклад наближуваної функції в ряд Фур'є по деякій ортогональній тригонометричній системі функцій зі змінним періодом.

б) **Вибір (чи побудова нової) ортогональної тригонометричній системи функцій зі змінним періодом.**

с) **Вибір способу вимірювання відхилення (похибки) наближувачої функції  $g$  від заданої  $f$ , тобто вибір «віддалі» між  $f$  і  $g$ :  $\rho(f, g)$ .** Найчастіше використовують середньоквадратичне наближення.

d) Фактична **побудова** наближуючої функції.

e) **Оцінка похибки**, що виникає в результаті заміни заданої функції наближуючою її функцією.

Отримавши в результаті реалізації цих кроків «заміну», вивчення властивостей наближуваної функції вже може бути замінене вивченням її «копії», тобто наближуючої функції, оскільки вона вже є аналітичною.

В нашому випадку основними кроками, з поміж перерахованих вище, є побудова ортогональної системи тригонометричних функцій зі змінним періодом та використання цієї системи для побудови рядів Фур'є ПФЗП. Розглянемо спочатку перший із цих кроків, використовуючи деякі судження із [16, 48, 102, 113, 128].

### 3.1 Ортогональні системи тригонометричних функцій зі змінним періодом

Відомо [26, 67, 140], що для побудови рядів Фур'є періодичних функцій із періодом  $T$  використовується тригонометрична система функцій

$$\left\{ \sin k \frac{2\pi}{T} x, \cos k \frac{2\pi}{T} x \right\}, k = 1, 2, \dots$$

або те саме, що

$$\{\sin \omega_k x, \cos \omega_k x\}, k = 1, 2, \dots, \quad (3.1)$$

де  $\omega_k = k \times \omega_1$ ,  $\omega_1 = 2\pi/T$ . У випадку, коли  $T = 2\pi$ , отримуємо систему

$$\{\sin kx, \cos kx\}, k = 1, 2, \dots \quad (3.2)$$

Твірними функціями цієї системи є функції  $\sin x$ ,  $\cos x$ . Всі останні утворюються із цих функцій множенням аргументу  $x$  на число  $k$ .

В нашому випадку для побудови тригонометричної системи функцій зі змінним періодом за твірні візьмемо функції  $\sin x^\alpha$ ,  $\cos x^\alpha$ . Використовуючи їх, утворимо систему функцій

$$\{\sin kx^\alpha, \cos kx^\alpha\}, k=1,2,\dots, \alpha > 0, \quad (3.3)$$

яку будемо називати тригонометричною системою функцій зі змінним періодом

$$T_\alpha(x) = -x + (x^\alpha + 2\pi)^{1/\alpha}, x \geq 0, \quad (3.4)$$

Система (3.3) є ортогональною з певною ваговою функцією. Щоб сформулювати відповідне твердження, наведемо формулу для скалярного добутку для функцій системи (3.3). Наприклад, для функцій  $\sin kx^\alpha$  і  $\cos nx^\alpha$  їх скалярний добуток

$$(\sin kx^\alpha, \cos nx^\alpha) = \int_x^{x+T_\alpha(x)} \alpha x^{\alpha-1} \sin kx^\alpha \cos nx^\alpha dx, \quad (3.5)$$

де  $T_\alpha(x) = -x + (x^\alpha + 2\pi)^{1/\alpha}, x \geq 0$ , – змінний період, вираз  $\alpha x^{\alpha-1}$  – вагова функція, яку в загальному випадку будемо позначати через  $p(x)$  або через  $p_\alpha(x)$ , вказуючи таким чином на наявність у ваговій функції величини  $\alpha$ .

Має місце наступне **твердження**, що розглядалося в [48, 102, 113, 128].

Тригонометрична система функцій

$$\sin kx^\alpha, \cos kx^\alpha, x \geq 0, \alpha > 0, k=1,2,\dots, \quad (3.6)$$

зі змінним періодом

$$T_\alpha(x) = -x + (x^\alpha + 2\pi)^{1/\alpha}, x \geq 0, \quad (3.7)$$

є ортогональною на інтервалі

$$[x, x + T_\alpha(x)], x \geq 0, \quad (3.8)$$

із ваговою функцією

$$p_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}, \quad (3.9)$$

причому норма кожної із функцій системи (3.6) рівна  $\sqrt{\pi}$ .

Ортогональність доводиться прямим обчисленням. Для функцій  $\sin mx^\alpha, m=1,2,\dots$ , та  $\cos nx^\alpha, n=1,2,\dots$ , їх скалярний добуток, тобто інтеграл



$$\begin{aligned}
& \int_x^{x+T_\alpha(x)} \alpha x^{\alpha-1} \sin mx^\alpha \cos nx^\alpha dx = \int_x^{x+T_\alpha(x)} \sin mx^\alpha \cos nx^\alpha dx^\alpha = \\
& = \frac{1}{2} \int_x^{x+T_\alpha(x)} (\sin(m+n)x^\alpha + \sin(m-n)x^\alpha) dx^\alpha = \\
& = -\frac{1}{2} \left[ \frac{1}{m+n} \cos(m+n)x^\alpha + \frac{1}{m-n} \cos(m-n)x^\alpha \right] \Big|_x^{x+T_\alpha(x)} = \\
& = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{m+n} [\cos[(m+n)(x+T_\alpha(x))^\alpha] - \cos(m+n)x^\alpha] + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{m-n} [\cos[(m-n)(x+T_\alpha(x))^\alpha] - \cos(m-n)x^\alpha] \right\}.
\end{aligned}$$

Оскільки згідно (3.4) період  $T_\alpha(x) = -x + (x^\alpha + 2\pi)^{1/\alpha}$ , то  $[x + T_\alpha(x)]^\alpha = [x - x + (x^\alpha + 2\pi)^{1/\alpha}]^\alpha = [x^\alpha + 2\pi]$ . Враховуючи це в останньому виразі, маємо

$$\begin{aligned}
& \int_x^{x+T_\alpha(x)} \alpha x^{\alpha-1} \sin mx^\alpha \cos nx^\alpha dx = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{m+n} [\cos[(m+n)(x^\alpha + 2\pi)] - \cos(m+n)x^\alpha] + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{m-n} [\cos[(m-n)(x^\alpha + 2\pi)] - \cos(m-n)x^\alpha] \right\} = \\
& = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{m+n} [\cos[(m+n)x^\alpha + 2\pi(m+n)] - \cos(m+n)x^\alpha] + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{m-n} [\cos[(m-n)x^\alpha + 2\pi(m-n)] - \cos(m-n)x^\alpha] \right\} = \\
& = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{m+n} [\cos(m+n)x^\alpha - \cos(m+n)x^\alpha] + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{m-n} [\cos(m-n)x^\alpha - \cos(m-n)x^\alpha] \right\} = 0.
\end{aligned}$$

Подібним чином перевіряється ортогональність функцій  $\sin mx^\alpha$  і  $\sin nx^\alpha$  та функцій  $\cos mx^\alpha$  і  $\cos nx^\alpha$  при умові, що  $m \neq n$ . Якщо ж  $m = n$ , то шляхом аналогічних обчислень можна показати, що

$$\int_x^{x+T_\alpha(x)} \alpha x^{\alpha-1} \sin^2 mx^\alpha dx = \pi, \quad \int_x^{x+T_\alpha(x)} \alpha x^{\alpha-1} \cos^2 mx^\alpha dx = \pi.$$

Твердження доведено.

Із виразів

$$\int_x^{x+T_\alpha(x)} \alpha x^{\alpha-1} \sin^2 mx^\alpha dx = \pi, \quad \int_x^{x+T_\alpha(x)} \alpha x^{\alpha-1} \cos^2 mx^\alpha dx = \pi$$

впливає, що функціям системи (3.3) може бути поставлена у відповідність їх норма:

$$\left. \begin{aligned} \|\sin mx^\alpha\| &= [(\sin mx^\alpha, \sin mx^\alpha)]^{1/2} = \left[ \int_x^{x+T(x)} \alpha x^{\alpha-1} \sin^2 mx^\alpha dx \right]^{1/2} = \sqrt{\pi}, \\ \|\cos mx^\alpha\| &= [(\cos mx^\alpha, \cos mx^\alpha)]^{1/2} = \left[ \int_x^{x+T(x)} \alpha x^{\alpha-1} \cos^2 mx^\alpha dx \right]^{1/2} = \sqrt{\pi} \end{aligned} \right\}. \quad (3.10)$$

Зауважимо, що на відміну від звичайних ортогональних тригонометричних систем (3.1) чи (3.2), інтервали ортогональності яких є постійними і їх довжини відповідно рівні  $T$  і  $2\pi$ , для тригонометричної системи функцій (3.3) довжина інтервалу ортогональності  $[x, x+T_\alpha(x)]$  вже не є постійною, а змінюється у відповідності до значення періоду  $T_\alpha(x)$ , де  $x \geq 0$  – лівий кінець інтервалу. Іноді в цьому інтервалі  $[x, x+T_\alpha(x)]$  індекс  $\alpha$  будемо опускаати, і записувати у вигляді  $[x, x+T(x)]$ .

Наведене твердження є підставою визначити простір

$$L_p^2(x, x+T_\alpha(x)), \quad x \geq 0, \quad \alpha > 0, \quad (3.11)$$

як сукупність функцій, для яких скалярний добуток

$$(f, g) = (f(x), g(x)) = \int_x^{x+T_\alpha(x)} p(x) f(x) g(x) dx < \infty, \quad (3.12)$$

де  $T_\alpha(x) = -x + (x^\alpha + 2\pi)^{1/\alpha}$ ,  $x \geq 0$ ,  $\alpha > 0$ ,  $p(x)$  – вагова функція.

Якщо вагова функція  $p(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ , то скалярний добуток

$$(f, g) = \alpha \int_x^{x+T_\alpha(x)} x^{\alpha-1} f(x) g(x) dx < \infty, \quad (3.13)$$

Використовуючи скалярний добуток (3.12), введемо в просторі  $L_p^2(x, x + T_\alpha(x))$  норму функції. Якщо функції  $f(x) \in L_p^2(x, x + T_\alpha(x))$ , а вагова функція  $p(x) = \alpha x^{\alpha-1}$  то її норму визначимо за формулою

$$\|f\| = \sqrt{(f, f)} = \left( \int_{\tau}^{\tau+T_\alpha(\tau)} p(x) f^2(x) dx \right)^{1/2} = \left( \alpha \int_{\tau}^{\tau+T_\alpha(\tau)} x^{\alpha-1} p(x) f^2(x) dx \right)^{1/2}. \quad (3.14)$$

Очевидно, в простір  $L_p^2(x, x + T_\alpha(x))$  входить тригонометрична система функцій  $\sin kx^\alpha, \cos kx^\alpha, x \geq 0, \alpha > 0, k = 1, 2, \dots$  зі змінним періодом  $T_\alpha(x) = -x + (x^\alpha + 2\pi)^{1/\alpha}, x \geq 0$ , а також ПФЗП із обмеженою нормою та із цим же змінним періодом.

Крім норми визначимо в просторі  $L_p^2(x, x + T_\alpha(x))$  і віддаль між його елементами. Нехай функції  $f(x)$  і  $g(x)$  належать просторові  $L_p^2(x, x + T_\alpha(x))$ ,  $p(x) = \alpha x^{\alpha-1}$  – вагова функція, то віддаль

$$\begin{aligned} \rho(f, g) &= ((f - g, f - g))^{1/2} = ((f(x) - g(x), f(x) - g(x)))^{1/2} = \\ &= \left( \int_{\tau}^{\tau+T_\alpha(\tau)} p(x) (f(x) - g(x))^2 dx \right)^{1/2} = \left( \alpha \int_{\tau}^{\tau+T_\alpha(\tau)} x^{\alpha-1} (f(x) - g(x))^2 dx \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

### 3.2 Побудова ряду Фур'є періодичних функцій зі змінним періодом

Створена ортогональна система тригонометричних функцій  $\sin kx^\alpha, \cos kx^\alpha, x \geq 0, \alpha > 0, k = 1, 2, \dots$ , зі змінним періодом  $T_\alpha(x) = -x + (x^\alpha + 2\pi)^{1/\alpha}, x \geq 0$ , та визначений простір  $L_p^2(x, x + T_\alpha(x))$  дають можливість розглянути питання побудови рядів Фур'є ПФЗП.

Нехай  $f(x) \in L_p^2(x, x + T_\alpha(x))$  – ПФЗП, причому її змінний період

$$T_\alpha(x) = -x + (x^\alpha + 2\pi)^{1/\alpha}, x \geq 0.$$

Запишемо для цієї функції її ряд Фур'є, позначивши його через  $\tilde{f}(x)$ :

$$f(x) \approx \tilde{f}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx^\alpha + b_k \sin kx^\alpha). \quad (3.16)$$

Вираз  $f(x) \approx \tilde{f}(x)$  означає, що функція  $f(x)$  і її ряд  $\tilde{f}(x)$  не обов'язково співпадають. Враховуючи форму скалярного добутку (3.13), коефіцієнти Фур'є цього ряду будемо визначати за формулами:

$$a_0 = \frac{\alpha}{\pi} \int_{\tau}^{\tau+T(\tau)} x^{\alpha-1} f(x) dx, \quad (3.17)$$

$$a_k = \frac{\alpha}{\pi} \int_{\tau}^{\tau+T(\tau)} x^{\alpha-1} f(x) \cos kx^\alpha dx, \quad (3.18)$$

$$b_k = \frac{\alpha}{\pi} \int_{\tau}^{\tau+T(\tau)} x^{\alpha-1} f(x) \sin kx^\alpha dx. \quad (3.19)$$

В цих формулах точка  $\tau \geq 0$  вибирається довільно, а враховуючи (3.14), інтервалом інтегрування є відрізок  $[\tau, \tau + T(\tau)] = \left[ \tau, (\tau^\alpha + 2\pi)^{1/\alpha} \right]$ . Нерівність Бесселя має вигляд

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n a_k^2 + b_k^2 \leq \frac{1}{\pi} \|f(x)\|^2, \quad (3.20)$$

де згідно (3.14) норма  $\|f\| = \sqrt{(f, f)} = \sqrt{\alpha \int_{\tau}^{\tau+T(\tau)} x^{\alpha-1} f^2(x) dx}$ .

Аналогічно до подання ряду Фур'є періодичної функції у тригонометричній формі (1.6), для ПФЗП її ряд Фур'є (3.16) теж запишемо у тригонометричній формі:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos(kx^\alpha + \varphi_k), \quad (3.21)$$

де

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\varphi_k = -\arctg\left(\frac{b_k}{a_k}\right), \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi_k \leq \frac{\pi}{2}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Послідовність коефіцієнтів  $A_k, k = 0, 1, 2, \dots$  і фаз  $\varphi_k, k = 1, 2, \dots$  утворюють амплітудний і фазовий спектри ПФЗП.

Метод побудови рядів Фур'є періодичних функцій зі змінним періодом, узагальнена схема якого наведена на рисунку 3.1, дозволить здійснювати спектральний аналіз процесів зі змінним періодом.



Рисунок 3.1 – Узагальнена схема методу побудови рядів Фур'є ПФЗП

Розроблена ортогональна тригонометрична система функцій зі змінним періодом, побудований ряд Фур'є для ПФЗП та записані формули для визначення коефіцієнтів ряду, розроблені методи аналітичного задання ПФЗП є складовою частиною інформаційної технології аналізу ПФЗП.

### 3.3 Приклади побудови рядів Фур'є періодичних функцій зі змінним періодом

**Приклад 1.** Побудуємо ряд Фур'є для функції  $f(x) = \text{sign}(\sin x^\alpha)$  зі змінним періодом  $T(x) = -x + (x^\alpha + 2\pi)^{1/\alpha}$  при умові, що  $\alpha = 5/7$ , та для порівняння проведемо аналогічні обчислення для «подібної» їй при  $\alpha = 1$  функції  $f(x) = \text{sign}(\sin x)$ , яка добре відома з курсів математики, електро- та радіотехніки, що описує періодичні коливання прямокутної форми із постійним періодом  $T = 2\pi$ . Перевіримо для рядів Фур'є цих функцій також нерівність Бесселя.

Для функції  $f(x) = \text{sign}(\sin x^{5/7})$  її змінний період  $T(x) = -x + (x^{5/7} + 2\pi)^{7/5}$ . Нехай ліва точка інтервалу інтегрування  $\tau = 20$ . В цій точці період  $T(20) = -20 + (20^{5/7} + 2\pi)^{7/5} \approx 23.4095$ . Згідно формул (3.17), (3.18) та (3.19 в) для знаходження коефіцієнтів скінченного ряду Фур'є

$$\bar{f}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx^\alpha + b_k \sin kx^\alpha).$$

інтегрування потрібно здійснювати на інтервалі  $[20; 20 + T(20)] \approx [20; 43,4095]$ . Результати обчислення коефіцієнтів при  $n = 9$  зведені в таблиці 3.1. Крім цього наведені коефіцієнти Фур'є цієї ж функції, але обчислені на інтервалі  $[35; 61,5001]$ . Для порівняння в правій стороні цієї ж таблиці наведені коефіцієнти Фур'є функції  $f(x) = \text{sign}(\sin x)$ , обчислені згідно цих же формул, але при  $\alpha = 1$ . В передостанньому рядку таблиці 1 наведені результати обчислень виразів, що входять в нерівність Бесселя.

Порівняння коефіцієнтів Фур'є для функцій  $f(x) = \text{sign}(\sin x^{5/7})$  і  $f(x) = \text{sign}(\sin x)$  показує їх практичне співпадання. Деякі неузгодженості можна пояснити похибками обчислень, абсолютна похибка  $\Delta \leq 0,00004$

Таблиця 3.1 – Коефіцієнти Фур'є на різних інтервалах ортогональності

№ коефіцієнта	Коефіцієнти Фур'є					
	Функція зі змінним періодом $f(x) = \text{sign}\left(\sin x^{5/7}\right)$				Функція з постійним періодом $f(x) = \text{sign}(\sin x)$	
	Інтервал аналізу [20; 43,4095]		Інтервал аналізу [35; 61,5001]		Інтервал аналізу [0; 2π] = [0; 6,2831]	
	$a_k, k = \overline{0,9}$	$b_k, k = \overline{1,9}$	$a_k, k = \overline{0,9}$	$b_k, k = \overline{1,9}$	$a_k, k = \overline{0,9}$	$b_k, k = \overline{1,9}$
0	0		-0,00001		0	
1	0	1,27324	0	1,27324	0	1,27324
2	-0,00002	0	-0,00004	0	0	0
3	0,00001	0,42444	0	0,42441	0	0,42441
4	-0,00001	0	-0,00004	0	0	0
5	0	0,25465	0	0,25465	0	0,25465
6	-0,00001	0	-0,00004	0	0	0
7	0,00001	0,18189	0	0,1819	0	0,18189
8	-0,00001	0	-0,00004	0	0	0
9	0,00001	0,14147	0	0,14151	0	0,14147
	$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^9 (a_k^2 + b_k^2) = 1,91926$		$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^9 (a_k^2 + b_k^2) = 1,91922$		$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^9 (a_k^2 + b_k^2) = 1,91921$	
	$\frac{1}{\pi} \ f(x)\ ^2 = 1,9999$		$\frac{1}{\pi} \ f(x)\ ^2 = 1,9999$		$\frac{1}{\pi} \ f(x)\ ^2 = 2$	

Наведені в таблиці 3.1 коефіцієнти Фур'є були використані для побудови також скінченної суми рядів Фур'є. Графік скінченого ряду Фур'є функції  $f(x) = \text{sign}\left(\sin x^{5/7}\right)$  відтворений на рисунку 3.2 (суцільна лінія), а також зображено графік самої функції (пунктирна лінія). Порівнюючи ці графіки, можна стверджувати, що скінчений ряд Фур'є  $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx^{5/7} + b_k \sin kx^{5/7}$  вже при  $n=9$  достатньо «добре» відтворює форму самої функції. Такі ж висновки можна зробити і щодо порівняння скінченого ряду Фур'є для функції  $f(x) = \text{sign}(\sin x)$ , графік якого показано на рисунку 3.3 (суцільна лінія), і функції  $f(x) = \text{sign}(\sin x)$  (пунктирна лінія).

В таблиці 3.1 також поміщені результати обчислень для формул, що входять в нерівність Бесселя. Їх порівняння показує, що результати обчислень для цих функцій теж «практично» співпадають. Щодо самої нерівності Бесселя, то із порівняння результатів обчислень для  $\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n a_k^2 + b_n^2$  і  $\frac{1}{\pi} \|f(x)\|^2$  видно, що суми  $\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^9 a_k^2 + b_k^2$ , що є нормами рядів Фур'є відповідних функцій  $f(x) = \text{sign}(\sin x^{5/7})$  і  $f(x) = \text{sign}(\sin x)$ , теж практично близькі до норм самих функцій. Це свідчить, що побудований в роботі ряд Фур'є функції зі змінним наближається до самої функції.

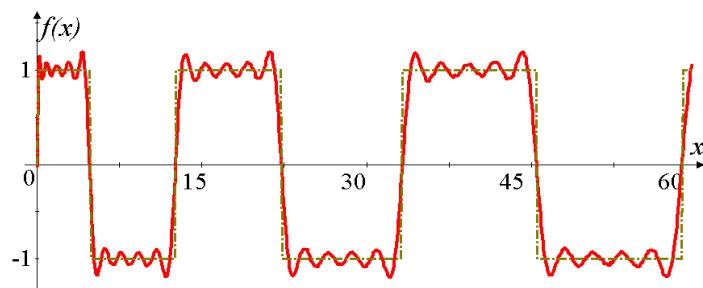


Рисунок 3.2 – Функція  $f(x) = \text{sign}(\sin x^{5/7})$ ,  $x \in [0,60]$ , (пунктирна лінія) та її ряд Фур'є (перші дев'ять доданків, суцільна лінія).

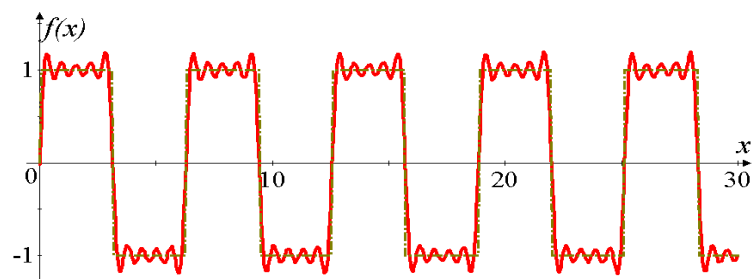


Рисунок 3.3 – Функція  $f(x) = \text{sign}(\sin x)$ ,  $x \in [0,30]$ , (пунктирна лінія) та її ряд Фур'є (перші дев'ять доданків, суцільна лінія).

Користуючись формулою (3.15), визначимо віддаль між ПФЗП  $f(x) = \text{sign}(\sin x^{5/7})$  і її скінченим рядом Фур'є (3.16), взявши спочатку число коефіцієнтів  $n = 10$ , пізніше для порівняння  $n = 40$ . Для  $n = 10$



$$\rho(f(x), \bar{f}(x)) = \left( \frac{5}{7} \int_{\tau}^{\tau+T_a(\tau)} x^{-2/7} (f(x) - \bar{f}(x))^2 dx \right)^{1/2} \Big|_{n=10} = 0,50379.$$

Для  $n = 40$  віддаль

$$\rho(f(x), \bar{f}(x)) = \left( \frac{5}{7} \int_{\tau}^{\tau+T_a(\tau)} x^{-2/7} (f(x) - \bar{f}(x))^2 dx \right)^{1/2} \Big|_{n=40} = 0,084778$$

Порівняння отриманих результатів показує, по-перше, зменшення віддалі між ПФЗП  $f(x)$  та її скінченим рядом Фур'є  $\bar{f}(x)$  при збільшенні числа коефіцієнтів ряду, по-друге, що вже при  $n = 40$  віддаль  $\rho = 0,084778$  в порівнянні із нормою функції  $\|f(x)\| = 2,51$  є досить незначною. З практичної точки зору вже при  $n = 40$  ряд Фур'є може служити «замінником», що добре відтворює поведінку та основні властивості самої функції, а тому дозволяє результати дослідження властивостей ряду, аналіз його параметрів «переносити» на властивості самої функції.

**Приклад 2.** Розглянемо обчислення коефіцієнтів та побудову скінченого ряду Фур'є ПФЗП  $f(x) = \{x^{3/5}\}^k$ . Для порівняння результатів обчислень будемо також розглядати паралельно із ПФЗП «подібну» до неї функцію з постійним періодом. Необхідні розрахункові формули та додаткову інформацію для цього розмістимо в порівняльній таблиці 3.2.

Таблиця 3.2 – Формули для побудови ряду Фур'є функцій зі змінним та постійним періодами

Функція зі змінним періодом	Функція з постійним періодом
1	2
$f(x) = \{x^{3/5}\}^k$	$f(x) = \{x\}^2$
Змінний період $T(x) = -x + \left(x^{3/5} + 2\pi\right)^{5/3}$	Період $T = 1$
Ортогональна тригонометрична система функцій $\sin 2\pi kx^{3/5}, \cos 2\pi kx^{3/5}, k = 1, 2, \dots$ зі змінним періодом $T(x) = -x + \left(x^{3/5} + 2\pi\right)^{5/3}$	Ортогональна тригонометрична система функцій $\sin 2\pi kx, \cos 2\pi kx, k = 1, 2, \dots, 3$ періодом $T = 1$

1	2
<p>Для довільної точки <math>x_0 \geq 0</math> інтервал ортогональності</p> $[x_0, x_0 + T(x_0)] = \left[ x_0, \left(x_0^{3/5} + 1\right)^{5/3} \right]$	<p>Для довільної точки <math>x_0 \geq 0</math> інтервал ортогональності</p> $[x_0, x_0 + 1]$
<p>Скалярний добуток функцій на інтервалі <math>\left[ x_0, \left(x_0^{3/5} + 1\right)^{5/3} \right]</math> із ваговою функцією <math>p(x) = \frac{3}{5} x^{-2/5}</math></p> $:(f, g) = \int_{x_0}^{\left(x_0^{3/5} + 1\right)^{5/3}} \frac{3}{5} x^{-2/5} f(x) g(x) dx$	<p>Скалярний добуток функцій <math>f(x)</math> і <math>g(x)</math> на інтервалі <math>[x_0, x_0 + 1]</math> із ваговою функцією <math>p(x) = 1</math>:</p> $(f, g) = \int_{x_0}^{x_0+1} f(x) g(x) dx$
<p>Формули для обчислення коефіцієнтів Фур'є функції <math>f(x)</math>:</p> $a_0 = 2 \int_{x_0}^{\left(x_0^{3/5} + 1\right)^{5/3}} \frac{3}{5} x^{-2/5} f(x) dx,$ $a_k = 2 \int_{x_0}^{\left(x_0^{3/5} + 1\right)^{5/3}} \frac{3}{5} x^{-2/5} f(x) \cos 2\pi k x^{3/5} dx,$ $b_k = 2 \int_{x_0}^{\left(x_0^{3/5} + 1\right)^{5/3}} \frac{3}{5} x^{-2/5} f(x) \sin 2\pi k x^{3/5} dx$	<p>Формули для обчислення коефіцієнтів Фур'є функції <math>f(x)</math>:</p> $a_0 = 2 \int_{x_0}^{x_0+1} f(x) dx,$ $a_k = 2 \int_{x_0}^{x_0+1} f(x) \cos 2\pi k x dx,$ $b_k = 2 \int_{x_0}^{x_0+1} f(x) \sin 2\pi k x dx$
<p>Ряд Фур'є</p> $\frac{a_0}{2} + \sum a_k \cos 2\pi k x^{3/5} + b_k \sin 2\pi k x^{3/5}$	<p>Ряд Фур'є</p> $\frac{a_0}{2} + \sum a_k \cos 2\pi k x + b_k \sin 2\pi k x$
<p>Квадрат норми функції:</p> $\ f(x)\ ^2 = \int_{x_0}^{\left(x_0^{3/5} + 1\right)^{5/3}} \frac{3}{5} \cdot x^{-2/5} f^2(x) dx$	<p>Квадрат норми функції:</p> $\ f(x)\ ^2 = \int_{x_0}^{x_0+1} f^2(x) dx$
<p>Нерівність Бесселя:</p> $\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n a_k^2 + b_k^2 \leq 2\ f(x)\ ^2$	<p>Нерівність Бесселя:</p> $\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n a_k^2 + b_k^2 \leq 2\ f(x)\ ^2$

Використовуючи наведені в таблиці 3.2 розрахункові формули, були знайдені коефіцієнти Фур'є для функцій  $f(x) = \{x^{3/5}\}^2$  і  $f(x) = \{x\}^2$ . Результати обчислень наведені в таблиці 3.3.

Таблиця 3.3 – Результати обчислень коефіцієнтів Фур'є

	Функція			
	$f(x) = \{x^{3/5}\}^2$		$f(x) = \{x\}^2$	
	Інтервал ортогональності			
	$\left[5, \left(5^{3/5} + 1\right)^{5/3}\right] = [5; 8,560]$		[0,1]	
	Коефіцієнти Фур'є (з точністю до $10^{-4}$ )			
	$a_k, k = \overline{0,10}$	$b_k, k = \overline{1,10}$	$a_k, k = \overline{0,10}$	$b_k, k = \overline{1,10}$
0	0.667		0.667	
1	0.101	-0.318	0.101	-0.318
2	0.025	-0.159	0.025	-0.159
3	0.011	-0.106	0.011	-0.106
4	0.006	-0.080	0.006	-0.080
5	0.004	-0.064	0.004	-0.064
6	0.002	-0.053	0.002	-0.053
7	0.002	-0.045	0.002	-0.045
8	0.001	-0.040	0.001	-0.040
9	0.001	-0.035	0.001	-0.035
10	0.001	-0.032	0.001	-0.032
	$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{10} a_k^2 + b_k^2 = 0.391$		$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{10} a_k^2 + b_k^2 = 0.391$	
	$2\ f(x)\ ^2 = 0.400$		$2\ f(x)\ ^2 = 0.400$	

Порівняння коефіцієнтів Фур'є для функцій  $f(x) = \{x^{3/5}\}^2$  і  $f(x) = \{x\}^2$  показує їх практичне співпадання. Використовуючи наведені в таблиці 3.3 коефіцієнти  $a_k, k = \overline{0,10}$  і  $b_k, k = \overline{1,10}$ , були обчислені значення, що входять в

нерівність Бесселя  $\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n a_k^2 + b_k^2 \leq 2\|f(x)\|^2$ . Виявилось, що  $\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{10} a_k^2 + b_k^2 = 0,391$ ,  $2\|f(x)\|^2 = 0,4$ , тобто при заданій точності  $10^{-4}$  вже при  $n = 10$  нерівність Бесселя наближається до рівності Парсеваля.

За значеннями коефіцієнтів Фур'є (таблиця 3.3) побудовані також ряди Фур'є. На рисунку 3.4 показано графік скінченного ряду Фур'є  $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^6 a_k \cos 2\pi kx^{3/5} + b_k \sin 2\pi kx^{3/5}$  функції  $f(x) = \{x^{3/5}\}^2$  та графік самої функції. На рисунку 3.4 зображені подібні графіки для функції  $f(x) = \{x\}^2$  із постійним періодом  $T = 1$ . Порівняння графіків показує, що скінчені ряди Фур'є достатньо «добре» відтворюють форми самих функцій (рис. 3.4, 3.5).

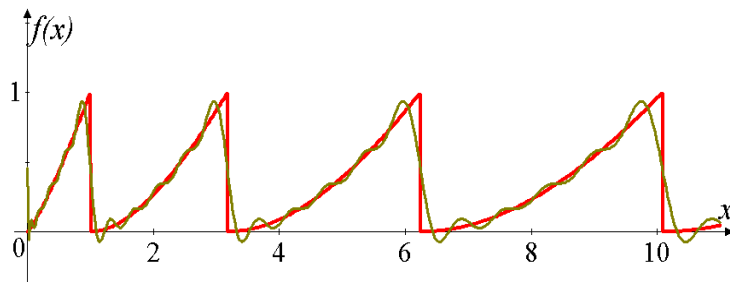


Рисунок 3.4 – Ряд Фур'є (перші десять доданків) для функції  $f(x) = \{x^{3/5}\}^2$  (хвилястий графік) та графік самої функції

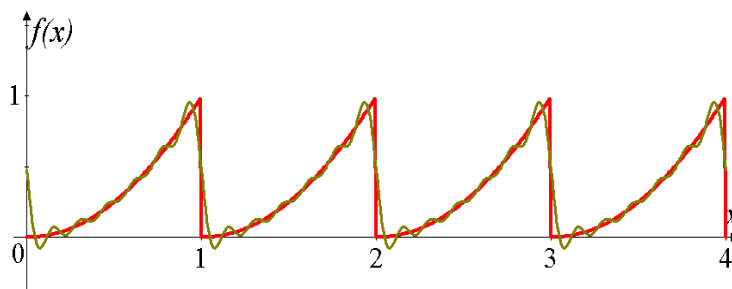


Рисунок 3.5 – Ряд Фур'є (перші десять доданків) для функції  $f(x) = \{x\}^2$  (хвилястий графік) та графік самої функції

Визначимо віддаль між ПФЗП  $f(x) = \{x^{3/5}\}^2$  і її скінченим рядом Фур'є при числі коефіцієнтів  $n = 5$  та  $n = 10$ . Для  $n = 5$  віддаль

$$\rho(f(x), \bar{f}(x)) = \left( \frac{3}{5} \int_{\tau}^{\tau+T_{\alpha}(\tau)} x^{-2/5} (f(x) - \bar{f}(x))^2 dx \right)^{1/2}_{n=5} = 0,09593.$$

Для  $n = 10$  віддаль

$$\rho(f(x), \bar{f}(x)) = \left( \frac{3}{5} \int_{\tau}^{\tau+T_{\alpha}(\tau)} x^{-2/5} (f(x) - \bar{f}(x))^2 dx \right)^{1/2}_{n=10} = 0,06947.$$

Як і для першого прикладу, порівняння результатів показує, що при збільшенні числа коефіцієнтів ряду віддаль між ПФЗП  $f(x)$  та її скінченим рядом Фур'є  $\bar{f}(x)$  зменшується, що свідчить про наближення (збіжність) ряду до самої функції. Це дозволяє використовувати ряд як наближений варіант функції, тобто її «замінник», а тому результати аналізу властивостей ряду вважати за властивості самої функції.

Розглянуті в цьому підрозділі приклади показують, що побудовані скінчені ряди Фур'є ПФЗП достатньо «добре» відтворюють форми самих функцій. Крім цього спостерігається співпадання обчислених коефіцієнтів для ПФЗП і відповідних коефіцієнтів Фур'є, обчислених для «подібних» функцій із постійним періодом. Подібною в обох випадках є і «близькість» графіків функцій і їх скінчених рядів Фур'є. Отримані результати підтверджують правильність теоретичних розробок щодо рядів Фур'є ПФЗП і формул для обчислення їх коефіцієнтів. Ці результати можна розглядати як вагомий внесок в теорію рядів Фур'є ПФЗП.

### **3.4 Програмна реалізація розробленої інформаційної технології аналізу ПФЗП**

Третім етапом створення інформаційної технології аналізу періодичних функцій зі змінним періодом є розробка програмного забезпечення «Фур'є-аналіз функцій зі змінним періодом», яке б спростило процес розрахунків [3]. Основне завдання розробленої комп'ютерної програми – побудова графіків змінного періоду, автоматичний розрахунок коефіцієнтів Фур'є та побудова

графіку скінченного ряду Фур'є, визначення віддалі між досліджуваною та апроксимаційною (скінченим рядом Фур'є) функціями, візуалізація результатів у вигляді графіка амплітудного спектру [45].

Перед етапом розробки ПЗ спершу створено діаграми варіантів використання, класів і станів для того, щоб створити імітаційну модель програми та визначити її логіку (вимоги та можливості).

Початковий етап реалізації розпочинається із виділення акторів та варіантів використання. На рисунку 3.6 наведено діаграму прецедентів. Дана діаграма пояснює можливості використання програмного забезпечення користувачами, які виступають акторами.



Рисунок 3.6 – Діаграма прецедентів (Use Case-діаграма або діаграма варіантів використання)

Усі варіанти використання забезпечуватимуть коректну роботу кожного актора, власне, користувача ПЗ «Фур'є-аналіз функцій зі змінним періодом».

Варіанти використання для користувача – це введення вхідних даних, одержання результатів і очистка полів, мають поділ, який означає включення і позначається <<include>>.

Після проаналізованих вимог, створюємо діаграми майбутніх класів для програмної реалізації (ООП реалізація) та виділяємо зв'язки між ними (наслідування і т.д.).

Було створено 3 класи: Program, Form1 і Period. Вони дозволяють реалізувати основні та допоміжні (графік змінного періоду у новому діалоговому вікні) функції програми. Клас Program вважатимемо основним і використовуватимемо для запуску програми та ініціалізації об'єкту класу Form1, що сприятиме відображенню першого графічного діалогового вікна програми.

На рисунку 3.7 наведено клас Program та його властивості і методи.

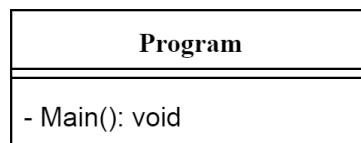


Рисунок 3.7 – Клас Program

У даного класу відсутні властивості, проте присутній лише один приватний метод Main() : void, у якому і здійснюється ініціалізація програми.

На рисунку 3.8 наведено клас Form1 та його властивості і методи.

Form1
<pre> + funcPow : double + x_i : double [] + f_i : double [] + g_i : double [] + k : int + n : int + h : double + a : double + b : double + step : double + endX : double + type : string + buff2 : string + a_k : double [] + b_k : double [] + x_period : double [] + y_period : double [] + log : double + log_buff : string - Period f2 : Period </pre>
<pre> - build_graph_Click(sender : object, e : EventArgs) : void - buildFunction(seriesName : string) : void - Calculate_Click(sender : object, e : EventArgs) : void - zglad_func_CheckedChanged(sender : object, e : EventArgs) : void - getEndInterval(funcPow : double, x : double, type_of_func : string) : double - clean_Click(sender : object, e : EventArgs) : void - only_furie_graph_CheckedChanged(sender : object, e : EventArgs) : void - graph_of_period_Click(sender : object, e : EventArgs) : void </pre>

Рисунок 3.8 – Клас Form1

Даний клас містить у собі властивості для зберігання основних результатів обчислень таких як ліва та права межа інтервалу аналізу, масив значень аргументу та функції, кількість коефіцієнтів для розкладу, крок розбиття при чисельному інтегруванні, тип функції, масиви обчислених коефіцієнтів ряду Фур'є і т.д. Методи, доступні класу Form1 для повноцінного здійснення аналізу функції, а саме – для побудови графіка досліджуваної функції, графіка суми ряду та для виведення обчислених характеристик (віддаль, коефіцієнти ряду Фур'є і т.д.).

На рисунку 3.9 наведено клас Period та його властивості і методи.

Period
<pre> + x_period : double [] + y_period : double [] + m : int </pre>
<pre> + (x_period : double [], y_period : double[], m : int) : Period - Period_Load(sender : object, e : EventArgs) : void </pre>

Рисунок 3.9 – Клас Period



Клас `Period` необхідний лише для побудови графіка змінного періоду у новому діалоговому вікні.

При програмній реалізації між ними були встановлені зв'язки. На рисунку 3.10 наведено діаграму класів для даного ПЗ. На ній класи `Program`, `Form1` і `Period` перебувають у асоціації, адже об'єкт класу `Program` створює об'єкт класу `Form1`, а той в свою чергу – об'єкт класу `Period`.

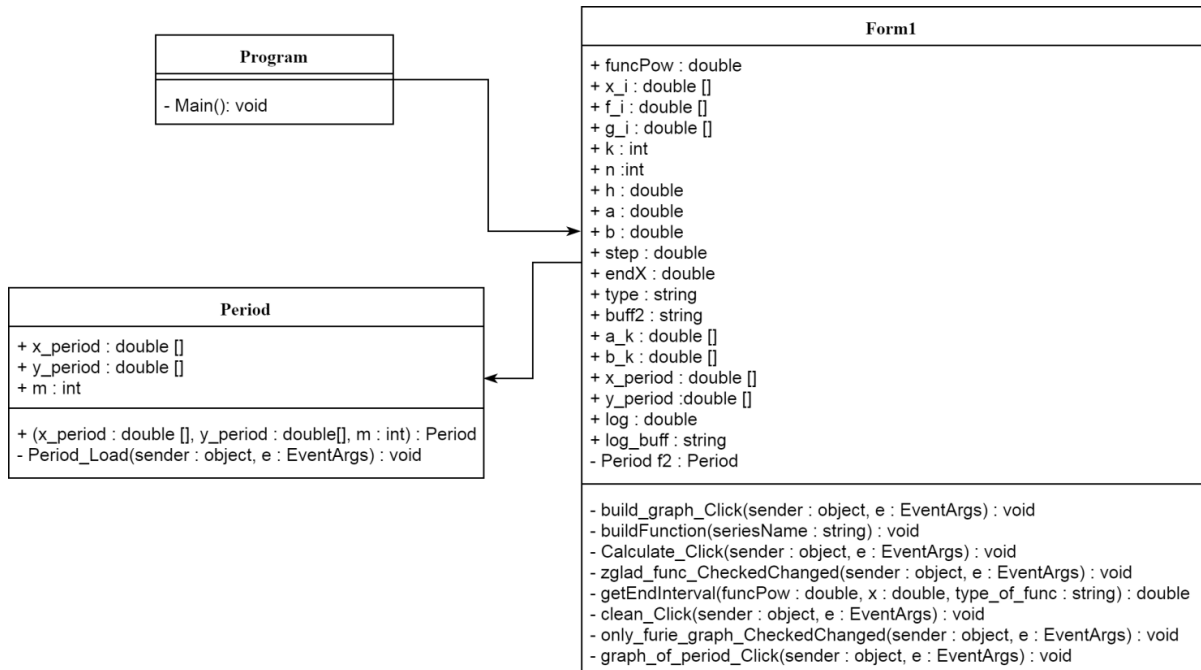


Рисунок 3.10 – Діаграма класів

Дана діаграма цілком задовольняє потреби та функціонал програми для Фур'є-аналізу ФЗП і умовам діаграми прецедентів.

Завершальним етапом імітаційного моделювання йде визначення певної основної задачі – робота користувача із розробленим ПЗ. На рисунку 3.11 наведено діаграму станів для даної задачі.

Спершу відбувається введення вхідних даних, потім здійснюється перевірка на вірність введення, наприклад, імені функції. У разі, якщо перевірка невдала, то введення здійснюється повторно.

Якщо перевірка успішна, то здійснюється проведення обчислень, якщо віддаль велика – то знову змінюємо вхідні дані (кількість коефіцієнтів ряду Фур'є, які потрібно обчислити). У іншому випадку – кількість коефіцієнтів достатньо велика, віддаль є малою і графік досліджуваної функції і функції суми ряду є майже ідентичними.

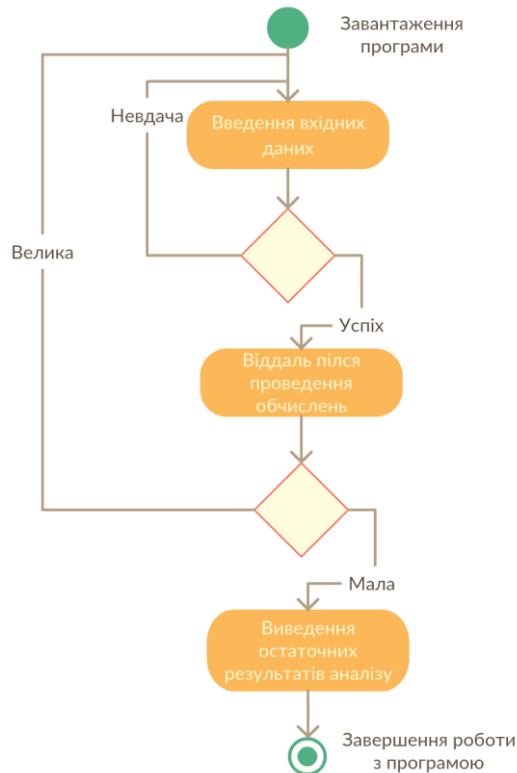


Рисунок 3.11 – Діаграма станів

Після формування імітаційної моделі ПЗ здійснюємо її програмну реалізацію із використанням мови програмування C#.

Блок-схема значно спрощує сприйняття коду, а розбиття загального алгоритму на кілька самостійних одиниць (підпрограми або об'ємний алгоритм) дозволяє досить детально проаналізувати поведінку ПЗ при його подальшому застосуванні.

На рисунку 3.12 наведено загальну блок-схему ПЗ «Фур'є-аналіз функцій зі змінним періодом».

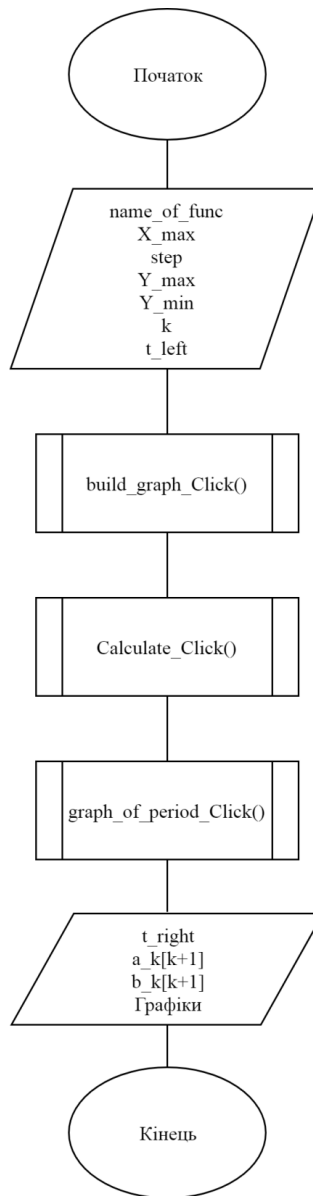


Рисунок 3.12 – Загальна блок-схема ПЗ «Фур’є-аналіз функцій зі змінним періодом»

На вхід подаються параметри побудови графіків, назва функції, кількість членів ряду Фур’є та ліва точка інтервалу аналізу. Як результат отримуємо графіки функції, її змінного періоду, суми ряду Фур’є та числові значення правої точки інтервалу аналізу та коефіцієнтів ряду Фур’є.

Функція `build_graph_Click()` призначена для побудови графіка досліджуваної функції.

Наступною найважливішою частиною розробленого ПЗ є функція `Calculate_Click()`, у якій здійснюються усі основні обчислення, визначається тип

досліджуваної функції та відбуваються виклики допоміжних функцій. Етапи її роботи такі:

1. Здійснюємо визначення кількості членів ряду, у який потрібно розкласти функцію, а також степенів, якщо він є у досліджуваній функції.
2. Заповнюємо буферний рядок символами, що відповідають за степінь, у яку відбувається підняття, а також перевіряємо чи функція не є логарифмічною (якщо є, то знаходимо значення основи логарифму).
3. Перевіряємо чи містяться у назві функції ключові слова (функції, залежно від синтаксису) і визначаємо тип функції, що піддається аналізу.
4. Якщо міститься логарифм, то визначаємо його основу та степінь функції, якщо він заданий у функції (за замовчуванням приймаємо як 1).
5. За значенням лівої межі інтервалу аналізу знаходимо праву межу інтервалу аналізу залежно від типу функції, використовуючи виклик підпрограми `getEndInterval()`.
6. Знаходимо крок для застосування чисельного методу інтегрування – методу Сімпсона, а також знаходимо значення аргументу функції.
7. Обчислюємо значення досліджуваної функції для раніше обчисленого аргументу і оголошуємо масиви коефіцієнтів ряду Фур'є.
8. Здійснюємо обчислення та виведення коефіцієнтів ряду в залежності від типу досліджуваної функції, використовуючи метод Сімпсона для чисельного інтегрування.
9. Створюємо масиви рядків символів із конвертованими значеннями коефіцієнтів ряду Фур'є і використовуємо один рядок у циклі для того, щоб отримати загальний розклад функції змінного періоду у вигляді суми ряду Фур'є із врахуванням типу.

Дана частина алгоритму, що наведена на блок-схемі відповідає за обчислення віддалі між досліджуваною та одержаною функціями також із використанням чисельного інтегрування – методу Сімпсона (парабол).

10. Здійснюємо виведення графіка суми ряду як результат аналізу та виклик функції `AmplFas()`, яка необхідна для побудови графіку амплітудного спектру.

На рисунку 3.13 наведено блок-схему функції `getEndInterval()`.

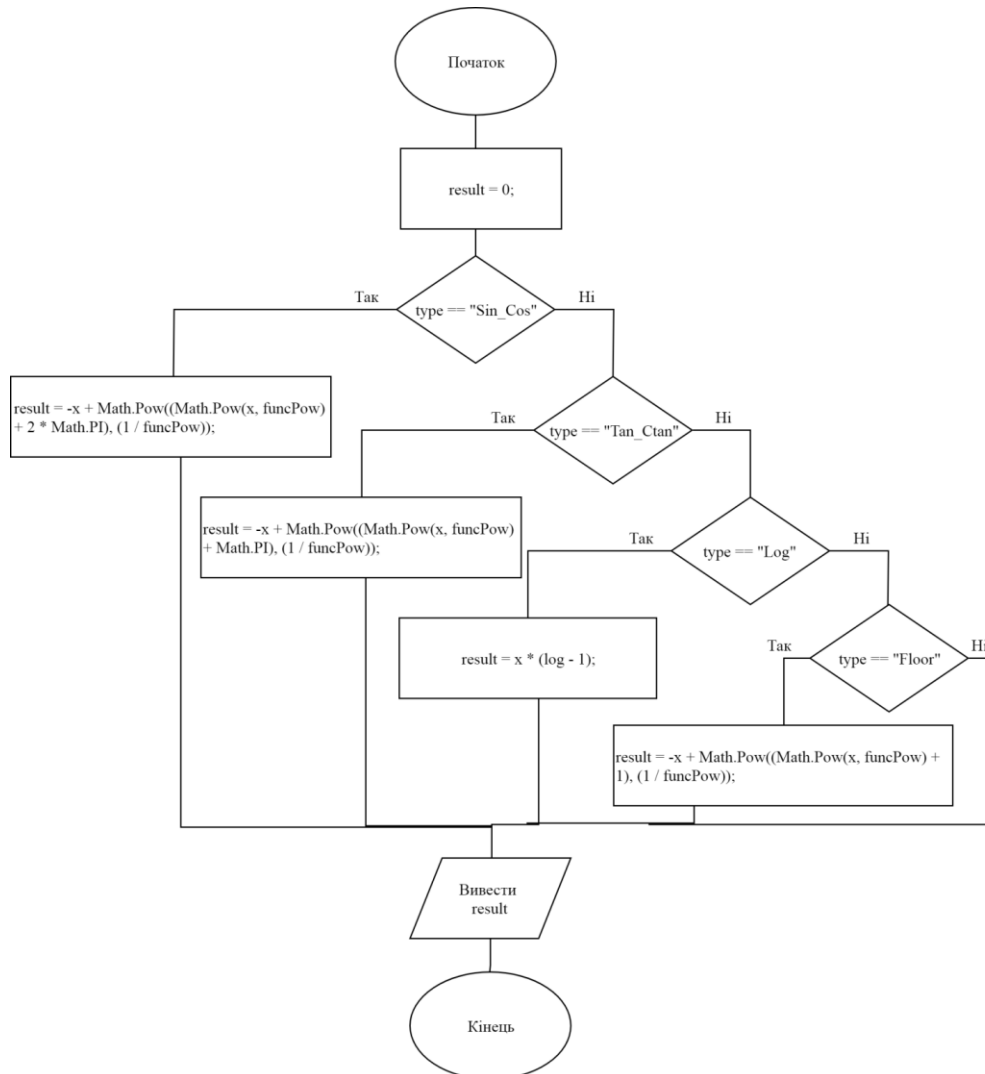


Рисунок 3.13 – Блок-схема роботи функції `getEndInterval()`

Залежно від типу функції, що піддається аналізу, отримуємо числове значення правої межі аналізу даної ФЗП.

На рисунку 3.14 наведено блок-схему функції `AmplFas()`.

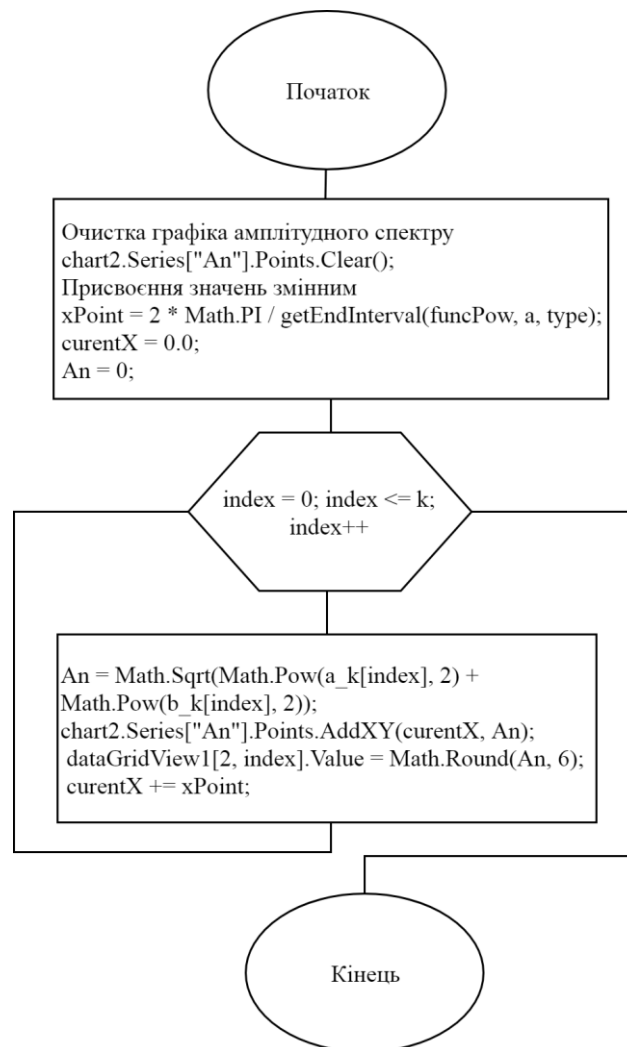


Рисунок 3.14 – Блок-схема роботи функції `AmplFas()`

`AmplFas()` забезпечує обчислення значень амплітудного спектру та їх використання для побудови відповідного графіку.

Із використанням функції `graph_of_period_Click()` залежно від типу ФЗП обчислюємо масив значень аргументу та функції і передаємо ці масиви при ініціалізації об'єкту класу, що відповідає за графік змінного періоду досліджуваної функції у новому діалоговому вікні.

Узагальнений алгоритм роботи комп'ютерної програми для Фур'є-аналізу ПФЗП зображено на рисунку 3.15.

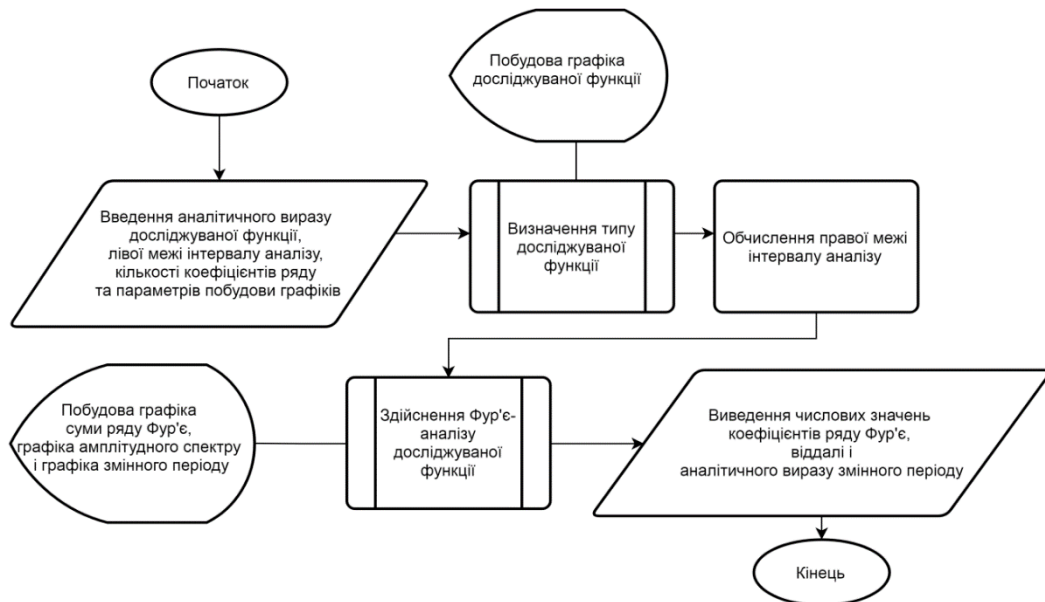


Рисунок 3.15 – Узагальнений алгоритм програми Фур'є-аналізу ПФЗП

Наступним етапом йде тестування роботи розробленого ПЗ. Під час нього відбувається відлагодження коду та виявлення і виправлення багів (помилки) у програмі. Для здійснення обробки виняткових ситуацій реалізовано введення вхідних значень за замовчуванням при порожніх полях введення або при некоректних діях користувача.

Інтерфейс програми наведено на рисунку 3.16, а фрагмент лістингу – в додатку Б.

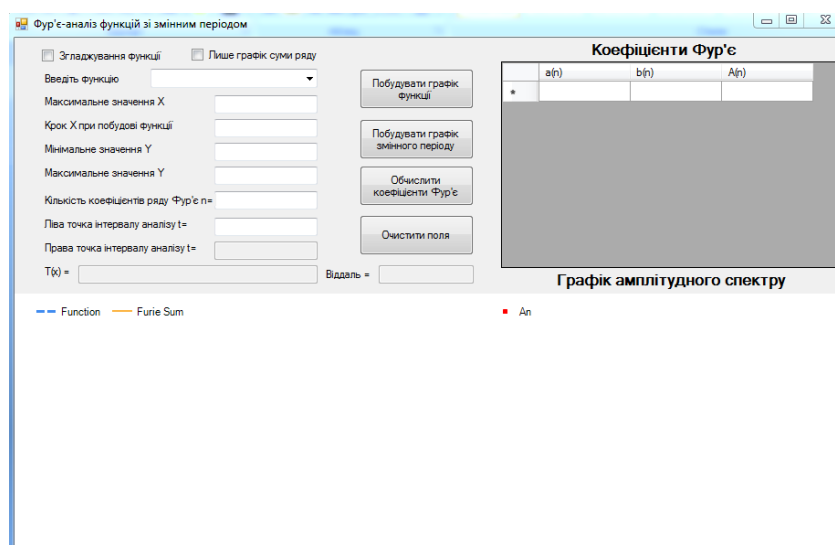


Рисунок 3.16 – Інтерфейс розробленого ПЗ

У блоці вхідних даних користувач задає функцію для дослідження, максимальні та мінімальні значення, а також крок для відображення графіків у декартовій системі координат. Окрім цього задається кількість коефіцієнтів ряду Фур'є, які необхідно обчислити та ліва точка інтервалу аналізу (початкова точка аналізу).

Щодо вихідних даних, то для їх отримання реалізовано три кнопки: «Побудувати графік функції», «Побудувати графік змінного періоду» і «Обчислити коефіцієнти Фур'є».

Вихідними даними або результатами роботи ПЗ вважаємо: значення лівої точки інтервалу аналізу (кінцевої), значення коефіцієнтів ряду Фур'є, віддаль між досліджуваною та одержаною (сума ряду) функціями, аналітичне та графічне виведення функції змінного періоду, графік досліджуваної та одержаної функції у одній системі координат і побудований графік амплітудного спектру.

Алгоритм роботи користувача із ПЗ наступний:

1. Вводимо вхідні дані (кількість коефіцієнтів ряду Фур'є та ліва точку інтервалу інтегрування).
2. Натискаємо кнопку «Побудувати графік функції», щоб ознайомитись із поведінкою досліджуваної функції (її виглядом).
3. Натискаємо кнопку «Обчислити коефіцієнти Фур'є», щоб у зручній формі таблиці одержати коефіцієнти ряду, ліву точку аналізу, віддаль, формулу змінного періоду, побудований графік суми ряду і графік амплітудного спектру.
4. Натискаємо кнопку «Побудувати графік змінного періоду», щоб побачити графічне представлення аналітичного запису (формули).
5. Натискаємо кнопку «Очистити поля», щоб змінити функцію та параметри аналізу.
6. Для аналізу кількох функцій у одному вікні (без його закриття) повторюємо пункти 1-5.
7. Завершуємо роботу із програмою.



Спочатку потрібно ввести або обрати із списку наперед доступні функції (рис. 3.17). Наводиться список із різними типами ФЗП, які служать прикладом введення відповідно до синтаксису.

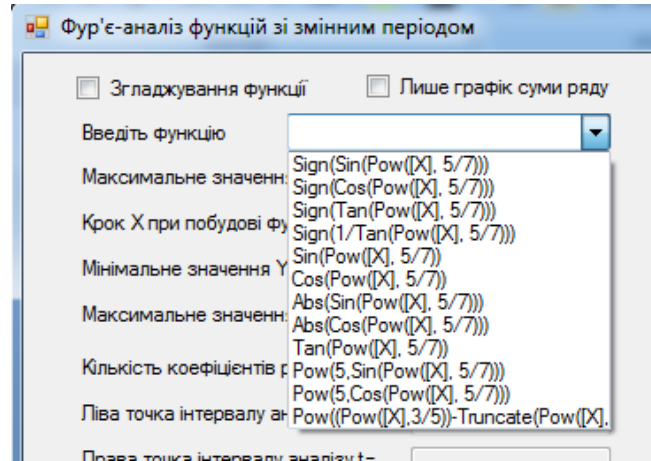


Рисунок 3.17 – Можливість вибору функцій із списку

Передбачено і ручне введення користувачем функцій для аналізу. Також корисними є можливість згладжування графіку досліджуваної функції та відображення лише одного із побудованих графіків (наприклад, графіка суми ряду). Розраховані коефіцієнти ряду Фур'є виводяться у вигляді таблиці, а графіка амплітудного спектру візуалізується.

**Приклад 1.** Дослідження функції  $f(x) = \text{sign}(\sin x^{5/7})$  та її графік зображено на рисунку 3.18.

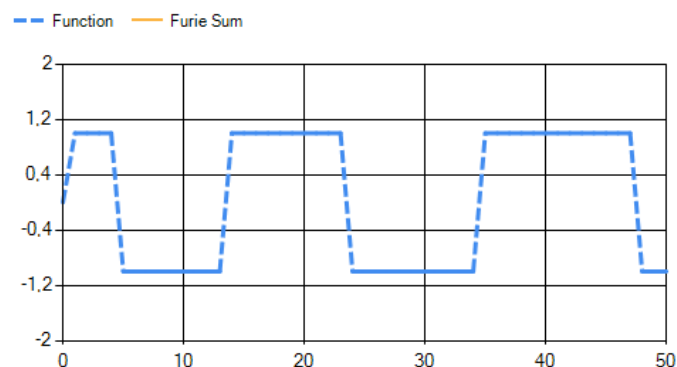


Рисунок 3.18 – Графік функції  $f(x) = \text{sign}(\sin x^{5/7})$  у розробленій програмі

Здійснено необхідні для аналізу обчислення, натиснувши кнопку «Обчислити коефіцієнти Фур'є», вибравши кількість коефіцієнтів 9. Отримані числові значення та графіки для аналізу наведено на рисунку 3.19.

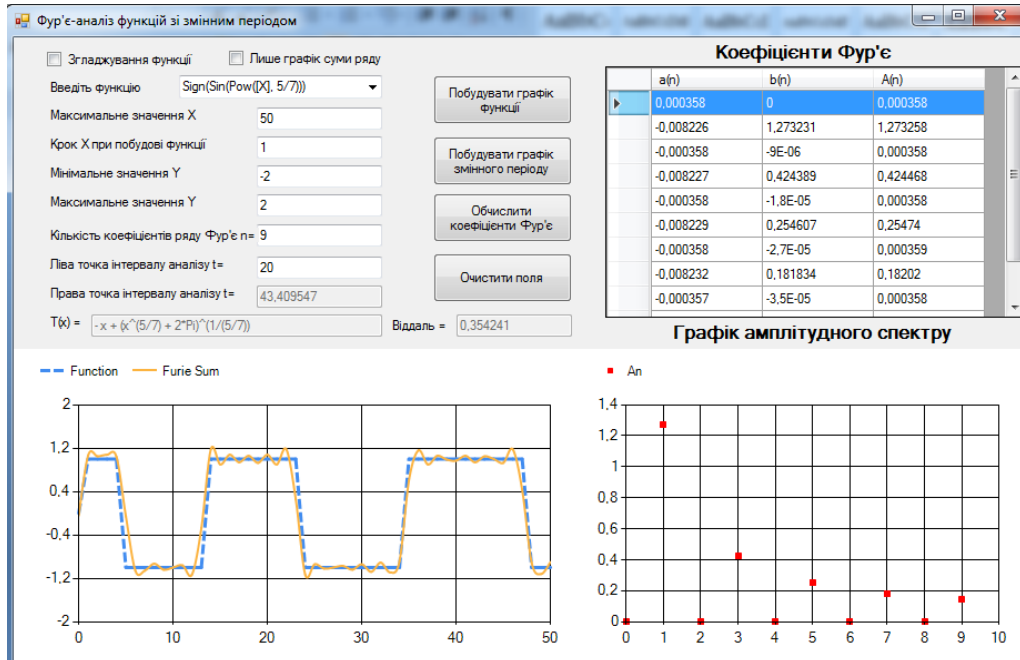


Рисунок 3.19 – Результати обчислень, здійснених програмою

За бажанням можна побачити графік змінного періоду щодо обчисленої формули для даного типу функції (рис. 3.20).

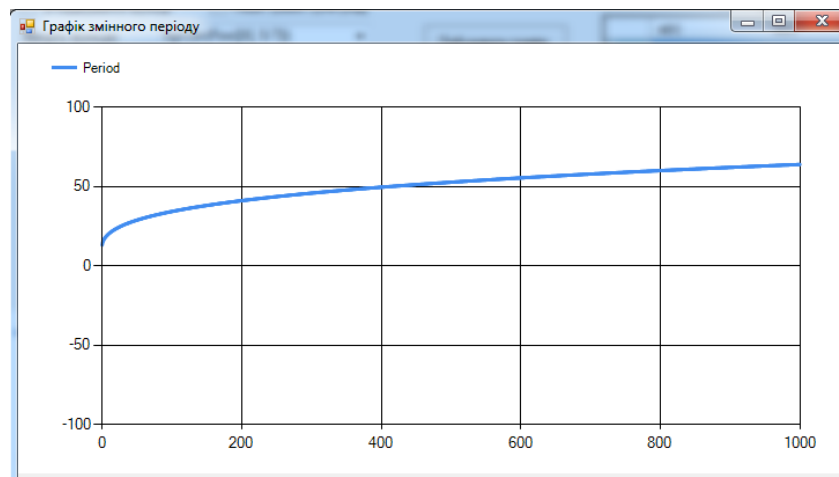


Рисунок 3.20 – Графік змінного періоду для функції  $f(x) = \text{sign}(\sin x^{5/7})$

Збільшимо кількість коефіцієнтів ряду Фур'є і повторно здійснимо обчислення (рис. 3.21).

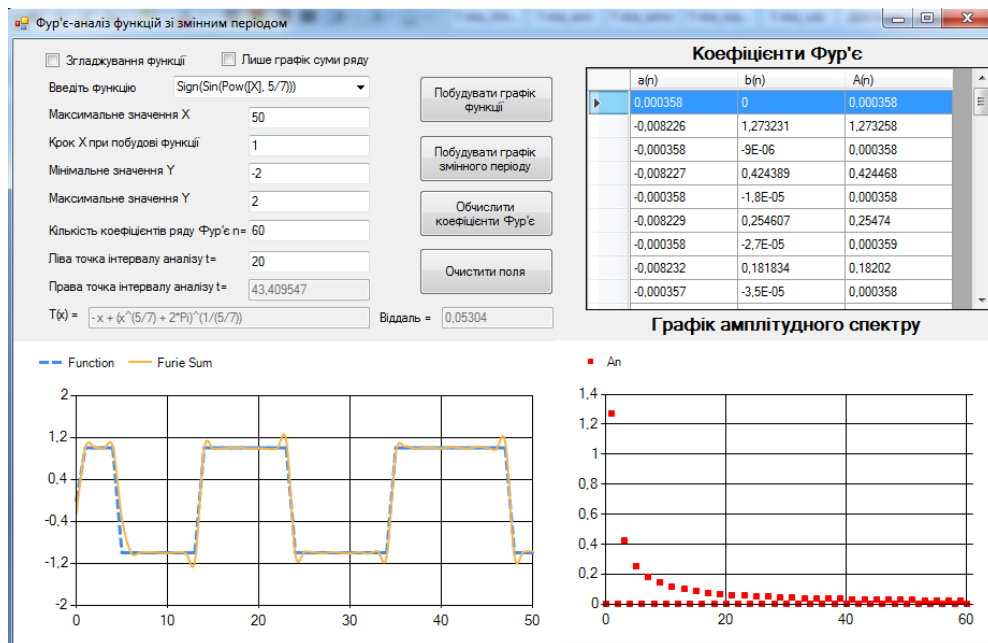


Рисунок 3.21 – Зменшення віддалі між функцією  $f(x) = \text{sign}(\sin x^{5/7})$  та сумою ряду Фур'є

Зменшення віддалі між функцією та сумою ряду Фур'є одразу стає помітним на графіку, а також у таблиці відображаються усі обчислені коефіцієнти ряду і набув зміни графік амплітудного спектру.

**Приклад 2.** Аналіз функцій із модулем  $f(x) = \left| \sin x^{3/4} \right|$ . Результати обчислень включно із правою точкою аналізу, функцією змінного періоду для даного типу функцій, а також коефіцієнтами ряду, його графічним представленням та графіком амплітудного спектру наведено на рисунку 3.22.

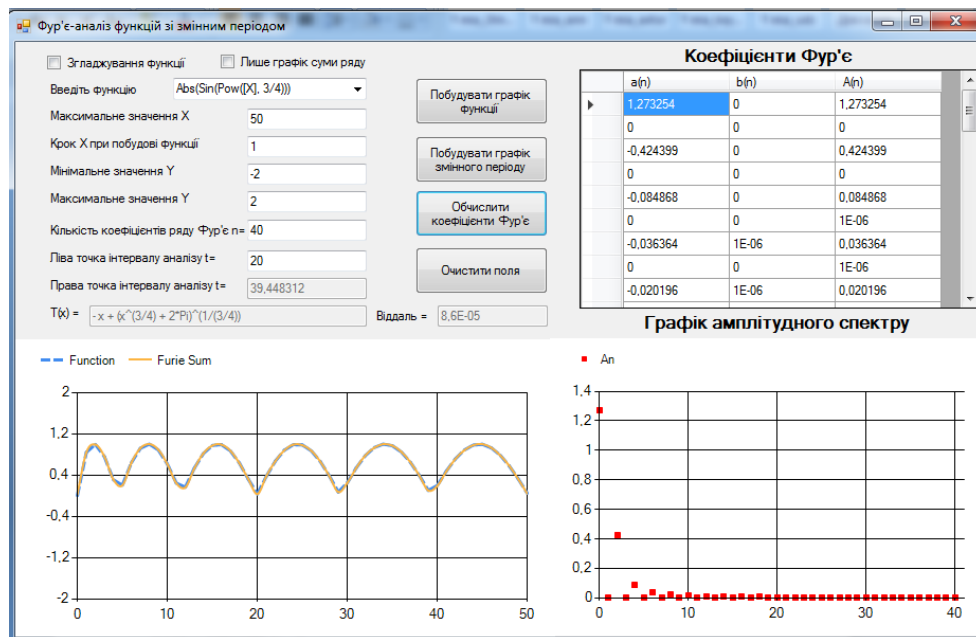


Рисунок 3.22 – Результат аналізу функції  $f(x) = \left| \sin x^{3/4} \right|$

Перевірено, що при збільшенні кількості коефіцієнтів ряду віддаль суттєво зменшується, що свідчить про вірність розрахунків.

Ще одним типом ФЗП є степеневі функції. У програмі передбачено аналіз і такого типу ФЗП.

**Приклад 3.** Функція  $f(x) = 5^{\sin x^{5/7}}$ . На рисунку 3.23 наведено загальний результат роботи програми для даної функції.

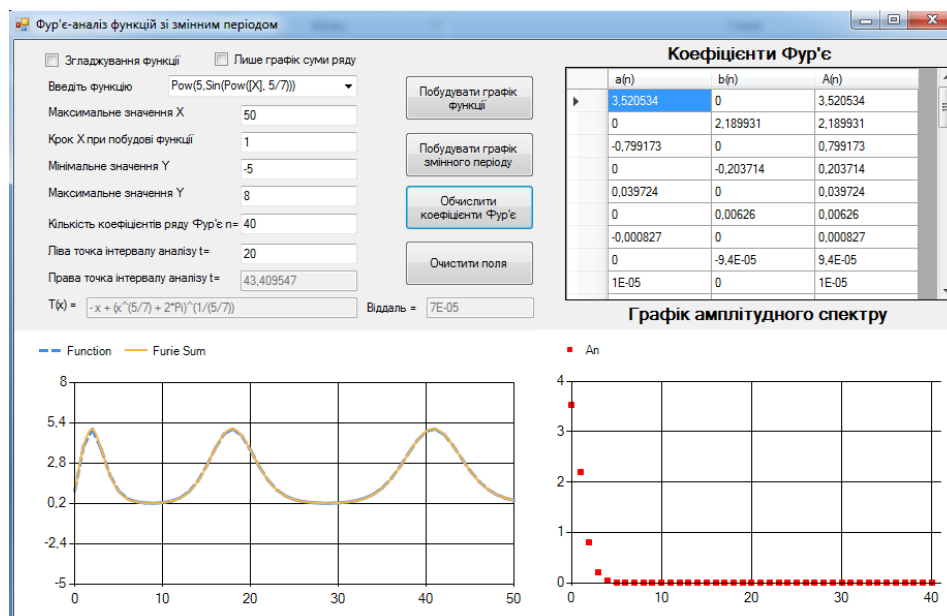


Рисунок 3.23 – Результат аналізу функції  $f(x) = 5^{\sin x^{5/7}}$

Іншим типом ФЗП, що піддаються дослідженню є «дробові» функції (дробова частина від числа). Здійснимо аналіз на прикладі однієї із таких функцій.

**Приклад 4.** Нехай функція  $f(x) = \left\{x^{3/5}\right\}^2$  зі змінним періодом, змінний період  $T(x) = -x + \left(x^{3/5} + 1\right)^{5/3}$ . Введення вхідних даних із використанням у записі функції Truncate(), яка повертає цілу частину від числа використовуємо для одержання дробової частини. На рисунку 3.24 наведено результат аналізу при дослідженні ФЗП  $f(x) = \left\{x^{3/5}\right\}^2$ .

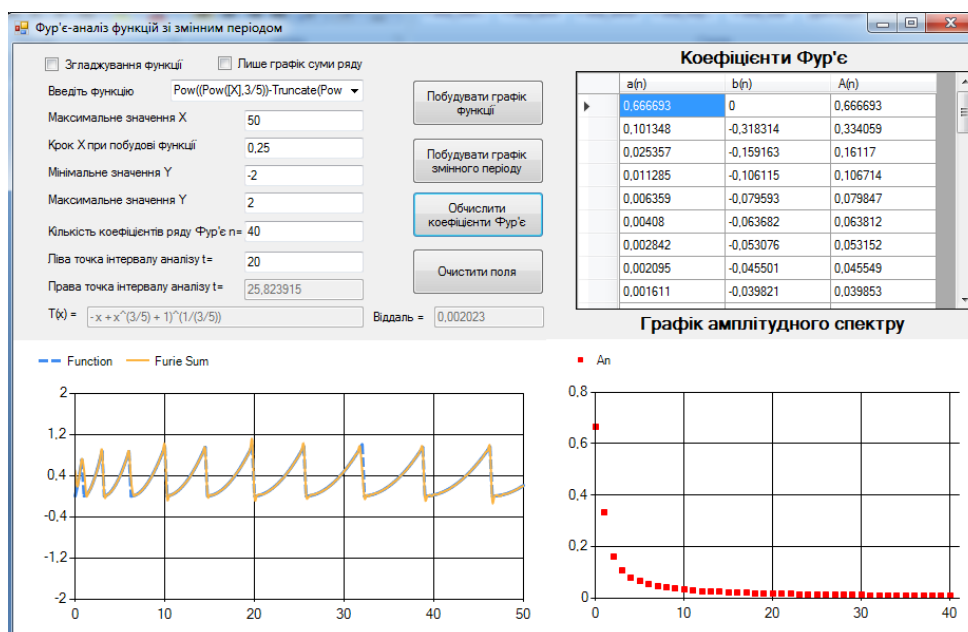


Рисунок 3.24 – Результат аналізу досліджуваної ФЗП  $f(x) = \left\{x^{3/5}\right\}^2$

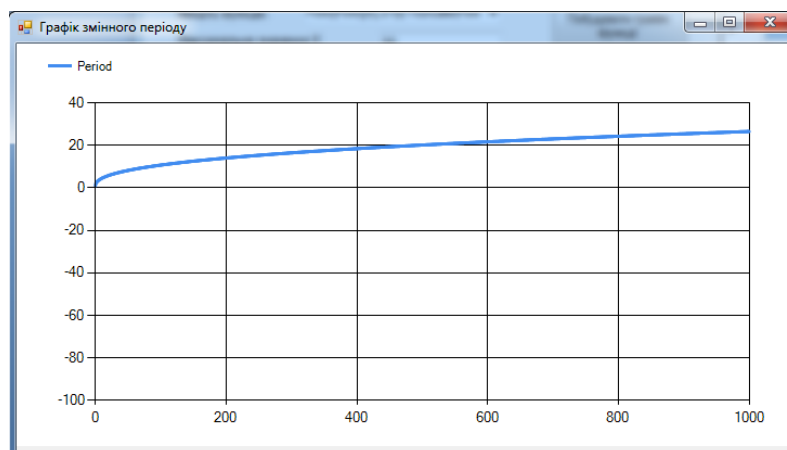


Рисунок 3.25 – Графік змінного періоду функції  $f(x) = \left\{x^{3/5}\right\}^2$

Окрім цього за допомогою розробленого ПЗ «Фур'є-аналіз функцій зі змінним періодом» можна здійснювати обчислення і над рядом подібних до розглянутих функцій. Процедура обчислень та виведення числових і графічних результатів є аналогічною до результатів тестування роботи програми, наведених вище.

Реалізація усіх вимог у вигляді постановки задачі для розробки, а також розроблена імітаційна модель (на основі діаграм варіантів використання, класів та станів) після програмної реалізації та успішного тестування дозволяє автоматизувати процес дослідження ПФЗП.

Впровадження інформаційної технології дослідження ПФЗП на основі Фур'є-аналізу дає можливість всебічного дослідження функцій зі змінним періодом, в тому числі проведення спектрального аналізу, що широко використовується в наукових прикладних дослідженнях механіки, акустики, медицини, метеорології, економіки та інших галузях народного господарства.

Відзначимо, що при побудові рядів Фур'є ПФЗП вважається, що їх змінний період є відомим. Проте, для процесів зі змінним періодом, наприклад, для ЕКГ, отриманих після дії збудника спокою, змінний період, як правило, є невідомим, тобто його знання скоріше є винятком, ніж закономірністю. Враховуючи наявність таких ситуацій, часто постає задача знаходження оцінки змінного періоду. Цю задачу ми розглянемо в наступному розділі.

### **Висновки до розділу 3**

1. Побудована ортогональна система тригонометричних функцій зі змінним періодом, яка відрізняється від «звичайної» тригонометричної системи ортогональних функцій, в першу чергу тим, що довжина інтервалу ортогональності змінюється у відповідності до змінного періоду системи, а також, що в скалярний добуток функцій системи визначається через вагову функція.
2. На основі системи тригонометричних функцій зі змінним періодом та вигляду скалярного добутку функцій цієї системи введено відповідний

- простір ПФЗП, в якому введено скалярний добуток із ваговою функцією, визначено змінний інтервал інтегрування для скалярного добутку, визначено норму функцій цього простору та віддаль між його елементами.
3. Побудовано ряд Фур'є для ПФЗП та записані формули для визначення його коефіцієнтів, чим закладені основи рядів Фур'є для ПФЗП.
  4. Розглянуті приклади побудови скінчених рядів Фур'є для аналітично заданих ПФЗП. Аналіз результатів побудови показав збіжність рядів до самих функцій, що, по-перше, не перечить результатам створеної теорії рядів Фур'є ПФЗП, по-друге, дає можливість для задач практики проводити дослідження скінчених рядів Фур'є, а отримані при цьому властивості рядів вважати за властивості самих функцій.
  5. Алгоритми побудови рядів Фур'є ПФЗП реалізовані у створеному програмному забезпеченні «Фур'є-аналіз функцій зі змінним періодом», а правильність його функціонування перевірена на прикладах.
  6. Сукупність розроблених методів побудови рядів Фур'є періодичних функцій зі змінним періодом, оцінювання віддалі між функцією зі змінним періодом та її скінченною сумою ряду Фур'є є складовими ІТ, яка дозволяє здійснювати спектральний аналіз процесів зі змінним періодом і цим самим дає можливість забезпечити точність, та підвищити ступінь повноти інформації про процеси з характерною періодичністю, що змінюється за певним правилом

## РОЗДІЛ 4

### МЕТОД ОЦІНКИ ЗМІННОГО ПЕРІОДУ ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ ДО АНАЛІЗУ ВАРІАБЕЛЬНОСТІ СЕРЦЕВОГО РИТМУ

При побудові рядів Фур'є ПФЗП вважається, що їх змінний період є відомим. Таке ми спостерігали при розгляді тригонометричних функцій зі змінним періодом. Їх змінні періоди записувалися у вигляді певних формул. При розробці способів задання ПФЗП теж записували їх змінні періоди. Знання періодів ПФЗП було однією із необхідних умов побудови їх рядів Фур'є. Щодо емпіричних ПФЗП, то їх змінний період, як правило, є невідомим, тобто його знання є винятком, а не закономірністю. Прикладом такої ситуації є ЕКГ, отримані після дії на організм певного збудника спокою. Враховуючи це, ще однією із задач аналізу процесів зі змінним періодом є задача знаходження (побудови) оцінки змінного періоду.

Подібна ситуація спостерігається також для періодичних функцій і періодичних випадкових процесів з постійним періодом. Однією із задач, що вже стала класичною, і де розглядалося питання оцінки періоду, була задача дослідження інтенсивності появи сонячних плям [21]. На перших порах здійснювалася реєстрація моментів появи сонячних плям. Кожному із таких моментів у відповідність ставилося число, що було кількісною мірою плям, утворених на Сонці за певний інтервал часу, наприклад, за місяць. Для наочності ці ряди подавали у вигляді графіків. Один із таких графіків за період з 1700 р. до 2000 р. і показаний на рисунку 4.1 [21, с.30].

Аналізуючи їх, в 1843 році Швабе відкрив, що для процесу утворення сонячних плям характерна **періодичність** із середнім періодом 10 років. Деяко пізніше Вольф отримав більш точне значення згаданого періоду – приблизно 11 років, а в 1848 ввів широко розповсюджене поняття відносного числа сонячних плям (числа Вольфа) – як міру інтенсивності плямоутворення, яка успішно використовується в різноманітних задачах їх аналізу.



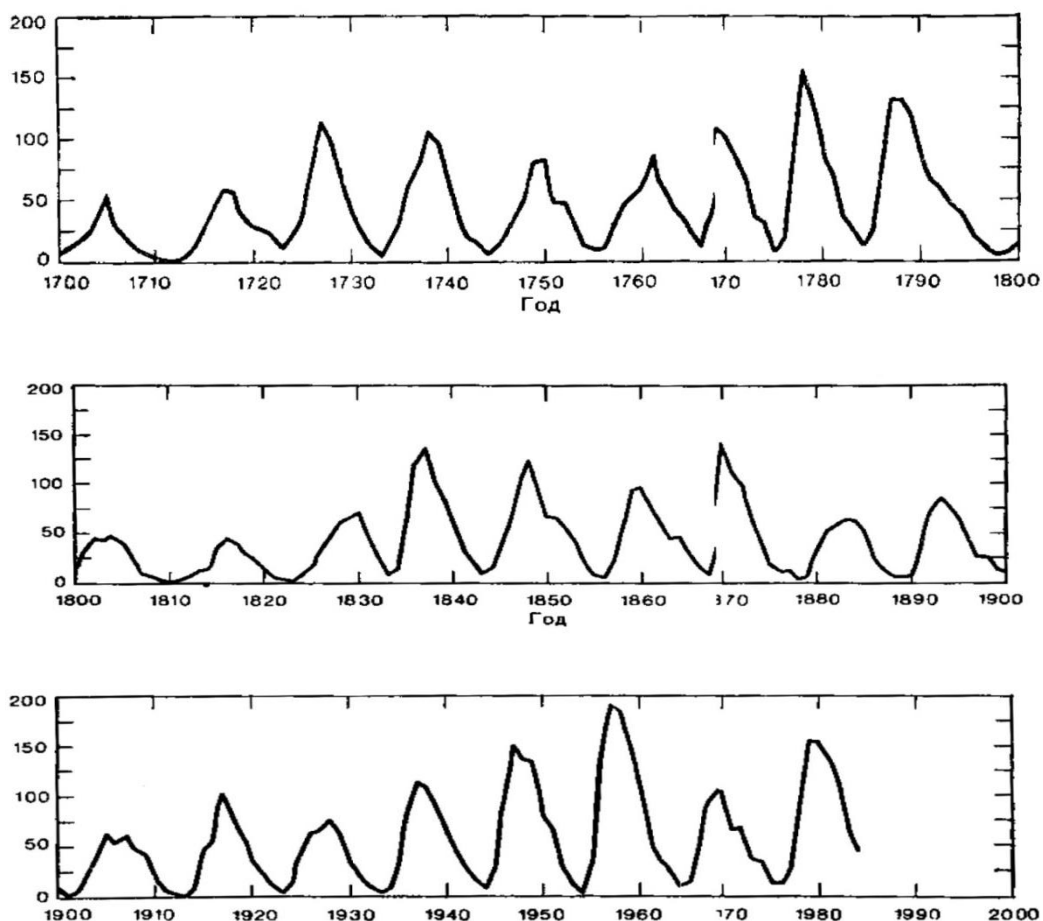


Рисунок 4.1 – Графік значень сонячних плямоутворень

Аналізуючи їх, в 1843 році Швабе відкрив, що для процесу утворення сонячних плям характерна **періодичність** із середнім періодом 10 років. Децю пізніше Вольф отримав більш точне значення згаданого періоду – приблизно 11 років, а в 1848 ввів широко розповсюджене поняття відносного числа сонячних плям (числа Вольфа) – як міру інтенсивності плямоутворення, яка успішно використовується в різноманітних задачах їх аналізу.

Окремий етап в дослідженні сонячних плям, посідають дослідження Шустера [21]. Виходячи із наглядної «періодичності» послідовності (ряду) чисел сонячних плям, Шустер запропонував спосіб їх аналізу, що отримав назву періодограманалізу. В основі цього методу лежало припущення, що ряд із чисел сонячних плям утворюється синусоїдами і косинусоїдами різних частот, а задача аналізу цього ряду зводилася до виявлення в ньому прихованих (рос.: «скрытых») періодичностей. Шустер виконав обробку середньомісячних

значень числа сонячних плям за період з 1749 до 1894 р. і при цьому отримав оцінку періоду, рівну 11,125 року. Ще один підхід до дослідження числа (поток) сонячних плям запропонував Юл (1928), для цього за модель появи сонячних плям він використав процес авторегресії і всі подальші дослідження здійснював на базі цієї моделі.

Задачі та методи оцінки постійного періоду розглядалася в значній кількості робіт. Про постановку таких задач і методи їх вирішення можна знайти в роботі [133], яку вже можна вважати класичною. Ще одна із задач в цьому напрямку розглядалася в [54, 116] і стосувалася побудови оцінки періоду періодично корельованих випадкових процесів.

В порівнянні із наявністю значної кількості задач та методів побудови оцінки періоду для періодичних функцій і випадкових процесів, задача оцінки змінного періоду не розглядалася. Задачу оцінки змінного періоду розглянемо на прикладі ЕКГ, отриманої після дії на організм фізичного навантаження.

#### **4.1 Постановка задачі оцінки змінного періоду емпіричних функцій зі змінним періодом**

Подібно до ситуації із постійним періодом, виникають питання необхідності знання змінного періоду. Можна вказати на декілька важливих напрямів використання оцінки змінного періоду. Якщо для ПФЗП її період невідомий, наявність оцінки дозволяє розглядати задачі побудови ряду Фур'є такої функції, використовуючи при цьому замість точного значення змінного періоду його оцінку. Неабияке значення оцінка змінного періоду матиме і для задач в кардіології при дослідженні варіабельності серцевого ритму в нестационарних режимах, тобто у випадках дії на організм певних збудників спокою, найперше фізичного навантаження. Побудова змінного періоду ЕКГ після фізичного навантаження дозволить оцінити функціональні та адаптаційні можливості організму та оцінити стан людини, її фізичні здатності.

В порівнянні із наявністю значної кількості задач та методів побудови оцінки періоду для періодичних функцій і випадкових процесів, задача оцінки змінного періоду не розглядалася. Задачу оцінки змінного періоду розглянемо на прикладі ЕКГ, отриманої після дії на організм фізичного навантаження.

Процес побудови оцінки змінного періоду ЕКГ, отриманої після фізичного навантаження розділимо на два етапи. На першому етапі необхідно провести експериментальні дослідження з метою отримати послідовність значення змінного періоду на протязі деякого часового інтервалу. Такими значеннями є  $R-R$  інтервалами. На другому – використовуючи послідовність  $R-R$  інтервалами, методом апроксимації побудувати функцію, яка і буде оцінкою змінного періоду.

#### **4.2 Відбір експериментальних даних для оцінки змінного періоду ЕКГ**

Експеримент з відбору даних полягає в тому, що спочатку організм пацієнта піддається деякому «стандартному» фізичному навантаженню (двадцять глибоких присідань). Зразу ж після присідання здійснювався відбір  $R-R$  інтервалів.

Для відбору експериментальних даних, необхідних для побудови оцінки змінного періоду ЕКГ існують різні засоби медичного і немедичного призначення.

Реєстрація електрокардіограми, що фіксує серцевий ритм протягом декількох хвилин після невеликого фізичного навантаження з метою подальшого аналізу  $R-R$  інтервалів відбувається за допомогою сучасних електрокардіографів холтерівського моніторингу, які відрізняються високою технічною досконалістю, наприклад, Комп'ютерний електрокардіографічний комплекс CARDIOTEST (DX-системи, Україна), призначений для обробки, зберігання, аналізу та друку біоелектричних потенціалів серця, переданих у цифровому вигляді підсилювачем на комп'ютер. У системі CARDIOTEST передбачено систему автоматичного аналізу аритмії серцевого ритму. Система

аналізує кожен комплекс і наочно дає інформацію про синусовий ритм, а також про наявність передсердних, шлуночкових і вузлових електрокардіосигналів. Інші медичні прилади: Кардіотехніка-4000 (ИНКАРТ, Росія), Монітор артеріального тиску і електрокардіосигналів добовий SDM23 (ТОВ "ІКС-Техно", Україна). Вартість таких приладів дуже висока, а щоб ними скористатись, потрібно звертатись в спеціалізовану клініку, оснащену відповідним обладнанням і яка має в штаті фахівців, що володіють методикою обробки та аналізу отриманих даних.

Однак, аналіз приладів для реєстрації ЕКГ з метою аналізу  $R-R$  інтервалів показав, що для аналізу ритму серця є прилади немедичного призначення, менш вартісні та доступніші для будь-якого користувача. Це спортивні пульсометри, наприклад, годинник Polar M600, Кардіофлешка ECG Dongle (вимірювання частоти серцевих скорочень (ЧСС); відображення роботи серця в режимі реального часу, відправка лікарю-кардіологу отриманих результатів вимірювань через мобільний додаток), спортивний браслет POLAR H10 (вимірювання пульсу, що дозволяє уникнути перешкод при передачі даних і забезпечує високу точність).



Рисунок 4.2 – Пульсометри: а) Polar M600, б) Кардіофлешка ECG Dongle, в) спортивний пояс POLAR H10

Найбільшу увагу привернув пульсометр POLAR RS800SD з сенсорами POLAR S3 STRIDE SENSOR™ WIND, Garmin Forerunner 305 – давач частоти пульсу з визначенням швидкості руху та варіабельності ритму серця (рис.4.3).

Монітор серцевого ритму POLAR RS810SD дозволяє проводити безперервну обробку сигналів GPS і ЧСС із визначеною експериментатором дискретністю; записує час між R-піками серцевого ритму; має обсяг пам'яті для багатогодинного запису динаміки зміни реєстрованих показників ЧСС у реальному масштабі часу; має можливість комп'ютерної обробки даних у прикладній програмі: база даних спортсменів, динаміка ЧСС, швидкість пройденої віддалі, підсумки показників за період підготовки тощо; має стандартний інтерфейс для швидкого і легкого з'єднання як з комп'ютером, так і з іншими пристроями.



Рисунок 4.3 – Пульсометр POLAR RS800SD

Усі дані вимірювань опрацьовуються в одному програмному пакеті, який забезпечує їх детальний аналіз та інтерпретацію. Монітор серцевого ритму – мобільна система, яка дозволяє позбутися прив'язки об'єкта дослідження до ергометра (бігової доріжки, велоергометра, веслового або плавального ергометра) та проводити дослідження за межами лабораторії за умов спортивних тренувань і змагань спортсменів. POLAR RS810SD відповідає стандартам з контролю якості ISO 9001. Цей пульсометр є загальновизнаним у світі і його точність та надійність вимірювання варіабельності серцевого ритму (BCP) в умовах фізичних навантажень були підтвердженні в роботі [6, 11].

Даним пульсометром POLAR RS800SD з поясом POLAR H10, який фіксує  $R - R$  інтервали, здійснюємо відбір експериментальних даних після присідання, тобто значень ЗП  $T_k, k = 1, 2, \dots, n$ , де  $T_k$  – відстань між  $R - R$  зубцями ЕКГ.

За значеннями ЗП  $T_k$  обчислювалися значення ЗЧ  $\nu_k = 1/T_k$ . Отримані дані зручно подавати у вигляді таблиці 4.1.

Таблиця 4.1 – Експериментальні дані

$k$	1	2	...	$n-1$	$n$
$T_k$	$T_1$	$T_2$	...	$T_{n-1}$	$T_n$
$\nu_k$	$\nu_1$	$\nu_2$	...	$\nu_{n-1}$	$\nu_n$

Кожне десяте значення  $T_k$  та  $\nu_k$  показані на рисунку 4.4, графіки 1 і 2.

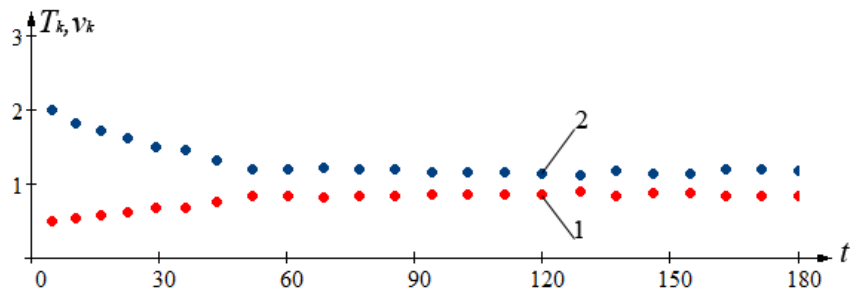


Рисунок 4.4 – Експериментальні значення змінного періоду  $T_k$  (1) та змінної частоти  $\nu_k$  (2), отримані після фізичного навантаження пацієнта

### 4.3 Алгоритм оцінки змінного періоду ЕКГ після фізичного навантаження

Для знаходження функціонального виразу оцінки змінного періоду використаємо метод апроксимації значень періоду  $T_k, k=1,2,\dots,n$ , або відповідних їм значень  $\nu_k$ . Нагадаємо [28], що суть апроксимації полягає в побудові такої функції, яка б найбільш точно («найкращим» чином) відтворювала б динаміку (характер, особливості, тенденцію) поведінки експериментальних даних. Вирішення цієї задачі теж розіб'ємо два етапи. Спочатку здійснюється вибір класу функцій, до якого відноситься апроксимуюча

функція. Це може бути лінійна функція, квадратична, поліноміальна заданого степеня, логарифмічна, експоненційна тощо. На другому етапі визначаються коефіцієнти та параметри цієї функції.

Враховуючи зроблені зауваження, проведемо попередній аналіз значень періоду  $T_k, k=1,2,\dots,n$ , та відповідних значень частоти  $\nu_k$ , графіки яких наведених на рисунку 4.4. Аналіз динаміки зміни  $T_k$  та  $\nu_k$  показує, що спочатку доцільно провести апроксимацію ЗЧ  $\nu_k$ . Щодо графіка значень  $T_k, k=1,2,\dots,n$ , то вказати клас функцій, представник якого дозволив би відтворювати відповідні закономірності, дещо проблематично.

Можна стверджувати, що поведінка  $\nu_k$  має форму експоненційної залежності (змінюється за експоненційним законом), тому для відтворення цієї залежності можна взяти функцію експоненційного типу

$$\nu(t) = a + be^{-\alpha t}, t \in (0, \infty). \quad (4.1)$$

Для функції апроксимації  $\nu(t) = a + be^{-\alpha t} \stackrel{df}{=} \nu(t, a, b, \alpha)$  значення її коефіцієнтів  $a, b$  і параметра  $\alpha$  (в загальному – параметрів  $a, b, \alpha$ ) є невідомими. Для їх знаходження виберемо критерій, суть якого полягає в тому, щоб шукана функція «найближче» розмістилася до значень частот  $\nu_k, k=1,2,\dots,n$ , найкраще відтворювала закономірність їх поведінки.

Для вирішення цієї задачі переважно використовують метод найменших квадратів. Щоб записати умову цього методу, через  $S^2$  позначимо суму квадратів різниць (відхилень) між значеннями частот  $\nu_k, k=1,2,\dots,n$ , та відповідних значень функції апроксимації  $\nu(t)$  в точках  $t_k$ :

$$S^2 = \sum_{k=1}^n (\nu_k - \nu(t_k))^2 = \sum_{k=1}^n (\nu_k - (a + be^{-\alpha t_k}))^2 \stackrel{df}{=} S^2(t_k, a, b, \alpha). \quad (4.2)$$

В цій сумі експериментальні значення частоти  $\nu_k$  є відомими, а параметри  $a, b, \alpha$  розглядаються як змінні величини. Згідно методу найменших квадратів параметри  $a, b, \alpha$  знаходяться із умови мінімізації суми:

$$\min_{a,b,\alpha} \sum_{k=1}^n (v_k - v(t_k))^2 \rightarrow 0, \quad (4.3)$$

де мінімум шукається в деякій області значень параметрів  $a, b, \alpha$ , межі якої задаються априорно, виходячи із емпіричних міркувань.

Використовуючи необхідну умову мінімуму функції  $S^2(t_k, a, b, \alpha)$  та прирівнюючи до нуля градієнт цієї функції, компонентами якого є часткові похідні  $S^2(t_k, a, b, \alpha)$  по параметрах  $a, b$  і  $\alpha$ , отримуємо систему трьох рівнянь з трьома невідомими  $a, b, \alpha$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial S^2(t_k, a, b, \alpha)}{\partial a} = 0, \\ \frac{\partial S^2(t_k, a, b, \alpha)}{\partial b} = 0, \\ \frac{\partial S^2(t_k, a, b, \alpha)}{\partial \alpha} = 0. \end{cases} \quad (4.4)$$

Після обчислення часткових похідних отримуємо наступну систему рівнянь:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n (v_k - v(t_k)) \cdot \frac{\partial v}{\partial a}(t_k) = \sum_{i=1}^n (v_k - (a + be^{-\alpha t_i})) = 0, \\ \sum_{k=1}^n (v_k - v(t_k)) \cdot \frac{\partial v}{\partial b}(t_k) = \sum_{i=1}^n (v_k - (a + be^{-\alpha t_i})) \cdot e^{-\alpha t_i} = 0, \\ \sum_{k=1}^n (v_k - v(t_k)) \cdot \frac{\partial v}{\partial \alpha}(t_k) = \sum_{i=1}^n (v_k - (a + be^{-\alpha t_i})) \cdot b(-t_k) e^{-\alpha t_i} = 0, \end{cases} \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial v}{\partial a}(t_k) = 1, \quad \frac{\partial v}{\partial b}(t_k) = e^{-\alpha t_i}, \quad \frac{\partial v}{\partial \alpha}(t_k) = b(-t_k) e^{-\alpha t_i}.$$

Отримано задачу оптимізації: необхідно знайти розв'язки системи нелінійних рівнянь (4.5) відносно невідомих  $a, b, \alpha$  при виконанні умови (4.3). Апробованим методом для розв'язування задач нелінійної оптимізації такого типу є ітеративний (з алгоритмічної точки зору) метод градієнтного спуску. Зміст його зводиться до організації руху системи в напрямку до екстремуму послідовними кроками, причому напрямок руху збігається із градієнтом, якщо



шукається максимум, і протилежний градієнту (говорять, що напрямок руху збігається з “антиградієнтом”), якщо виконується пошук мінімуму.

Градiєнт скалярної функції  $v(t, a, b, \alpha)$  (вектор градієнта) визначається як вектор-стовпець перших часткових похідних функції по незалежних змінних  $a, b, \alpha$ :

$$\mathit{grad}v(t, a, b, \alpha) = \begin{pmatrix} \frac{\partial v(t, a, b, \alpha)}{\partial a} \\ \frac{\partial v(t, a, b, \alpha)}{\partial b} \\ \frac{\partial v(t, a, b, \alpha)}{\partial \alpha} \end{pmatrix}$$

Для зручності подальшого викладу невідомі величини  $a, b, \alpha$  об'єднаємо у вектор  $\vec{u} = (a, b, \alpha)$ . Тоді

$$\mathit{grad}v(t, a, b, \alpha) = \mathit{grad}v(t, \vec{u}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial v(t, \vec{u})}{\partial a} \\ \frac{\partial v(t, \vec{u})}{\partial b} \\ \frac{\partial v(t, \vec{u})}{\partial \alpha} \end{pmatrix}$$

Часткові похідні обчислюються в точці  $\vec{u} = \vec{u}^{(i)}$ ,  $\vec{u}^{(i)} = (a^{(i)}, b^{(i)}, \alpha^{(i)})$  – наближення шуканих величин  $a, b, \alpha$ , отримане на  $i$ -ому кроці ітераційного процесу.

Для руху вздовж градієнта вводиться поняття одиничного вектора градієнта

$$e_{\mathit{grad}v}(t, \vec{u}) = \frac{\mathit{grad}v(t, \vec{u})}{\|\mathit{grad}v(t, \vec{u})\|},$$

де  $\|\bullet\|$  – норма вектора градієнта:

$$\|\mathit{grad}v(t, \vec{u})\| = \sqrt{\left(\frac{\partial v(t, \vec{u})}{\partial a}\right)^2 + \left(\frac{\partial v(t, \vec{u})}{\partial b}\right)^2 + \left(\frac{\partial v(t, \vec{u})}{\partial \alpha}\right)^2}$$

Градiєнт  $\mathit{grad}v(t, \vec{u})$  у кожній точці області визначення повністю описує поведінку функції  $v(t, a, b, \alpha)$ . Він спрямований по нормалі до поверхні рівня,

проведеної через розглянуту точку, а по абсолютній величині дорівнює похідній функції по напрямку нормалі. Через те, що найшвидша зміна функції відбувається при переміщенні вздовж нормалі до поверхні рівня, напрямок градієнта збігається з напрямком найшвидшого зростання функції. Природно, що напрямок антиградієнта збігається з напрямком найшвидшого спадання значення функції.

У методі градієнтного спуску початкові значення вектора незалежних змінних  $\bar{u}^{(0)}$  задаються довільно, або виходячи з наявної апріорної інформації про положення точки екстремуму. У запропонованому нами алгоритмі ці значення будуть дискретно перебиратися у деякому паралелепіпеді тривимірного простору для змінних  $a, b, \alpha$ . Потім виконуємо перший крок ітерації: з метою наближення до точки екстремуму  $\bar{u}^{(0)}$  змінюємо на  $\Delta\bar{u}^{(0)}$  і отримуємо  $\bar{u}^{(1)} = \bar{u}^{(0)} + \Delta\bar{u}^{(0)}$ . Потім робимо новий крок і т.д.

Таким чином, на кожній ітерації обчислюємо значення вектора

$$\bar{u}^{(i+1)} = \bar{u}^{(i)} + \Delta\bar{u}^{(i)}.$$

Оскільки напрямок вектора градієнта вказує напрямком найшвидшого збільшення функції, то кроки  $\Delta\bar{u}$  виконують у напрямку градієнта при пошуку максимуму й антиградієнта при пошуку мінімуму. У нас розглядається задача мінімізації, тому візьмемо  $\Delta\bar{u}^{(i)} = -h \cdot e_{grad} \nu(t, \bar{u}^{(i)})$ , де  $h$  – множник, що визначає величину кроку  $\Delta\bar{u}^{(i)}$ ,  $e_{grad} \nu(t, \bar{u})$  – одиничний вектор градієнта,  $i$  – номер ітерації. Знак "-" вказує на напрямок антиградієнта.

Тому алгоритм градієнтного пошуку застосуємо у наступному вигляді:

$$\bar{u}^{(i+1)} = \bar{u}^{(i)} - h \cdot e_{grad} \nu(t, \bar{u}^{(i)}) \quad (4.6)$$

При цьому величина кроку  $h \cdot e_{grad} \nu(t, \bar{u})$  змінюватиметься автоматично відповідно до зміни величини градієнта. Величину  $h$  називають параметром кроку і у переважній більшості реалізацій методу градієнтного спуску параметр кроку залишається постійним.

Ітераційна формула (4.6) може бути записана в розгорнутому вигляді:

$$\begin{pmatrix} a^{(i+1)} \\ b^{(i+1)} \\ \alpha^{(i+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{(i)} \\ b^{(i)} \\ \alpha^{(i)} \end{pmatrix} - h \begin{pmatrix} \frac{\partial v(t, \vec{u}^{(i)})}{\partial a} \\ \frac{\partial v(t, \vec{u}^{(i)})}{\|\text{grad}v(t, \vec{u}^{(i)})\|} \\ \frac{\partial v(t, \vec{u}^{(i)})}{\partial b} \\ \frac{\partial v(t, \vec{u}^{(i)})}{\|\text{grad}v(t, \vec{u}^{(i)})\|} \\ \frac{\partial v(t, \vec{u}^{(i)})}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial v(t, \vec{u}^{(i)})}{\|\text{grad}v(t, \vec{u}^{(i)})\|} \end{pmatrix}$$

Питання вибору величини кроку є досить важливим і в остаточному підсумку визначає працездатність і швидкість збіжності алгоритму. Якщо розмір кроку обраний занадто малим, то рух до оптимуму буде довгим через необхідність обчислення часткових похідних у багатьох точках. При великому кроці в районі оптимуму можуть виникнути незатухаючі коливання незалежних змінних і знижується точність знаходження екстремуму. При дуже великому кроці можливі розбіжні коливання.

У запропонованому алгоритмі параметр кроку  $h$  при переході від однієї ітерації до наступної зменшується удвоє. Це забезпечує досить велику швидкість збіжності і стійкість алгоритму.

Критерієм завершення пошуку оптимальних величин  $a, b, \alpha$  є виконання умови:

$$\sum_{i=1}^n (v_i - v(t_i))^2 < \delta,$$

де  $\delta$  – наперед задане, достатньо мале, додатне число.

Підставивши отримані значення параметрів  $a, b$  і  $\alpha$  у вираз  $v(t) = a + be^{-\alpha t}$ , отримаємо **апроксимуючу функцію** змінної частоти. Щодо апроксимації послідовності значень змінного періоду  $T_k, k=1,2,\dots,n$ , то як вже відзначалося вище, в нашому випадку є певні труднощі безпосередньо підібрати функцію  $T(t)$ , яка б достатньо точно відображала б характер поведінки цієї. Однак

враховуючи взаємозв'язок між періодом і частотою, апроксимуючою функцією змінного періоду буде функція

$$T(t) = \frac{1}{\nu(t)} = \frac{1}{a + be^{-\alpha t}}.$$

Якщо значення параметрів  $a, b, \alpha$  підставити у вираз (4.2), то значення

$$S_\nu^2 = \sum_{k=1}^n (\nu_k - (a + be^{-\alpha t_k}))^2$$

буде визначати величину (рівень) наближення наближення функції апроксимації  $\nu(t)$  до експериментальних даних. Величину  $S_\nu^2$  переважно називають мірою (оцінкою) квадратичного відхиленням функції апроксимації  $\nu(t)$  від значень  $\nu_k$ . Іноді для відхилення  $S_\nu^2$  ще використовують терміни «нев'язка» «непогодження». Термін «похибка апроксимації», який теж часто вживається для величини  $S_\nu^2$ , на нашу думку, не відповідає сутті задачі. Величина  $\sigma_\nu^2 = S_\nu^2/n$  буде середньоквадратичним відхиленням апроксимації. Крім відхилень  $S_\nu^2$  і  $\sigma_\nu^2$  ми будемо користуватися також відхиленням

$$\sigma_\nu = \sqrt{S_\nu^2/n}, \quad (4.7)$$

яке теж переважно називають середньоквадратичним відхиленням апроксимації.

Мірою квадратичного відхилення функції апроксимації  $T(t)$  від значень

$T_k, k = 1, 2, \dots, n$ , буде величина  $S_T^2 = \sum_{k=1}^n (T_k - T(t_k))^2 = \sum_{k=1}^n \left( T_k - \frac{1}{a + be^{-\alpha t_k}} \right)^2$ . Відповідне

їй середньоквадратичне відхилення

$$\sigma_T = \sqrt{S_T^2/n}. \quad (4.8)$$

#### 4.4 Інформативно-діагностичні параметри варіабельності серцевого ритму після фізичного навантаження

Можна вказати на декілька важливих напрямів використання оцінки змінного періоду. Якщо для ПФЗП її період невідомий, наявність оцінки дозволяє розглядати задачі побудови ряду Фур'є такої функції, використовуючи при цьому замість точного значення змінного періоду його оцінку. Неабияке значення оцінка змінного періоду матиме і для задач в кардіології. Зупинимось на цьому питанні більш детально.

Параметри  $a$ ,  $b$ ,  $\alpha$ , що входять в функцію змінної частоти  $\nu(t) = a + be^{-\alpha t}$  (відповідно змінного періоду  $T(t) = \frac{1}{a + be^{-\alpha t}}$ ), а також середньоквадратичні відхилення  $\sigma_\nu$ ,  $\sigma_T$  пропонується використовувати як діагностичні ознаки в задачах класифікації, розпізнавання, де досліджуються функції чи процеси зі змінним періодом. Це може стосуватися, наприклад, медичної діагностики загального призначення при оцінці стану організму, ефективності лікування чи реабілітаційного процесу. В питаннях спортивної, космічної медицини, задачах судової експертизи ці параметри можуть виявитися досить інформативними при оцінці стану та поведінки організму в стресових ситуаціях, при значних фізичних навантаженнях тощо. Зауважимо, що з позицій кардіологічного аналізу параметр  $a$  означає частоту пульсу (серцевих скорочень), яка наступить через деякий час після його стабілізації (частоту пульсу в стані спокою), параметр  $b$  означає, на яку величину зростає частота пульсу в порівнянні із частотою в стані спокою, параметр  $\alpha$  характеризує «швидкість» стабілізації пульсу.

Було проведено ряд експериментальних досліджень, пов'язаних із визначенням змінного періоду і частоти серцебиття пацієнтів після фізичного навантаження. Як приклад, наведемо результати двох експериментів, учасники яких відносилися до різних вікових категорій. В таблиці 4.2 наведені результати

вимірювань перших трьох і двох останніх відліків часу  $t_k$ , обчислені значення  $\Delta t_k, T_k, \nu_k$ .

Таблиця 4.3 – Результати вимірювань змінного періоду і частоти серцебиття пацієнтів після фізичного навантаження

	$k$	1	2	3	...	$n-1$	$n$
Експер. 1	$T_k$	0.458	0.485	0.519	...	0.812	0.793
	$\nu_k$	2.183	2.061	1.926	...	1.232	1.262
Експер. 2	$T_k$	0.41	0.439	0.489	...	0.79	0.813
	$\nu_k$	2.439	2.277	2.044	...	1.266	1.230

Для знаходження параметрів  $a, b$  і  $\alpha$  функції апроксимації частоти  $\nu(t) = a + be^{-\alpha t}$  було використано програмне забезпечення системи MATHCAD. Значення цих параметрів а також значення середньоквадратичних відхилень  $\sigma_\nu$  і  $\sigma_T$ , обчислені згідно (4.7) і (4.8), наведені в таблиці 4.3.

Таблиця 4.3 – Експериментальні значення параметрів, що входять в апроксимуючу функцію змінного періоду

Номер експерименту	Параметри змінного періоду та середньоквадратичні відхилення				
	$a$	$b$	$\alpha$	$\sigma_\nu$	$\sigma_T$
1	1,148	1,015	0,013	0,04	0,016
2	1,23	1,407	0,036	0,039	0,022

Використовуючи значення параметрів  $a, b, \alpha$ , побудовані графіки функцій апроксимації змінної частоти  $\nu(t)$  та змінного періоду  $T(t)$ . На рисунку 4.5 наведені результати для експерименту 1: експериментальні дані змінної частоти  $\nu_k, k=1,2,\dots,n$ , – точковий графік 1а; змінна частота у вигляді експоненційної функції  $\nu(t) = 1.148 + 1.015 \times e^{-0.013t}$  – графік 1б; експериментальні

дані змінного періоду  $T_k$  – точковий графік 2а; змінний період

$T(t) = \frac{1}{1.148 + 1.015 \times e^{-0.013t}}$  – графік 2б. Аналогічні результати для експерименту

2 наведені на рисунку 4.6: змінною частотою є експоненційна функція

$\nu(t) = 1.23 + 1.407 \times e^{-0.036t}$  – графік 1а, експериментальні дані змінної частоти

$\nu_k, k=1,2,\dots,n$ , – точковий графік 1б; змінний період  $T(t) = \frac{1}{1.23 + 1.407 \times e^{-0.036t}}$  –

графік 2а; експериментальні дані змінного періоду  $T_k$  – точковий графік 2б.

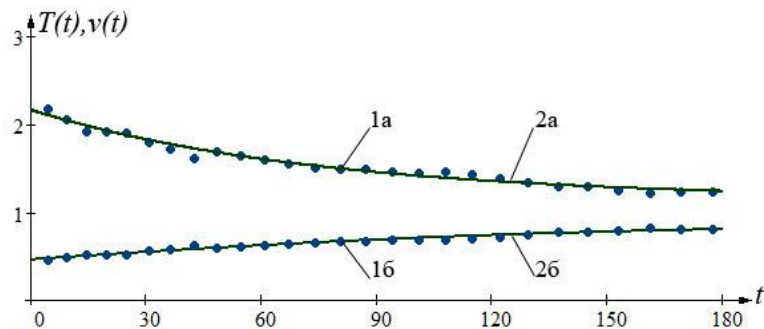


Рисунок 4.5 – Результати експерименту 1: експериментальні дані ЗЧ  $\nu_k$  та функція ЗЧ  $\nu(t)$  (графіки 1а і 1б), значення ЗП  $T_k$  та функція ЗП  $T(t)$  (графіки 2а і 2б)

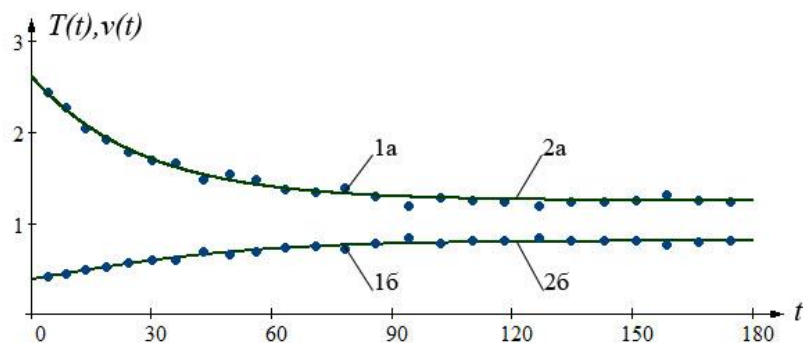


Рисунок 4.6 – Результати експерименту 2: експериментальні дані ЗЧ  $\nu_k$  та функція ЗЧ  $\nu(t)$  (графіки 1а і 1б), значення ЗП  $T_k$  та функція ЗП  $T(t)$  (графіки 2а і 2б)

Порівнюючи діагностичні ознаки і графіки змінної частоти та змінного періоду пацієнтів в експериментах 1 і 2, видно, що частота пульсу пацієнта в експерименті 1 після фізичного навантаження та частота пульсу після його стабілізації менша відповідних частот в експерименті 2. Разом з тим порівняння значень параметра  $\alpha$  показує, що швидкість стабілізації частоти пульсу пацієнта в експерименті 2 більша відповідного показника в експерименті 1, тобто пульс в експерименті 2 швидше спадає (приходить в «норму») в порівнянні з цією ж характеристикою в експерименті 1. З точки зору медичної практики це свідчить про значно кращий фізичний стан пацієнта в експерименті 2.

#### **4.5 Програмне забезпечення для оцінки варіабельності серцевого ритму після фізичного навантаження**

На основі розробленого вище алгоритму оцінки змінного періоду ЕКГ після фізичного навантаження, створена відповідна комп'ютерна програма «Аналіз RR-інтервалів та оцінка варіабельності серцевого ритму» у середовищі Microsoft Visual Studio Community 2017 з використанням мови програмування C# [44].

Узагальнений алгоритм роботи комп'ютерної програми для визначення діагностичних ознак варіабельності серцевого ритму зображена на рисунку 4.7.

Основними призначеннями програмного продукту є:

1. Аналіз  $R-R$  інтервалів після фізичного навантаження, розрахунок параметрів, які є інформативно-діагностичними ознаками варіабельності серцевого ритму після фізичного навантаження.

2. Побудова кривої змінної частоти та змінного періоду серцевого ритму.

Дана комп'ютерна програма дозволяє завантажувати файли з даними  $R-R$  інтервалів серцевого ритму, отримані приладом POLAR S810SD. Обробка даних може проводитися як для всього часового ряду, так і для окремо обраних періодів.



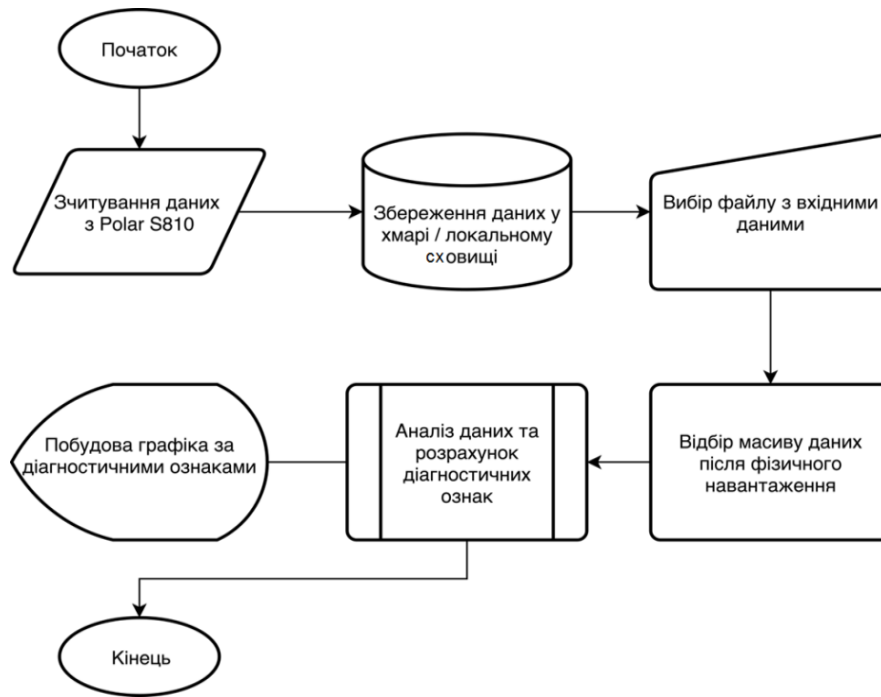


Рисунок 4.7 – Структурна схема алгоритму визначення діагностичних ознак варіабельності серцевого ритму

Після проаналізованих вимог, створюємо діаграми майбутніх класів для програмної реалізації (ООП реалізація) та виділяємо зв'язки між ними (наслідування і т.д.).

Основу програмного продукту становлять два вікна:

- Головне вікно. Призначене для виведення графіків, розрахованих параметрів та збереження результатів аналізу;
- Вікно виведення даних. На даній формі вказується шлях до файлу, або ж вносяться дані користувачем. Також для коректної роботи необхідна можливість модифікувати вхідні дані (вибрати діапазон з наданого файлу, який містить  $R - R$  інтервали).

Основною складовою програмного продукту є клас CurveFunctions. В даному класі здійснюється розрахунок коефіцієнтів (параметрів) для апроксимації функції змінної частоти серцебиття та змінного періоду. На рисунку 4.8 наведено блок-схему обчислення параметрів  $a, b, \alpha$ .

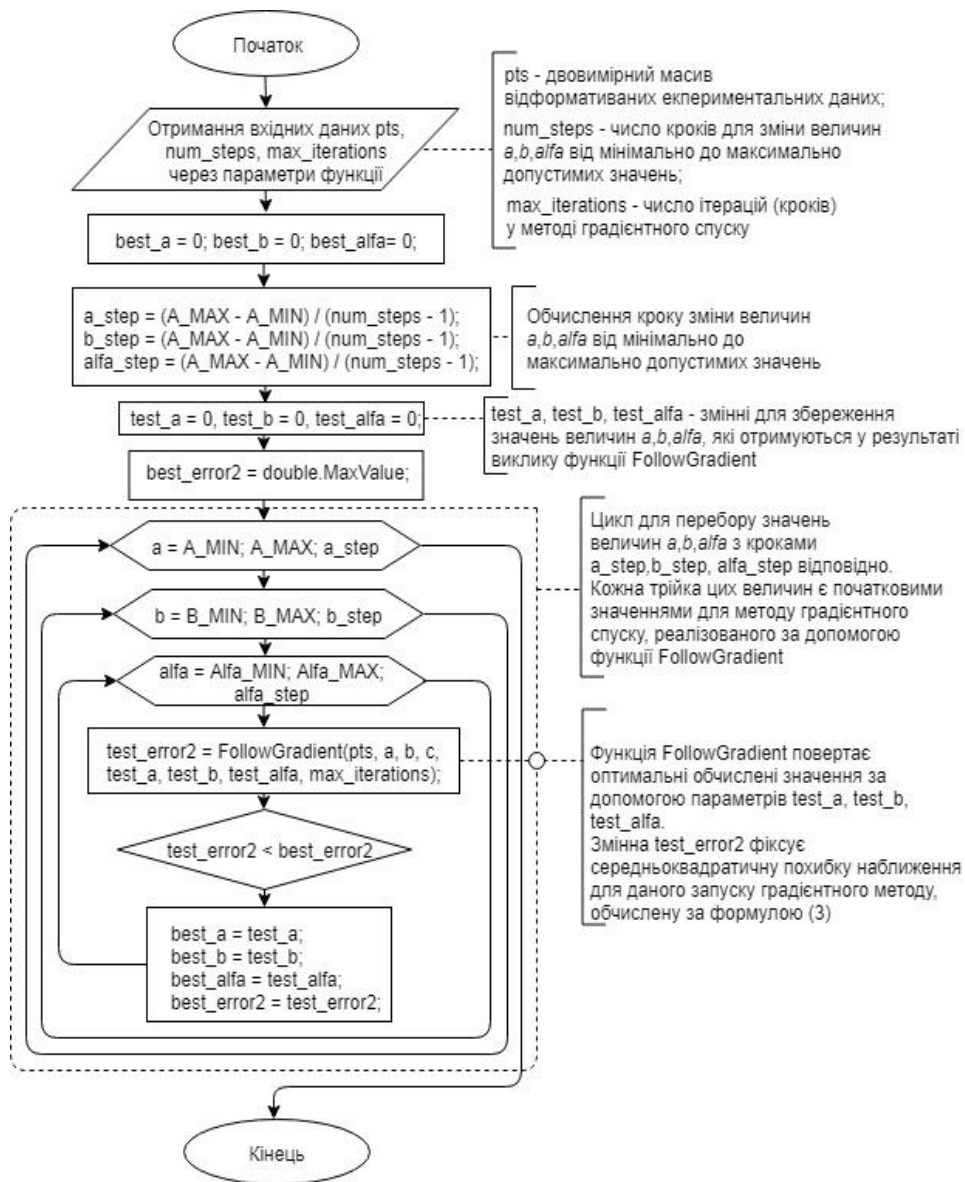


Рисунок 4.8 – Блок-схема роботи функції обчислення параметрів  $a, b, \alpha$

Наступний етап – тестування роботи розробленого ПЗ. Під час нього відбувається відлагодження коду та пошук помилок у роботі програми. Для здійснення обробки виняткових ситуацій реалізовано введення вхідних значень за замовчуванням при порожніх полях введення або некоректних діях користувача.

Інтерфейс програми наведено на рисунку 4.9.

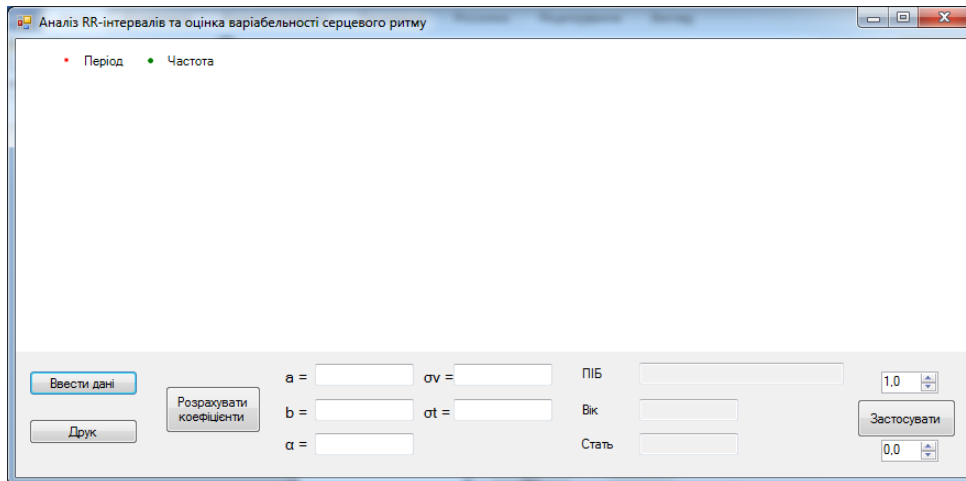


Рисунок 4.9 – Головне вікно розробленого ПЗ

Імпорт даних здійснюється у новому вікні «Вибрати файл» (рис. 4.10) натисканням кнопки «Ввести дані». В цьому ж вікні можна ввести дані пацієнта: прізвище, вік, стать.

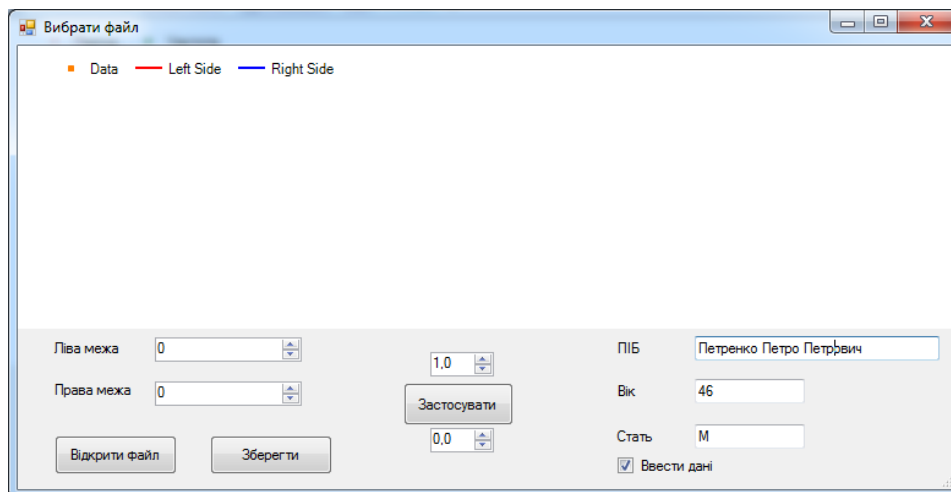


Рисунок 4.10 – Вікно вводу даних розробленого ПЗ

Вхідними даними для програмного продукту є двовимірний масив показників серцебиття пацієнта, отриманих за допомогою приладу Polar S810. Приклад вхідних даних:

```

212.258 0.612
212.854 0.596
213.449 0.595
214.06 0.611
214.636 0.576
215.229 0.593

```

Вихідними даними або результатами роботи ПЗ вважаємо графік апроксимації вхідних даних та коефіцієнти, по яких він будується.

Алгоритм роботи ПЗ наступний:

1. Переходимо у вікно вибору вхідних даних, натиснувши кнопку «Ввести дані».
2. У новому вікні натискаємо кнопку «Вибрати файл».
3. Вказуємо розміщення файлу з  $R - R$  інтервалами.
4. Вказуємо ліву та праву межу даних (якщо необхідно вибрати певний діапазон).
5. Натискаємо кнопку зберегти.
6. Натискаємо кнопку «Побудувати графік».
7. Завершуємо роботу із програмою.

Першим кроком при роботі з програмним продуктом є вибір файлу з вхідними даними. Для цього потрібно перейти в вікно введення даних та натиснути кнопку «Вибрати файл». В діалоговому вікні, яке з'явилося, необхідно вказати розміщення файлу з вхідними даними (рис. 4.11).

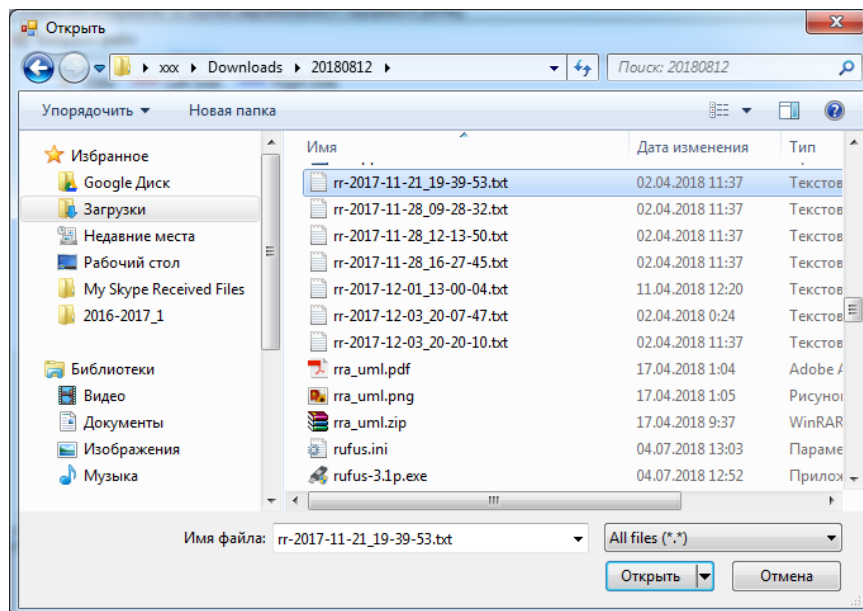


Рисунок 4.11 – Завантаження даних

Після вибору файлу дані завантажуться в програму та відобразяться на графіку (рис. 4.12).

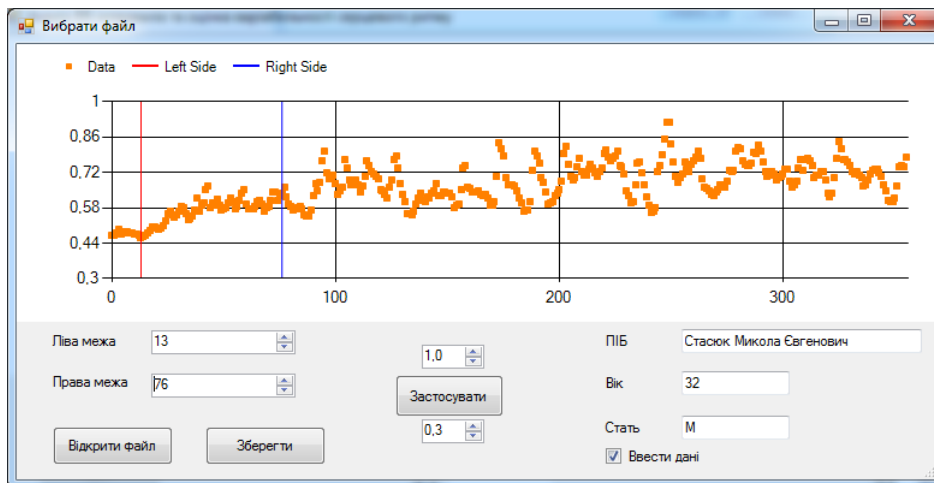


Рисунок 4.12 – Відбір даних для аналізу

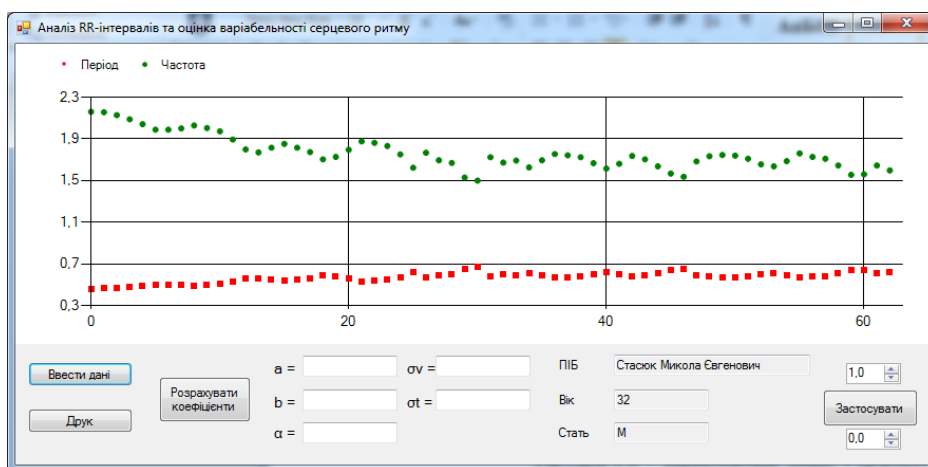


Рисунок 4.13 – Відображення даних на графіку

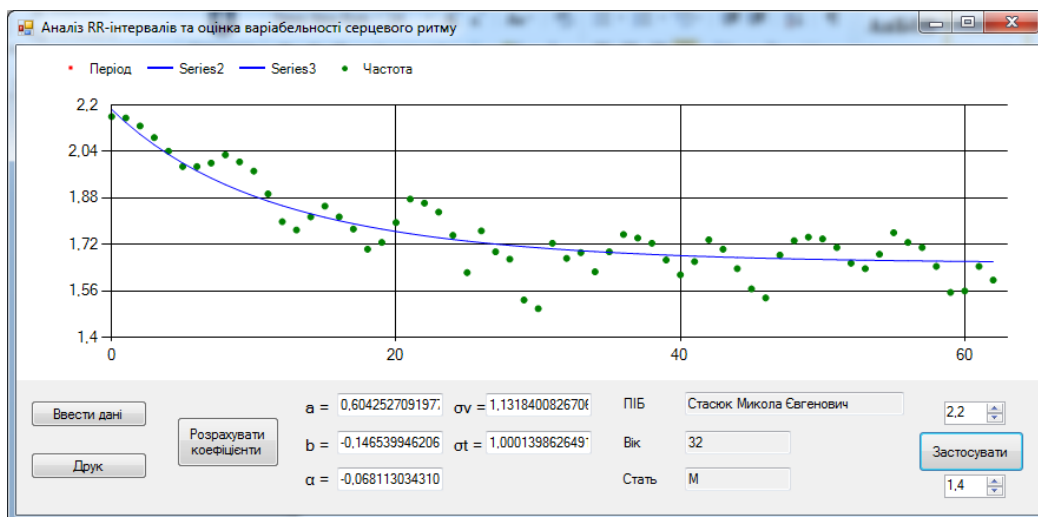


Рисунок 4.14 – Побудова лінії змінної частоти серцебиття

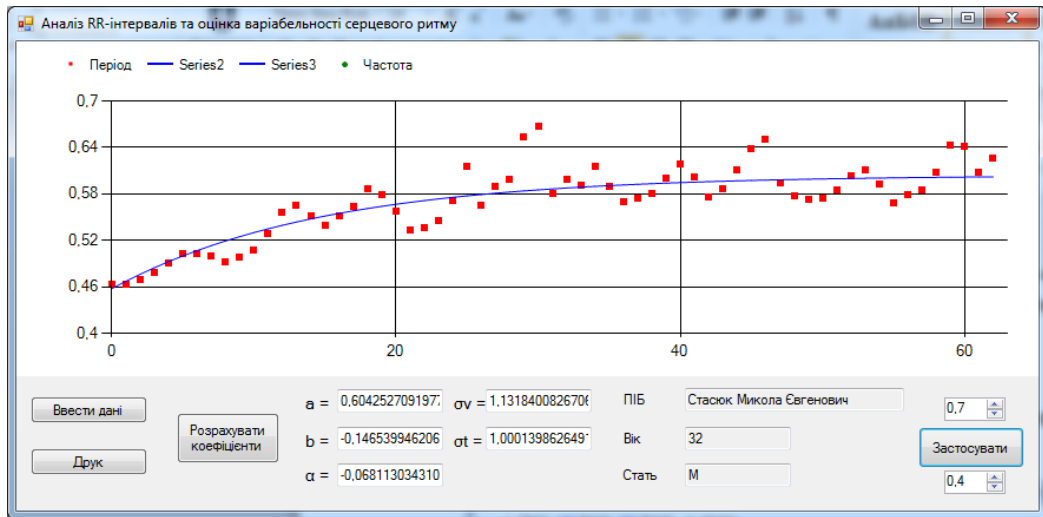


Рисунок 4.15 – Побудова лінії змінного періоду та визначення діагностичних ознак

При потребі необхідно вказати діапазон зі значеннями після фізичного навантаження та натиснути кнопку «Зберегти».

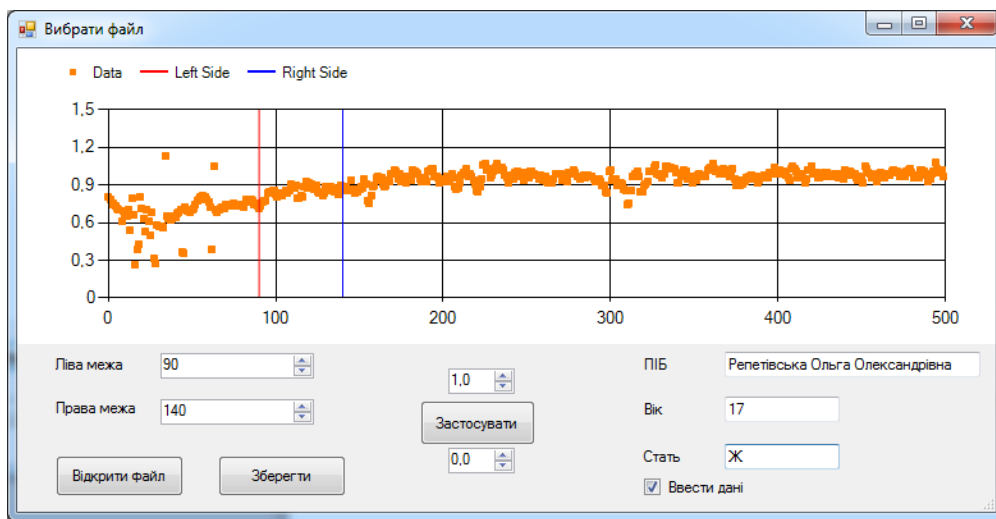


Рисунок 4.16 – Встановлення діапазону вхідних даних

Вказаний діапазон значень  $R-R$  інтервалів відобразиться на графіку. Також до даного діапазону значень побудуються частоти (рис. 4.18).

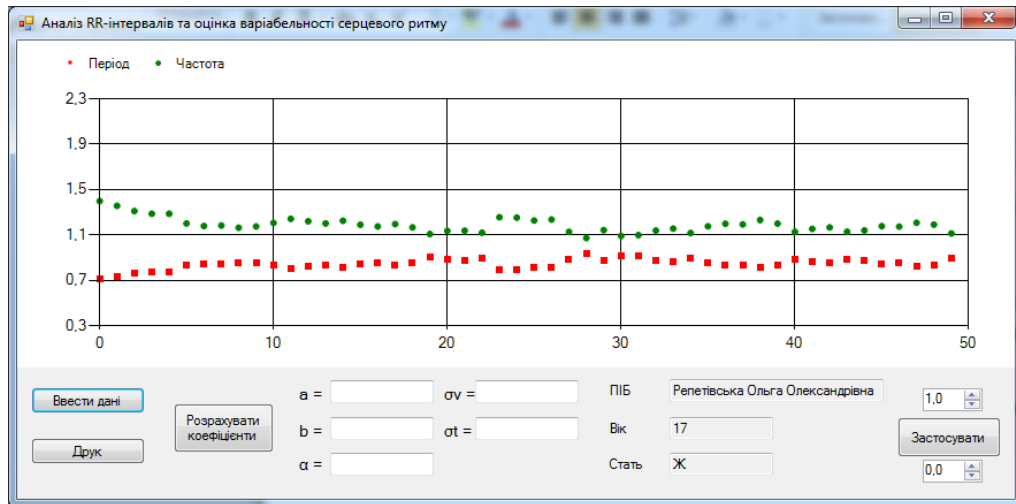


Рисунок 4.17 –  $R-R$  інтервали та частоти серцевого ритму

Для отримання параметрів та апроксимації значень потрібно натиснути кнопку «Розрахувати коефіцієнти» (рис. 4.18).

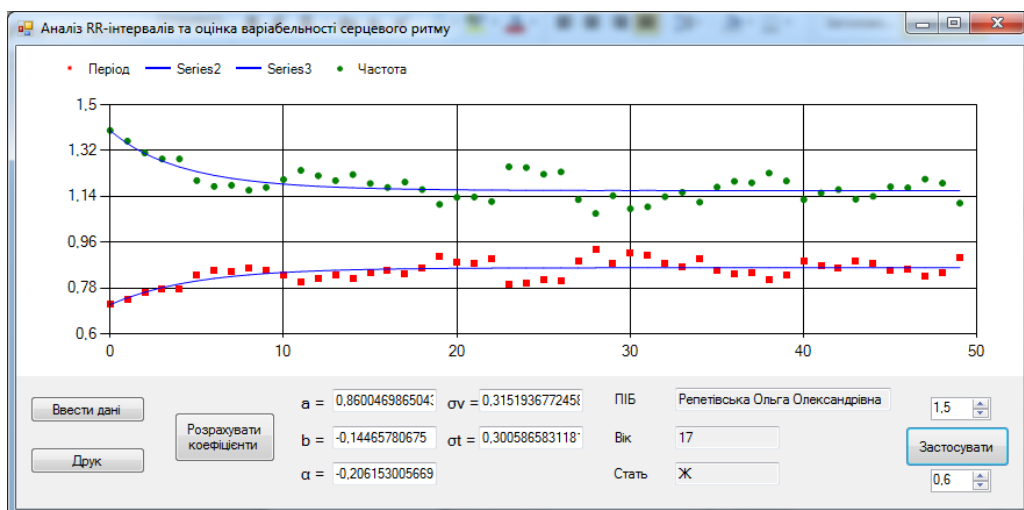


Рисунок 4.18 – Отримання параметрів та апроксимація значень змінного періоду та частоти

Для збільшення апроксимуючої функції можна скористатися діапазоном відображуваного графіку, який знаходиться праворуч, вказавши межі значень по осі  $Y$  та натиснувши «Застосувати» (рис. 4.19).

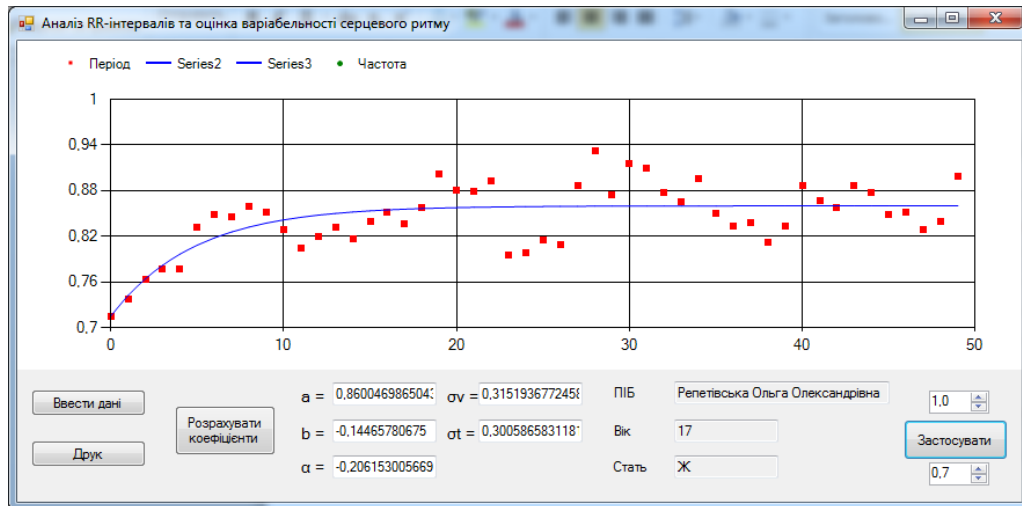


Рисунок 4.19 – Апроксимуюча функція змінного періоду

Приклади розрахунку коефіцієнтів для різних вхідних даних наведено нижче:

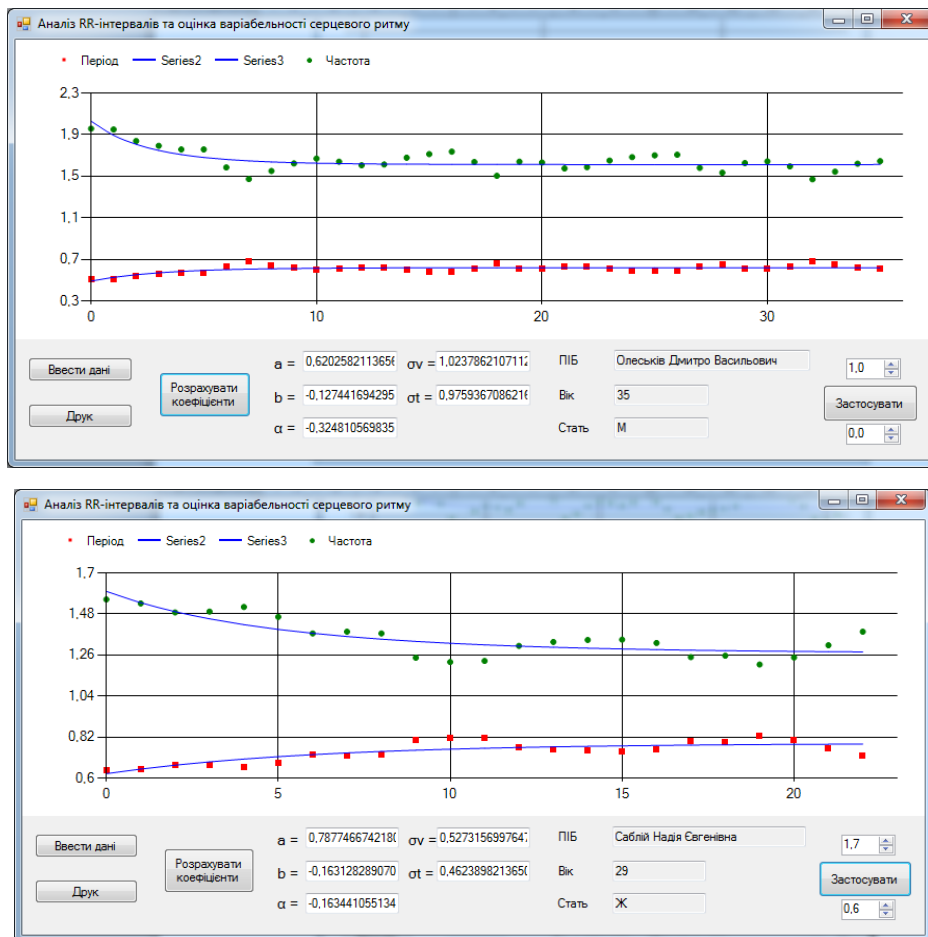


Рисунок 4.20 – Приклади розрахунку коефіцієнтів для різних вхідних даних



Інформаційна технологія (рис. 4.21), на основі розробленого методу оцінки варіабельності серцевого ритму, який реалізований в програмі, дає можливість визначити діагностичні ознаки при статистичній обробці  $R-R$  інтервалів електрокардіограми, отриманої після дії на організм певного збудника спокою, зокрема фізичного навантаження.

Знайдені параметри є інформативними і можуть використовуватись в медичній діагностиці загального призначення при оцінці стану серцево-судинної системи організму, ефективності лікування чи реабілітаційного процесу після фізичного навантаження чи стресових ситуацій.



Рисунок 4.21 – Структурна схема інформаційної технології оцінювання змінного періоду ЕКГ та визначення діагностичних ознак варіабельності серцевого ритму

На основі розроблених методів запропонована інформаційна технологія аналізу процесів зі змінним періодом, схема якої зображена на рисунку 4.22.

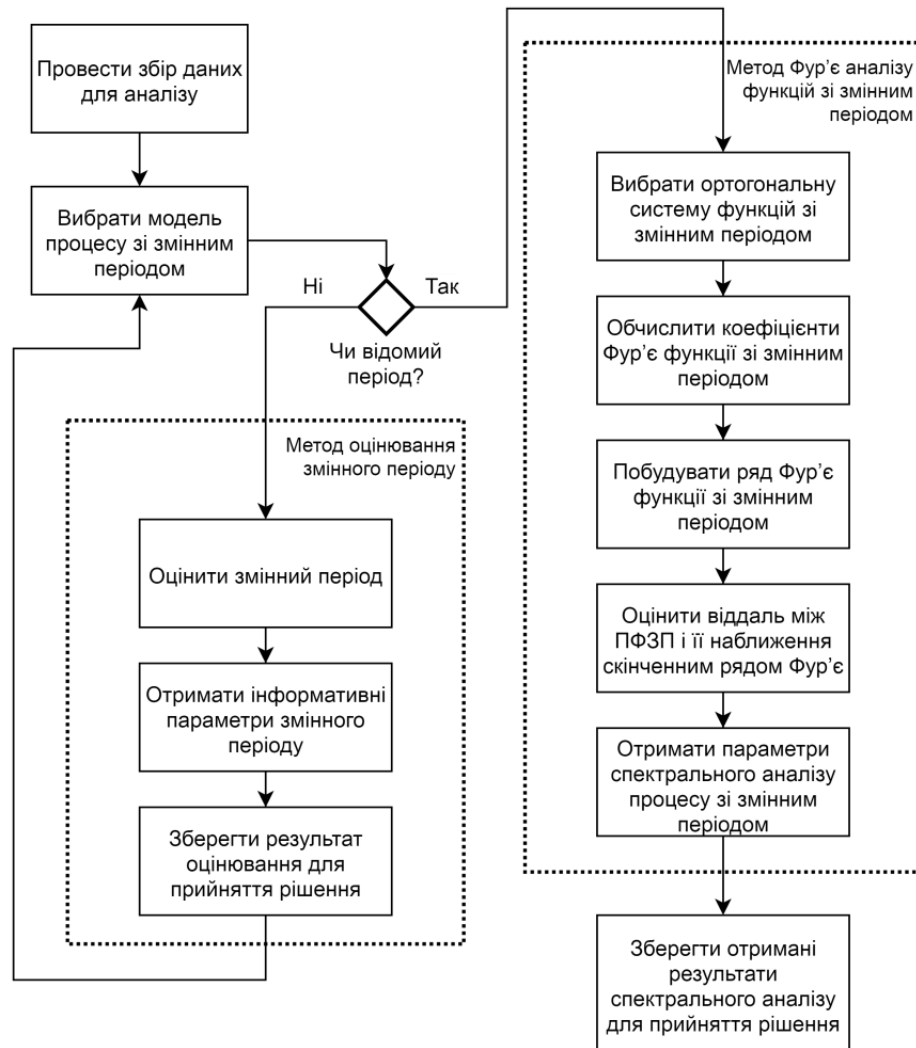


Рисунок 4.22 – Функціональна схема ІТ аналізу процесів зі змінним періодом

За допомогою розроблених методів і програмних засобів доведено ефективність запропонованої інформаційної технології аналізу процесів зі змінним періодом, яка дозволяє більш повно подати інформацію про такі процеси за рахунок знаходження додаткових параметрів та автоматизувати їх аналіз, що дає змогу підвищити об'єктивність та достовірність аналізу процесів зі змінним періодом з метою прийняття певних рішень.

#### Висновки до розділу 4

1. Вперше поставлено питання про важливість оцінки змінного періоду для ПФЗП та здійснена постановка задачі на прикладі оцінки змінного періоду

ЕКГ, отриманої після фізичного навантаження. Побудову оцінки розбито на два етапи:

- а) отримання експериментальних даних для побудови оцінки;
  - б) побудова самої оцінки.
2. Проведено експериментальні дослідження з відбору дискретних значень змінного періоду ( $R-R$  інтервалів) ЕКГ після дії на організм фізичного навантаження.
  3. Методом апроксимації послідовності  $R-R$  інтервалів побудована оцінка змінної частоти та відповідно змінного періоду ЕКГ.
  4. Виявилось, що оцінка змінної частоти ЕКГ має вигляд експоненційної функції, що визначається трьома параметрами. Один з них вказує на частоту серцевих скорочень в стані спокою. Другий параметр вказує, на яку величину зростає частота серцевих скорочень в порівнянні із частотою в стані спокою. Третій параметр характеризує швидкість стабілізації серцевих скорочень.
  5. Запропоновано формулу для обчислення середньоквадратичне відхилення значень  $R-R$  інтервалів від оцінки змінного періоду.
  6. Згідно розроблених методів та алгоритмів оцінки змінного періоду створено відповідне програмне забезпечення.
  7. Отримані значення параметрів змінної частоти та відповідно змінного періоду ЕКГ, а також середньоквадратичне відхилення значень  $R-R$  інтервалів від оцінки змінного періоду можуть бути використані як нові і досить інформативні параметри при визначенні варіабельності серцевого ритму після дії на організм фізичного навантаження.

## ВИСНОВКИ

В дисертації вирішено актуальне наукове завдання підвищення ступеня повноти подання інформації про процеси зі змінним періодом та рівня автоматизації аналізу цих процесів шляхом розробки моделі, методів та інформаційної технології для підтримки прийняття рішень, зокрема в задачах кардіології для оцінювання варіабельності серцевого ритму після дії на організм пацієнта фізичного навантаження.

Основні наукові й практичні результати роботи полягають в наступному:

1. В результаті аналізу проблеми дослідження процесів зі змінним періодом показано, що існуючі методи не дозволяють повно подати інформацію про процеси зі змінним періодом для прийняття відповідних рішень. Обґрунтовано, що для розробки інформаційної технології аналізу процесів зі змінним періодом доцільно використати підхід, що охоплюється схемою «модель–алгоритм–програма» з орієнтацією на побудову рядів Фур'є ПФЗП та їх застосування для задач оцінювання варіабельності серцевого ритму після дії на організм людини фізичного навантаження.

2. Розроблено та систематизовано способи аналітичного подання функцій зі змінним періодом як математичної моделі процесів зі змінним періодом, що дозволило здійснювати перевірку правильності теоретичних положень теорії рядів для періодичних функцій зі змінним періодом.

3. Розроблено метод побудови рядів Фур'є періодичних функцій зі змінним періодом. Досліджено та перевірено ортогональність тригонометричних систем функцій зі змінним періодом, причому перевірка здійснювалася на різних інтервалах ортогональності та з використанням відповідної вагової функції. Побудова рядів Фур'є дозволила здійснювати спектральний аналіз процесів зі змінним періодом, зокрема обчислювати амплітудний та фазовий спектри, що надзвичайно важливо для задач класифікації, розпізнавання процесів зі змінним періодом в кардіології, гідро- та віброакустиці тощо.

4. Запропоновано метод оцінювання віддалі між ПФЗП і її скінченим рядом Фур'є, що дає можливість оцінити точність наближення, це дозволяє використовувати ряд як наближений варіант функції, тобто її «замінник», а тому результати аналізу властивостей ряду вважати за властивості самої функції, як моделі процесу зі змінним

5. Запропоновано метод оцінки змінного періоду для електрокардіограми, отриманої після дії на організм людини фізичного навантаження, який за рахунок отримання додаткових параметрів варіабельності серцевого ритму дозволив розширити множину діагностичних ознак для підтримки прийняття рішень в кардіології при дослідженні функціонального стану серцево-судинної системи людини і цим самим дозволив підвищити інформативність та ступінь автоматизації аналізу ЕКГ, як процесу зі змінним періодом.

6. Розроблені в роботі моделі, методи та інформаційна технологія аналізу процесів зі змінним періодом, яка реалізована в програмних пакетах «Фур'є-аналіз ПФЗП» та «Аналіз *RR*-інтервалів та оцінка варіабельності серцевого ритму», що суттєво доповнюють відомі комп'ютерні пакети (Maple, Mathematica, Mathcad, MATLAB), можуть бути використані для аналізу процесів зі змінним періодом, зокрема в прикладних задачах кардіології.

**СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ**

1. Akay M. Wavelet Applications in Medicine // IEEE Spectrum. –1997. – Vol. 34, No. 5. – P. 50- 56.
2. Chen S.W. A new algorithm developed bases on amixture of spectral and nonlinear techniques for the analisis of heart rate variability / J. Med. Eng. Technol. – 2007. – Vol. 31, №3. – P. 210–219.
3. Dmytrotsa L. Software for Fourier-analysis of functions with variable period / Dmytrotsa L. // Вісник Хмельницького університету – Хмельницький : Видавництво ХНУ, 2018. – № 4 (263). – С.159-166.
4. Fainzilberg L.S. Heart Functional State Diagnostic Using Pattern Recognition of Phase Space ECG-Images.- Proceeding of The 6th European Congress on Intelligent Techniques and Soft Computing (EUFIT '98, Aachen, Germany, September 7-10, 1998). – Nr: B-27, Vol. 3. – P. 1878-1882.
5. Fainzilberg L.S. Potapova T.P. Computer Analysis and Recognition of Cognitive Phase Space Electro-Cardio Graphic Image // Proc. of 6 th Internnational Conf. On Computer analysis of Images and Patterns (CAIP'95). – Prague (Czech Republic).– 1995. – P. 668-673.
6. Gamelin F.X., Berthoin S., Bosquet L. Validity of the Polar S810 Heart Rate Monitor to Measure R-R Intervals at Rest // Med. Sci. Sports Exerc. – 2006. – Vol. 38, № 5. — P. 887-893.
7. Gardner W.A. Cyclostationarity: Half a century of research / W.A. Gardner, A. Napolitano, L. Paura// Signal Processing. — 2005. — № 86 (2006). — P. 639–697.
8. Ghysels E. On the Periodic Structure of the Business Cycle / E. Ghysels // Cowles Foundation, Yale Universiti. – 1992. – No. 1028.
9. Heart rate variability: Malik M, Camm AJ (eds.) / Armonk, NY, Futura Publishing Company Inc., 1995. – 331 p.
10. James Brom. The theory of almost periodic functions in constructive mathematics //Pacific journal of mathematics – Vol 70, No 1, 1977. – p 67-81

11. Kingsley M., Lewis M.J., Marson R.E. Comparison of polar 810 s and an ambulatory ECG system for R-R interval measurement during progressive exercise // *Int. J. Sports Med.* – 2005. – Vol. 26. – P. 39-44.

12. M.Pryymak. Periodic Functions with Variable Period and Their Main Properties / M.Pryymak, S.Proshyn, O.Karnaukhov // *Proceeding of the 5th IEEE International Workshop on Intelligent Data Acquisition and Advanced Computing Systems: Technology and Applications.* 21-23 September 2009. – Rende (Cosenza), Italy. — P. 347-350,

13. Martchenko B. Concerning on a theorem for periodic in Slutsky sense linear random processes. *International Congress of Mathematicians-98 Abstracts of Short Communications and Posters Contents*, Berlin. – 1998. – 260 p.

14. Nematollahi A.R. Discrete time periodically correlated Markov processes / A.R. Nematollahi, A.R. Soltani // *Probability and Mathematical Statistics.* – 2000. – No. 20 (1). – P. 127-140.

15. Pryimak M. Fourier series of periodic functions with variable period and evaluation of their variable period for determination of heart rhythm variability / Mykola Pryjmak, Yaroslav Vasylenko, Lesia Dmytrotsa, Mariya Oliynyk // *Computational Problems of Electrical Engineering.* – Volume 7, No 2, 2017.– С. 108-116.

16. Pryjmak M.V. Periodic functions with the variable period [Електронний ресурс] // *Cornell University Library.* – 8 Jun 2010. p.12. – Режим доступу: <http://arxiv.org/pdf/1006.2792v1>.

17. Thayer J.F., Yamamoto S.S., Brosschot J.F. The relationship of autonomic imbalance, heart rate variability and cardiovascular disease risk factors // *Int. J. Cardiol.* – 2010. – Vol. 141, №2. – P. 122-131.

18. Yang F, Liao W. Modeling and Decomposition of HRV Signals with Wavelet Transforms // *IEEE Engineering in Medicine and Biology.* –1997. – Vol. 16, No. 4. – P. 17-224.

19. Алгебра и начала анализа: Учеб. пособие для 9-10 кл. сред. шк. / Под ред. А.Н. Колмогорова. – 7-е изд. – М.: Просвещение, 1987. – 335 с.

20. Амосова К.М. Варіабельність серцевого ритму і її зв'язок з морфофункціональним станом правого шлуночка у хворих на хронічне легеневе серце внаслідок хронічного обструктивного захворювання легень / Амосова К.М., Конопльова Л.Ф., Решотько Д.О., Андрєєв Є.В., Руденко Ю.В.// Національний медичний університет ім. О. О. Богомольця. – Український пульмонологічний журнал. 2004, № 3. – С.33-36.

21. Андерсон Т. Статистический анализ временных рядов. – М.: Мир, 1967. – 757 с.

22. Баевский Р.М. Некоторые проблемы прогнозирования состояния человека в длительном космическом полете в связи с изучением биоритмов. – В кн.: Автоматизация, организация, диагностика. – М.: Наука, 1971. – ч.2, с. 708-717.

23. Баевский Р.М. Анализ variability сердечного ритма при использовании различных электрокардиографических систем / Баевский Р.М., Иванов Г.Г., Чирейкин Л.В. и др. // Вестник аритмологии. – 2001. – №24. – С. 65–87.

24. Баевський Р.М. Анализ variability сердечного ритма в клинической практике / Р.М. Баевский // Физиология человека. – 2002. – Т.28, №2. – С.70-82.

25. Баранов Г.Л. Построение модели и анализ стохастически периодических нагрузок энергосистем / Баранов Г.Л., Марченко Б.Г., Приймак Н.В. // Известия АН СССР. Энергетика и транспорт. – 1991. – Т.37, №2. – С. 12-21.

26. Бари Н.К. Тригонометрические ряды. – М.: Гос. изд-во физ. мат. лит., 1961. – 936 с.

27. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы. – М.: Высшая школа, 1983. – 536 с.

28. Бахвалов Н.С. Численные методы / Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. – М.: Наука, 1987. – 630 с



29. Бернштейн С.Н. Конструктивная теория функций / Бернштейн С.Н. – Издательство АН СССР, 1954. – 628 с. – (Собрание сочинений. [1931-1953]; Т.2).
30. Блаттер К. Вейвлет-анализ. Основы теории. – Москва, 2004. – 280 с.
31. Боголюбов А.Н. Математики. Механики. Библиографический справочник. – К.: Наукова думка, 1983. – 638 с.
32. Большая советская энциклопедия. Том 59. – М.: ОГИЗ, 1935. – 864 с.
33. Бор Г. Почти периодические функции, пер. с нем. – М., 1934.
34. Варіабельність серцевого ритму: стандарти вимірювання, фізіологічної інтерпретації та клінічного ви-користання / ред. М. Гжегоцький. – Львів : [б. в.], 2002. – 74 с.
35. Василенко О.В. Спектральний аналіз в ЕСАD-програмах / Василенко О.В., Кузнєцов Д.О. // Запорізька державна інженерна академія, м. Запоріжжя 2007. – С. 217
36. Василенко Я.П. Клас функцій зі змінним періодом / Я.П. Василенко, Л.П. Дмитроца, М.В. Приймак // Вісник Харківського національного університету імені В.Н.Каразіна Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»: Зб. наук. п. – №1105. – Харків: ХНУ, 2014. – С. 21-33.
37. Василенко Я.П. Способи задання функцій зі змінним періодом та їх наближення / Я.П. Василенко, Л.П. Дмитроца, М.З. Олійник, М.В. Приймак // Вісник Харківського національного університету імені В.Н.Каразіна. Серія "Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління" Випуск 30. – Харків: ХНУ, 2016. – С. 36-47.
38. Гладышев Е.Г. О периодически коррелированных случайных последовательностях // Докл. АН СССР. – 1961. – 137, №5. – С. 2236-2239.
39. Гоноровский И.С. Радиотехнические цепи и сигналы. – М.: Радио и связь, 1986. – 512 с.
40. Гудзенко Л.И. О периодически нестационарных процессах // Радиотехника и электроника. – 1959. – Т.4, Вып.6. – С. 1026-1034.

41. Гузий В.И. Исследование возможности измерения периода корреляции периодически коррелированного случайного процесса по одной наблюдаемой реализации / Гузий В.И., Приймак Н.В. // Вестник Киев. политехн. ин-та. Электроакустика и звукотехника. – 1984. – Вып. 8. – С. 31-33.

42. Биологические ритмы. Под ред. Ю.Ашоффа. – В 2-х т. Т.1. – М.: Мир, 1984. – 414 с.

43. Дженкинс Г. Спектральный анализ и его приложение. / Дженкинс Г., Ватс Д. – Вып.1. – М.: Мир, 1971. – 316 с.

44. Дмитроца Л.П. Комп'ютерна програма “Аналіз RR-інтервалів та оцінка варіабельності серцевого ритму”: свід. про реєстр. автор. права на твір № 79650 від 07.06.2018 / Дмитроца Леся Павлівна, Палій Володимир Михайлович, Приймак Микола Володимирович, Василенко Ярослав Пилипович. – Зареєстр. в Управлінні державних реєстрацій Департаменту інтелектуальної власності Міністерства економічного розвитку і торгівлі України заявка від 22.05.2018 № 80656.

45. Дмитроца Л.П. Комп'ютерна програма “Фур'є-аналіз функцій зі змінним періодом”: свід. про реєстр. автор. права на твір № 79651 від 07.06.2018 / Дмитроца Леся Павлівна, Палка Олег Вікторович, Приймак Микола Володимирович, Василенко Ярослав Пилипович. – Зареєстр. в Управлінні державних реєстрацій Департаменту інтелектуальної власності Міністерства економічного розвитку і торгівлі України заявка від 22.05.2018 № 80657.

46. Дмитроца Л.П. Порівняльний аналіз приладів для реєстрації RR-інтервалів / Л.П. Дмитроца, Р.І. Черевик // Актуальні задачі сучасних технологій: зб. тез доповідей VI Міжнародної наук-техн. конф. молодих учених та студентів (Тернопіль, 16-17 листопада 2017). – Том II. – Тернопіль : ТНТУ, 2017. – С.54.

47. Дмитроца Л. Варіанти побудови рядів Фур'є для функцій зі змінним періодом / Л. Дмитроца, М. Приймак, Р. Сарабун // Матеріали першої науково-технічної конференції «Інформаційні моделі, системи та технології» (20 травня 2011). – Тернопіль: ТНТУ, 2011. – С. 11.

48. Дмитроца Л. Інтервали ортогональності для тригонометричної системи функцій із змінним періодом та можливість знаходження на будь-якому із них коефіцієнтів Фур'є / Л. Дмитроца, М. Приймак, Р. Сарабун // Матеріали першої науково-технічної конференції «Інформаційні моделі, системи та технології» (20 травня 2011). – Тернопіль: ТНТУ, 2011. – С. 12.

49. Дмитроца Л. Незалежність коефіцієнтів Фур'є функцій із змінним періодом від змінного інтервалу ортогональності / Л. Дмитроца, М. Приймак // Матеріали II науково-технічної конференції «Інформаційні моделі, системи та технології» Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя (м. Тернопіль, 25 квітня 2012). – Тернопіль: ТНТУ, 2012. – С. 22.

50. Дмитроца Л.П. Задача створення інформаційної системи моніторингу і реєстрації стану кардіонавантаження / Л.П. Дмитроца // Матеріали XIX наукової конференції ТНТУ ім.І.Пулюя, 18-19 травня 2016 року. – Тернопіль: ТНТУ, 2016. – С. 85-86.

51. Дмитроца Л.П. Приклади задання функцій зі змінним періодом / Дмитроца Л.П. // Застосування математичних методів в науці і техніці: збірник тез доповідей II Всеукраїнської наукової конференції, 22-23 листопада 2013. – Луцьк: РВВ ЛНТУ, 2013. – С. 41-44.

52. Дмитроца Л.П. Про наближення функцій зі змінним періодом / Л.П. Дмитроца // Матеріали XVII наукової конференції Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя, Том I. Природничі науки та інформаційні технології: збірник тез доповідей (м. Тернопіль, 20-21 листопада 2013 року). – Тернопіль: ТНТУ, 2013. – С. 9.

53. Драган Я. П. Описание тональных кардиосигналов с помощью модели периодически коррелированных процессов / Я.П. Драган, Г.М. Осухивская // Проблемы управления и информатики, 1999. – № 1– С. 78-83.

54. Драган Я.П. Свойства отсчетов периодически коррелированных случайных процессов // Отбор и передача информации. – К.: Наукова думка, 1972. – Вып. 33. – С. 9-12.

55. Драган Я.П. Линейные периодически коррелированные случайные процессы / Драган Я.П., Приймак Н.В. – Львов, 1986. – 30 с. (Препр. / АН УССР. Физико-механический ин.-т, №120).

56. Дунець В.Л. Математична модель та метод опрацювання електрокардіосигналу при фізичному навантаженні для підвищення точності кардіодіагностичних систем. – автореф. дис.. канд. техн. наук 01.05.02 / Дунець В.Л. //– ТНТУ, 2013. – 20 с.

57. Дурнова Н.Ю. Изучение зависимостей между показателями вариационной пульсометрии, энтропии ритма сердца, временного и спектрального анализов вариабельности ритма сердца в норме и при ишемической болезни сердца / Дурнова Н.Ю., Довгалецкий Я.П., Бурлака А.Н. и др. // Саратов. науч.- мед. журнал. – 2011. – Т. 7, №3. – С. 607–611.

58. Дьяконов В.П. MATLAB R2006/2007/2008 + Simulink 5/6/7. Основы применения. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: СОЛОН-ПРЕСС, 2008.

59. Дьяконов В.П. Вейвлеты. От теории к практике. – М.: СОЛОН-Р, 2002. – 448 с.

60. Жарінов О. Й. Дослідження варіабельності ритму серця: чи з'являться нові узгоджені рекомендації? [Електронний ресурс] / О. Й. Жарінов, У. П. Черняга-Ройко // Національна медична академія післядипломної освіти ім. П.Л. Шупика, м. Київ. – 2007. – Режим доступу до ресурсу: [http://www.journal.ukrcardio.org/cardio\\_archive/2007/6/zharinov.htm](http://www.journal.ukrcardio.org/cardio_archive/2007/6/zharinov.htm)

61. Зарубин Ф.Е. Вариабельность сердечного ритма: стандарты измерения, показатели, особенности метода // Вестник аритмологии. – 1998. – №10. – С. 25–30

62. Ильин В.А. Математический анализ. Продолжение курса. Под ред. А.Н.Тихонова / Ильин В.А., Садовничий В.А., СендовБл.Х. – М.: Изд-во МГУ, 1987. – 358 с.

63. Капшій О.В. Вейвлет-перетворення у компресії та попередній обробці зображень / Капшій О.В., Коваль О.І., Русин Б.П. – Львів: Сполом, 2008. – 206 с.

64. Кирьянов Д.В. Самоучитель Mathcad II. – СПб.: БХВ-Петербург, 2003. – 560 с.
65. Коваленко И.Н. Случайные процессы. Справочник / Коваленко И.Н., Кузнецов Н.Ю., Шуренков В.М. – К.: Наукова думка, 1983. – 367 с.
66. Коваленко С. О. Варіабельність серцевого ритму. Методичні аспекти. / С.О. Коваленко, Л.І. Кудій – Черкаси: Черкаський національний університет ім. Б. Хмельницького, 2016. – 298 с.
67. Колмогоров А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / Колмогоров А.Н., Фомин С.В. – М.: Наука, 1976. – 544 с.
68. Коринківська О.Б. Розвиток моделі стохастично періодичних сигналів і завод / О.Б. Коринківська, М.В. Приймак, М.А. Савчук. // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – 2006. – №1. – С. 119–133.
69. Коркушко О.В. Методология анализа variability ритма сердца: возрастные аспекты / О.В. Коркушко, А.В. Писарук, В.Б. Шатило. // Государственное учреждение «Институт геронтологии имени Д.Ф. Чеботарева НАМН Украины», Киев. – 2014. – С. 1–16.
70. Коронкевич О.І. Лінійні динамічні системи під дією випадкових сил // Наукові записки Львів. ун-ту. – 1957. – 44, №8. – С. 175-183.
71. Красильников О.І. Процеси з незалежними періодичними приростами і періодичні білі шуми / Красильников О.І., Марченко Б.Г., Приймак М.В. // Відбір і обробка інформації. – 1996. – Вип. 10(86). – С. 22-27.
72. Купріянова О. Про що розповість кардіограма? Особливості та переваги ЕКГ [Електронний ресурс] / Ольга Купріянова // Медичний портал Здоров-Інфо. – 2016. – Режим доступу до ресурсу: [zdorov-info.com.ua](http://zdorov-info.com.ua).
73. Левитан Б. М. Почти-периодические функции – М: ГИТТЛ, 1953.– 398с.
74. Литвиненко Я.В. Моделювання та методи визначення зонної часової структури електрокардіосигналу в автоматизованих діагностичних системах:

Автореф. дис.канд.техн.наук: 01.05.02 // ТДТУ імені Івана Пулюя. – Тернопіль, 2006. – 23 с.

75. Лозінська (Тиш) Є.В. Математична модель та методи обробки кардіоінтервалограми при фізичних навантаженнях в задачах діагностики адаптивних можливостей організму людини / Є. Лозінська, С. Лупенко, Л. Щербак // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – Тернопіль, 2003. – Т. 8, №4. – С. 97–105.

76. Лупенко С. Математичне моделювання сигналів серця в задачах технічної кардіометрії на базі їх моделі у вигляді циклічного випадкового процесу / Лупенко С., Студена Ю. // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – 2006. – Т. 11, №1. – С.134-142.

77. Лупенко С.А. Конструктивна математична модель сигналів серця на основі лінійних періодичних процесів та полів/ Лупенко С.А., Щербак Л.М. // Вісник ТНТУ. –2000. – Т.5, №4. – С 101-110.

78. Лупенко С.А. Моделювання та методи обробки циклічних сигналів серця на базі лінійних випадкових функцій: Автореф. дис.канд.техн.наук: 01.05.02 // ТДТУ імені Івана Пулюя. – Тернопіль, 2001. – 18 с.

79. Маєвський О.В. Гістограмний аналіз періодичних випадкових процесів і його використання в прикладних дослідженнях / Маєвський О.В., Приймак М.В., Щербак Л.М. // Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах – Технологічний університет Поділля (м. Хмельницький) – 2003. – №2(22). – С. 26-31.

80. Маєвський О.В. Обґрунтування моделі та статистичний аналіз збурень магнітного поля Землі з врахуванням їх добової стохастичної періодичності / Маєвський О.В., Приймак М.В., Щербак Л.М. // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – 2003. – Т.8, число 4. – С. 106-113.

81. Майстренко В.М. Застосування вейвлет-перетворення для обробки медичних сигналів та зображень / Майстренко В.М., Литвин В.С.,

Голубенко Л.П. // Вісник НТУУ “КПІ”. Серія Приладобудування, 2005. – Вип. 29.С.142-150.

82. Марушко Ю.В. Показники варіабельності серцевого ритму в оцінюванні адаптаційних процесів [Електронний ресурс] / Ю.В. Марушко, Т.В. Гищак // Здоров'я України. – 2015. – Режим доступу до ресурсу: <http://health-ua.com/article/6818-pokazniki-varabelnost-sertcevogo-ritmu-v-otcnyuvann-adaptacjnih-protcesv>.

83. Марченко Б.Г. Метод стохастических интегральных представлений и его приложение в радиотехнике. – К.: Наукова думка, 1973. – 191 с.

84. Марченко Б.Г. Вибродиагностика подшипниковых узлов электрических машин / Марченко Б.Г., Мыслович М.В. – К.: Наукова думка, 1992. – 106 с.

85. Марченко Б.Г. Побудова моделі та аналіз стохастично періодичних навантажень енергосистем / Марченко Б.Г., Приймак М.В. // Праці Ін-ту електродинаміки. – Київ: ІЕД НАН України, 1999. – Вип. 1. – С.129-153.

86. Марченко Б.Г. Линейные случайные процессы с периодическим ядром / Марченко Б.Г., Приймак Н.В. // Статистические методы в теории передачи и преобразования информационных сигналов. Тезисы докладов всесоюзной научно-технической конференции. – К.: Изд-во Киев. ин-та гражд. авиации, 1985. – С. 12.

87. Математический энциклопедический словарь. – М.: Советская энциклопедия, 1988. – 847 с.

88. Морман Д. Физиология сердечно-сосудистой системы / Д. Морман, Р. Хеллер. – СПб: Издательство «Питер», 2000. – 256 с.

89. Мурашко В.В. Электрокардиография / Мурашко В.В., Струтинский А.В. – М.: Медицина, 1991. – 288 с.

90. Натансон И.П. Конструктивная теория функций / Натансон И.П. – М.-Л.: Гос. Изд-во технико-теоретической литературы, 1949. – 454 с.

91. Павлович Н.В., Павлович С.А., Галлиулин Ю.И. Биоманнитные ритмы. – М.: Университетское, 1991. – 136 с.

92. Першиков В. И. Толковый словарь по информатике / Першиков В.И., Савинков В. М. – Москва : Финансы и статистика, 2008. – 543 с.
93. Полищук С.В. Исследование корреляционной взаимосвязи нагрузок энергосистем и стохастически периодических метеофакторов / Полищук С.В., Приймак Н.В. // Техническая электродинамика. – 1991. – №1. – С. 98-103/
94. Приймак М.В. Основи теорії моделювання, аналізу і прогнозу в автоматизованих системах управління ритмічними процесами : автореф. дис. на здобуття наук. ступеня докт. техн. наук : спец. 05.13.06 / Приймак М. В. – К: НАУ, 2001. – 34 с.
95. Приймак М.В. Оцінювання матриць переходів періодичних ланцюгів Маркова /Приймак М.В. Прошин С.Ю. // ISSN 1990-5548 Електроніка та системи управління. – 2009. – №3(21). – С. 26-33.
96. Приймак М.В. Дискретні періодичні білі шуми з неперервними розподілами // Праці Ін-ту електродинаміки. Електроенергетика. – Київ: ІЕД НАН України, 1999. – С. 15-19.
97. Приймак М.В. Дискретні періодичні шуми з дискретними розподілами //Вимірювальна техніка та метрологія. – Львівська політехніка, 1999. – №55. – С. 167-169.
98. Приймак М.В. Дослідження взаємозв'язку лінійних і періодичних випадкових процесів // Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах. – Хмельницький технологічний ун-т Поділля, 1999. – №2(8). – С. 139-142.
99. Приймак М.В. Змінні періоди деяких періодичних функції із змінним періодом. // Матеріали одинадцятої наукової конференції Тернопільського державного технічного університету імені Івана Пулюя. Тернопіль, вид. ТДТУ, 2007. – С. 71.
100. Приймак М.В. Лінійні періодичні процеси і їх моделювання на ЕОМ // Вісник Тернопільського держ. техн. ун-ту. – 1998. – Т.3, число 3. – С. 111-114.



101. Приймак М.В. Марківські періодичні процеси // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – 2003. – Т.8, число 3. – С. 17-21.

102. Приймак М.В. Ортогональні системи періодичних функції із змінним періодом // Матеріали одинадцятої наукової конференції Тернопільського державного технічного університету імені Івана Пулюя. Тернопіль, вид. ТДТУ, 2007. – С. 72.

103. Приймак М.В. Основи теорії моделювання, аналізу і прогнозу в автоматизованих системах управління ритмічними процесами: Автореф. дис...докт. техн. наук: 05.13.06 / Київ: НАУ, 2001. – 34 с.

104. Приймак М.В. Оцінка змінного періоду та змінної частоти серцебиття пацієнтів у різних вікових групах /Приймак М.В., Сарабун Р. // Матеріали XIV наукової конференції Тернопільського національного університету імені Івана Пулюя «Природничі науки та інформаційні технології» 27-28 жовтня 2010 р. – Тернопіль, ТНТУ, 2010. – С. 29.

105. Приймак М.В. Оцінка змінного періоду та змінної частоти функції із змінним періодом / Приймак М.В., Сарабун Р.// Матеріали Міжнародної науково-технічної «Фундаментальні та прикладні проблеми сучасних технологій» конференції Тернопільського національного технічного університету. – Тернопіль, ТНТУ, 2010. – С. 303, 304.

106. Приймак М.В. Періодичні ланцюги Маркова в задачах статистичного аналізу і прогнозу енергонавантажень // Технічна електродинаміка. – 2004. – №2. – С. 3-7.

107. Приймак М.В. Періодичні функції із змінним періодом та деякі їх особливості // Всеукраїнський науковий семінар «Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу» (тези доповідей). – Івано-Франківськ, Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, 2010. – С. 39-41.

108. Приймак М.В. Періодичні функції із змінним періодом. // Матеріали одинадцятої наукової конференції Тернопільського державного технічного університету імені Івана Пулюя. Тернопіль, вид. ТДТУ, 2007. – С. 70.

109. Приймак М.В. Періодичні шумові поля та задачі моделювання й аналізу стохастично періодичних електроенергетичних явищ // Технічна електродинаміка. – 1998. – №2. – С. 12-14.

110. Приймак М.В. Побудова періодичних функції із змінним періодом. // Матеріали одинадцятої наукової конференції Тернопільського державного технічного університету імені Івана Пулюя. Тернопіль, вид. ТДТУ, 2007. – С. 73

111. Приймак М.В. Побудова прогностичних графіків енергонавантажень на основі періодичного лінійного випадкового процесу // Технічна електродинаміка. – 2000. – №3. – С. 50-52.

112. Приймак М.В. Послідовності ковзного середнього при дії періодичного білого шуму // Вісник Тернопільського держ. техн. ун-ту. – 1999. – Том 4, число 2. – С. 11-15.

113. Приймак М.В. Система тригонометричних функцій із змінним періодом та деякі їх властивості // International Conference on Functional Analysis dedicated to the 90-th anniversary of V.E.Lyantse. 17-21 November 2010. – Lviv, 2010. – С. 97-98

114. Приймак М.В. Теорія ритмічності в її історичному розвитку (частина перша) // Всеукраїнський науковий семінар "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (тези доповідей). – Івано-Франківськ, Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, 2012. – С.39-41

115. Приймак М.В. Умовно періодичні випадкові процеси із змінним періодом / М.В. Приймак, І.О. Боднарчук, С.А. Лупенко // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – 2005. – Т.10, №2. – С. 132-141.

116. Приймак Н.В. Оценка периода корреляции и ее использование при исследовании стохастически периодических радиотехнических сигналов: Автореф. дис... канд. техн. наук: 05.12.01 / М.: МЭИ, 1987. – 18 с.

117. Приймак М. Змінні періоди функції із змінним періодом та їх взаємозв'язок / М. Приймак, Л. Дмитроца // Матеріали XVI наукової конференції Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя, Том I. Природничі науки та інформаційні технології: збірник тез доповідей (м. Тернопіль, 5-6 грудня 2012 року). – Тернопіль: ТНТУ, 2012. – С. 61.

118. Приймак М.В Коефіцієнти Фур'є функцій із змінним періодом / Приймак М.В, Дмитроца Л.П., Сарабун Р.О. // Всеукраїнська наукова конференція «Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу» // Тези доповідей. – Івано-Франківськ, 2012. – С. 52-54.

119. Приймак М.В. Аналітичне задання функцій зі змінним періодом та їх змінні періоди / Приймак М.В., Дмитроца Л.П., Василенко Я.П., Олійник М.З.// Шістнадцята міжнародна наукова конференція ім. акад. Михайла Кравчука, 14–15 травня, 2015р., Київ: Матеріали конф. Т. 2. Алгебра. Геометрія. Математичний аналіз. – Київ: НТУУ «КПІ», 2015. – С. 156-159.

120. Приймак М.В. Аналітичні способи задання функцій із змінним періодом та інформаційні технології визначення їх коефіцієнтів Фур'є / Приймак М.В., Дмитроца Л.П., Олійник М.З. // Вісник нац. ун-ту «Львівська політехніка» – Збірник наукових праць, №854. – Серія: Інформаційні системи та мережі. – Львів, вид-во Львівської політехніки, 2016. – С. 138-148.

121. Приймак М.В. Апроксимація змінного періоду та частоти та їх використання в задачах діагностики / Приймак М.В., Сарабун Р.О., Дмитроца Л.П. // Збірник тез доповідей Всеукраїнська наукова конференція «Застосування математичних методів в науці і техніці» (25-26 листопада 2011). – Луцьк: ЛНТУ, 2011.– С. 72-74.

122. Приймак М.В. Інформаційні технології дослідження періодичних функцій із змінним періодом та їх застосування для оцінки варіабельності серцевого ритму / Приймак М.В., Василенко Я.П., Дмитроца Л.П., Олійник М.З.

// Сучасні проблеми математичного моделювання, обчислювальних методів та інформаційних технологій: Матеріали Міжнародної наукової конференції 2–4 березня 2018 року. – Рівне: НУВГП, РДГУ, 2018. – С. 285-288.

123. Приймак М.В. Інформаційні технології представлення функцій зі змінним періодом тригонометричними рядами / Приймак М.В., Дмитроца Л.П., Олійник М.З. // Міжнародна науково-технічна конференція Харківського національного університету імені В.Н.Каразіна. 26-31 травня 2016 року. Труды международной научно-технической конф. «Компьютерное моделирование в наукоемких технологиях (КМНТ-2016)». – Харків.: ХНУ, 2016. – С.282-284.

124. Приймак М.В. Оцінка змінного періоду та змінної частоти / М.В. Приймак, Р.О. Сарабун, Л.П. Дмитроца // Міжнародний науково-технічний журнал. Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах. – Хмельницький технологічний ун-т Поділля, 2011. – №2. – С. 76-82.

125. Приймак М.В. Про наближення функцій зі змінним періодом / М.В. Приймак, Л.П. Дмитроца, М.З. Олійник // Сімнадцята міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука. 19-20 травня 2016 р., Київ: Матеріали конф. Т.2. Алгебра. Геометрія. Математичний аналіз. – Київ: НТУУ «КПІ», 2016. – С. 155-159.

126. Приймак М.В. Розвиток теорії періодичних функцій та їх узагальнення – функції із змінним періодом / М.В. Приймак, Л.П. Дмитроца // П'ятнадцята міжнародна наукова конференція ім. акад. Михайла Кравчука, 15–17 травня, 2014 р., Київ: Матеріали конф. Т. 2. Алгебра. Геометрія. Математичний аналіз. – Київ: НТУУ «КПІ», 2014. – С. 156-158.

127. Приймак М.В. Сигнали зі змінним періодом та їх модель / М.В. Приймак, Я.П. Василенко, Л.П. Дмитроца // Вісник НТУУ «КПІ». Інформатика, управління та обчислювальна техніка: Зб. наук. пр. – К.: Век+, 2013. – № 59. – С. 116-121.

128. Приймак М.В. Система тригонометричних функцій із змінним періодом та деякі її властивості / Приймак М.В., Дмитроца Л.П. // Науково-технічна Міжнародна конференція «Комп'ютерне моделювання у наукоемких

технологіях (КМНТ-2014)» Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, м.Харків, 28-31 травня 2014. Труды научно-технической конференции с международным участием. — Харків: ХНУ, 2014. — С. 327-328.

129. Приймак М.В. Функції зі змінним періодом та їх наближення рядами Фур'є / Приймак М.В., Дмитроца Л.П., Олійник М.З. // Праці VI Міжнародної науково-практичної конференції "Обробка сигналів і негаусівських процесів": тези допов. — Черкаси: ЧДТУ, 2017. — С.128-130.

130. Приймак М.В. Функції із змінним періодом як узагальнення періодичних функцій / М.В Приймак, Л.П Дмитроца // Контроль і управління в складних системах (КУСС-2014). XII Міжнародна конференція. Тези доповідей. Вінниця, 14-16 жовтня 2014 року. — Вінниця: ВНТУ, 2014. — С.31.

131. Самарский А.А. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры / А.А. Самарский, А.П. Михайлов. — 2-е изд., испр. — М. : Физматлит, 2001. — 320 с.

132. Самарский А.А. Современная прикладная математика и вычислительный эксперимент // Коммунист. — 1983. — № 8. — С. 31-42.

133. Серебренников М.Г. Выделение скрытых периодичностей / Серебренников М.Г., Первозванский А.А. — М.: Наука, 1965. — 244 с.

134. Скороход А. В. Случайные процессы с независимыми приращениями / А. В. Скороход. — М: Наука, 1964. — 280 с.

135. Слуцкий Е.Е. Избранные труды. — М.: Наука, 1960. — 292 с.

136. Слуцький Є. Визнання. Творча спадщина з погляду сучасності. — К.: Знання, 2007. — 919 с.

137. Снежицкий В.А. Методологические аспекты анализа variability сердечного ритма в клинической практике [Електронний ресурс] / В.А. Снежицкий // Медицинские новости. — 2004. — Режим доступа до ресурсу: <http://www.mednovosti.by/journal.aspx?article=2037>.

138. Стиллвелл Д. Математика и ее история. — Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. — 530 с.

139. Тиш Є.В. Моделювання та методи обробки кардіоінтервалограм при фізичних навантаженнях – автореф. дис.. канд. техн. наук 01.05.02 / Тиш Є.В. // ТНТУ, 2008. – 20 с.
140. Толстов Г.П. Ряды Фурье. – М.: Гос. изд-во физ. мат-й литературы, 1960. – 390 с.
141. Триус Ю. В. Комп'ютерно-орієнтовані методичні системи навчання математики : моногр. / Ю. В. Триус. – Черкаси : Брама-Україна, 2005. – 400 с.
142. Файнзильберг Л.С. Компьютерный анализ и интерпретация электрокардиограмм в фазовом пространстве // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2004, № 1. – С. 32-46.
143. Файнзильберг Л.С. Новая информационная технология обработки ЭКГ для выявления ишемической болезни сердца при массовых обследованиях населения / Л. С. Файнзильберг // Управляющие системы и машины. – 2005. – № 3. – С. 63-71.
144. Фокин Ю.А., Пономаренко И.С., Павликов В.С. Экспериментальные исследования вероятностных статистических характеристик нагрузок в электроснабжающей системе // Электричество. – 1983. – №2. – С. 9-15.
145. Харкевич А.А. Спектры и анализ. 4-е изд. – М.: Гос. изд. физ. мат. литературы, 1962. – 236 с.
146. Хаспекова Н.Б. Диагностическая информативность мониторинга variability ритма сердца // Вестник аритмологии. – 2003. – №32. – С. 15-23.
147. Черницер В.М., Кадук Б.Г. Преобразователи временного масштаба. – М.: Сов. радио, 1972. – 144 с.
148. Коцан І.Я., Журавльов О.А. Біоритмологія. – Луцьк: Волинський державний університет імені Лесі Українки, 2005. – 115 с.
149. Тимченко А.Н. Основы биоритмологии: учебно-методическое пособие. – Х.: ХНУ имени В.Н. Каразина, 2012. – 148 с.
150. Чибисов С.М., Халаби Г.М., Дементьев М.В., Катинас Г.С., Аналитическая хронобиология. – Москва-Бейрут, 2017. – 224 с.

151. Хетагурова Л.Г. Рапопорт С.И. Ботоева Н.К. Этапы становления хронобиологии и хрономедицины в России (исторический очерк) // Пространство и время, 2013. – №2 (12). – С. 229-237.

152. Хильдебрандт П., Мозер М., Лехофер М. Хронобиология и хрономедицина. Пер. с нем. М.: Арнебия. 2006. – 144 с, 98 илл.

153. Яблучанский Н. И. Вариабельность сердечного ритма в помощь практическому врачу. Для настоящих врачей / Н.И. Яблучанский, А.В. Мартыненко. – Харьков : [б. и.], 2010. – 131 с.

154. Яворська Є.Б. Верифікація результатів спектрального аналізу ритмокардіограми / Є. Б. Яворська // Міжнародний науково-технічний журнал “Оптико-електронні інформаційно-енергетичні технології”. – Вінниця, 2009. – №1 (17). – С. 119-121.

## ДОДАТКИ

## Додаток А

**Список публікацій здобувача за темою дисертації та відомості  
про апробацію результатів дисертації**

*Наукові праці, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації:*

1. Приймак М.В. Оцінка змінного періоду та змінної частоти / М.В. Приймак, Р.О. Сарабун, Л.П. Дмитроца // Міжнародний науково-технічний журнал. Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах. – Хмельницький технологічний ун-т Поділля. – 2011. – №2. – С. 76-82 .

2. Приймак М.В. Сигнали зі змінним періодом та їх модель / М.В. Приймак, Я.П. Василенко, Л.П. Дмитроца // Вісник НТУУ «КПІ». Інформатика, управління та обчислювальна техніка: Зб. наук. пр. – К.: Век+, 2013. – № 59. – С. 116-121 (*Directory of Open Access Journals (DOAJ)*).

3. Василенко Я.П. Клас функцій зі змінним періодом / Я.П. Василенко, Л.П. Дмитроца, М.В. Приймак // Вісник Харківського національного університету імені В.Н.Каразіна Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»: Зб. наук. п. – №1105. – Харків: ХНУ, 2014. – С. 21-33.

4. Василенко Я.П. Способи задання функцій зі змінним періодом та їх наближення / Я.П. Василенко, Л.П. Дмитроца, М.З. Олійник, М.В. Приймак // Вісник Харківського національного університету імені В.Н.Каразіна. Серія "Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління" Випуск 30. – Харків: ХНУ, 2016. – С. 36-47.

5. Приймак М.В. Аналітичні способи задання функцій із змінним періодом та інформаційні технології визначення їх коефіцієнтів Фур'є / Приймак М.В., Дмитроца Л.П., Олійник М.З. // Вісник нац. ун-ту «Львівська політехніка» – Збірник наукових праць, №854. – Серія: Інформаційні системи та мережі. – Львів, вид-во Львівської політехніки, 2016. – С. 138-148.

6. Pryimak M. Fourier series of periodic functions with variable period and evaluation of their variable period for determination of heart rhythm variability /



Mykola Pryjmak, Yaroslav Vasylenko, Lesia Dmytrotsa, Mariya Oliynyk // Computational Problems of Electrical Engineering. – Volume 7, No 2, 2017.– С. 108-116 (*Ulrich's Web ma Index Copernicus*).

7. Dmytrotsa L. Software for Fourier-analysis of functions with variable period / Dmytrotsa L. // Вісник Хмельницького університету – Хмельницький: Видавництво ХНУ, 2018. – № 4 (263). – С.159-166 (*Index Copernicus, Polish Scholarly Bibliography*).

*Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:*

8. Дмитроца Л. Інтервали ортогональності для тригонометричної системи функцій із змінним періодом та можливість знаходження на будь-якому із них коефіцієнтів Фур'є / Л. Дмитроца, М. Приймак, Р. Сарабун // Матеріали першої науково-технічної конференції «Інформаційні моделі, системи та технології» (20 травня 2011). – Тернопіль: ТНТУ, 2011. – С. 12.

9. Дмитроца Л. Варіанти побудови рядів Фур'є для функцій зі змінним періодом / Л. Дмитроца, М. Приймак, Р. Сарабун // Матеріали першої науково-технічної конференції «Інформаційні моделі, системи та технології» (20 травня 2011). – Тернопіль: ТНТУ, 2011. – С. 11.

10. Приймак М.В. Апроксимація змінного періоду та частоти та їх використання в задачах діагностики / Приймак М.В., Сарабун Р.О., Дмитроца Л.П. // Збірник тез доповідей Всеукраїнська наукова конференція «Застосування математичних методів в науці і техніці» (25-26 листопада 2011). – Луцьк: ЛНТУ, 2011.– С. 72-74.

11. Приймак М.В Коефіцієнти Фур'є функцій із змінним періодом / Приймак М.В, Дмитроца Л.П., Сарабун Р.О. // Всеукраїнська наукова конференція «Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу» // Тези доповідей. – Івано-Франківськ, 2012. – С. 52-54.

12. Дмитроца Л. Незалежність коефіцієнтів Фур'є функцій із змінним періодом від змінного інтервалу ортогональності / Л. Дмитроца, М. Приймак // Матеріали II науково-технічної конференції «Інформаційні моделі, системи та

технології» Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя (м. Тернопіль, 25 квітня 2012). – Тернопіль: ТНТУ, 2012. – С. 22.

13. Приймак М. Змінні періоди функції із змінним періодом та їх взаємозв'язок / М. Приймак, Л. Дмитроца // Матеріали XVI наукової конференції Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя, Том I. Природничі науки та інформаційні технології: збірник тез доповідей (м. Тернопіль, 5-6 грудня 2012 року). – Тернопіль: ТНТУ, 2012. – С. 61.

14. Дмитроца Л.П. Про наближення функцій зі змінним періодом / Л.П. Дмитроца // Матеріали XVII наукової конференції Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя, Том I. Природничі науки та інформаційні технології: збірник тез доповідей (м. Тернопіль, 20-21 листопада 2013 року). – Тернопіль: ТНТУ, 2013. – С. 9.

15. Дмитроца Л.П. Приклади задання функцій зі змінним періодом / Дмитроца Л.П. // Застосування математичних методів в науці і техніці: збірник тез доповідей II Всеукраїнської наукової конференції, 22-23 листопада 2013. – Луцьк: РВВ ЛНТУ, 2013. – С. 41-44.

16. Приймак М.В. Розвиток теорії періодичних функцій та їх узагальнення – функції із змінним періодом / М.В Приймак, Л.П Дмитроца // П'ятнадцята міжнародна наукова конференція ім. акад. Михайла Кравчука, 15–17 травня, 2014 р., Київ: Матеріали конф. Т. 2. Алгебра. Геометрія. Математичний аналіз. – Київ: НТУУ «КПІ», 2014. – С. 156-158.

17. Приймак М.В. Система тригонометричних функцій із змінним періодом та деякі її властивості / Приймак М.В., Дмитроца Л.П. // Науково-технічна Міжнародна конференція «Комп'ютерне моделювання у наукоємних технологіях (КМНТ-2014)» Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, м.Харків, 28-31 травня 2014. Труды научно-технической конференции с международным участием. — Харків: ХНУ, 2014. – С. 327-328.

18. Приймак М.В. Функції із змінним періодом як узагальнення періодичних функцій / М.В Приймак, Л.П Дмитроца // Контроль і управління в

складних системах (КУСС-2014). XII Міжнародна конференція. Тези доповідей. Вінниця, 14-16 жовтня 2014 року. – Вінниця: ВНТУ, 2014. – С.31.

19. Приймак М.В. Аналітичне задання функцій зі змінним періодом та їх змінні періоди / Приймак М.В., Дмитроца Л.П., Василенко Я.П., Олійник М.З. // Шістнадцята міжнародна наукова конференція ім. акад. Михайла Кравчука, 14–15 травня, 2015р., Київ: Матеріали конф. Т. 2. Алгебра. Геометрія. Математичний аналіз. – Київ: НТУУ «КПІ», 2015. – С. 156-159.

20. Дмитроца Л.П. Задача створення інформаційної системи моніторингу і реєстрації стану кардіонавантаження / Л.П. Дмитроца // Матеріали XIX наукової конференції ТНТУ ім.І.Пулюя, 18-19 травня 2016 року. – Тернопіль: ТНТУ, 2016. – С. 85-86.

21. Приймак М.В. Про наближення функцій зі змінним періодом / М.В. Приймак, Л.П. Дмитроца, М.З. Олійник // Сімнадцята міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука. 19-20 травня 2016 р., Київ: Матеріали конф. Т.2. Алгебра. Геометрія. Математичний аналіз. – Київ: НТУУ «КПІ», 2016. – С. 155-159.

22. Приймак М.В. Інформаційні технології представлення функцій зі змінним періодом тригонометричними рядами / Приймак М.В., Дмитроца Л.П., Олійник М.З. // Міжнародна науково-технічна конференція Харківського національного університету імені В.Н.Каразіна. 26-31 травня 2016 року. Труды международной научно-технической конф. «Компьютерное моделирование в наукоемких технологиях (КМНТ-2016)». – Харків.: ХНУ, 2016. – С.282-284.

23. Приймак М.В. Функції зі змінним періодом та їх наближення рядами Фур'є / Приймак М.В., Дмитроца Л.П., Олійник М.З. // Праці VI Міжнародної науково-практичної конференції "Обробка сигналів і негаусівських процесів": тези допов.– Черкаси: ЧДТУ, 2017. – С.128-130.

24. Дмитроца Л.П. Порівняльний аналіз приладів для реєстрації RR-інтервалів / Л.П. Дмитроца, Р.І. Черевик // Актуальні задачі сучасних технологій: зб. тез доповідей VI Міжнародної наук-техн. конф. молодих учених та студентів (Тернопіль, 16-17 листопада 2017). – Том II. – Тернопіль : ТНТУ, 2017. – С.54.

25. Приймак М.В. Інформаційні технології дослідження періодичних функцій із змінним періодом та їх застосування для оцінки варіабельності серцевого ритму / Приймак М.В., Василенко Я.П., Дмитроца Л.П., Олійник М.З. // Сучасні проблеми математичного моделювання, обчислювальних методів та інформаційних технологій: Матеріали Міжнародної наукової конференції 2–4 березня 2018 року. – Рівне: НУВГП, РДГУ, 2018. – С. 285-288.

*Наукові праці, які додатково відображають наукові результати дисертації:*

26. Дмитроца Л.П. Комп'ютерна програма “Аналіз RR-інтервалів та оцінка варіабельності серцевого ритму”: свід. про реєстр. автор. права на твір № 79650 від 07.06.2018 / Дмитроца Леся Павлівна, Палій Володимир Михайлович, Приймак Микола Володимирович, Василенко Ярослав Пилипович. – Зареєстр. в Управлінні державних реєстрацій Департаменту інтелектуальної власності Міністерства економічного розвитку і торгівлі України заявка від 22.05.2018 № 80656.

27. Дмитроца Л.П. Комп'ютерна програма “Фур'є-аналіз функцій зі змінним періодом”: свід. про реєстр. автор. права на твір № 79651 від 07.06.2018 / Дмитроца Леся Павлівна, Палка Олег Вікторович, Приймак Микола Володимирович, Василенко Ярослав Пилипович. – Зареєстр. в Управлінні державних реєстрацій Департаменту інтелектуальної власності Міністерства економічного розвитку і торгівлі України заявка від 22.05.2018 № 80657.

### Частина програмного коду розробленого ПЗ «Фур'є-аналіз функцій зі змінним періодом»

Лістинг Б.1 – Функція, для визначення правої точки аналізу (кінцевої) у відповідності до типу досліджуваної функції

```
private double getEndInterval(double funcPow, double x, string
type_of_func)
{
    double result = 0;
    if (type_of_func == "Sin_Cos")
    {
        result = -x + Math.Pow((Math.Pow(x, funcPow)
+ 2 * Math.PI), (1 / funcPow));
    }
    else if (type_of_func == "Tan_Ctan")
    {
        result = -x + Math.Pow((Math.Pow(x, funcPow)
+ Math.PI), (1 / funcPow));
    }
    else if (type_of_func == "Log")
    {
        result = x * (log - 1);
    }
    else if (type_of_func == "Floor")
    {
        result = -x + Math.Pow((Math.Pow(x, funcPow)
+ 1), (1 / funcPow));
    }
    return result;
}
```

Лістинг Б.2 – Призначення значень за замовчуванням та обчислення коефіцієнтів ряду Фур'є (використовуючи метод Сімпсона для чисельного інтегрування) із виведенням результатів у таблицю

```
a_k = new double[k + 1];
b_k = new double[k + 1];

for (int i = 0; i <= k; i++)
{
    double s1_a = 0;
    double s2_a = 0;
    double s1_b = 0;
```

```

double s2_b = 0;
double integrall = 0;
double integral2 = 0;

for (int j = 1; j <= n-1; j++)
{
    if (j % 2 == 0)
    {
        s1_a += funcPow *
Math.Pow(x_i[j], funcPow - 1.0) * f_i[j] * Math.Cos(i * 2 * Math.PI
* Math.Pow(x_i[j], funcPow));
        s1_b += funcPow *
Math.Pow(x_i[j], funcPow - 1.0) * f_i[j] * Math.Sin(i * 2 * Math.PI
* Math.Pow(x_i[j], funcPow));
    }
    else
    {
        s2_a += funcPow *
Math.Pow(x_i[j], funcPow - 1.0) * f_i[j] * Math.Cos(i * 2 * Math.PI
* Math.Pow(x_i[j], funcPow));
        s2_b += funcPow *
Math.Pow(x_i[j], funcPow - 1.0) * f_i[j] * Math.Sin(i * 2 * Math.PI
* Math.Pow(x_i[j], funcPow));
    }
}

integrall = (h / 3) * (funcPow *
Math.Pow(x_i[0], funcPow - 1.0) * f_i[0] * Math.Cos(i * 2 * Math.PI
* Math.Pow(x_i[0], funcPow)) + funcPow * Math.Pow(x_i[n], funcPow -
1.0) * f_i[n] * Math.Cos(i * 2 * Math.PI * Math.Pow(x_i[n], funcPow))
+ 2 * s1_a + 4 * s2_a);
integral2 = (h / 3) * (funcPow *
Math.Pow(x_i[0], funcPow - 1.0) * f_i[0] * Math.Sin(i * 2 * Math.PI
* Math.Pow(x_i[0], funcPow)) + funcPow * Math.Pow(x_i[n], funcPow -
1.0) * f_i[n] * Math.Sin(i * 2 * Math.PI * Math.Pow(x_i[n], funcPow))
+ 2 * s1_b + 4 * s2_b);

a_k[i] = 2 * integrall;
b_k[i] = 2 * integral2;
dataGridView1.Rows.Add(Math.Round(a_k[i], 6),
Math.Round(b_k[i], 6));
}

```

### Лістинг Б.3 – Формування функції суми ряду Фур'є

```

string str_funcPow = Convert.ToString(funcPow).Replace(".", "",
".");

string[] str_a_k = new string[k + 1];
string[] str_b_k = new string[k + 1];

for (int i = 0; i <= k; i++)

```

```

    {
        str_a_k[i] =
Convert.ToString(a_k[i]).Replace(",", "", ".");
        str_b_k[i] =
Convert.ToString(b_k[i]).Replace(",", "", ".");
    }

    string ffunc = "Round((" + str_a_k[0] + "/2) + ";

    string str_2_PI = Convert.ToString(2 *
Math.PI).Replace(",", "", ".");

    for (int i = 1; i <= k; i++)
    {
        if (i != k)
        {
            ffunc += str_a_k[i] + "*Cos(" + i +
"" + str_2_PI + "*Pow([X]," + str_funcPow + ") + " + str_b_k[i] +
"*Sin(" + i + "*" + str_2_PI + "*Pow([X]," + str_funcPow + ") +
";
        }
        else
        {
            ffunc += str_a_k[i] + "*Cos(" + i +
"" + str_2_PI + "*Pow([X]," + str_funcPow + ") + " + str_b_k[i] +
"*Sin(" + i + "*" + str_2_PI + "*Pow([X]," + str_funcPow + ")),2)";
        }
    }
}

```

#### Лістинг Б.4 – Побудова графіка суми ряду Фур'є

```

Expression item3 = new Expression(ffunc);
string seriesName2 = "Furie Sum";
chart1.Series[seriesName2].Points.Clear();
for (double i = 0; i <= endX; i += step)
{
    item3.Parameters["X"] = i;
    var a_i = item3.Evaluate();
    chart1.Series[seriesName2].Points.AddXY(i,
a_i);
}
AmplFas();

```

### Частина програмного коду розробленого ПЗ «Аналіз RR-інтервалів та оцінка варіабельності серцевого ритму»

Лістинг В.1 – Код для імпорту файлів з даними з приладу

```
private void button1_Click(object sender, EventArgs e)
{
    Stream myStream = null;
    string path = string.Empty;
    OpenFileDialog openFileDialog1 = new
OpenFileDialog();

    openFileDialog1.InitialDirectory = "c:\\";
    openFileDialog1.Filter = "txt files
(*.txt)|*.txt|All files (*.*)|*.*";
    openFileDialog1.FilterIndex = 2;
    openFileDialog1.RestoreDirectory = true;

    if (openFileDialog1.ShowDialog() ==
DialogResult.OK)
    {
        try
        {
            if ((myStream =
openFileDialog1.OpenFile()) != null)
            {
                using (myStream)
                {
                    path = openFileDialog1.FileName;
                }
            }
        }
        catch (Exception ex)
        {
            MessageBox.Show("Error: Could not read
file from disk. Original error: " + ex.Message);
        }
    }

    if (path == "")
    {
        return;
    }

    string[] readText = File.ReadAllLines(path);

    string[] patientData = readText[0].Split(';');
    if (patientData.Length == 3)
    {
```



```

        fioTextBox.Text = patientData[0];
        ageTextBox.Text = patientData[1];
        if (patientData[2] == "1")
        {
            sexTextBox.Text = "Жіноча";
        }
        else if (patientData[2] == "0")
        {
            sexTextBox.Text = "Чоловіча";
        }
        else
        {
            sexTextBox.Text = "Не вказано";
        }
    }

    _inputData = new double[readText.Count()-1, 2];
    for (int index = 1; index < readText.Count();
index++)
    {
        readText[index - 1] =
readText[index].Replace('.', ',');
        var oneItem = readText[index - 1].Split(' ');
        if (Convert.ToDouble(oneItem[1]) == 0) {
continue; }
        _inputData[index-1, 0] =
Convert.ToDouble(oneItem[0]);
        _inputData[index-1, 1] =
Convert.ToDouble(oneItem[1]);
    }
    BuildChart();
}

```

## Лістинг В.2 – Побудова апроксимуючої функції

```

private void Aproxim_Click(object sender, EventArgs e)
{
    this.Cursor = Cursors.WaitCursor;
    double error = CurveFunctions.FindGoodFit(Points,
        out BestA, out BestB, out BestC, 10, 100);
    double cofA = BestA / 10;
    double cofB = BestB / 10;
    double cofAlfa = BestC;

    textBox1.Text = cofA.ToString();
    textBox2.Text = cofB.ToString();
    textBox3.Text = cofAlfa.ToString();

    chart1.Series["Series2"].Points.Clear();
    chart1.Series["Series2"].Enabled = true;
}

```

```

chart1.Series["Series3"].Points.Clear();
chart1.Series["Series3"].Enabled = true;

double degreeApproximation = 0.0d;
double quadraticDeviation = 0.0d;

for (int index = 0; index < Points.Count();
index++)
{
    double yValue = cofA + cofB * Math.Pow(Math.E,
cofAlfa * index);
    chart1.Series["Series2"].Points.AddXY(index,
yValue);
    chart1.Series["Series3"].Points.AddXY(index,
1/yValue);
}

for (int index = 0; index <
chart1.Series["Series1"].Points.Count(); index++)
{
    float currentValue =
(float) (chart1.Series["Series1"].Points[index].YValues[0]);
    chart1.Series["Series1"].Points[index].YValues[0] = currentValue;
    //item.Y = chart1.Series["Series1"].Points;
    degreeApproximation +=
Math.Pow(1/currentValue - (cofA + -cofB * Math.Pow(Math.E, cofAlfa
* index)), 2);
    quadraticDeviation += Math.Pow(currentValue -
1 / (cofA + -cofB * Math.Pow(Math.E, cofAlfa * index)), 2);
}
this.Cursor = Cursors.Default;
degreeApproximationTxtBx.Text = Math.Sqrt(
degreeApproximation / chart1.Series["Series1"].Points.Count()
).ToString();
quadraticDeviationTxtBx.Text =
Math.Sqrt(quadraticDeviation /
chart1.Series["Series1"].Points.Count()).ToString();
}

```

### Лістинг В.3 – Встановлення меж

```

private void setDataSides(int rightSideValue)
{
    double minY = double.MaxValue;
    int xValue = 0;
    foreach (var item in chart1.Series["Data"].Points)
    {
        if (item.YValues[0] < minY && item.YValues[0]
> 0)
        {
            minY = item.YValues[0];

```

```

        xValue = Convert.ToInt32(item.XValue);
    }
}
leftSideUpDown.Maximum = rightSideValue;
rightSideUpDown.Maximum = rightSideValue;

leftSideUpDown.Value = xValue;
rightSideUpDown.Value = rightSideValue;
}

```

#### Лістинг В.4 – Об'єднання суміжніх точок для пришвидшення обчислень

```

private double[,] RoundItems(double[,] inputData)
{
    double[,] roundedData = new
double[(int) (inputData.Length/countDotsInOneUpDown.Value /2), 2];
    double[] tmpOneItem = new double[2];
    int globalIndex = 0;
    for (int index = 0; index < (int) (inputData.Length
/2) - countDotsInOneUpDown.Value; index +=
(int) countDotsInOneUpDown.Value)
    {
        for (int secondIndex = 0 ; secondIndex <
(int) countDotsInOneUpDown.Value; secondIndex++)
        {
            tmpOneItem[0] += inputData[index +
secondIndex, 0];
            tmpOneItem[1] += inputData[index +
secondIndex, 1];
        }
        roundedData[globalIndex, 0] = tmpOneItem[0] /
(int) countDotsInOneUpDown.Value;
        roundedData[globalIndex, 1] = tmpOneItem[1] /
(int) countDotsInOneUpDown.Value;
        tmpOneItem[0] = 0;
        tmpOneItem[1] = 0;
        globalIndex++;
    }
    return roundedData;
}

```

## Акти впровадження результатів дисертаційних досліджень



### АКТ впровадження

1. Використання комп'ютерної програми «Аналіз RR-інтервалів та оцінка варіабельності (назва пропозиції для впровадження) серцевого ритму» при аналізі електрокардіограми, отриманої після дії на організм пацієнта фізичного навантаження \_\_\_\_\_
2. Заклад, що розробив, впровадження: Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя, м., вул. Руська 56, кафедра комп'ютерних наук
3. Джерело інформації Дисертаційна робота Дмитроци Л.П. на тему: "Інформаційні технології дослідження функцій зі змінним періодом та їх застосування для оцінки варіабельності серцевого ритму"  
(назва, рік видання методичних рекомендацій) \_\_\_\_\_
4. Впроваджено по РПВ 2018р.:  
3) Збаразька центральна районна комунальна лікарня  
назва лікувально-профілактичного закладу 4/ \_\_\_\_\_
5. Строки впровадження 4/ з 01.01.2018 року по 01.04.2018 року
6. Загальна кількість спостережень 4) 21 пацієнт
7. Ефективність впровадження в відповідності з критеріями, викладеними в джерелі інформації (п.3)

Показники 5/	По даних	
	Розробчиків 2/	Впроваджуючої організації 4/
Скорочення		
- строків лікування		
- тимчасової непрацездатності		
Зменшення		
- легальності		
- інвалідності		
- захворюваності		
- частоти розходження діагнозів	підвищити інформативність аналізу електрокардіограми за рахунок введення нових діагностичних параметрів	покращено аналіз електрокардіограми
Економічні показники і т.п.		

8. Зауваження, пропозиції 4/ \_\_\_\_\_

„ 04 „ 04 2018 р.

Відповідальний за впровадження: зав. кабінетом функціональної діагностики

Прізвище, ім'я, по-батькові: Пелешко Лариса Іванівна

ЗАТВЕРДЖУЮ

Директор Інституту електродинаміки  
НАН України, академік НАН України

Кириленко О.В.

« 20 » 06 2018 р.

## АКТ


про впровадження результатів дисертаційного дослідження

*Дмитроци Лесі Павлівни*на тему «*Інформаційні технології дослідження функцій зі змінним періодом та їх застосування для оцінки варіабельності серцевого ритму*»на здобуття наукового ступеня кандидата технічних за спеціальністю  
05.13.06 – інформаційні технології

Нами, Мисловичем М.В., завідувачем відділу №12 ІЕД НАНУ, Приймаком М.В, зав. кафедрою комп'ютерних наук ТНТУ ім. Івана Пулюя, Сисаком Р.М. старшим науковим співр. ІЕД НАНУ, Дмитроцею Л.П. асистенткою кафедри комп'ютерних наук ТНТУ складено даний акт в тому, що в Інституті електродинаміки НАН України використано наступні результати дисертаційної роботи Дмитроци Л.П.:

- методи Фур'є-аналізу періодичних функцій зі змінним періодом для розв'язку задач дослідження спектрального складу електроенергії із врахуванням зміни її частоти (в залежності від години доби);

- алгоритми та програмне забезпечення для оцінки змінного періоду у віброграмах обертових частин електричних машин з метою подальшого діагностування їх технічного стану.

Від Тернопільського національного  
технічного університетуВід Інституту електродинаміки  
НАН УкраїниД.т.н., проф.  Приймак М.В.Д.т.н., проф.  Мислович М.В.Асистент  Дмитроца Л.П.К.т.н., с.н.с.  Сисак Р.М.



„ЗАТВЕРДЖУЮ”

Перший проректор Тернопільського національного  
технічного університету імені Івана Пулюя

Митник М.М.

” 07 2018

**Акт впровадження**

1. *Об'єкт впровадження:* Комп'ютерні програми для дослідження функцій зі змінним періодом та аналізу процесів зі змінним періодом (авторські свідоцтва № 79650, № 79651).
2. *Ким запропоновано, виконавці, адреса:* Дмитроца Л.П., асистент кафедри комп'ютерних наук Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя, кафедра комп'ютерних наук, м. Тернопіль, вул. Руська 56.
3. *Джерело інформації:* Дисертаційна робота Дмитроци Л.П. на тему: “Моделі, методи та інформаційна технологія аналізу процесів зі змінним періодом”.
4. *Де впроваджено:* Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя, м. Тернопіль, вул. Руська 56, кафедра комп'ютерних наук.
5. *Термін впровадження:* 2018 р.
6. *Висновок по впровадженню:* Запропоновані програми дозволяють досліджувати періодичні функції зі змінним періодом: обчислювати коефіцієнти ряду Фур'є, будувати ряди Фур'є та їх графіки, обчислювати амплітудний та фазовий спектри функцій зі змінним періодом; будувати оцінку змінного періоду та знаходити інформативно-діагностичні параметри варіабельності серцевого ритму після фізичного навантаження. Запропоновані комп'ютерні програми використовуються в навчальному процесі на кафедрі комп'ютерних наук при вивченні дисциплін: “Чисельні методи”, “Обробка сигналів та зображень”, “Моделювання систем”, «Методи та системи підтримки прийняття рішень».

Зав. кафедрою  
комп'ютерних наук, д.т.н., проф.

Приймак М.В.

Асистент кафедри  
комп'ютерних наук

Дмитроца Л.П.

„ЗАТВЕРДЖУЮ”

Директор комунального підприємства  
 “Тернопільський міський лікувально-  
 діагностичний центр” Тернопільської  
 міської ради

П.Р.Левицький

" " 2018 р.

## АКТ

про впровадження результатів дисертаційного дослідження  
 Дмитроци Лесі Павлівни  
 на тему «Моделі, методи та інформаційна технологія аналізу  
 процесів зі змінним періодом»

на здобуття наукового ступеня кандидата технічних за спеціальністю 05.13.06  
 – інформаційні технології

Комісія у складі:

голови – заступник директора КП «ТМЛДЦ» Книш Роман Орестович;

членів комісії: лікар-кардіолог Галушка Ірина Романівна;

лікар з функціональної діагностики вищої кваліфікаційної  
категорії Майка Людмила Ксаверівна

цим Актом засвідчує, що результати дисертаційної роботи Дмитроци Л.П., розширюють множину параметрів при аналізі варіабельності серцевого ритму після фізичного навантаження новими діагностичними ознаками, а саме: величина, на яку збільшується частота серцевих скорочень; швидкість стабілізації ритму; інтервал стабілізації серцевих скорочень; аритмія серцевого ритму локального та інтегрального характеру. Ці параметри є досить інформативними при оцінці стану та поведінки організму після фізичних навантажень чи стресових ситуацій, а також дають можливість покращити діагностику функціонального стану серцево-судинної системи людини.

**Голова комісії**  
 заступник директора КП «ТМЛДЦ»

**Члени комісії**  
 лікар-кардіолог

лікар з функціональної діагностики  
 вищої кваліфікаційної категорії

Р.О. Книш

І.Р. Галушка

Л.К. Майка

« 6 » 08 2018 р.



„ЗАТВЕРДЖУЮ”  
Тернопільський державний медичний університет  
ім. І.Я. Горбачевського  
Проректор з наукової роботи



І.М. Кліщ  
2018

### АКТ ВПРОВАДЖЕННЯ

1. Назва пропозиції для впровадження: «Інформаційна технологія аналізу електрокардіограми, отриманої після дії на пацієнта фізичного навантаження та визначення діагностичних показників (параметрів) варіабельності серцевого ритму»
2. Заклад, що розробив, його поштова адреса: Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя, м. Тернопіль, вул. Руська 56, кафедра комп'ютерних наук
3. Прізвище, імя, по-батькові авторів: Дмитроца Л.П., асистент кафедри комп'ютерних наук Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя, кафедра комп'ютерних наук
4. Джерело інформації: Дисертаційна робота Дмитроци Л.П. на тему: «Моделі, методи та інформаційна технологія аналізу процесів зі змінним періодом».
5. Назва організації, що впроваджує: кафедра медичної інформатики Тернопільського державного медичного університету імені І.Я. Горбачевського, м. Тернопіль, Майдан Волі, 1.
6. Термін впровадження: 2017-2018 р.
7. Ефективність впровадження: застосування інформаційної технології аналізу електрокардіограми, отриманої після дії на пацієнта фізичного навантаження дає можливість визначити нові діагностичні показники (параметри) варіабельності серцевого ритму після фізичного навантаження та оцінити адаптаційні можливості організму людини.
8. Зауваження та пропозиції організації, що впровадила розробку: рекомендовано до включення в навчальний процес з навчальних дисциплін «Комп'ютерне моделювання у фармації», «Медична інформатика».

Відповідальний за впровадження:

Завідувач кафедри медичної інформатики

ТДМУ ім. І.Я. Горбачевського

д.біол.н., доц. Вакуленко Д.В.



**УКРАЇНА**



**СВІДОЦТВО**  
про реєстрацію авторського права на твір

№ 79650

**Комп'ютерна програма "Аналіз RR-інтервалів та оцінка варіабельності серцевого ритму"**  
(вид, назва твору)

**Автор(и) Дмитроца Леся Павлівна, Палій Володимир Михайлович, Приймак Микола Володимирович, Василенко Ярослав Пилипович**  
(повне ім'я, псевдонім (за наявності))

*Дата реєстрації* 07.06.2018

**Державний секретар Міністерства економічного розвитку і торгівлі України О. Ю. Перезвенцев**



МІНІСТЕРСТВО ЕКОНОМІЧНОГО РОЗВИТКУ І ТОРГІВЛІ УКРАЇНИ  
ІДЕНТИФІКАЦІЙНИЙ КОД 37508596  
Ж.И.И.

ПК «Україна». Заст. 18-2001. 2018 р. 1 кт.



**УКРАЇНА**



**СВІДОЦТВО**  
про реєстрацію авторського права на твір

№ 79651

**Комп'ютерна програма "Фур'є-аналіз функцій зі змінним періодом"**  
(вид, назва твору)

**Автор(и) Дмитроца Леся Павлівна, Палка Олег Вікторович, Приймак Микола Володимирович, Василенко Ярослав Пилипович**  
(повне ім'я, псевдонім (за наявності))

Дата реєстрації **07.06.2018**

**Державний секретар Міністерства економічного розвитку і торгівлі України О. Ю. Перевезенцев**



УКРАЇНА • UKRAINE • УКРАЇНА • UKRAINE • УКРАЇНА • UKRAINE • УКРАЇНА • UKRAINE • УКРАЇНА • UKRAINE • УКРАЇНА • UKRAINE • UKRAINE • UKRAINE • UKRAINE • UKRAINE • UKRAINE • UKRAINE • UKRAINE • UKRAINE • UKRAINE