УДК 519.21

Р. Жаровський[1]; Б. Марченко[2], докт. фіз.-мат. наук;
Н. Марченко[2], канд. техн. наук

[1]Тернопільський державний технічний університет імені Івана Пулюя
[2]Інститут електродинаміки НАН України

МОДЕЛЮВАННЯ БІЛОГО ШУМУ З ДИСКРЕТНИМ ЧАСОМ

Розглядається проблема обґрунтування способів моделювання різних процесів, зокрема білого шуму. Описуються найпростіші моделі шумів з дискретним часом, а також особливості і властивості таких моделей. Подаються результати моделювання білого шуму з дискретним часом.

R. Zharovskiy, B. Marchenko, N. Marchenko

MODELING OF WHITE NOISE WITH DISCRETE TIME

The problem of analyses of different processes, modeling ways, white noise in particular, is studied. The simpliest models of noises with discrete time, as well as the peculiarities and properties of such models are described. The results of modeling of the white noise with discrete time are presented.

Ключові слова: породжуючий процес, імпульсна реакція формуючого фільтра, білий шум, енергетичний спектр, спектр потужності, функція розподілу, кореляційна функція.

Умовні позначення

$\zeta(t)$, $t \in \mathbf{Z}$ – дискретний білий шум (процес з незалежними значеннями);
$K(x)$ – неспадна дійсна обмежена функція;
$R(s)$ – кореляційна функція білого шуму;
$S(\omega)$ – спектральна щільність потужності дискретного білого шуму.

Вступ

Робота присвячена математичним моделям стохастичних шумів, що виступають як первинні найпростіші (базові) моделі при моделюванні більш складних процесів (вихідні процеси), тобто ставиться задача достатньо вичерпно описати найпростіші моделі шумів з дискретним часом, обґрунтувати формули їх теоретичних параметрів, проілюструвати графічно формули, а також особливості і властивості таких моделей. Метою даного каскаду з трьох робіт є обґрунтування деяких способів моделювання різних процесів. Таким чином, планується продовжити роботу шляхом написання ще двох робіт з циклу вказаних.

Процес з незалежними значеннями вважається найпростішим, з якого найчастіше і починається моделювання всіх інших випадкових процесів.

Метою даної роботи є обґрунтування деяких способів моделювання різних процесів, зокрема білого та забарвленого шумів, побудова алгоритмів, ілюстрації характеристик розроблених моделей, ілюстрації методів з їх застосування.

Побудова моделі білого шуму

Процес з незалежними значеннями. Як відомо, випадковий процес

$$\{\zeta(t), t \in T\}, \tag{1}$$

де T – числова множина, в даній роботі нас буде цікавити лише випадок, коли T є множиною чисел $t \in \{0,1,\ldots\}$, задається послідовністю скінченновимірних функцій розподілу

$$F_n\{x_1,x_2,\ldots,x_n;t_1,t_2,\ldots,t_n\} = \mathcal{P}\{\zeta(t_1)<x_1,\zeta(t_2)<x_2,\ldots,\zeta(t_n)<x_n\},\quad n=1,2,\ldots,\quad x\in R^n . \tag{2}$$

Такий процес можна назвати випадковим вектором або послідовністю випадкових чисел.

В тому випадку, коли процес (1) має при всіх $t \in T$ незалежні значення, маємо

$$F_n\{x_1,x_2,\ldots,x_n;t_1,t_2,\ldots,t_n\} = \prod_{j=1}^{n} F_1\{x_j;t_j\}, \tag{3}$$

де

$$\{F_j(x;t), t\in T, j=1,2,\ldots\} = \mathcal{P}\{\zeta(t_j)<x_j\}. \tag{4}$$

Коли всі $F_1\{x_j;t_j\}$, які входять в (3) і визначені згідно з (4), належать одному класу розподілів, ми маємо стаціонарний процес з незалежними значеннями, назва якого співпадає з назвою одновимірної функції розподілу $F_1\{x_j;t_j\}$. Наприклад, розподіл гаусса, пуассона, гама, коші і т.д. Властивості процесів з незалежними значеннями повністю визначаються функціями (2) та (3). Тому, коли говорять, що задано процес (1), то мають на увазі, що задано його функції розподілу (2).

Математичним сподіванням випадкового процесу (1) з функцією розподілу (4) називається функція часу, що визначена інтегралом Стілтьєса [1]:

$$\mathbf{M}\zeta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x dF_1(x;t),\quad t\in T .$$

Дисперсією випадкового процесу (1) називається математичне сподівання квадрата відхилення значення випадкового процесу від свого математичного сподівання:

$$\mathbf{D}\zeta(t) = \mathbf{M}(\zeta(t)-\mathbf{M}\zeta(t))^2 = \int_{-\infty}^{\infty}(x-\mathbf{M}\zeta(t))^2 dF_1(x;t), t\in T \cdot$$

Характеристичною функцією випадкового процесу (1) називається математичне сподівання випадкового процесу $e^{iu\zeta(t)}$, тобто

$$f(u;t) = \mathbf{M}e^{iu\zeta(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} dF_1(x;t),\ u\in(-\infty,\infty), t\in T ,$$

де $F_1(x;t)$ – функція процесу (4).

Кореляційною функцією гільбертового випадкового процесу $\{\zeta(t), t\in T\}$ називається функція

$$R(t_1,t_2) = \mathbf{M}\{[\zeta(t_1)-\mathbf{M}\zeta(t_1)][\zeta(t_2)-\mathbf{M}\zeta(t_2)]\}, t_1,t_2 \in T\times T . \tag{5}$$

Для стаціонарного процесу кореляційна функція (5) залежить тільки від різниці аргументів $s = t_2 - t_1$.

Для такого процесу існує спектральна щільність потужності

$$S(\omega) = \begin{cases} \dfrac{\varkappa_2}{2\pi}, & |\omega|\le\omega_0, \\ 0, & |\omega|>\omega_0, \end{cases} \qquad \omega\in[-\pi,\pi], \tag{6}$$

де $\varkappa_2 = \mathbf{D}\zeta(t)$ – інтенсивність (дисперсія) стаціонарного білого шуму.

Зауваження. Для випадку білого шуму теоретична кореляційна функція має вигляд

$$R(s) = \begin{cases} 1, & s = 0, \\ 0, & \textit{в інших випадках}. \end{cases} \tag{7}$$

Якщо існує така функція $p(x;t)$, що при будь-яких x виконується співвідношення

$$F(x;t) = \int_{-\infty}^{x} p(y;t)dy,$$

то $p(x;t)$ називається щільністю розподілу ймовірностей (1).

Як відомо, функціям розподілу (2), що визначають процес (1), відповідають характеристичні функції

$$f\{u_1, u_2, \ldots, u_n; t_1, t_2, \ldots, t_n\},\ n = 1,2,3\ldots.$$

Нас будуть цікавити випадкові процеси (1), у яких ці характеристичні функції є безмежно-подільні і мають канонічний вигляд у формі Колмогорова

$$\ln f_\zeta(u) = imu + \int_{-\infty}^{\infty} \left[e^{iux} - 1 - iux\right] \frac{dK(x)}{x^2}. \tag{8}$$

Тут m - математичне сподівання процесу (1), яке, за заданою характеристичною функцією $f_\zeta(u)$ процесу (1), можна визначити шляхом диференціювання її логарифма в нулі:

$$m = -i \frac{d}{du} \ln f_\zeta(u)|_{u=0},$$

$K(x)$– неспадна дійсна обмежена функція; за відомою характеристичною функцією вона визначається зі співвідношення

$$K(x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{y\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iuy} - e^{-iux}}{iu} \cdot \frac{d^2 \ln f_\zeta(u)}{du^2} du.$$

Зокрема, для гауссівського випадку:

$$K(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \sigma^2, & x > 0. \end{cases}$$

Для розподілу пуассона:

$$K(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ \lambda, & x > 1. \end{cases}$$

Таким чином, властивості процесу з незалежними значеннями і безмежноподільним законом розподілу повністю визначається математичним сподіванням та функцією стрибків $K(x)$ [2]. Зокрема, $K(x)$ може залежати від часу. В залежності від властивостей $K(x)$ можна отримати періодичні процеси з незалежними значеннями.

Числова реалізація побудови моделей.

Перейдемо до практичної частини. Розглянемо питання, пов'язані з попередньою обробкою сигналів.

Зупинимося на моделюванні процесу з незалежними значеннями, білого шуму [3].

Вихідні дані моделі:

N – об'єм вибірки;

ζ_l – білий шум;

l – змінна, яка приймає значення від 1 до $N-1$;

$\varkappa_1$ – математичне сподівання $\zeta(t)$;

$\varkappa_2$ – дисперсія $\zeta(t)$;

u – коефіцієнт передачі формуючого фільтра;

ω, s – змінні.

Вибрано $N = 1000$ відліків.

Далі, шляхом використання розробленої програми, в середовищі MathCAD були отримані наступні реалізації та значення.

Перший етап моделювання полягає в отриманні однієї з реалізацій випадкового процесу. Його можна виконати з використанням програми rnd(1) та подальшим методом відповідних функціональних перетворень, в результаті яких ми з послідовності (реалізації) рівномірно розподілених чисел отримаємо реалізації для заданого закону розподілу. Наприклад, це може бути строго субгауссівська послідовність чисел [4] чи арксинус послідовність, чи навіть безпосередньо рівномірно розподілені числа.

Одну з типових реалізацій дослідженого процесу ζ_l показано на рис.1.

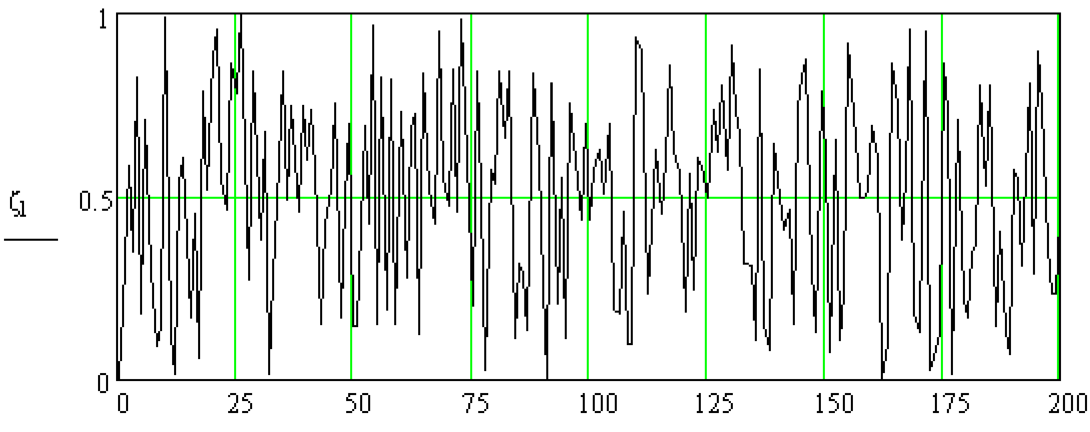

Рисунок 1 - Реалізація випадкового процесу ζ_l

Його математичне сподівання в програмі визначається так:

$$\mathbf{M}\zeta(t) = \varkappa_1 \frac{u(\pi - \omega_0 + 1)}{\pi},$$

u вибрано рівним 1, що значно спрощує попередню формулу. При умові $\mathbf{M}\zeta(t) = \varkappa_1$, $\sigma^2 = 0{,}25 = \varkappa_2$, забезпечується рівність математичних сподівань відгуку фільтра і твірного процесу.

За допомогою програми були отримані оцінки математичного сподівання та дисперсії, що становили $\mathbf{M}\zeta = 0{,}496$ та $\mathbf{D}\zeta = 0{,}084$ відповідно.

Графік оцінки кореляційної функції однієї з реалізацій білого шуму $R(s)$, де $s \in (-25, 25)$ зображений на рис.2.

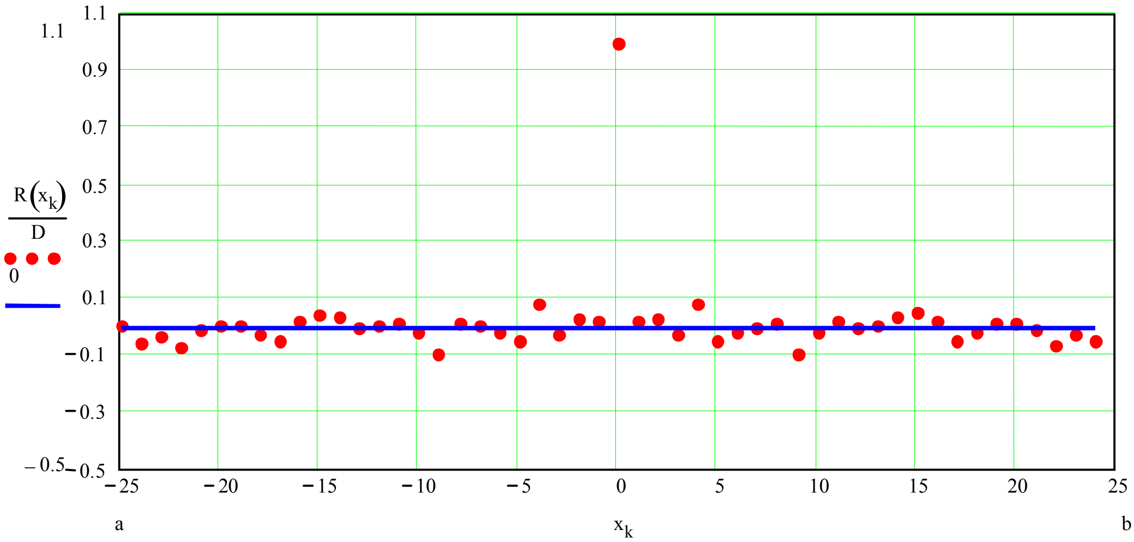

Рисунок 2 - Графік оцінки кореляційної функції білого шуму $R(s)$

Якщо побудувати, згідно з теоретичною формулою (7), графік функції $R(s)$ і порівняти його з графіком, який зображено на рис.2 (графік був отриманий за допомогою розробленої програми), то очевидно, що вони співпадають, зокрема в точці $R(0) = 1$.

Висновки

В роботі було розглянуто та проілюстровано побудову моделі білого шуму, процесу з незалежними значеннями.

За допомогою розробленої програми було отримано оцінки математичного сподівання, дисперсії та кореляційної функції білого шуму.

Література

1. Колмогоров А. Н. Основные понятия теории вероятностей. – М.: Наука, 1974. – 120с.
2. Бабак В.П., Марченко Б.Г., Фриз М.Є. Теорія ймовірностей, випадкові процеси та математична статистика. – К.: Техніка, 2004. – 288с.
3. Марченко В.Б. Ортогональные функции дискретного аргумента и их приложение в геофизике. – Киев: Наукова думка, 1992. – 212с.
4. Марченко Н.Б. Анализ точностных характеристик при моделировании линейных субгауссовых случайных процессов и их использование в информационно-измерительных системах // Электронное моделирование. –2004. – Т. 26, №6. – С. 63-71.

Одержано 24.10.2007 р.