УДК 519.21

Р. Жаровський

Тернопільський державний технічний університет імені Івана Пулюя

КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ СТАЦІОНАРНОГО RC ШУМУ З ДИСКРЕТНИМ ЧАСОМ

У роботі обґрунтовується математична модель стаціонарного дискретного RC шуму – лінійного стаціонарного випадкового процесу. Розробляється методика комп'ютерного моделювання реалізацій на основі запропонованої моделі, а також наводяться результати моделювання стаціонарного дискретного RC шуму з різними характеристиками.

R. Zharovskiy

COMPUTER MODELING OF STATIONARY RC NOISE WITH DISCRETE TIME

Mathematical model of stationary discrete RC noise – linear stationary accidental process is presented in the article. The method of computer modeling is worked out and results of modeling of stationary discrete RC noise with different characters are pointed.

Ключові слова: породжуючий процес, імпульсна реакція формуючого фільтра, білий шум, стаціонарний RC шум, спектр потужності, кореляційна функція.

Вступ

Широке коло задач статистичної обробки сигналів базується на використанні методів цифрової обробки. У багатьох випадках структура і характеристики сучасних інформаційних систем, в тому числі інформаційно-вимірювальних та діагностичних, обґрунтовується з використанням методів статистичного моделювання [1]. На сьогодні широко застосовується теорія лінійних процесів [2], яка дає можливість розв'язувати задачі комп'ютерного моделювання [3].

У даній роботі наведено результати статистичного аналізу стаціонарного RC шуму – лінійного стаціонарного випадкового процесу, який в залежності від постановки може розглядатись в одних задачах як інформаційний сигнал, а в інших – як завада.

Мета даної роботи полягає в обґрунтуванні математичної моделі стаціонарного RC шуму, визначенні його основних характеристик, розробці методики комп'ютерного моделювання реалізацій і отримання результатів статистичної їх обробки.

Основний зміст

Обґрунтування математичної моделі RC шуму базується на використанні результатів теорії лінійних випадкових процесів [2]. Прикладна інтерпретація результатів цієї теорії базується на узагальненні відомого "методу формуючих фільтрів" як методу перетворення лінійним формуючим фільтром діючого на його вхід випадкового процесу типу "білий шум". В якості породжуючого процесу вибираємо білий шум з дискретним часом [3]:

$$\left\{\zeta(t),\ t \in (-\infty, \infty)\right\}. \tag{1}$$

RC шум будемо моделювати шляхом лінійної фільтрації процесу (1). Тобто це буде згортка процесу (1) й імпульсної реакції стаціонарного формуючого фільтра. Позначимо імпульсну реакцію через $\varphi(t),\ t \in (-\infty, \infty)$.

В результаті згортки отримаємо процес [2]

$$\xi(t) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \varphi(t)\zeta(t-\tau),\ t \in (-\infty, \infty), \tag{2}$$

який називається лінійним випадковим процесом з дискретним часом. Якщо процес (1) стаціонарний, то стаціонарним буде і процес (2).

Представлення шумових процесів у вигляді моделі дискретного випадкового процесу дозволяє просто проводити лінійні операції, які, зрештою, зводяться до операцій над ядром $\varphi(t),\ t \in (-\infty, \infty)$. Крім цього, для процесу (2) відома канонічна форма характеристичної функції [3].

Розглянемо частковий випадок моделі (2). RC шум – це процес з дискретним часом і низькочастотним енергетичним спектром. Назва процесу походить із назви лінійного формуючого фільтра.

Такий процес отримується із базового білого шуму фільтром з імпульсною перехідною характеристикою

$$\varphi(t) = ue^{-\alpha t}U(t),\ t \in (-\infty, \infty),\ \alpha > 0, \tag{3}$$

де $U(t)$ - функція Хевісайда

$$U(t) = \begin{cases} 0,\ t < 0, \\ 1,\ t \geq 0, \end{cases} t \in (-\infty, \infty). \tag{4}$$

Для RC шуму його математичне сподівання

$$a_1 = \mathrm{M}\xi(t) = æ_1 \cdot \frac{u}{1 - e^{-\alpha}}. \tag{5}$$

Параметр u, коефіцієнт передачі формуючого фільтра, зручно брати рівним 1 або $u = 1 - e^{-\alpha}$. Для випадку, коли $u = 1$, комплексна передаточна характеристика фільтра має вигляд

$$Y(\omega) = \frac{e^{\alpha}u}{e^{\alpha} - e^{-j\omega}},\ \omega \in [-\pi, \pi).$$

Даний фільтр є фізично реалізовним.

З допомогою імпульсної перехідної характеристики (3) може бути описано більшість реальних цифрових низькочастотних фільтрів. Тоді RC набуває вигляду

$$\xi(t) = \sum_{\tau=0}^{\infty} ue^{-\alpha t}\zeta(t-\tau),\ t \in (-\infty, \infty). \tag{6}$$

Його кореляційна функція:

$$R(s) = æ_2 \cdot \frac{u^2 e^{-2\alpha|s|}}{1 - e^{-2\alpha}} = R(0) \cdot e^{-\alpha|s|},\ s \in (-\infty, \infty),\ \alpha > 0, \tag{7}$$

а спектральна щільність потужності

$$S(\omega) = \frac{u^2 e^{-a}}{2(ch\alpha - \cos\omega)},\ \omega \in [-\pi, \pi). \tag{8}$$

Практична частина

Використовуючи метод формуючих фільтрів і формули, що були наведені вище, отримуємо наступну структуру (алгоритм) моделювання

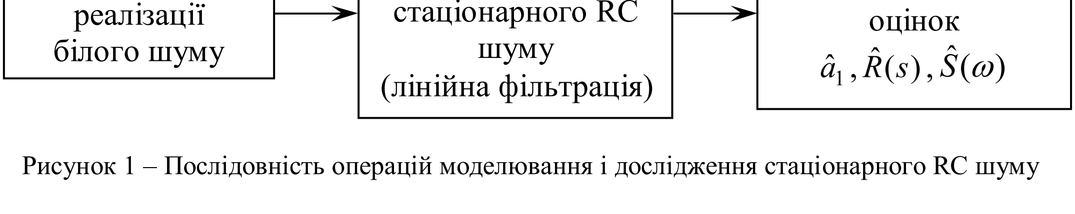

Рисунок 1 – Послідовність операцій моделювання і дослідження стаціонарного RC шуму

Згідно з даною структурою, в середовищі MathCAD була розроблена програма, в результаті роботи якої були отримані наступні реалізації та значення.

Перший етап моделювання полягає в отриманні однієї з реалізацій базового білого шуму з дискретним часом (об'єм вибірки $N = 5000$). Одну з типових реалізацій процесу ζ_t показано на рис.2.

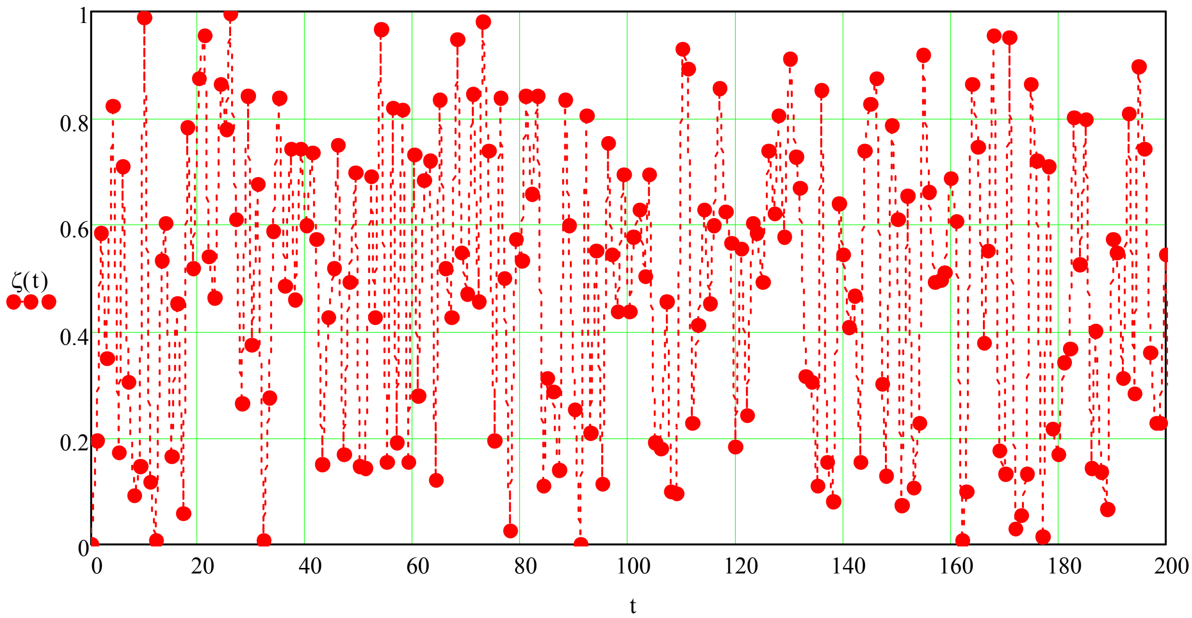

Рисунок 2 – Реалізація базового білого шуму ζ_t

Другий етап полягає у лінійній фільтрації базового білого шуму ζ_t фільтром з імпульсною перехідною характеристикою (3). В результаті отримаємо реалізацію RC шуму.

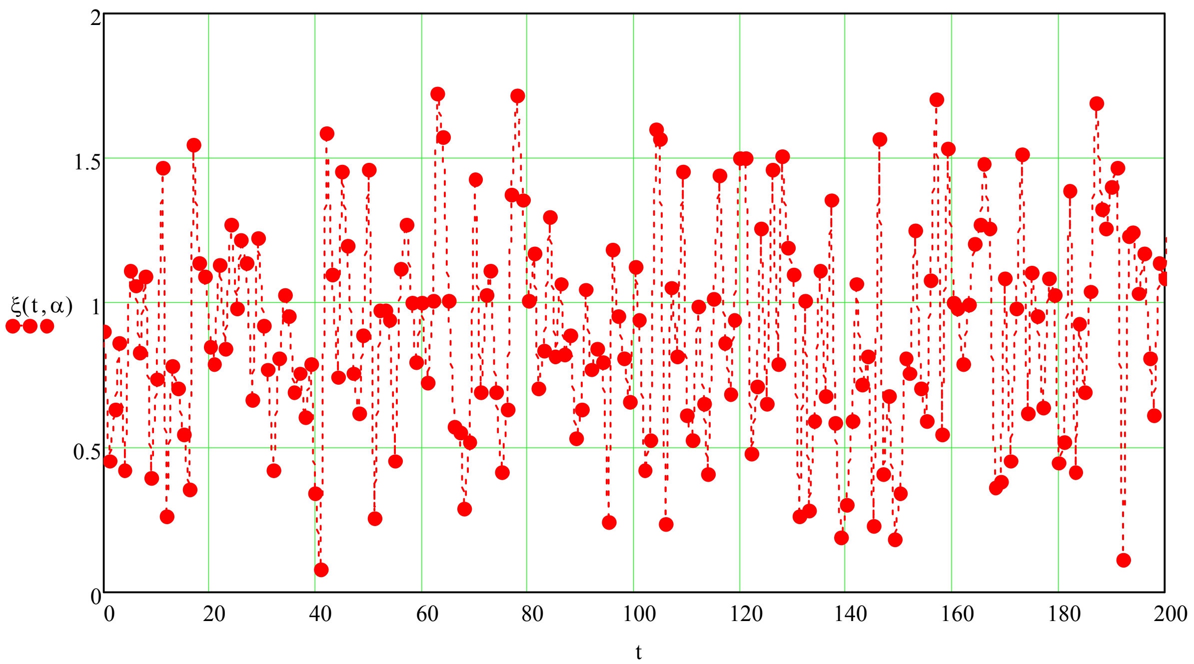

Рисунок 3 – Реалізація RC – шуму з дискретним часом

Третій етап. Визначення статистичних оцінок: математичного сподівання дисперсії кореляційної функції, спектральної функції дискретного RC шуму.

Для визначення математичного сподівання скористаємось формулою (5), коефіцієнт передачі формуючого фільтра вибираємо: $u = 1$. За допомогою програми було отримано наступне значення математичного сподівання змодельованого стаціонарного RC шуму $a_1 = 0{,}496$, а також побудовано наступні графіки реалізацій кореляційної функції RC шуму і спектральної щільності потужності RC шуму.

Для побудови графіка реалізації кореляційної функції RC шуму була використана формула (7). Реалізація кореляційної функції RC шуму для $\alpha = 0.2; \alpha = 0.4; \alpha = 0.8$ зображена на рис. 4.

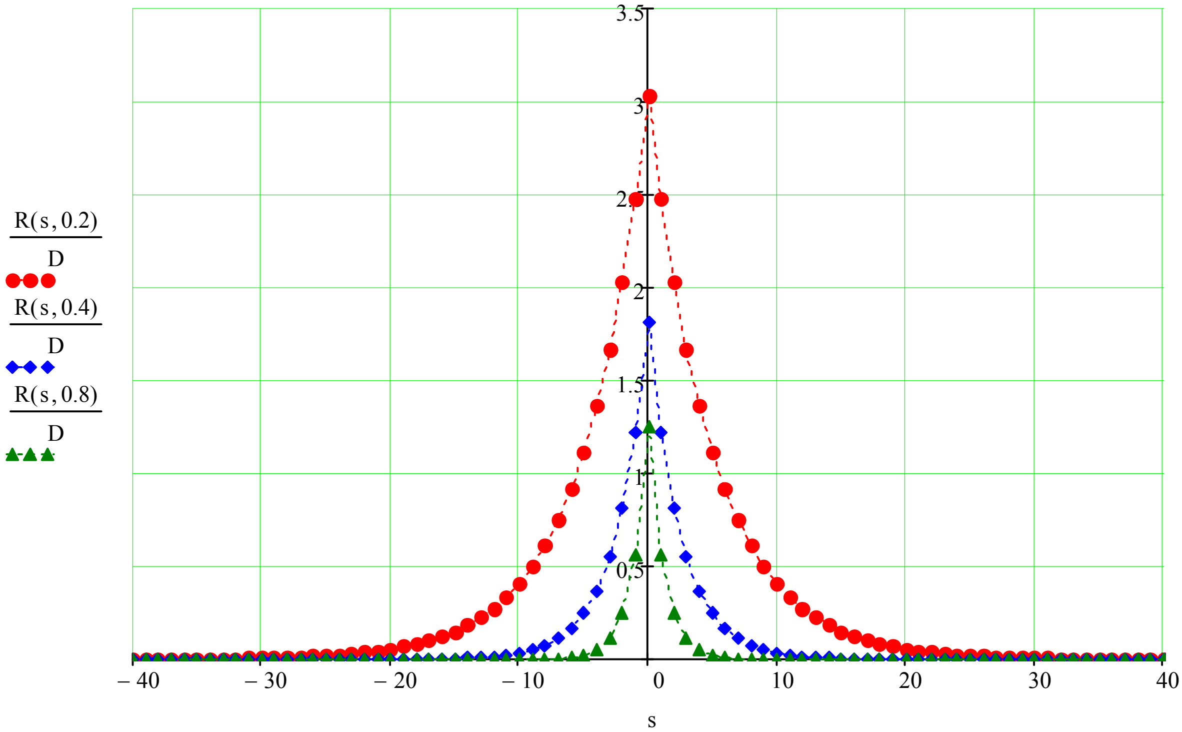

Рисунок 4 – Статистична оцінка нормованої кореляційної функції RC шуму при різних α

Спектральну щільність потужності дискретного RC шуму визначаємо за формулою (6) для $\alpha = 0.2, \alpha = 0.4, \alpha = 0.8$. Результати обчислення наведені на рисунку 5.

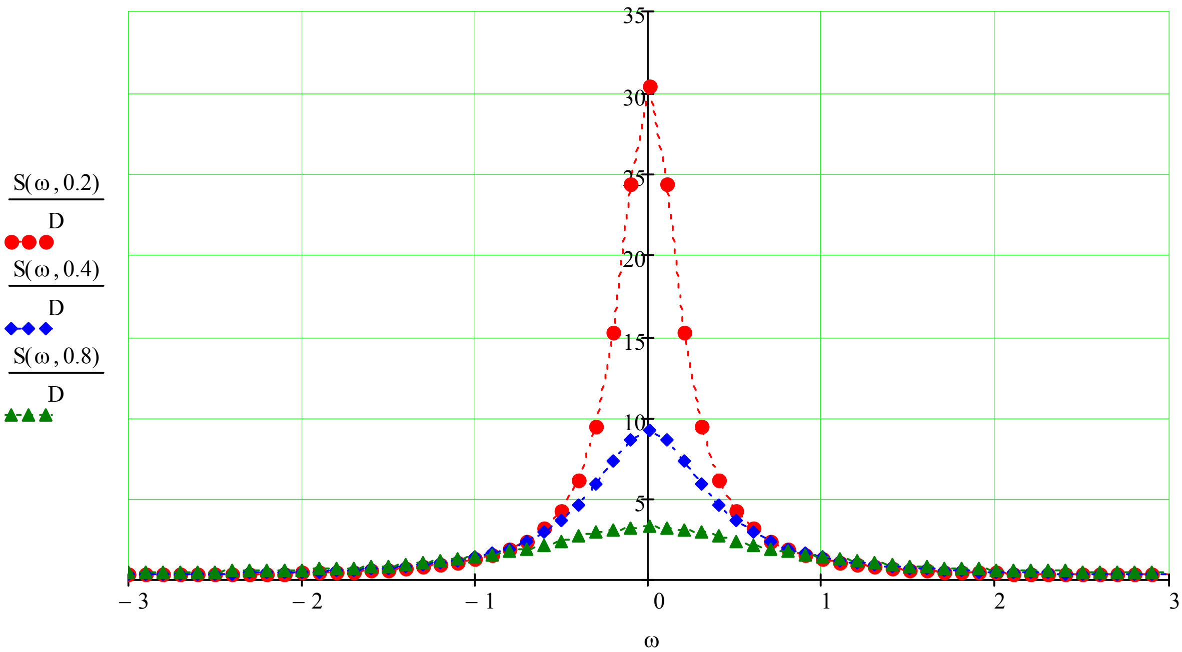

Рисунок 5 – Спектральна щільність потужності дискретного RC – шуму $\omega \in [-\pi; \pi]$

Висновки

У роботі обґрунтовано модель стаціонарного RC шуму як лінійного стаціонарного випадкового процесу, що дало змогу створити методику комп'ютерного моделювання реалізацій такого процесу. Для проведення моделюючого експерименту було розроблено програмне забезпечення на основі моделі. Отримано базу даних реалізацій стаціонарних RC шумів з різними характеристиками, знайдено статистичні оцінки математичного сподівання та кореляційної функції RC шуму.

Отримані результати можуть бути використані в задачах аналізу сейсмічних сигналів, фільтрації, розпізнавання, прогнозу.

Література

1. Ермаков С.М., Михайлов Г.А. Статистическое моделирование. - М.: Наука, 1982.- 296с.
2. Марченко В.Б. Ортогональные функции дискретного аргумента и их приложение в геофизике. – К.: Наукова думка, 1992.- 212с.
3. Жаровський Р.О., Марченко Б.Г., Марченко Н.Б. Моделювання білого шуму з дискретним часом // Вісник ТДТУ. - 2007.- Т.12, №4. - С.152-157.

Одержано 18.02.2008 р.