МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ТЕРНОПІЛЬСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ІВАНА ПУЛЮЯ

Кафедра
будівельних конструкцій

Інженерна та комп’ютерна графіка

Конспект лекцій

ДЛЯ СТУДЕНТІВ УСІХ ФОРМ НАВЧАННЯ З КУРСУ “ІНЖЕНЕРНА ТА КОМП’ЮТЕРНА ГРАФІКА” СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ 274 ”АВТОМОБІЛЬНИЙ ТРАНСПОРТ” ТА 275 ”ТРАНСПОРТНІ ТЕХГОЛОГІЇ”

Тернопіль
2019

УДК 744+681.3
І-62

Укладачі:
Скиба О.П., канд. техн. наук, доцент;
Ковбашин В.І., канд. хім. наук, доцент;
Пік А.І., канд. техн. наук, доцент.

Рецензенти:
Ляшук О.Л., докт. техн. наук, професор;
Дячун А.Є., канд. техн. наук, доцент.

Методичний посібник розглянуто й затверджено на засіданні
методичного семінару кафедри будівельних конструкцій
Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя.
Протокол № 9 від 08 травня 2018 р.

Схвалено та рекомендовано до друку на засіданні методичної ради
факультету по інженерії машин, споруд та технологій
Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя.
Протокол № 1 від 31 серпня 2018 р.

І-62 Інженерна та комп'ютерна графіка : конспект лекцій для студентів усіх форм навчання з курсу «Інженерна та комп'ютерна графіка» спеціальностей 274 «Автомобільний транспорт» та 275 «Транспортні технології» / Укладач: Скиба О.П., Ковбашин В.І., Пік А.І. – Тернопіль : Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя, 2019. – 60 с.

УДК 744+681.3

Конспект лекцій з «Інженерної та комп'ютерної графіки» охоплює теми з машинобудівного креслення (складальне креслення, деталювання складального креслення), що передбачені розділом «Технічне креслення» в курсі «Нарисна геометрія та інженерна графіка» та автоматизацію конструкторських робіт. Він містить базові теоретичні відомості, що стосуються правильного виконання та оформлення конструкторської документації.

Призначено для студентів стаціонарної та заочної форм навчання спеціальностей 274 «Автомобільний транспорт» та 275 «Транспортні технології», які згідно з навчальними планами вивчають дисципліну «Інженерна та комп'ютерна графіка».

Об'єм конспекту лекцій – 60 сторінок, 91 рисунок і 4 таблиці.

Використано 9 літературних джерел.

Відповідальна за випуск**:** *канд. техн. наук***,** *доцент Скиба О.П.*

ТЕМА 1
ВСТУП. ПРЕДМЕТ І МЕТОД НАРИСНОЇ ГЕОМЕТРІЇ. ПОЗНАЧЕННЯ. МЕТОДИ ПРОЕКТУВАННЯ
Вступ

Нарисна геометрія – наука про побудову зображень просторових фігур на площині.

Зображення, виконані за правилами нарисної геометрії, дають змогу уявити форму предметів, їх взаємне розміщення в просторі, дослідити геометричні властивості зображувальних предметів, визначити їх розміри. Такі зображення називають кресленнями або рисунками. За допомогою останніх можна викласти свої ідеї, задуми як про існуючі просторові форми, так і про нові, що проектуються, речі, предмети, машини, споруди. Отже, нарисна геометрія є основою технічної документації.

Предметом нарисної геометрії є обґрунтування основних правил і методів побудови зображень просторових (тривимірних) фігур на площині, а також способів розв’язування на зображеннях задач, що належать до цих фігур. У зв’язку з цим зміст курсу нарисної геометрії може зводитись до таких основних питань:

– вироблення, обґрунтування та використання методів побудови зображень просторових фігур на площині;

– вивчення геометричних властивостей предметів, їх форм, розмірів за рисунком;

– застосування методів зображення при розв’язуванні просторово-графічних задач, які мають теоретичне і практичне використання в науці й техніці.

Прийняті позначення та символіка

1. Натуральна система координат позначається **Oxyz**.

2. Площини основної (координатної) системи площин проекцій позначають великою буквою **П** грецького алфавіту з додаванням індексу **1**, **2** або **3**. Горизонтальна площина проекцій – $\mathbf{П_1}$. Фронтальна площина проекцій – $\mathbf{П_2}$. Профільна площина проекцій – $\mathbf{П_3}$.

3. Центр проектування – велика буква латинського алфавіту **S**.

4. Точки позначають великими буквами латинського алфавіту: **A**, **B**, **C**, **D**, …, або арабськими цифрами **1**, **2**, **3**, **4**, ...

5. Лінії (прямі та криві) – малі букви латинського алфавіту: **a**, **b**, **c**, **d**, **e**, … .

6. Площини та кути – малі букви грецького алфавіту: **α**, **β**, **γ**, **δ**, **ε**, ...

7. Поверхні – великі букви грецького алфавіту: **Α**, **Β**, **Γ**, **Δ**, **Ε**, ...

8. Додаткові площини проекцій позначають буквою П, додаючи черговий індекс: $\mathbf{П_4}$, $\mathbf{П_5}$, ...

9. Проекії точок, прямих та кривих ліній позначають тими ж буквами, якими позначені їх оригінали, з додаванням індексу, що відповідає індексу площини проекцій. Наприклад, проекції точки **A**, прямої **a** відповідно позначають: на площині $\mathbf{П_1}$ – $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{a}_1$; на площині $\mathbf{П_2}$ – $\mathbf{A_2}$, $\mathbf{a_2}$; на площині $\mathbf{П_3}$ – $\mathbf{A_3}$, $\mathbf{a_3}$; на площині $\mathbf{П_4}$ – $\mathbf{A_4}$, $\mathbf{a_4}$.

10. Прямі особливого положення мають постійні позначення:

–горизонталь – **h**;

– фронталь – **f**;

– профіль – **p**.

11. Сліди площин:

– горизонтальний – $\mathbf{h_\alpha}$, $\mathbf{h_\beta}$, $\mathbf{h_\gamma}$, ... ;

– фронтальний - $\mathbf{f_\alpha}$, $\mathbf{f_\beta}$, $\mathbf{f_\gamma}$, ... ;

– профільний – $\mathbf{p_\alpha}$, $\mathbf{p_\beta}$, $\mathbf{p_\gamma}$, ...

12. Осі обертання – **i**, **j**.

13. Спосіб задавання геометричного об’єкта показують у дужках поряд з його буквеним позначенням:

– (**A**, **B**) – пряма, задана двома точками **A** і **B**;

– (**A**, **B**, **C**) – площина, задана трьома її точками **A**, **B**, **C**;

– (**a**, **B**) – площина, задана прямою **a** і точкою **B**.

14. Символи:

– ∩ – знак перетину множини, $\mathbf{a} = \boldsymbol{\alpha} \cap \boldsymbol{\beta}$ – лінія **a** є результатом перетину площин **α** і **β**;

– ∈ – знак належності, $\mathbf{A} \in \mathbf{b}$ – точка **A** належить прямій **b**;

– ⊂ – знак включення (є підмножиною), $\mathbf{b} \subset \boldsymbol{\alpha}$ – площина **α** включає в себе лінію **b** або множина точок лінії **b** є підмножиною точок площини **α**;

– ≡ – знак співпадання, тотожність;

– = – знак результату дії, рівності;

– ∪ – об’єднання множин;

$\overset{\cdot}{-}$ – знак, який показує, що прямі є мимобіжними (не перетинаються);

– ‖ – знак паралельності;

– ⊥ – знак перпендикулярності;

– ∴ – знак заперечення;

– ⇒ – імплікація – логічний наслідок.

Відстань між елементами простору позначають двома вертикальними відрізками, наприклад: $|\mathbf{A\ B}|$ – відстань між двома точками **A** і **B**.

1. Метод проекцій

Будь-яка плоска чи просторова фігура розглядається як сукупність точок, прямих (кривих) ліній та площин (поверхонь). Таку фігуру називають оригіналом. Для побудови проекцій оригіналу нарисна геометрія користується методом проекцій. Суть цього методу можна розглянути на прикладі побудови зображень точки – найпростішого складового елемента будь-якої геометричної форми.

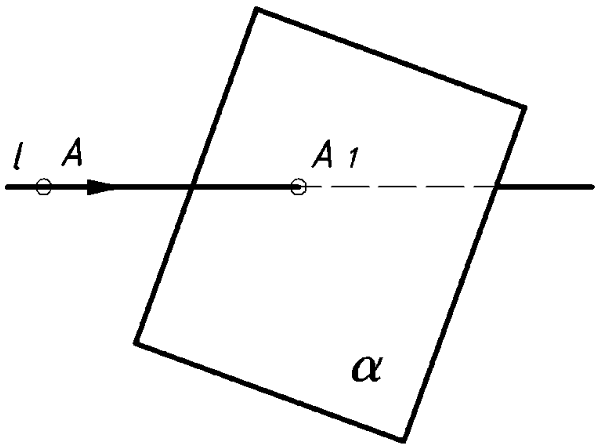


Рис. 1.1

На рис. 1.1 показано просторову модель методу проекцій, де точка **A** – оригінал, пряма ***l*** – проекційна пряма (промінь), площина **α** – площина проекцій (зображення), точка $\mathbf{A_1}$ – зображення точки **A** на площині **α**, тобто проекція точки **A**. Побудова точки $\mathbf{A_1}$ за методом проекцій полягає в тому, що через точку **A** проводять пряму ***l*** у заданому напрямі до перетину проекційної прямої з площиною **α**. Точку перетину цієї прямої з площиною проекцій називають проекцією точки **A**.

1.1. Способи проектування

Процес побудови зображень за методом проекцій називають *проектуванням.*

Залежно від проекційних прямих існує два способи проектування: *паралельне* (коли проекційні прямі паралельні до заданого напряму проектування) та *центральне* (проекційні прямі виходять з однієї точки).

Центральне проектування – це такий спосіб побудови проекцій, коли проекційні промені напрямлені з однієї точки (центру) і проходять через кожну точку фігури до перетину з площиною проекцій.

Розглянемо побудову проекцій ліній як сукупності точок. Це зводиться до побудови проекцій точок, які сполучаються між собою.

На кривій лінії ***l*** (рис. 1.2) вибрано точки **A**, **B**, **C**, **D** і побудовано їх проекції $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{B_1}$, $\mathbf{C_1}$, $\mathbf{D_1}$ на площині $\boldsymbol{\alpha}$ при заданому центрі **S**. Сполучивши плавною кривою проекції точок, отримаємо проекції кривої лінії.

Сукупність проекційних прямих утворює конічну поверхню з центром у точці **S**. Ця поверхня проекційна і перетин її з площиною $\boldsymbol{\alpha}$ дає проекцію заданої кривої лінії. Тому центральні проекції називають також *конічними*.

Паралельне проектування можна вважати окремим випадком центрального проектування, коли центр проекцій лежить у нескінченності й проекційні прямі таким чином стають паралельними між собою. Отже, для побудови паралельних проекцій необхідно задати напрям проектування, до якого проекційні прямі паралельні. Ці прямі можуть бути направлені до площини проекцій під довільним кутом.

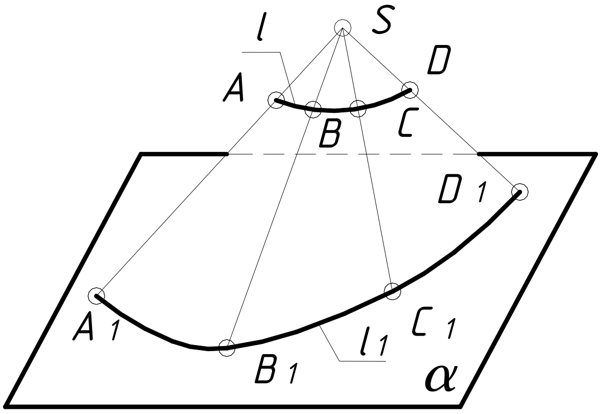


Рис. 1.2

Залежно від цього розрізняють косокутне (рис. 1.3) і *прямокутне* (*ортогональне*) (рис. 1.4) проектування.

Оскільки проекційні прямі, проведені паралельно до напряму проектування, в своїй сукупності утворюють циліндричну проекційну поверхню, паралельні проекції називають також *циліндричними* (рис. 1.5).

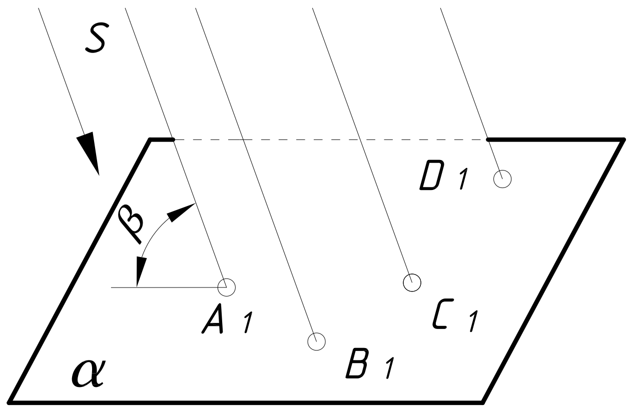


Рис. 1.3

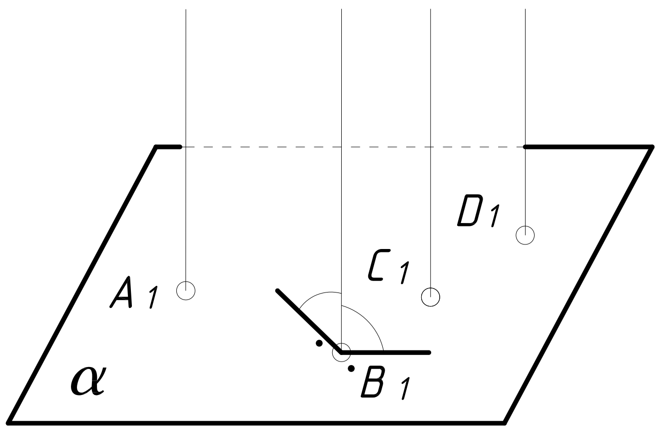


Рис. 1.4

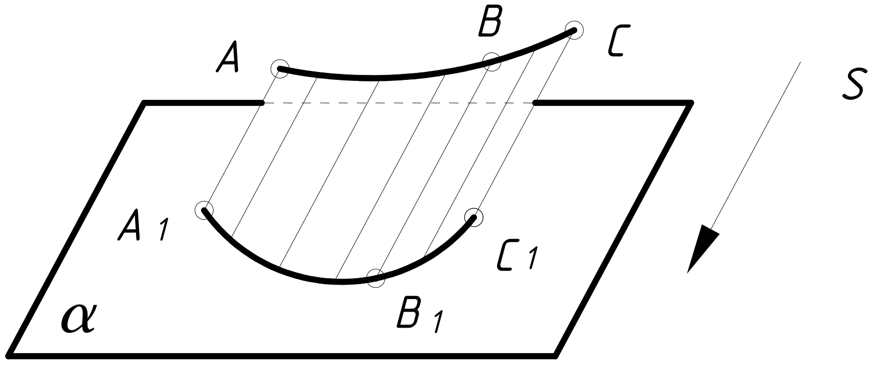


Рис. 1.5

Паралельні проекції як і центральні мають такі властивості:

1) одна проекція точки не визначає її положення в просторі;

2) кожна точка і пряма лінія в просторі мають єдину свою проекцію;

3) кожна точка на площині проекцій може бути проекцією множини точок, якщо через них проходить спільна для них проекційна пряма (рис. 1.6);

4) кожна лінія на площині проекцій може бути проекцією множини ліній, якщо вони розташовані у спільній для них проекційній площині (рис. 1.7);

5) для побудови проекцій прямої достатньо спроектувати дві її точки і через проекції цих точок провести пряму лінію;

6) якщо точка лежить на прямій, то її проекції належать проекції цієї прямої (рис. 1.8);

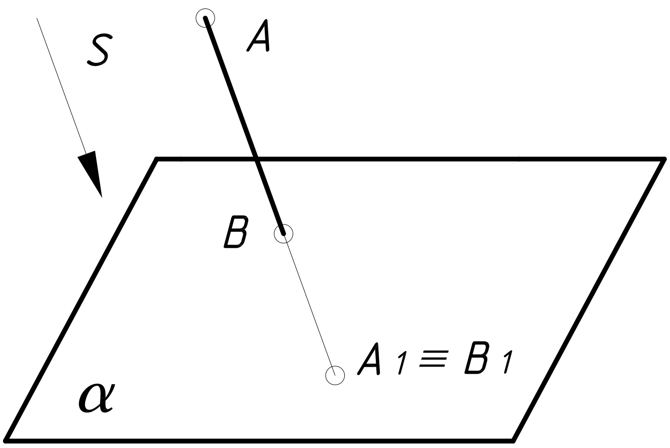


Рис. 1.6

7) при зміні напряму проектування утворюються нові проекції точок і ліній на тій самій площині.

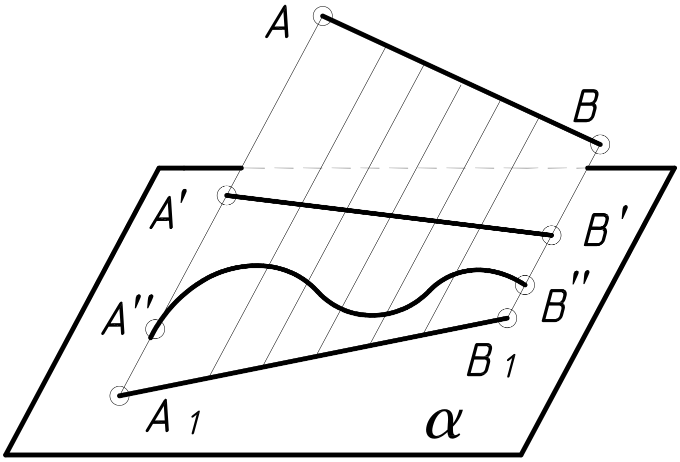


Рис. 1.7

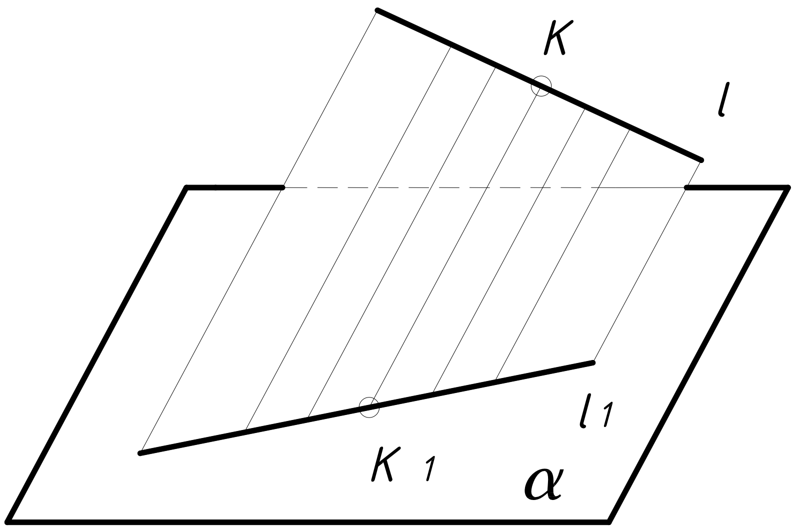


Рис. 1.8

2. ПРОЕКЦІЇ ТОЧКИ

2.1. Задавання точки на кресленні. Лінії зв'язку

Побудова проекцій точок та інших геометричних елементів ґрунтується на методі ортогонального паралельного проектування.

В ортогональному проектуванні знаходять кілька проекцій зображуваних геометричних елементів на взаємно перпендикулярні площини проекцій. Найпростішим зображенням є рисунок, який складається із двох зв'язаних між собою ортогональних проекцій оригіналу. Для виконання такого рисунка для кожної точки **A** знаходять дві прямокутні проекції $\mathbf{A_1}$ та $\mathbf{A_2}$ на взаємно перпендикулярних площинах проекцій (рис. 2.1).

Одну з таких площин розміщують горизонтально і називають горизонтальною площиною проекцій. Позначають – $\mathbf{\Pi_1}$. Проекції елементів простору на ній $\mathbf{A_1}$, $\boldsymbol{l_1}$, $\boldsymbol{\alpha_1}$... називають горизонтальними проекціями (точки, прямої, площини).

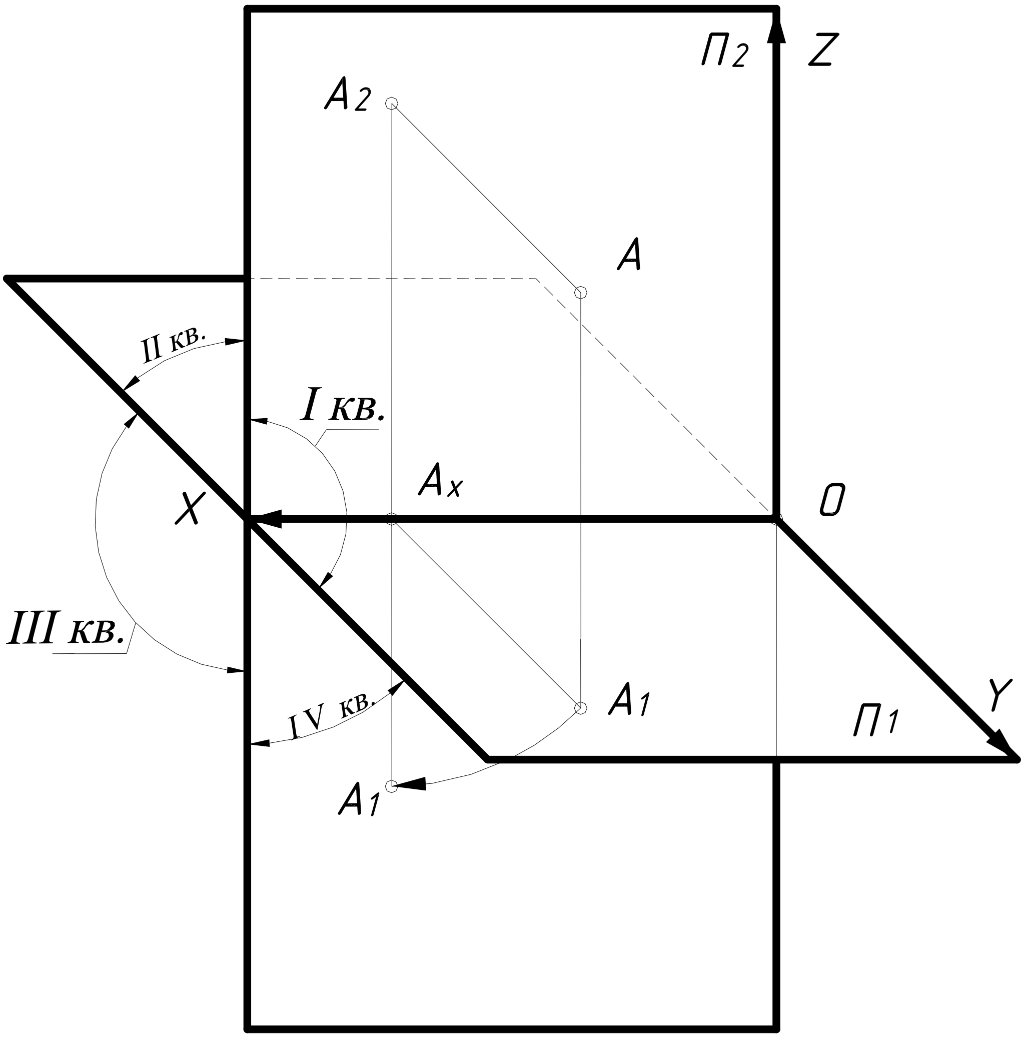


Рис. 2.1

Другу площину проекцій розміщують вертикально і називають фронтальною (вертикальною). Позначають її – **$П_2$**.

Площини проекцій **$П_1$**, **$П_2$** – перпендикулярні між собою і перетинаються по прямій лінії, яку називають віссю проекцій. Три взаємно перпендикулярні осі проекцій **OX**, **OY**, **OZ** утворюють прямокутну систему координат. Уявляючи ці площини нескінченними, зазначимо, що вони, перетинаючись, утворюють *чверті* (*квадранти*).

Як бачимо з рисунка, точка **A** розташована у I чверті та її проекцій **A_1** і **A_2** побудовані:

$AA_1 \perp П_1$; $AA_1 \cap П_1 = A_1$;

$AA_2 \perp П_2$; $AA_2 \cap П_2 = A_2$.

Промені **AA_1** і **AA_2** взаємно перпендикулярні. Вони утворюють у просторі площину **$AA_1A_xA_2$**, яка перпендикулярна до площини проекцій **$П_1$** і **$П_2$** і перетинає ці площини по лініях, що проходять через проекції **A_1** і **A_2** деякої точки **A** так, що положення точки в просторі стає визначеним. Для цього слід опустити перпендикуляри – з точки **A_1** до площини **$П_1$** і з точки **A_2** до площини **$П_2$**, які в перетині визначають точку **А**.

Отже, дві проекції точки повністю визначають її положення в просторі відносно даної системи площин проекцій. Однак для зручності рисунки і побудови геометричних зображень виконують на горизонтально розміщеному папері. З цією метою просторову систему двох взаємно перпендикулярних площин проекцій необхідно перетворити на плоску, тобто сумістити площини **$П_1$** і **$П_2$**. Для цього повертають площину **$П_1$** навколо осі проекцій на кут 90^0 до суміщення із площиною **$П_2$**, яка залишається незмінною. Обертання проводять за годинниковою стрілкою (донизу). Після обертання утворюється одна вертикально розміщена площина – площина рисунка, що відомий під назвою *епюра* Монжа (рис. 2.2, 2.3).

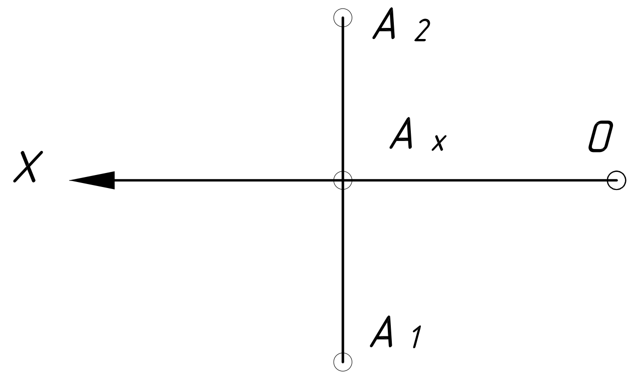


Рис. 2.2

Розглядаючи епюр точки **А**, бачимо, що проекції **A_1** і **A_2** розміщені на одному перпендикулярі до осі **ОХ**. Пряму **A_1A_2**, що з'єднує горизонтальну **A_1** і фронтальну **A_2** проекції точки, називають лінією зв'язку.

Залежно від чверті, в якій знаходиться точка, буде змінюватися її епюр.

Розглянемо епюр точок (рис. 2.3.):

точка **А** розташована у І-ій чверті;

– точка **В** розташована у ІІ-ій чверті;

– точка **С** розташована у ІІІ-ій чверті;

– точка **D** розташована у IV-ій чверті.

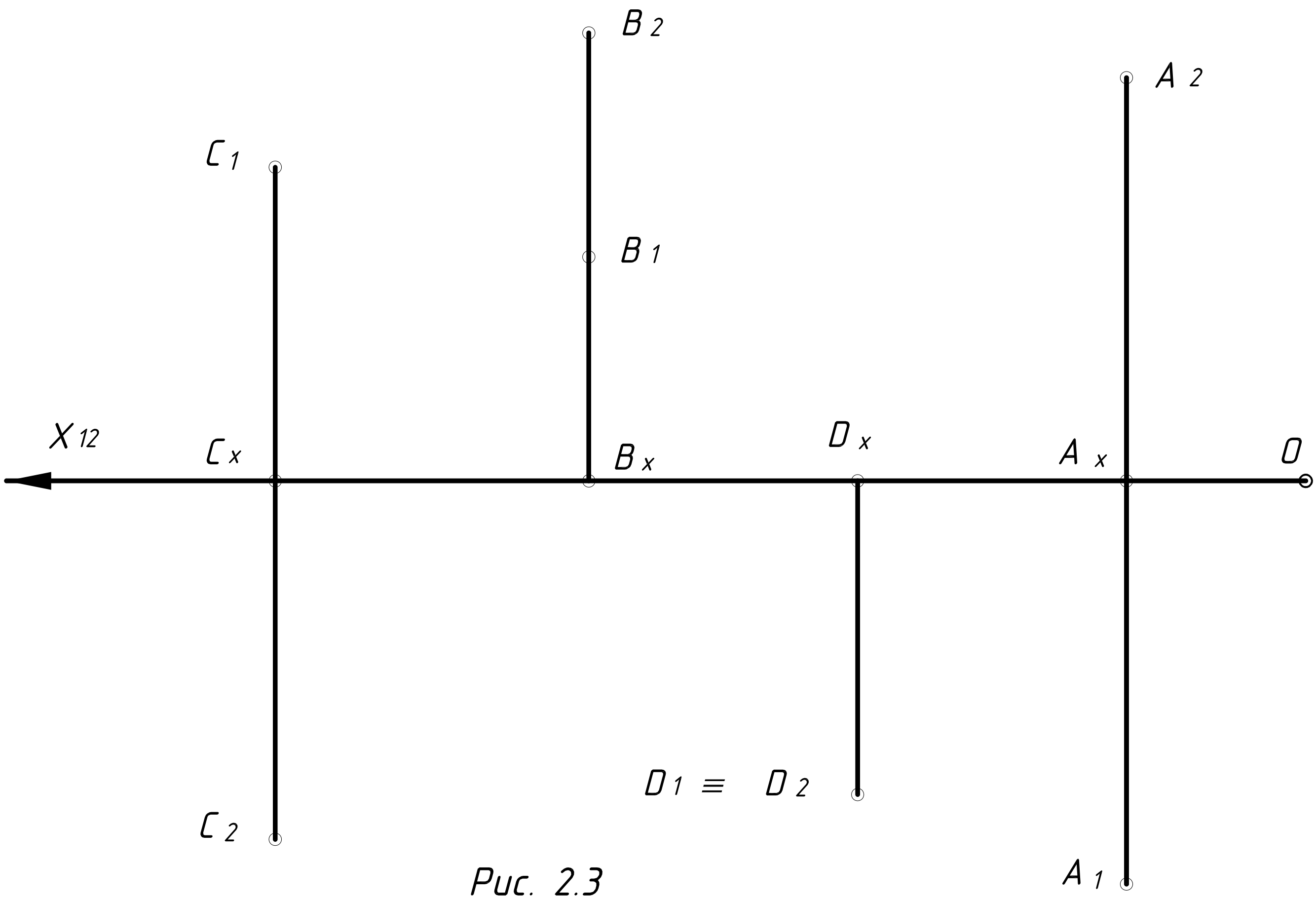


Рис. 2.3

Як бачимо, в системі двох взаємно перпендикулярних площин положення будь-якої точки у просторі стає визначеним. Проте, коли маємо фігуру складної форми, то для з’ясування форми і всіх потрібних її розмірів іноді двох проекцій недостатньо. Тому виникає потреба побудувати ще одне зображення фігури на третій – профільній площині проекцій. Цю площину позначають $\mathbf{П_3}$ і розміщують праворуч від спостерігача, перпендикулярно як до горизонтальної $\mathbf{П_1}$, так і до фронтальної $\mathbf{П_2}$ площин проекцій (рис. 2.3).

2.2. Проектування точки на три площини проекцій

Як бачимо, в системі двох взаємно перпендикулярних площин положення будь-якої точки у просторі стає визначеним. Проте, коли маємо фігуру складної форми, то для з’ясування форми і всіх потрібних її розмірів іноді двох проекцій недостатньо. Тому виникає потреба побудувати ще одне зображення фігури на третій – профільній площині проекцій. Цю площину позначають $\mathbf{П_3}$ і розміщують праворуч від спостерігача, перпендикулярно як до горизонтальної $\mathbf{П_1}$, так і до фронтальної $\mathbf{П_2}$ площин проекцій (рис. 1).

Три взаємно перпендикулярні площини проекцій перетинаючись по трьох прямих лініях – осях проекцій – **X**, **Y**, **Z**, поділяють простір на вісім частин – тригранні кути, які називають *октантами.* Ребрами цих кутів є осі **X**, **Y**, **Z**, а гранями – відповідні частини площин проекцій $\mathbf{П_1}$, $\mathbf{П_2}$, $\mathbf{П_3}$. Осі **X**, **Y**, **Z** перетинаються між собою в точці **O**, яку називають початком осей проекцій.

Кожному октанту відповідає своя система знаків напряму осей проекцій. Наприклад, додатну вісь **X** беруть ліворуч від точки **O**, а від'ємну – праворуч; додатну вісь **Y** – до нас від точки **O** і від'ємну – від нас; додатну вісь **Z** – вгору від точки **O**, від'ємну – вниз (див. таблицю 1).

Якщо осям **X**, **Y**, **Z** надати певних числових значень, то положення точки в просторі буде цілком визначеним. Наприклад, щоб показати, що точка **A** розташована у VI октанті, треба записати: **A** (**-x**, **-y**, **z**). Оскільки числове значення осі у прийнятих одиницях (міліметр, сантиметр тощо) показує відстань точки, а знак «+» і «-» – напрямок від початку осей, то відстань і напрямок точки від площин проекцій стають відомими.

Користуючись описаним раніше способом суміщення площин проекцій, можна перейти від просторової системи трьох взаємно перпендикулярних площин проекцій до плоскої (епюра), тобто до зображення суміщених з фронтальною площиною проекцій горизонтальної та профільної площин проекцій (рис. 1.12). Для цього горизонтальну площину проекцій обертають навколо осі **X** як і в системі $\mathbf{П_1}$ і $\mathbf{П_2}$, а профільна площина проекцій обертається навколо осі проекцій **Z** проти руху годинникової стрілки до суміщення з фронтальною площиною проекцій. При цьому вісь **Y** ніби роздвоюється.

Таблиця 1

Вісь проекцій	**Знак в октанті**							
	I	**II**	**III**	**IV**	**V**	**VI**	**VII**	**VIII**
X	+	+	+	+	-	-	-	-
Y	+	-	-	+	+	-	-	+
Z	+	+	-	-	+	+	-	-

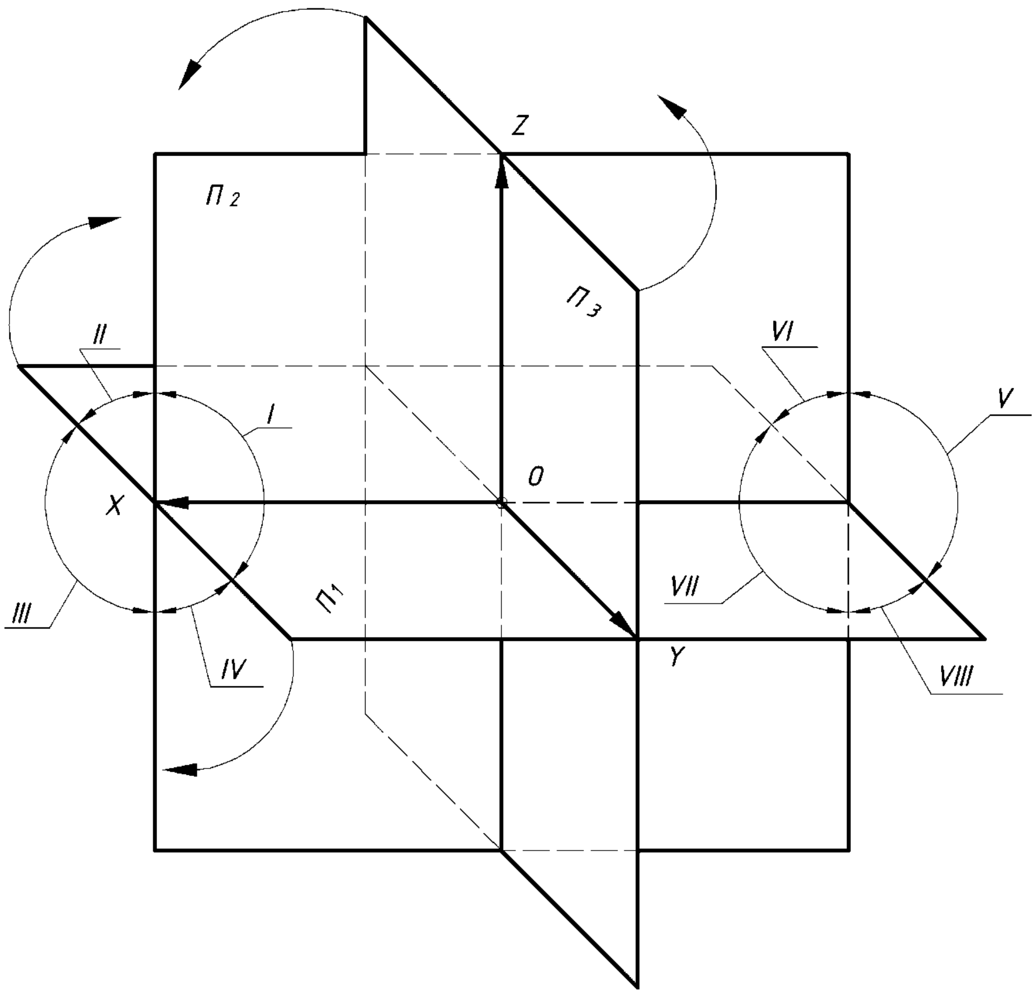


Рис. 1.11

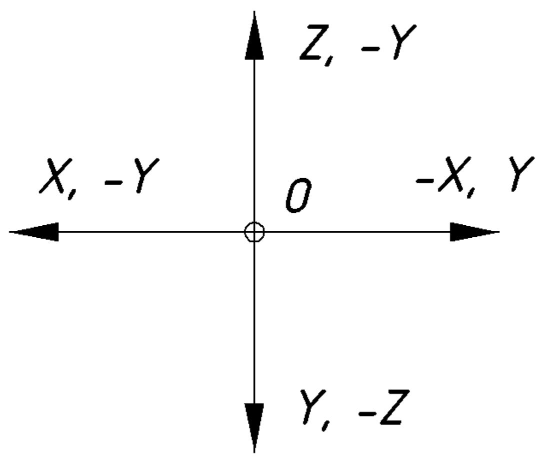


Рис. 1.12

Розглянемо точку **A**, що розміщена в I-му октанті (рис. 1.13). Як видно з епюра, горизонтальна $\mathbf{A_1}$ і фронтальна $\mathbf{A_2}$ лежать на вертикальній лінії зв'язку, фронтальна $\mathbf{A_2}$ і профільна $\mathbf{A_3}$ – на горизонтальній (пряма $\mathbf{A_2A_3}$ перпендикулярна до осі **OZ**); горизонтальну $\mathbf{A_1}$ і профільну $\mathbf{A_3}$ зв'язує ламана лінія $\mathbf{A_1A_yA_yA_3}$. Профільну проекцію $\mathbf{A_3}$ за заданою горизонтальною і фронтальною можна побудувати за допомогою дуги **OAy** (проекційним способом). Для цього можна використати також бісектрису кута **YOY** – пряму **k**.

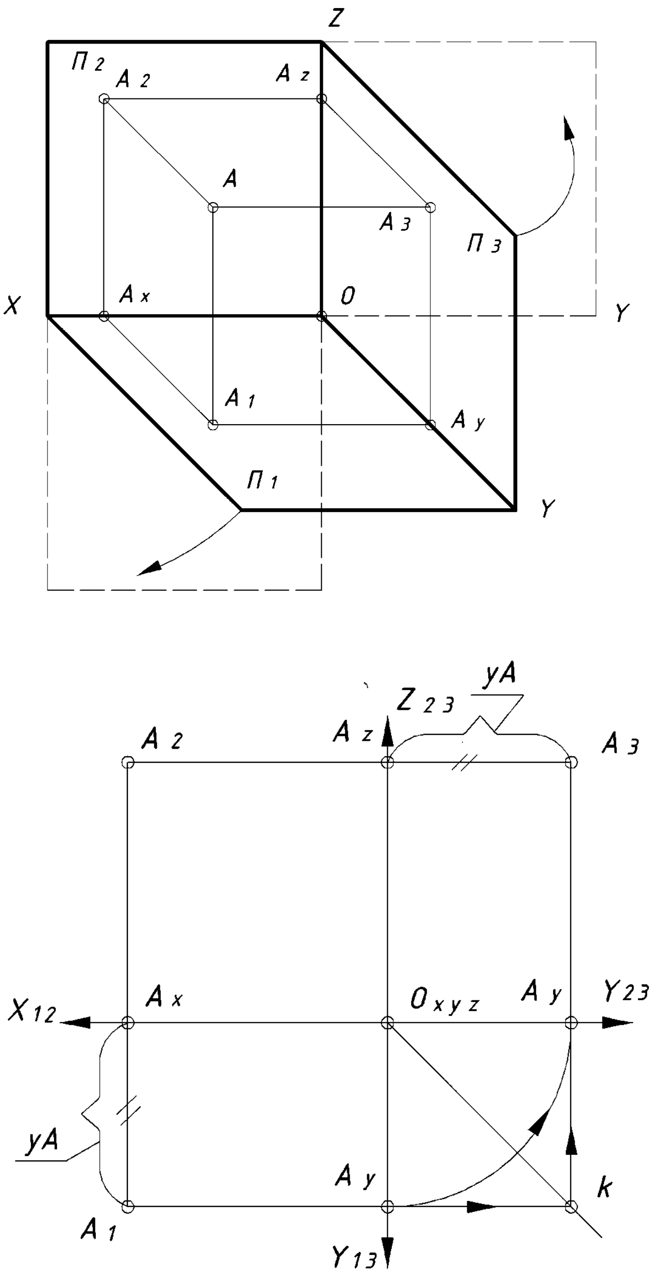


Рис. 1.13

На рис. 4 – 10 наведено наочні зображення та епюри точок, що знаходяться у II-му – VIII-му октантах.

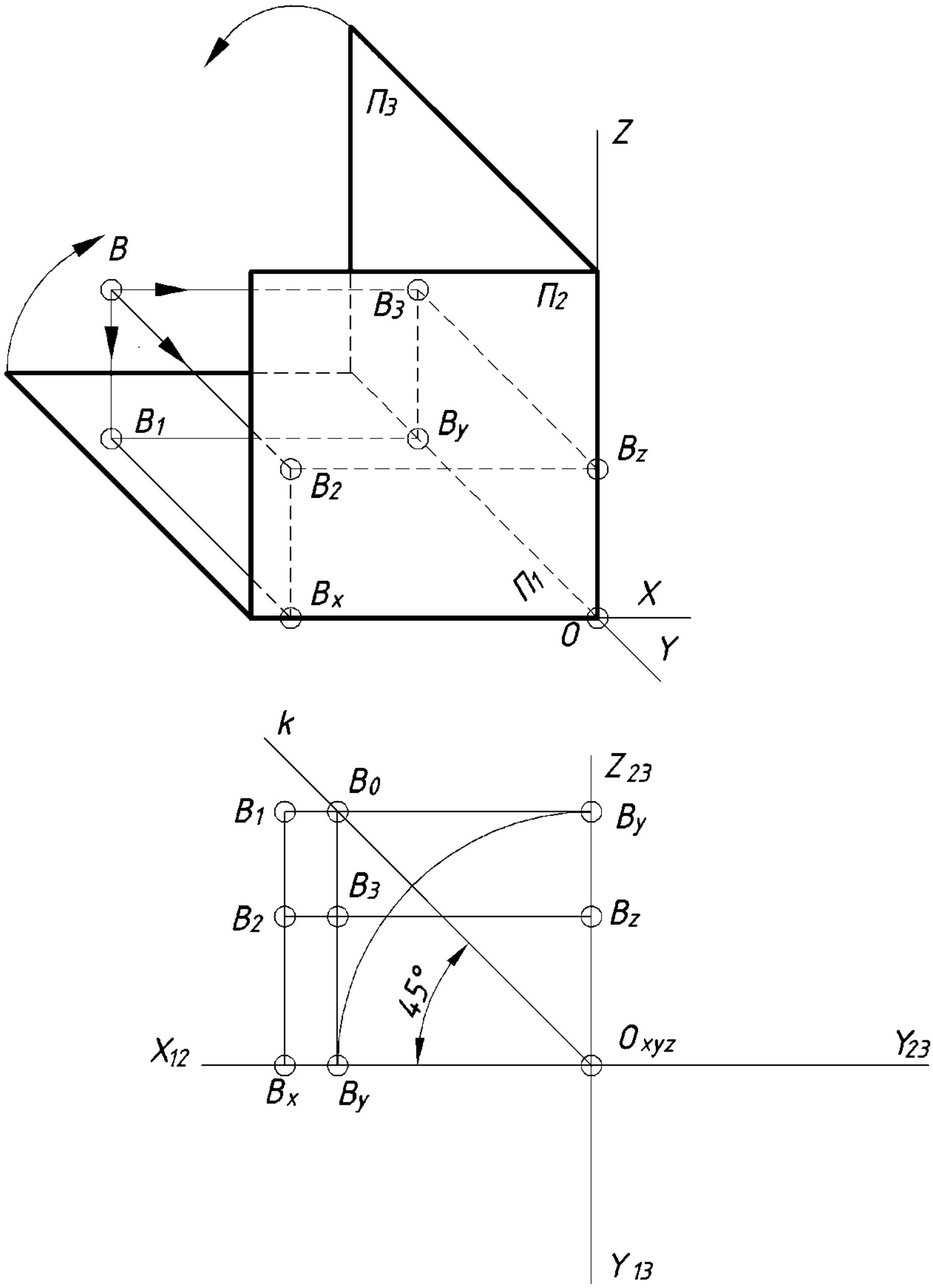


Рис. 1.14

Точка **В** знаходиться у другому октанті.

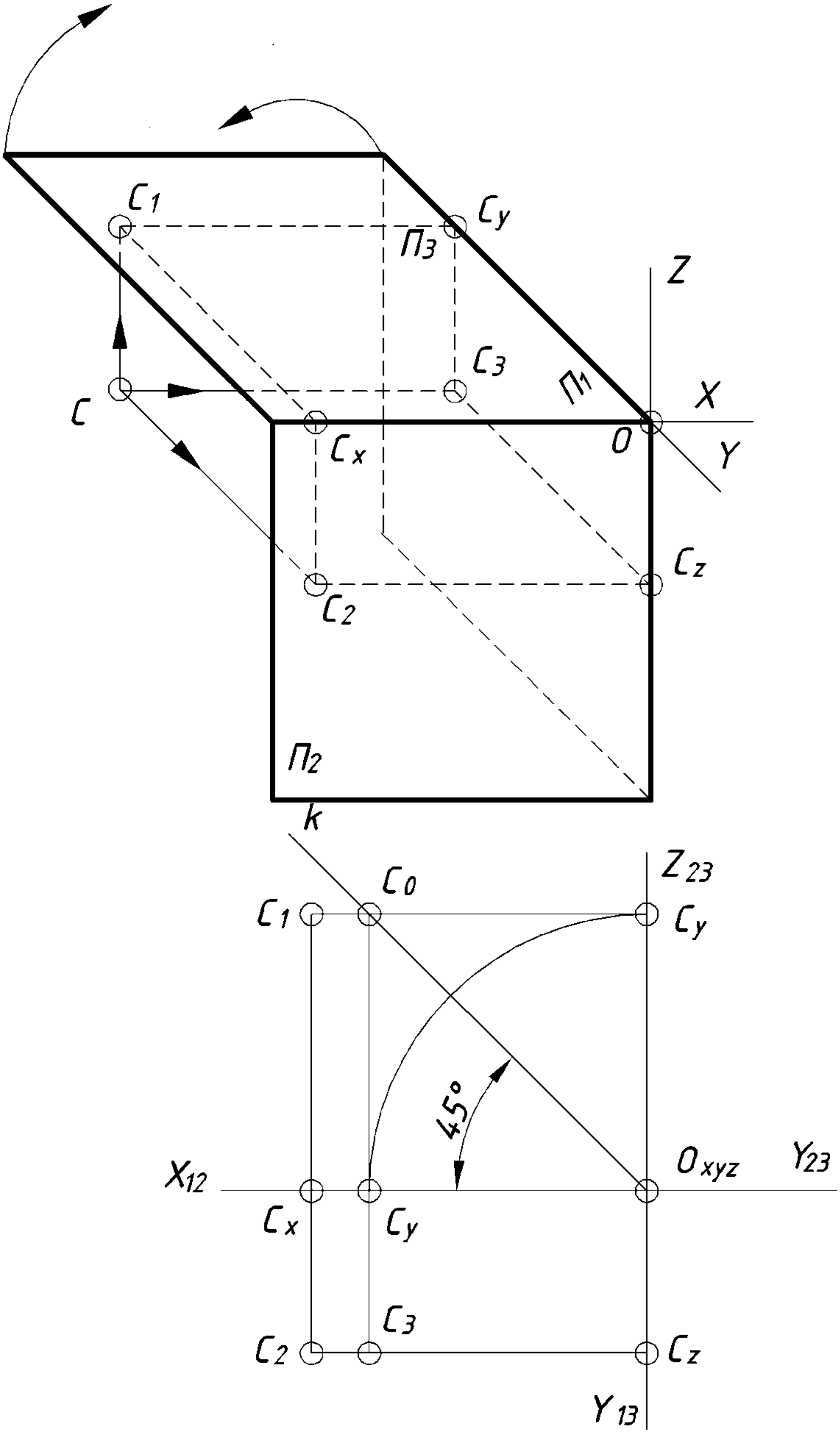


Рис. 1.15

Точка **C** знаходиться у третьому октанті.

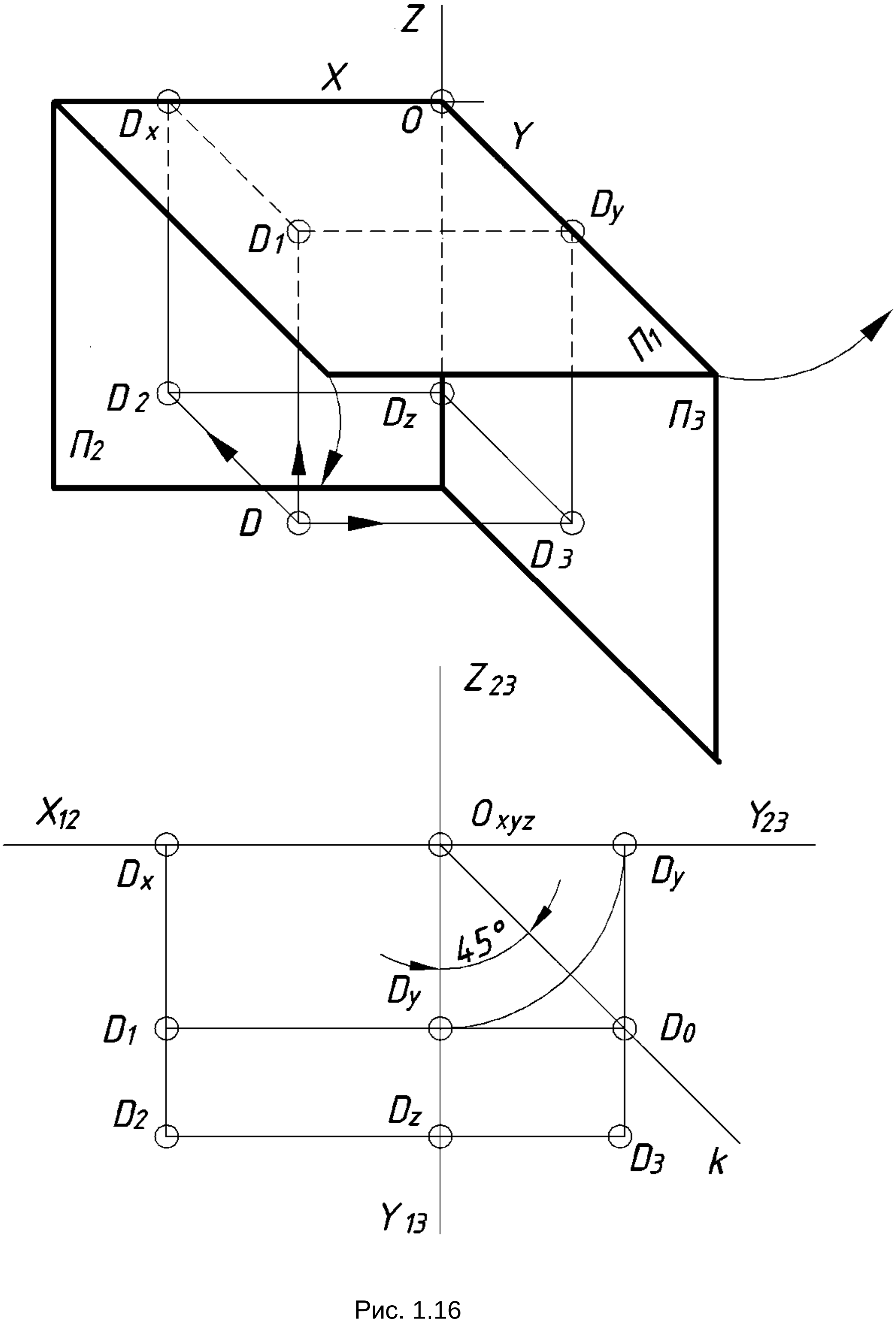


Рис. 1.16

Точка **D** знаходиться у четвертому октанті.

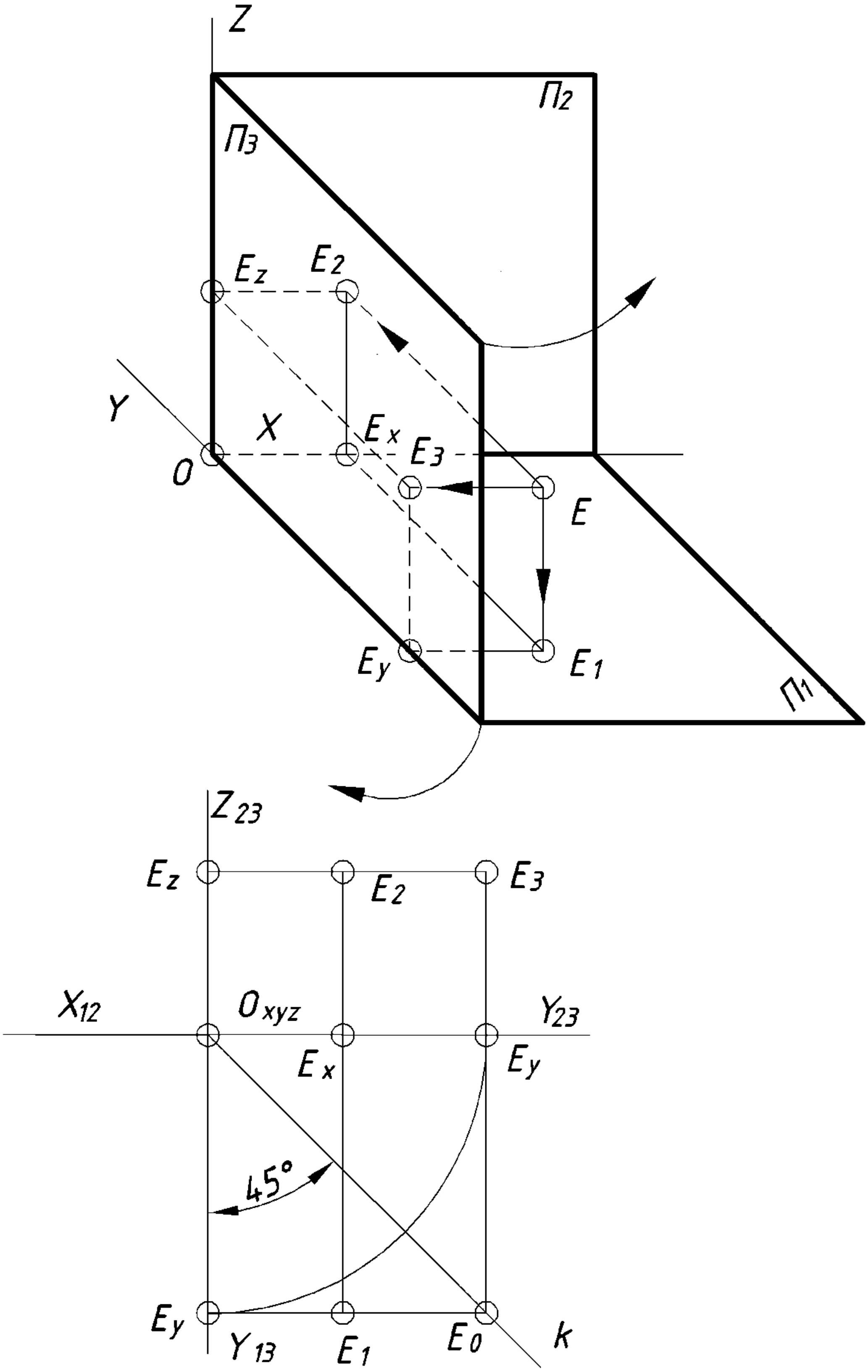

Z
П2
П3
Ez
E2
Y
X
Ex
E3
O
E
Ey
E1
П1
Z23
Ez
E2
E3
X12
Oxyz
Y23
Ex
Ey
45°
Ey
Y13
E1
E0
k

Рис. 1.17

Точка **E** знаходиться у п’ятому октанті.

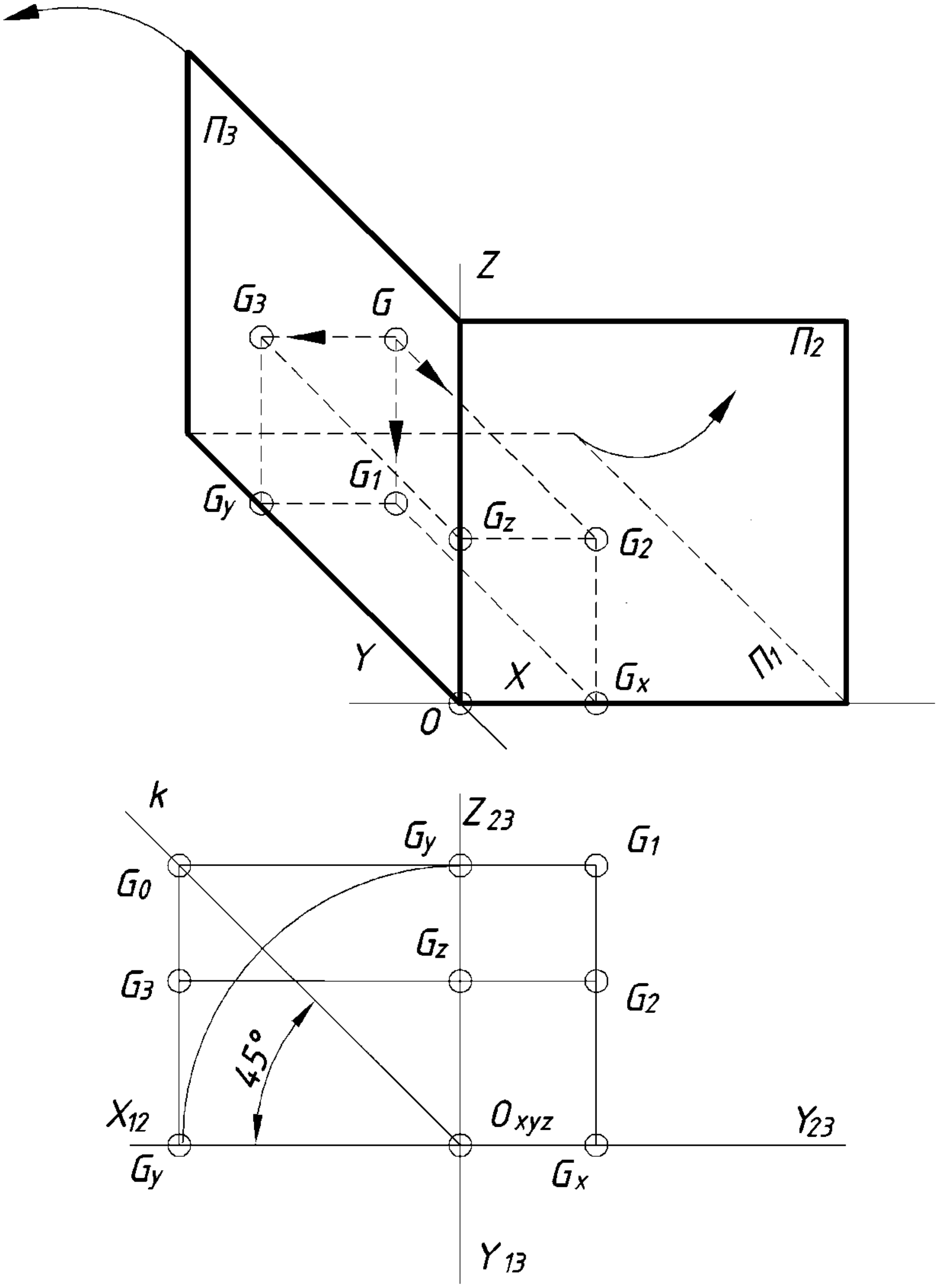


Рис. 1.18

Точка **G** знаходиться у шостому октанті.

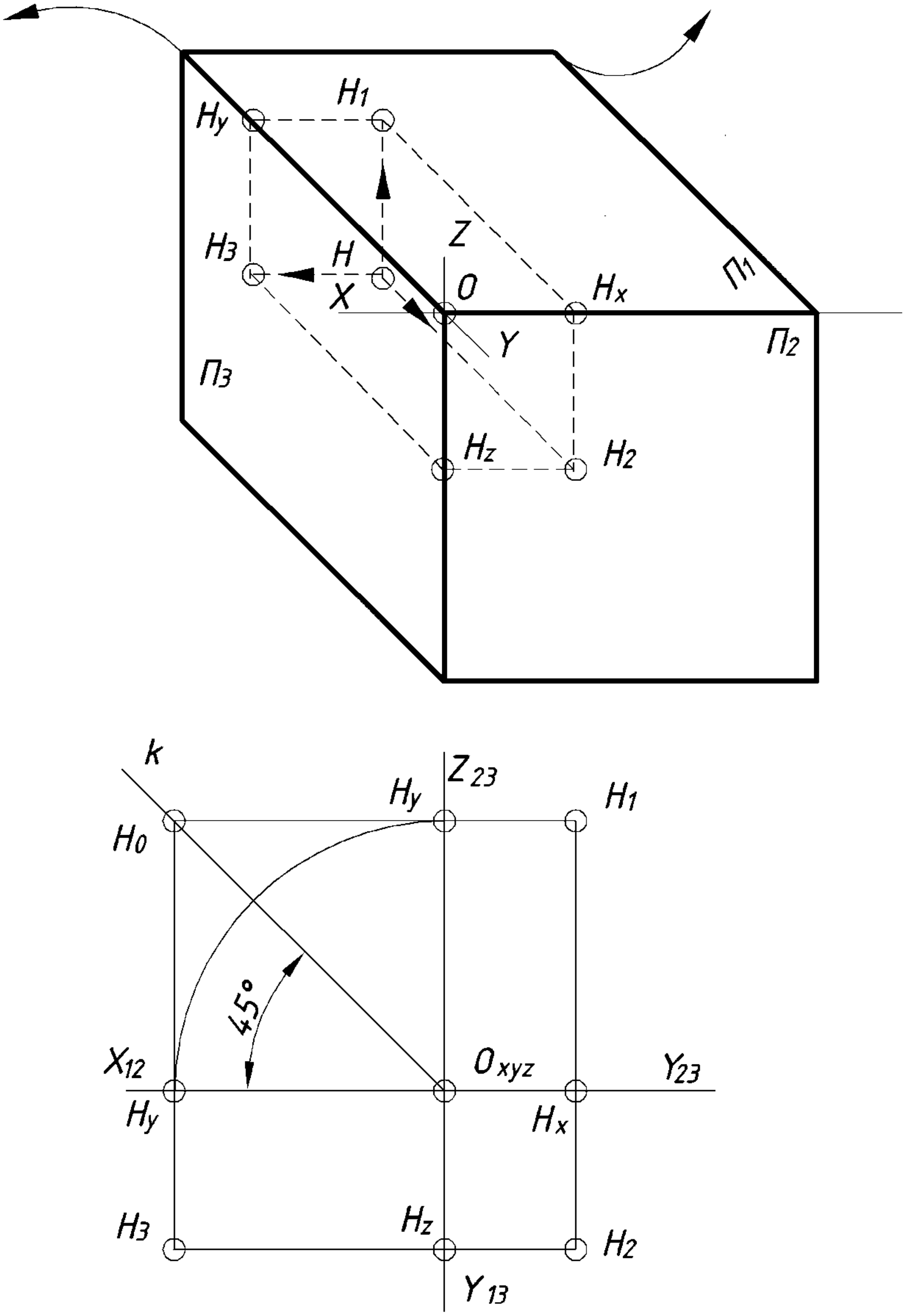


Рис. 1.19

Точка **H** знаходиться у сьомому октанті.

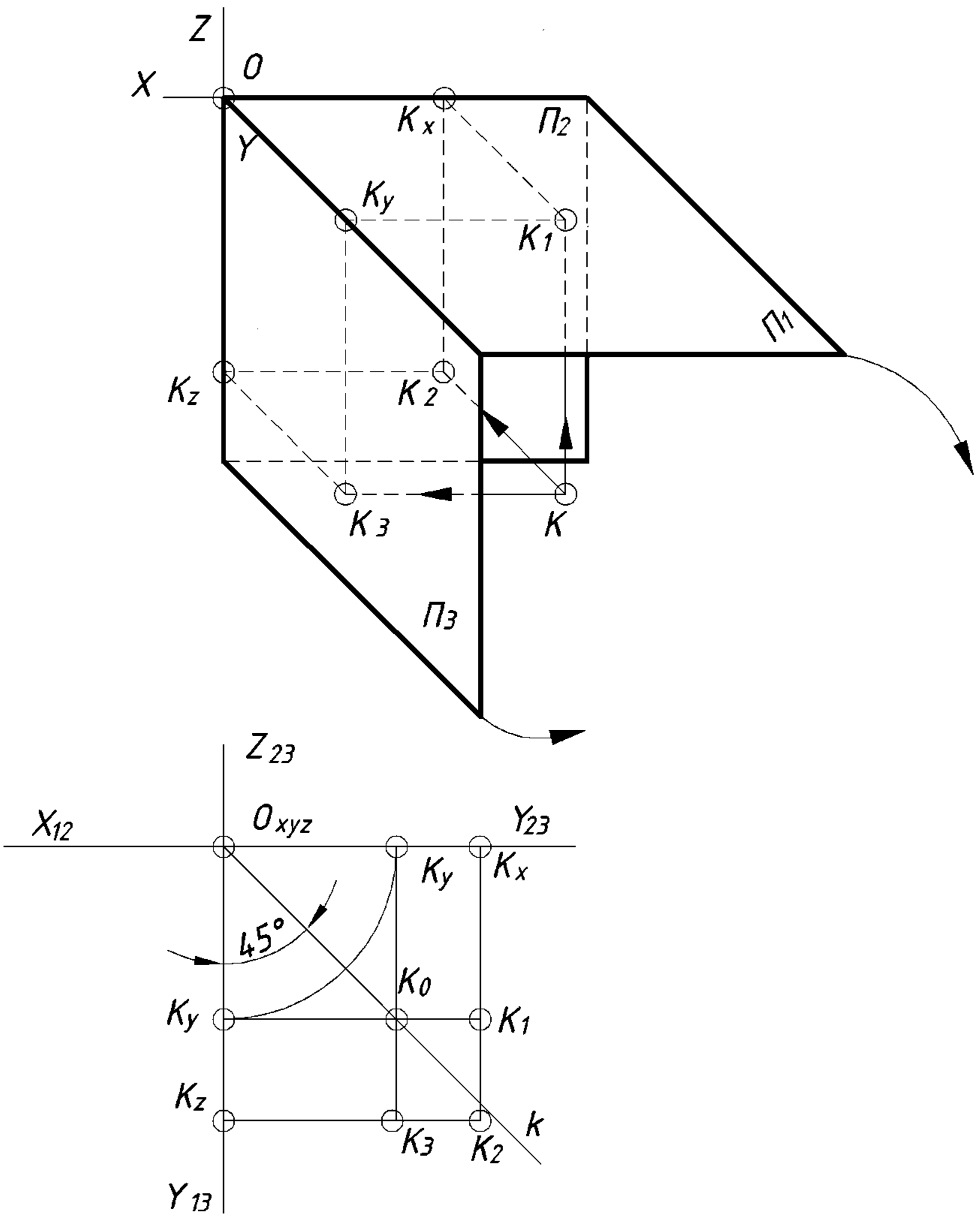
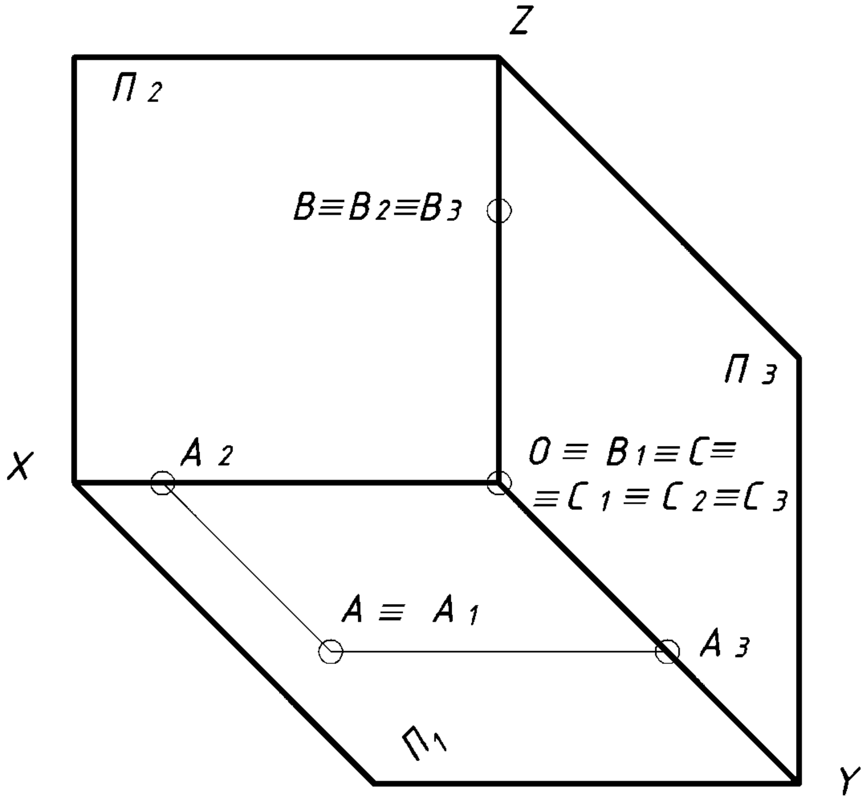


Рис. 1.20

Точка **К** знаходиться у восьмому октанті.

Будь-яка точка може займати визначене положення у просторі будь-якого октанта за умови, що задані її координати не дорівнюють нулю і відомі знаки координат. Проте точка може лежати в будь-якій із площин проекцій, на осі проекцій чи бути суміщеною з точкою **О** тоді, коли одна, дві або три координати дорівнюватимуть нулю. У цьому разі точка займає особливе положення відносно площин проекцій.

На рис. 1.21 показано наочне зображення і епюр точок **А**, **В**, **С**. Точка **А** лежить у площині $\mathbf{П_1}$, оскільки координата $\mathbf{z} = 0$ і проекція $\mathbf{A_1}$ збігається з точкою **А**. Проекції $\mathbf{A_2}$ і $\mathbf{A_3}$ лежать на відповідних осях проекцій. Точка **В** розміщена на осі **Z**, бо її координати **x** та **y** дорівнюють нулю. Точка **C** суміщена з точкою **O** – всі три координати цієї точки дорівнюють нулю.



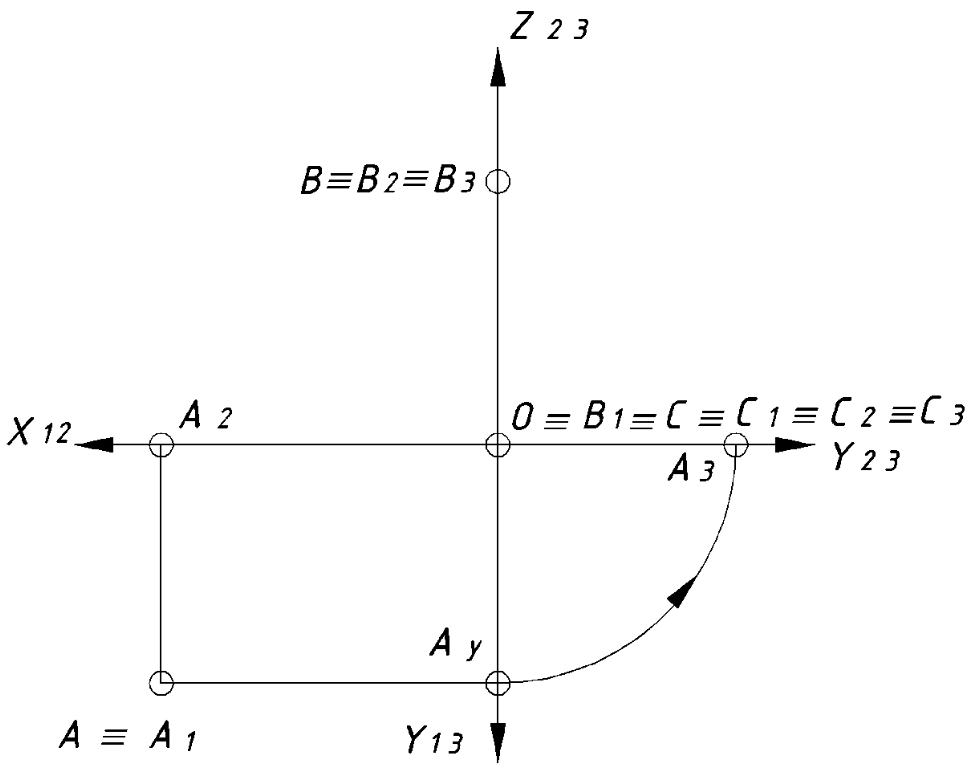


Рис. 1.21

2.3. Взаємне положення двох точок. Конкуруючі точки

При побудові проекцій просторових фігур часто виникає необхідність зобразити деякі її точки, для яких дві будь-які координати однакові.

Наприклад.

Дано: точку **A** з координатами x=20; y=10; z=10 і точку **B** з координатами x=20; y=10; z=20 (рис. 1.22). На рис. 2.15 точки **A** і **B**, маючи однакові координати x і y, лежать на одній проекційній прямій, тому їх проекції A_1 і B_1 збігатимуться. Розглянемо точки **C** і **D** з координатами:

C: x=30; y=10; z=20; **D**: x=30; y=20; z=20.

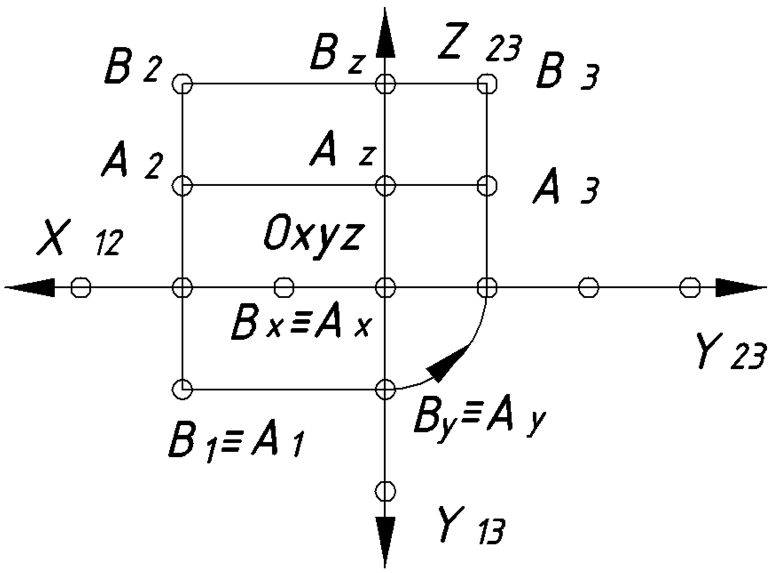


Рис. 1.22

У цьому випадку точки **C** і **D** лежать на проекційній прямій, але збігаються точки C_2 і D_2 Точки, що лежать на одній проекційній прямій, називають конкуруючими. Якщо дві точки лежать на одній проекційній прямій, то одна з них закриває другу. Виникає потреба визначити, яка з цих точок видима, а яка невидима. Із рис. 1.22 бачимо, що точка **B** розміщена вище за точку A_1, оскільки координата **Z** точки **B** більша. Тому при проектуванні на горизонтальну площину проекцій точка **B** закриває точку **A**. Точка **A** – невидима.

Отже, можна зробити висновок, що із двох горизонтально-конкуруючих точок на горизонтальній площині проекцій, буде видима та, яка розміщена у просторі вище. Про це свідчить фронтальна проекція, на якій обидві точки видимі.

Міркуючи аналогічно і розглядаючи рис. 1.23, можна зробити висновок, що з двох фронтально-конкуруючих точок на фронтальній площині проекцій видима та, що розміщена ближче до спостерігача. Це добре видно на горизонтальній площині проекцій, де проеція $\mathbf{D_1}$ більш віддалена від осі $\mathbf{X_{12}}$, ніж $\mathbf{C_1}$. Отже, на фронтальній проекції точка **D** – видима, а **C** – невидима.

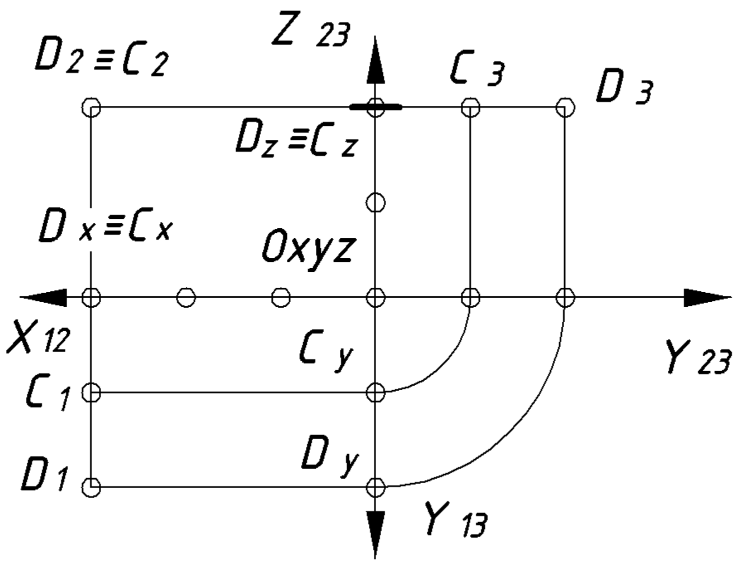


Рис. 1.23

Можна також показати, що з двох проекцій точок на площині проекцій $\mathbf{П_3}$ видима та, у якої координата **X** більша.

У позначенні проекцій двох конкуруючих точок, які збігаються, прийнято позначати першою проекцію видимої точки, другою – невидимої.

2.4. Побудова базисного епюра точки

В практиці проектування проекції об’єкта розміщують на довільних відстанях одна від одної в проекційному зв’язку. Наприклад, при побудові ортогональних проекцій точки **A** горизонтальну проекцію $\mathbf{A_1}$ і фронтальну $\mathbf{A_2}$ розміщують на вертикальній лінії зв’язку $\mathbf{A_1A_2}$, а фронтальну проекцію $\mathbf{A_2}$ і профільну $\mathbf{A_3}$ – на горизонтальній лінії зв’язку $\mathbf{A_2A_3}$ (рис. 1.24).

При побудові ортогональних проекцій системи точок одну точку приймають за базову і позначають верхнім лівим індексом у вигляді нуля (наприклад, $\mathbf{{}^0A}$). Проекції базової точки розміщують довільно на відповідних лініях зв'язку, а проекції решти точок даної системи будують за відносними координатами, які пов'язують їх з прийнятою базовою точкою системи. При цьому слід пам'ятати, що:

– для заданих точок система площин проекцій має бути одна і та ж;

– точки, які лежать у площинах проекцій, визначають двома координатами (третя координата для них дорівнює нулю).

При побудові епюра знаки відносних координат визначають відносно базової точки. Координата **X** може бути відкладена відносно горизонтальної або фронтальної проекції базової точки (зі знаком «плюс» ліворуч, зі знаком «мінус» праворуч); координату **У** відкладають відносно горизонтальної проекції базової точки (додатні значення вниз, від'ємні – вгору) і відносно профільної проекції базової точки (додатні значення праворуч, від'ємні – ліворуч). Координату **Z** відкладають тільки відносно фронтальної проекції базавої точки (додатні значення – вгору, від'ємні – вниз).

<u>Приклад</u>

Побудувати три проекції точок ^{0}**A** і **B**, якщо дано відносні координати точки **B** ($x_в$=15; $y_в$=17; $z_в$=23), а точка **A** є базовою.

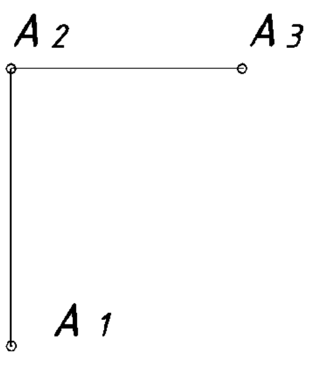


Рис. 1.24

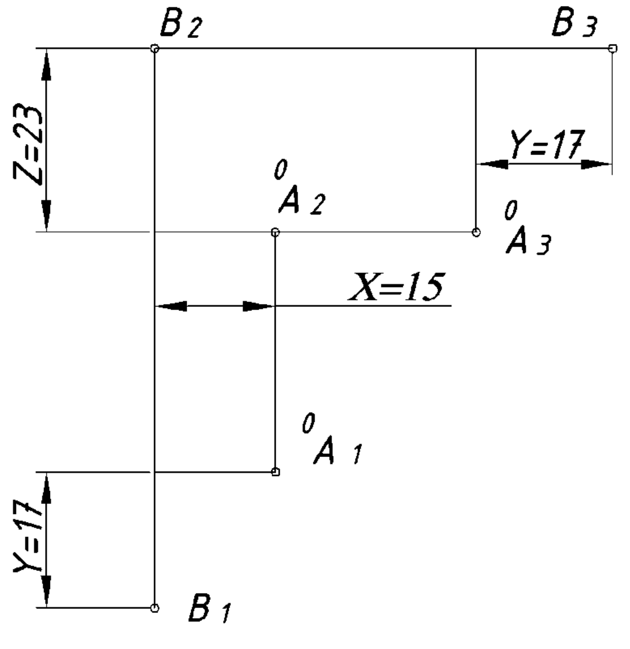


Рис. 1.25

Розв'язування.

Приймаємо проекції $^0A_1$ $^0A_2$ $^0A_3$ базової точки ^0A, а проекції точки **B** будуємо за відносними координатами ($x_в$=15; $y_в$=17; $z_в$=23), як зображено на рис. 1.25.

З розглянутого бачимо, що відносні координати пов'язують між собою точки заданої системи так, що за епюром однієї з них (базової) можна побудувати проекції решти точок за їх відносними координатами.

«Приймаємо» означає, що будуємо три (або дві) проекції базової точки як на рис. 1.24.

2.5. Проектування прямої

2.5.1. Задавання прямої на кресленні

Пряма – це сукупність «нескінченного» ряду точок. Щоб побудувати проекції прямої, достатньо визначити положення двох її точок (відрізка).

Отже, досить на прямій визначити дві точки **A** і **B**, якими виділяємо відрізок на прямій ***l***, і за відомим способом побудувати проекції цих точок. Потім сполучити однойменні проекції точок прямими лініями й отримати проекції відрізка **AB** прямої лінії ***l*** (рис. 1.25 і 1.26).

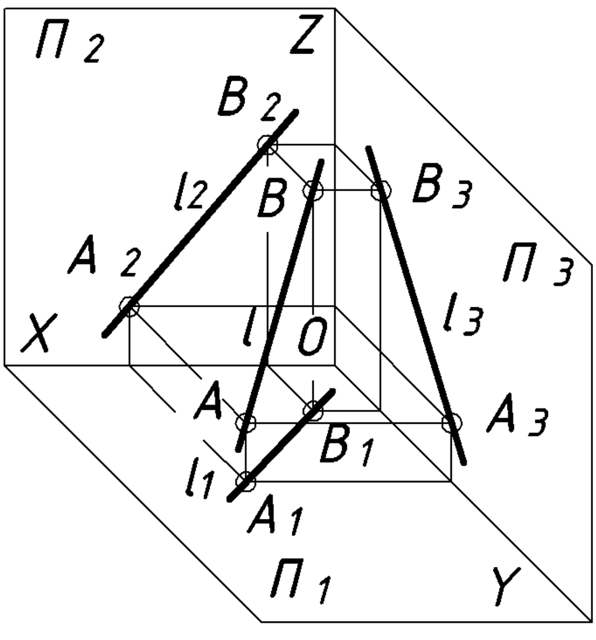


Рис. 1.25

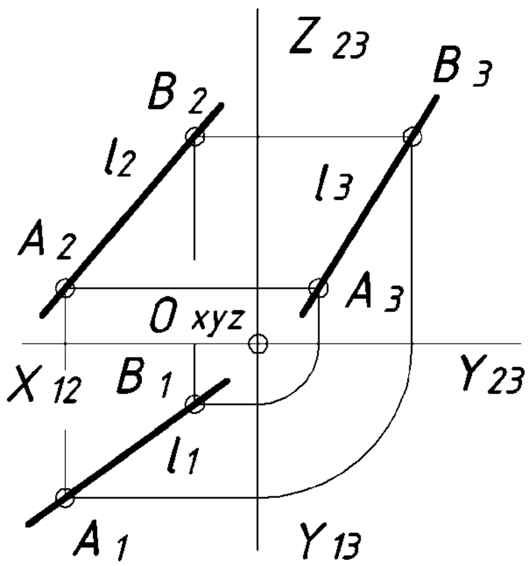


Рис. 1.26

Профільну проекцію прямої за заданими горизонтальною і фронтальною проекціями можна також побудувати, використовуючи різницю відстаней її точок до фронтальної площини, тобто координатним способом побудови проекцій точки. Цей спосіб простіший, точніший і використовується в практиці виконання рисунків (рис. 1.27).

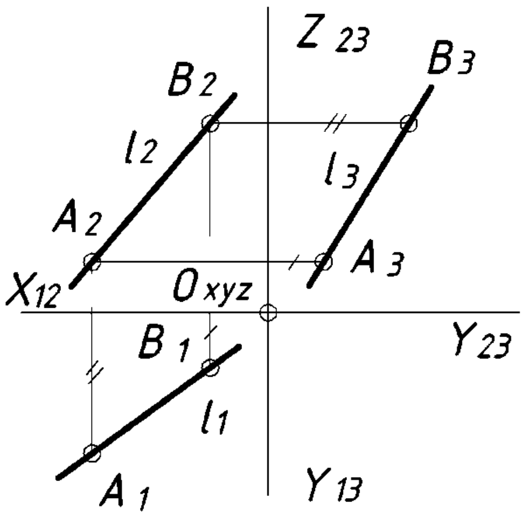


Рис. 1.27

2.5.2. Класифікація прямих

Положення прямої у просторі характеризується її положенням відносно площин проекцій. На епюрі положення прямої у просторі визначається положенням проекцій прямої щодо осей проекцій. Відносно трьох площин проекцій **$П_1$**; **$П_2$**; **$П_3$** – пряма лінія може займати різні положення. *Загальне* положення – це таке положення прямої, коли вона перетинає всі три площини проекцій під довільними кутами, тобто коли пряма не паралельна і не перпендикулярна до жодної із площин проекцій (рис. 1.28). Усі інші положення прямої називають *особливими*.

Це – прямі *рівня*:

– *горизонтальна* пряма – пряма, паралельна до горизонтальної площини проекцій (**$П_1$**) (рис. 1.29);

– *фронтальна* пряма – пряма, паралельна до фронтальної площини проекцій (**$П_2$**) (рис. 1.30);

– *профільна* пряма – пряма, паралельна до профільної площини – проекцій (**$П_3$**) (рис. 1.31).

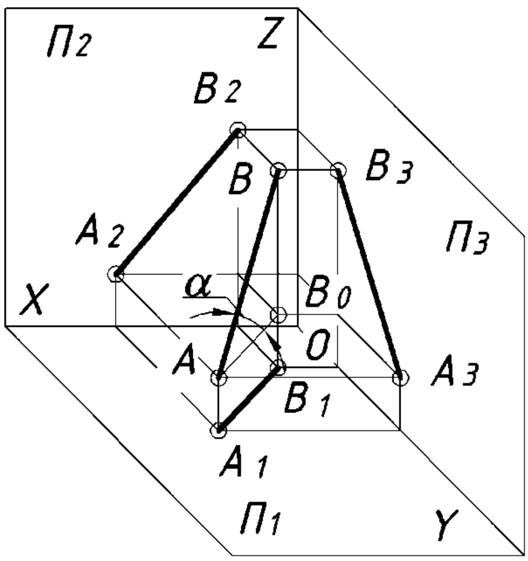
Інший вид прямих особливого положення – *проектуючі* прямі:

– *горизонтально-проектуюча* – пряма, перпендикулярна до горизонтальної площини проекцій (**$П_1$**) (рис. 1.32);

– *фронатально-проектуюча* – пряма, перпендикулярна до фронтальної площини проекцій (**$П_2$**) (рис. 1.33);

– *профільно-проектуюча* – пряма, перпендикулярна до профільної площини проекцій (**$П_3$**) (рис. 1.34).

Крім того пряма може лежати на будь-якій площині проекцій (рис. 1.35) чи розміщуватися на одній із трьох осей проекцій (рис. 1.36).



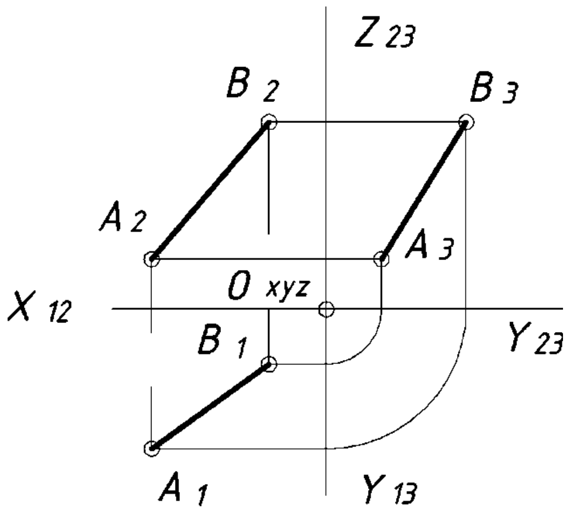


Рис. 1.28

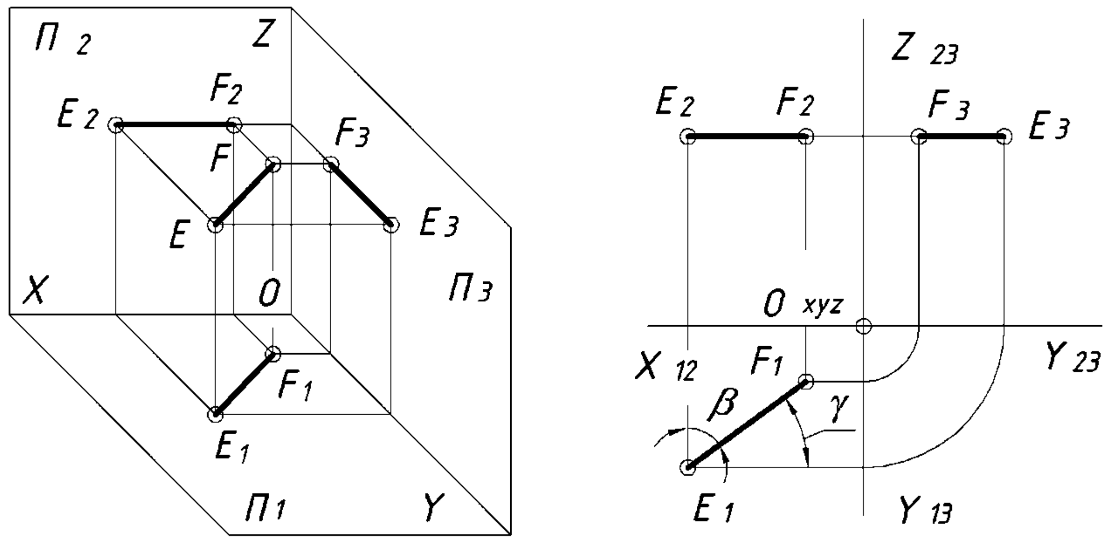


Рис. 1.29

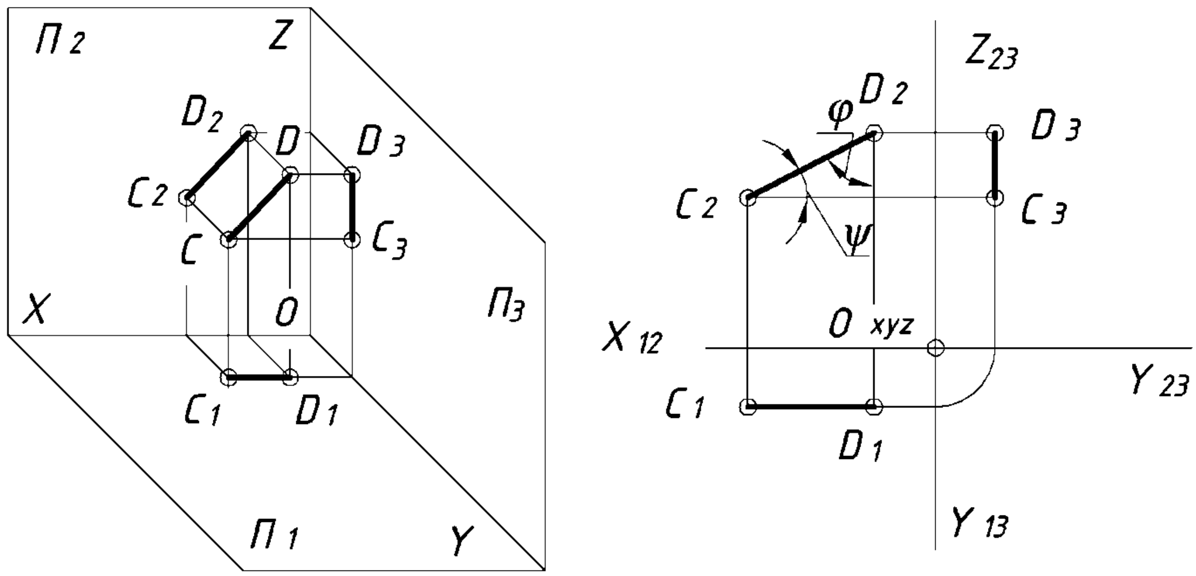


Рис. 1.30

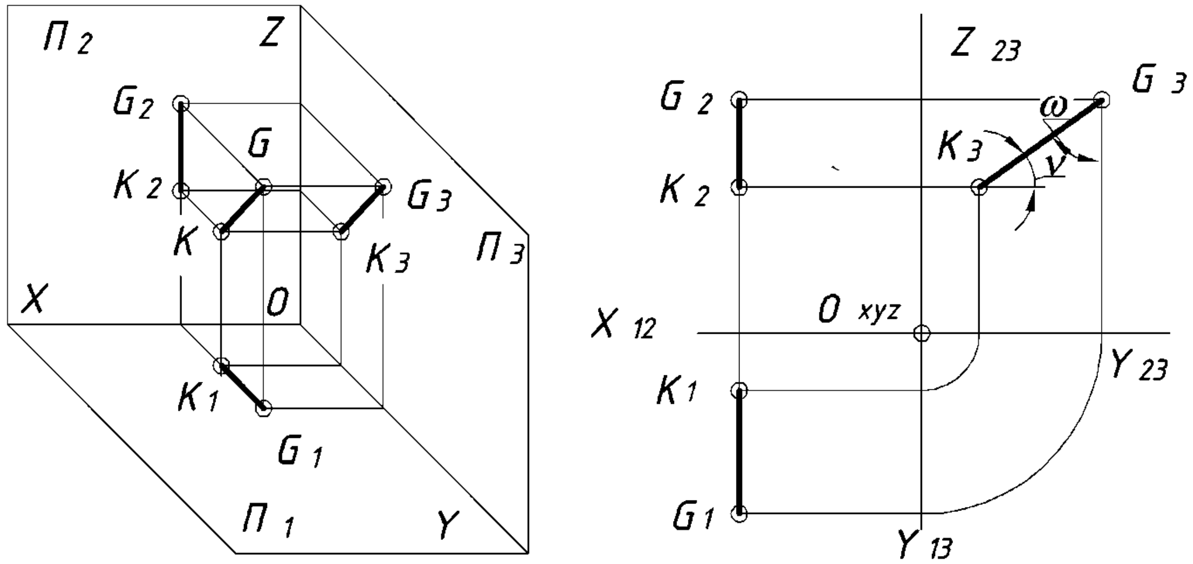


Рис. 1.31

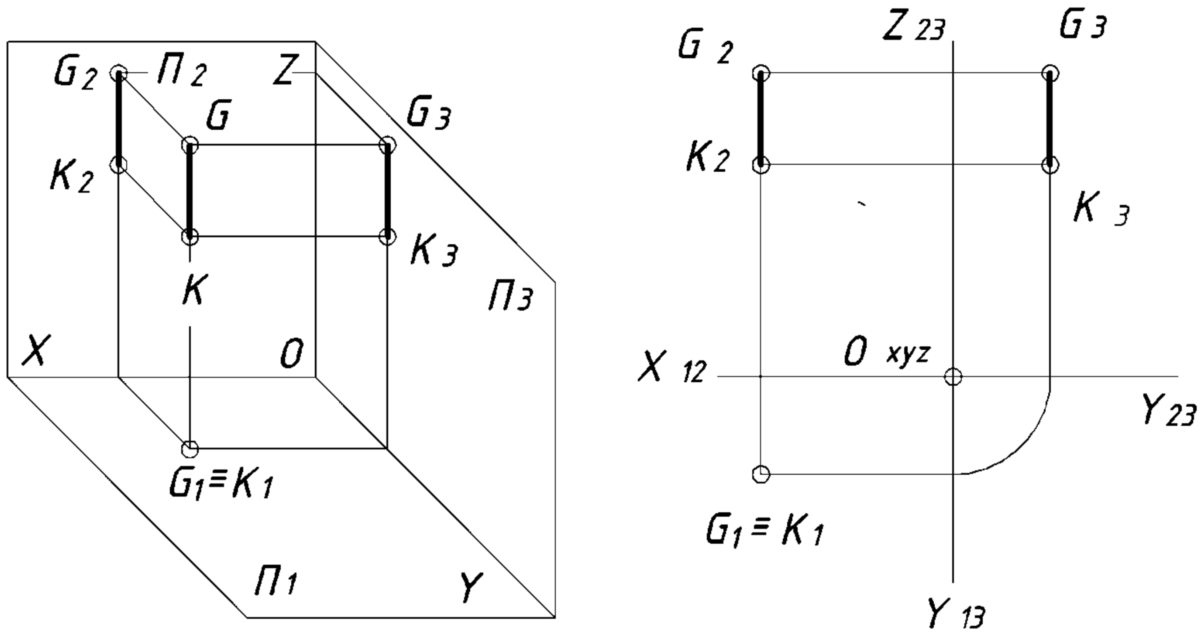


Рис. 1.32

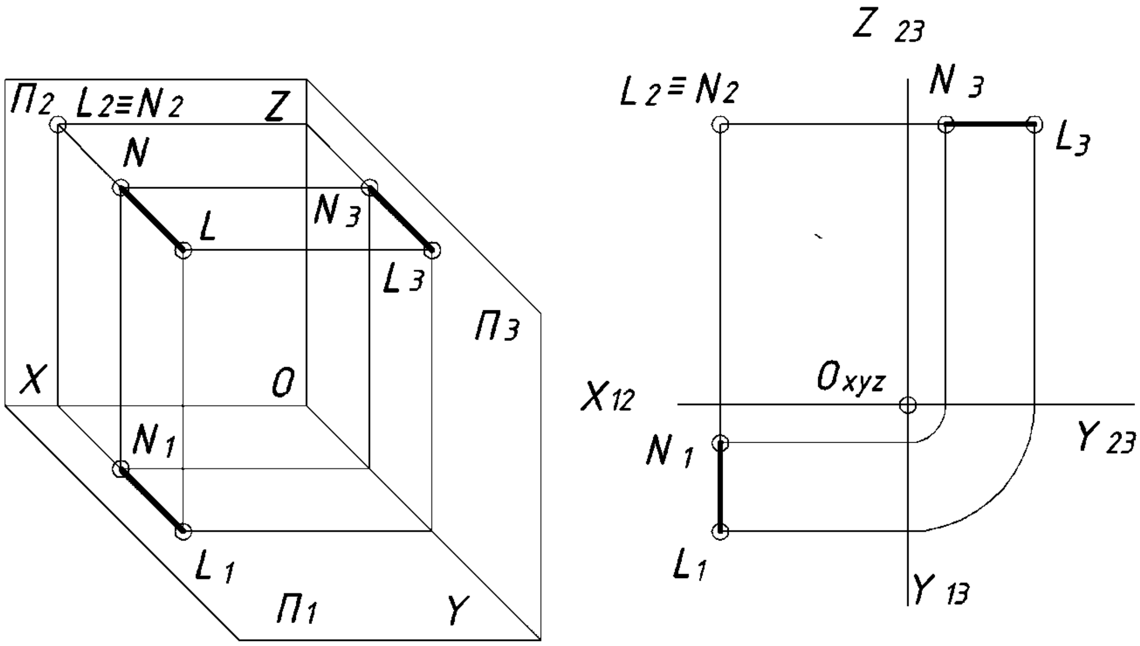


Рис. 1.33

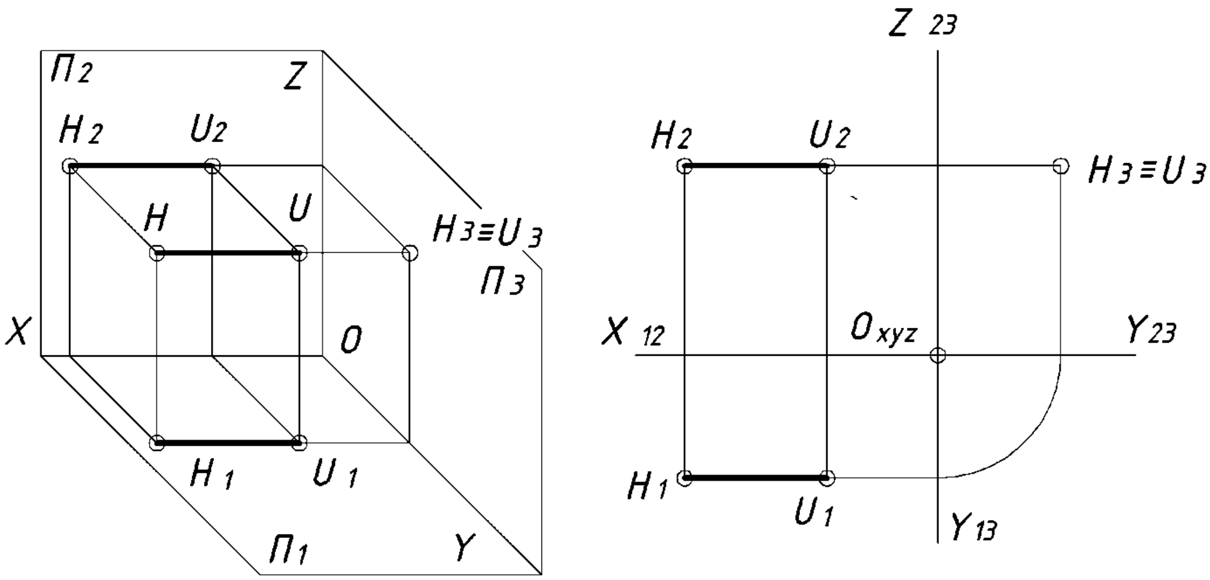


Рис. 1.34

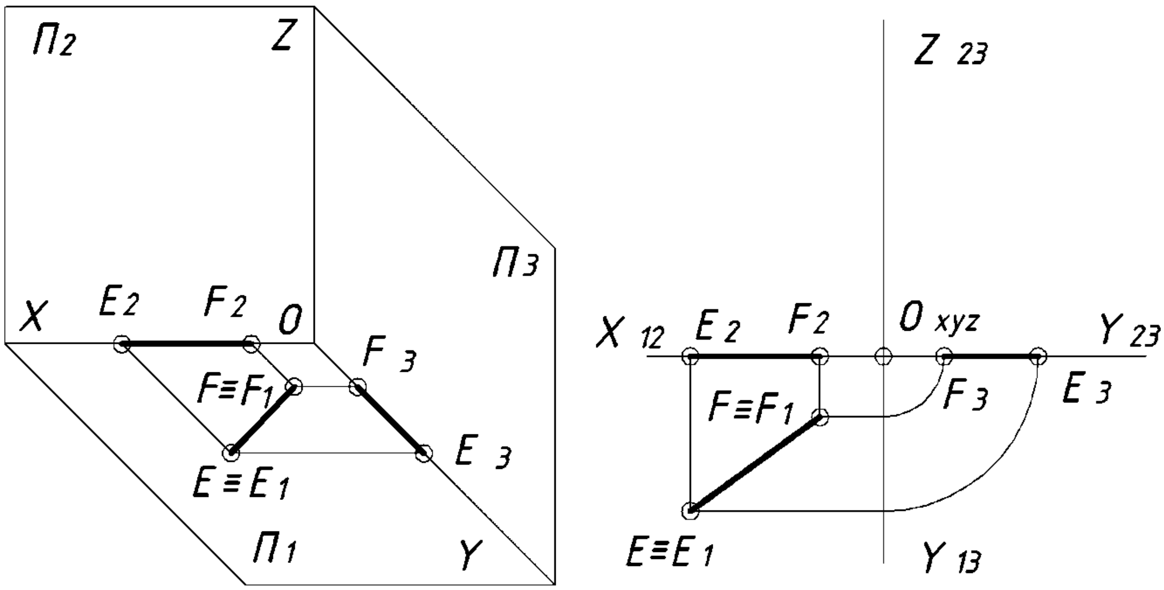


Рис. 1.35

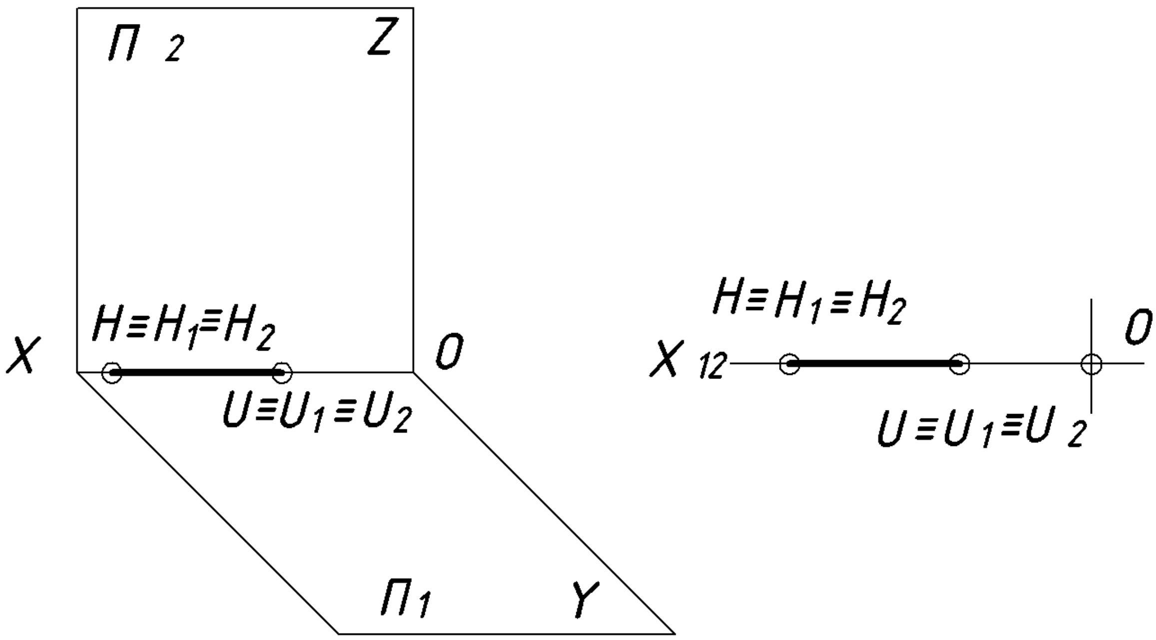


Рис. 1.36

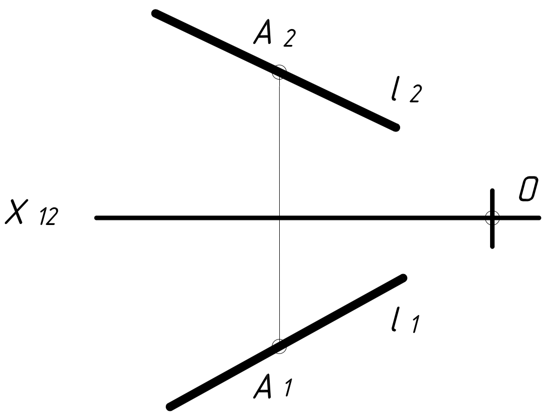


Рис. 1.37

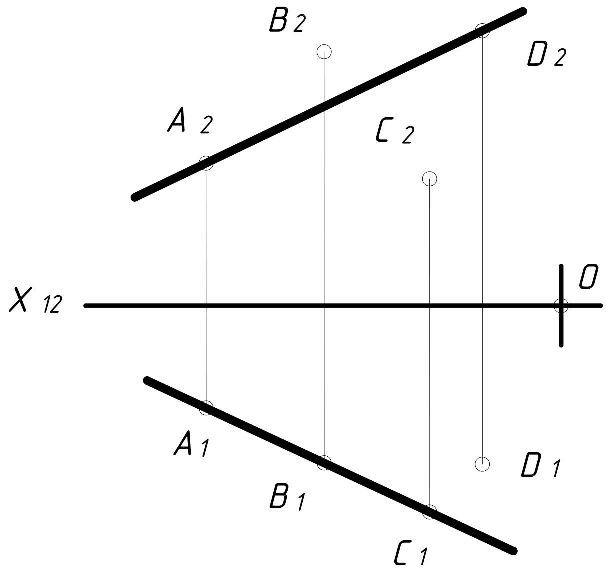


Рис. 1.38

Розглянемо ознаки, за якими можна робити висновки про положення прямої у просторі за її проекціями.

Відрізок **AB** (рис. 1.28) – загального положення. Якщо через точку **A** провести пряму $\mathbf{AB_0}$, паралельну до проекіїї $\mathbf{A_1B_1}$, то кут α визначатиме нахил відрізка до площини $\mathbf{\Pi_1}$. У просторі утворюється прямокутний трикутник $\mathbf{ABB_0}$ з прямим кутом $\mathbf{B_0}$ при вершині, гіпотенузою **AB**, катетами $\mathbf{AB_0}$ і $\mathbf{BB_0}$. Подібно до цього можна побудувати кути нахилу довільної прямої до площин $\mathbf{\Pi_2}$ і $\mathbf{\Pi_3}$. Позначимо ці кути відповідно β і γ (рис. 1.29).

Звідси можна зробити висновок, що проекції відрізка загального положення завжди менші, ніж відрізок у просторі і що жодна з проекцій не паралельна до осей проекцій і не перпендикулярна до них. Для прямих особливого положення характерним є те, що один або два будь-яких кути нахилу їх до площини дорівнюватимуть нулю.

Якщо кут $\alpha = 0^0$, то пряма займе горизонтальне положення і на площину $\mathbf{\Pi_1}$ вона проектується в дійсну величину. На цю ж площину проектуються без спотворення кути нахилу прямої до площини $\mathbf{\Pi_2}$ і $\mathbf{\Pi_3}$. Фронтальна проекція даної прямої паралельна до осі **X**, профільна – до осі **Y**, бо всі точки прямої мають однакову координату **Z** (рис. 1.29).

Аналогічно фронтальна пряма проектується на площину $\mathbf{\Pi_2}$ у дійсну величину. Кут ψ нахилу прямої до площини $\mathbf{\Pi_1}$ і кут φ нахилу її до $\mathbf{\Pi_3}$

проектується на площину **П₂** без спотворень. Звідси випливає, що координати усіх точок прямої однакові (рис. 1.30).

Фронтальна і горизонтальна проекції профільної прямої перпендикулярні до осі **X**. Це визначається рівністю координат **X** усіх точок прямої. Профільна пряма проектується на площину **П₃** у дійсну величину, кути нахилу **ν** і **ω** проектуються на цю ж площину без спотворень (рис. 1.31)

Проектуючі прямі проектуються на перпендикулярні до них площини проекцій у точки, а на паралельні площини – у прямі, перпендикулярні до відповідних осей проекцій. Якщо, наприклад, пряма лежить на **П₁**, то фронтальна її проекція збігається з віссю **X**. Якщо пряма належить площині **П₂**, то горизонтальна її проекція збігається з віссю **X** (рис. 1.35).

2.5.3. Взаємне положення точки і прямої. Поділ відрізка прямої у заданому відношенні

Точка і пряма у просторі можуть займати різні положення між собою і відносно площин проекцій. Виходячи з того, що пряма лінія розглядається як сукупність нескінченного ряду точок, очевидно, що будь-яка точка заданої прямої у просторі матиме свої проекції на відповідних проекціях прямої. Отже, якщо точка лежить на прямій, то на епюрі проекції точки лежать на однойменних проекціях цієї прямої. Правильне також обернене твердження: якщо на епюрі проекції прямої проходять через однойменні проекції точки, то в просторі ця пряма проходить через точку (рис. 1.39).

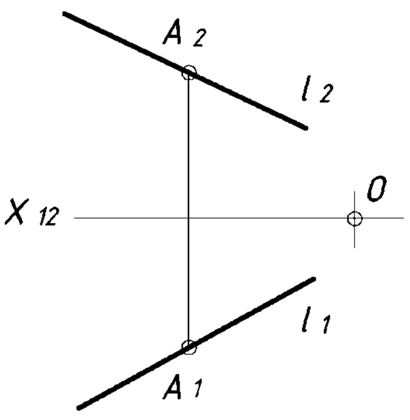


Рис. 1.39

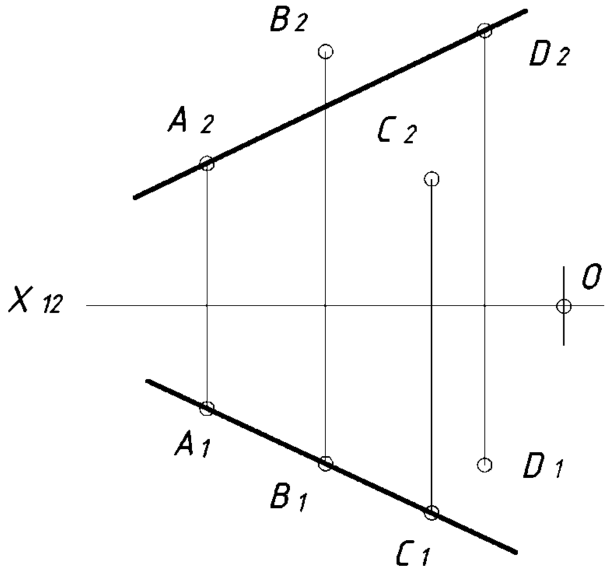


Рис. 1.40

На рис. 14 зображено точку **A**, яка належить прямій **l**. Решта точок **B**, **C**, **D** не належать цій прямій. Спираючись на властивості паралельного проектування щодо співвідношення відрізків прямої та їх проекцій, виявляємо, що для поділу прямої в заданому пропорційному співвідношенні досить поділити у цьому співвідношенні одну із проекцій відрізка, а потім за допомогою ліній зв'язку перенести точки поділу на інші проекції відрізка. Наприклад, поділ відрізка **AB** у співвідношенні 1:2 проходить за наступним алгоритмом (рис. 15).

Спочатку поділимо фронтальну проекцію відрізка $\mathbf{A_2B_2}$ у довільному співвідношенні. Для цього з точки $\mathbf{A_2}$ довільно проводимо пряму **t**, на якій відкладаємо три рівних відрізки довільної довжини. Візьмемо $\mathbf{A_2C_0}$=1 і $\mathbf{C_0B_0}$=2. Сполучаємо точку $\mathbf{B_0}$ з точкою $\mathbf{B_2}$. З точки $\mathbf{C_0}$ проводимо пряму, паралельну до $\mathbf{B_0B_2}$, яка в перетині з $\mathbf{A_2B_2}$ визначить точку $\mathbf{C_2}$. Провівши з неї вертикальну лінію зв'язку, отримаємо горизонтальну проекцію $\mathbf{C_1}$. Отже, точка **C** ($\mathbf{C_1}$, $\mathbf{C_2}$) поділить відрізок **AB** у співвідношенні 1:2.

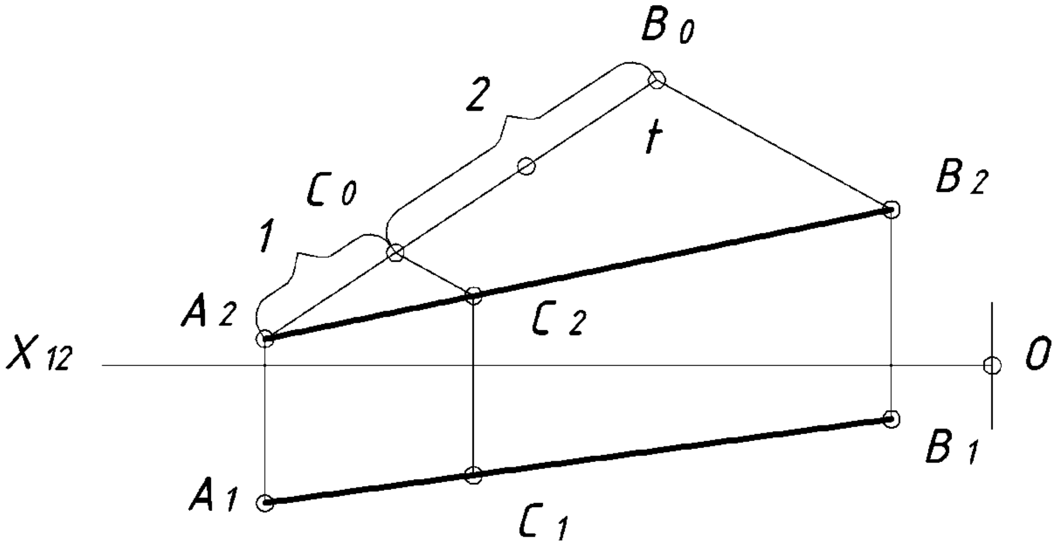


Рис. 1.41

Зауважимо, що побудову в цій задачі можна починати з горизонтальної проекції.

2.5.4. Взаємне положення двох прямих

Прямі лінії у просторі можуть збігатися, перетинатися, бути паралельними і мимобіжними (рис. 1.42).

Легко бачити, що однойменні проекції двох прямих **a** і **b**, які збігаються, також збігаються.

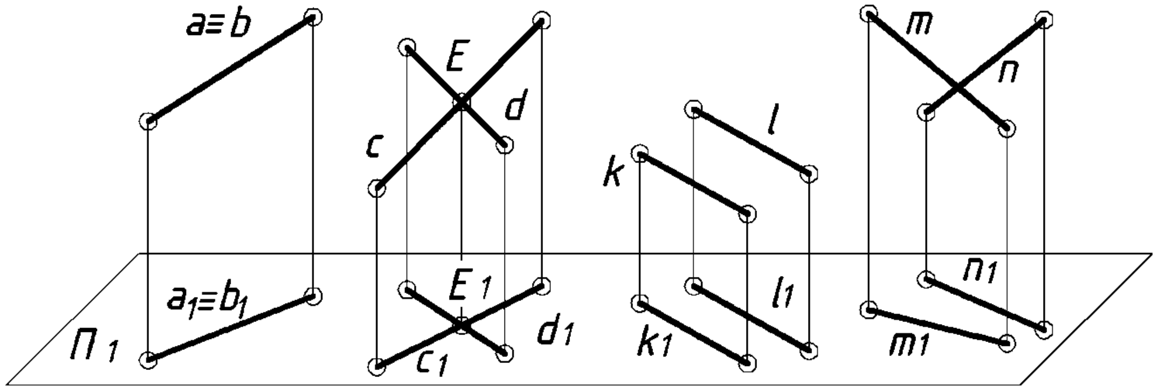


Рис. 1.42

Якщо дві прямі у просторі перетинаються, то на епюрі їх однойменні проекції перетинаються у точках, які лежать на одній лінії проекційного зв’язку (рис. 1.43). Це випливає з того, що проекції точки **E**, спільної для прямих **c** і **d**, як точки їх перетину лежать одночасно на відповідних проекціях обох прямих. Тому горизонтальні проекції $\mathbf{c_1}$ і $\mathbf{d_1}$ перетинаються у точці $\mathbf{E_1}$, яка є горизонтальною проекцією точки перетину прямих у просторі. Аналогічно, при проектуванні прямих **c** і **d** на площини $\mathbf{П_2}$ і $\mathbf{П_3}$ будуть такі самі наслідки.

2.5.5. Паралельні прямі

Якщо дві прямі у просторі паралельні між собою, то їх однойменні проекції також паралельні між собою (рис. 1.44). Справедливе й обернене твердження: якщо на епюрі однойменні проекції двох прямих паралельні між собою, то прямі у просторі паралельні між собою. Такий висновок можна зробити для двох паралельних прямих загального положення навіть за їх проекціями на дві площини проекцій.

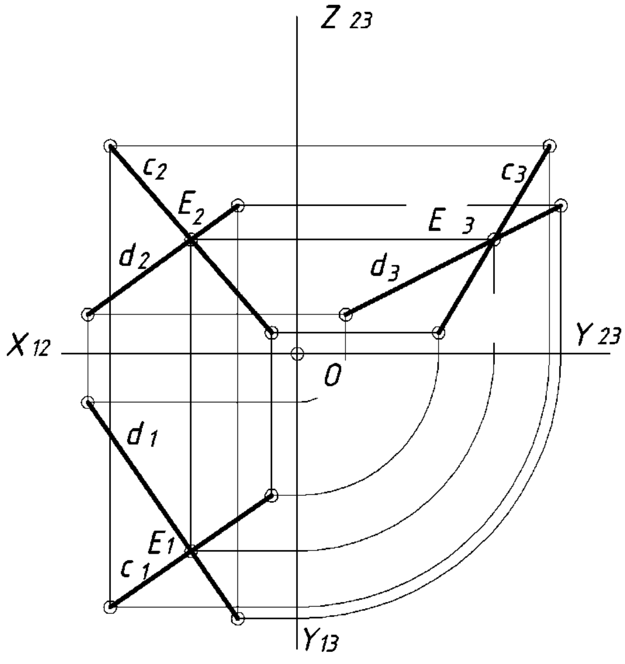


Рис. 1.43

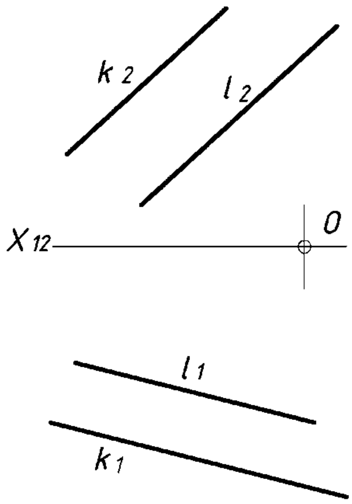


Рис. 1.44

Якщо задано проекції двох прямих, паралельних до будь-якої площини проекцій, то паралельність прямих можна визначити лише за наявності їх проекцій на тій площині проекцій, до якої прямі у просторі паралельні.

Наприклад, прямі **m** і **n** (рис. 1.45) паралельні до профільної площини проекцій (**Π_3**), тоді їх однойменні проекції на **Π_1** і **Π_2** паралельні. Проте за цими ознаками робити висновок про їх паралельність у просторі не можна доти, доки не будуть побудовані їх профільні проекції. З рисунка бачимо, що прямі m і n не паралельні між собою.

2.5.6. Мимобіжні прямі

Дві прямі, які у просторі не паралельні й не перетинаються, називають *мимобіжними* (рис. 1.46). Для мимобіжних прямих характерно те, що їх однойменні проекції перетинаються у точках, які не лежать на одній лінії зв’язку, або одна пара проекцій перетинається, а друга може бути паралельними прямими (рис. 1.45).

Розглянемо мимобіжні прямі на рис. 1.47. Точки **A**, **B**, **C**, **D** є точками уявного перетину прямих **m** і **n**. Справді, якщо подивитися на ці прямі спереду, то здається, що вони перетинаються у точці **C ≡ D**, якщо згори – то у точці **A ≡ B**. Щоб переконатися, що прямі не перетинаються, треба побудувати горизонтальні проекції точок **C** і **D** або фронтальні проекції точок **A** і **B**.

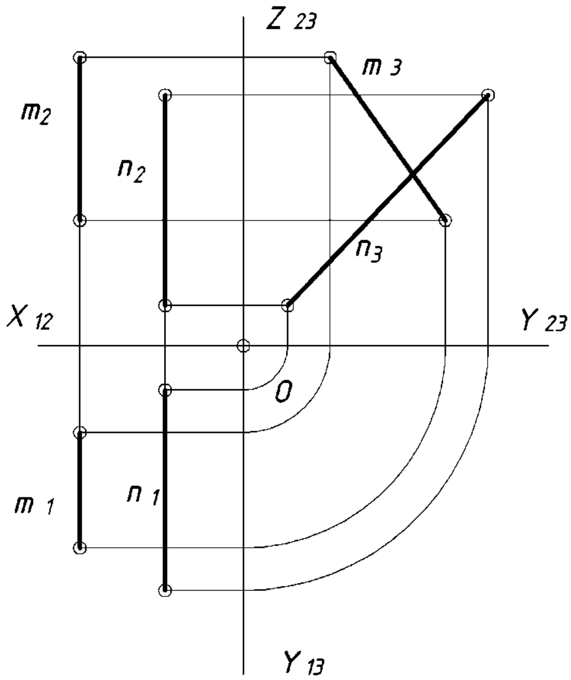


Рис. 1.45

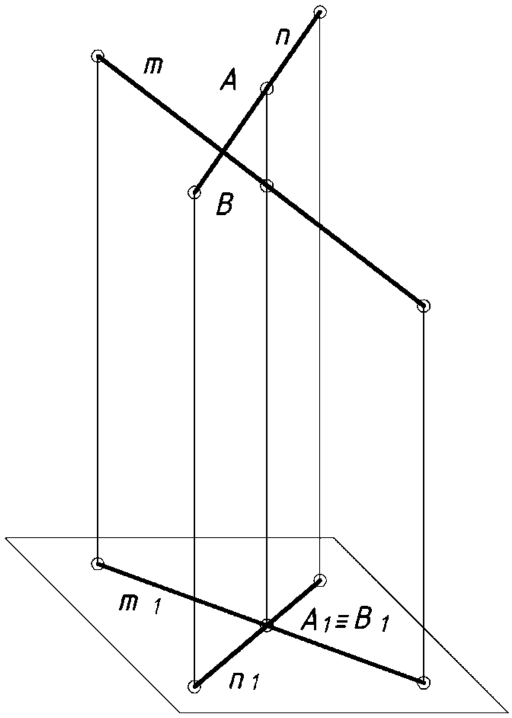


Рис. 1.46

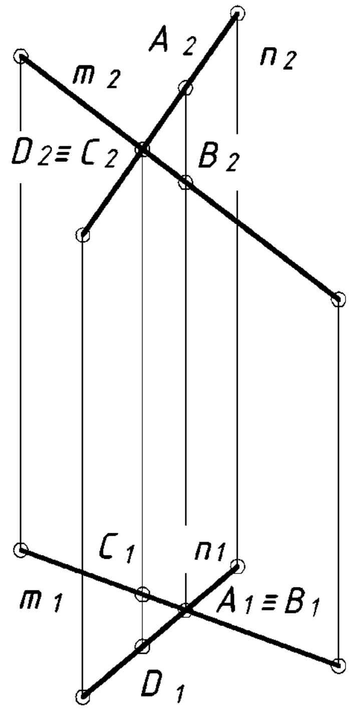


Рис. 1.47

2.5.7. Сліди прямої

Точки перетину прямої лінії з площинами проекцій називають *слідами* прямої.

Оскільки пряма лінія може перетинати одну, дві або три площини проекцій, то відповідно пряма може мати один, два або три сліди.

Точку, в якій пряма перетинає горизонтальну площину проекцій, називають *горизонтальним слідом* (**H**). Точку, в якій пряма перетинає фронтальну площину проекцій називають *фронтальним слідом* і позначають точкою **F**. Аналогічно визначають *профільний слід* прямої, який позначають точкою **P**.

Розглянемо сліди прямої **k** на рис. 1.48. Ця пряма має два сліди: горизонтальний і фронтальний.

При побудові на епюрі слідів прямої та їх проекцій треба зважати, що сліди – це точки особливого положення. Знаючи це, зазначимо, що горизонтальна проекція $\mathbf{H_1}$ горизонтального сліду прямої **k** збігається зі слідом точкою **H**, а фронтальна проекція сліду $\mathbf{H_2}$ лежить на осі **OX**.

Фронтальна проекція $\mathbf{F_2}$ фронтального сліду прямої збігається із точкою **F**, а горизонтальна проекція $\mathbf{F_1}$ лежить на осі проекцій. Звідси дійдемо висновку, що для побудови горизонтального сліду прямої **k** необхідно продовжити її фронтальну проекцію $\mathbf{k_2}$ до перетину з віссю проекцій **OX** і з точки $\mathbf{H_2}$ провести перпендикуляр до перетину з продовженням горизонтальної проекції $\mathbf{k_1}$.

Точка перетину $\mathbf{H_1}$ – горизонтальна проекція горизонтального сліду; вона збігається з точкою **H** самим слідом. Аналогічно, як і в попередньому випадку, зазначимо, що фронтальний слід прямої **k** і його фронтальна проекція лежатимуть на перетині продовження **k** і перпендикуляра з точки $\mathbf{F_1}$ до осі **OX**.

Виходячи з цих міркувань, будують профільний слід та його проекції. Цей слід на профільній площині проекцій збігається зі своєю проекцією, а горизонтальна і профільна проекції його лежать відповідно на осях **Y** і **Z**.

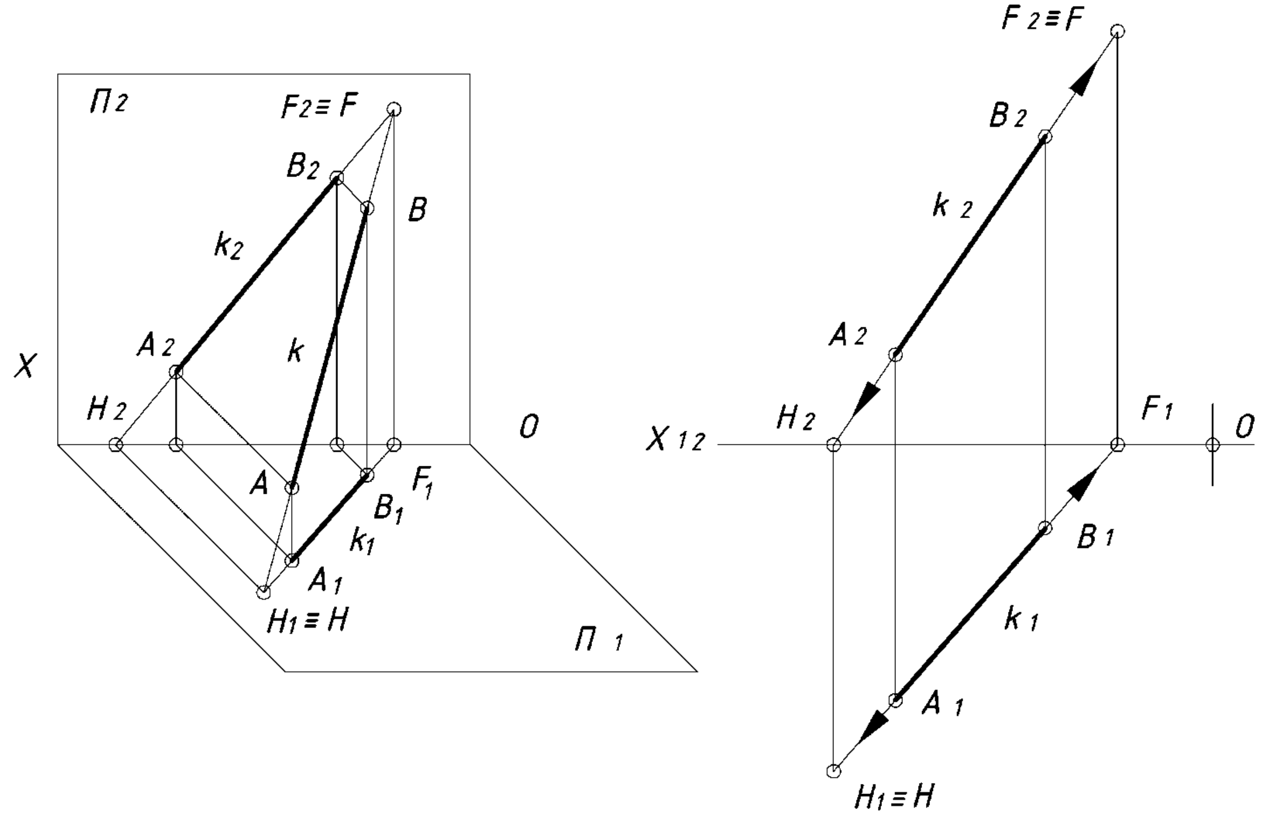


Рис. 1.48

Зауважимо, що через положення слідів прямої на епюрі можна зробити висновок, через які чверті простору проходить пряма і яке положення у просторі вона займає. Пряма загального положення має в системі $\mathbf{П_1}$, $\mathbf{П_2}$, $\mathbf{П_3}$ три сліди.

2.5.8. Побудова дійсної величини відрізка прямої способом прямокутного трикутника

Відомо, що жодна проекція відрізка прямої загального положення не дорівнює дійсній його величині, тобто проекції такого відрізка будуть завжди менші, ніж відрізок у просторі. Проте в багатьох випадках виникає необхідність визначити дійсну величину відрізка загального положення, маючи на епюрі лише його проекції. Таку задачу можна розв’язати графічно побудовою на епюрі (рис. 1.49).

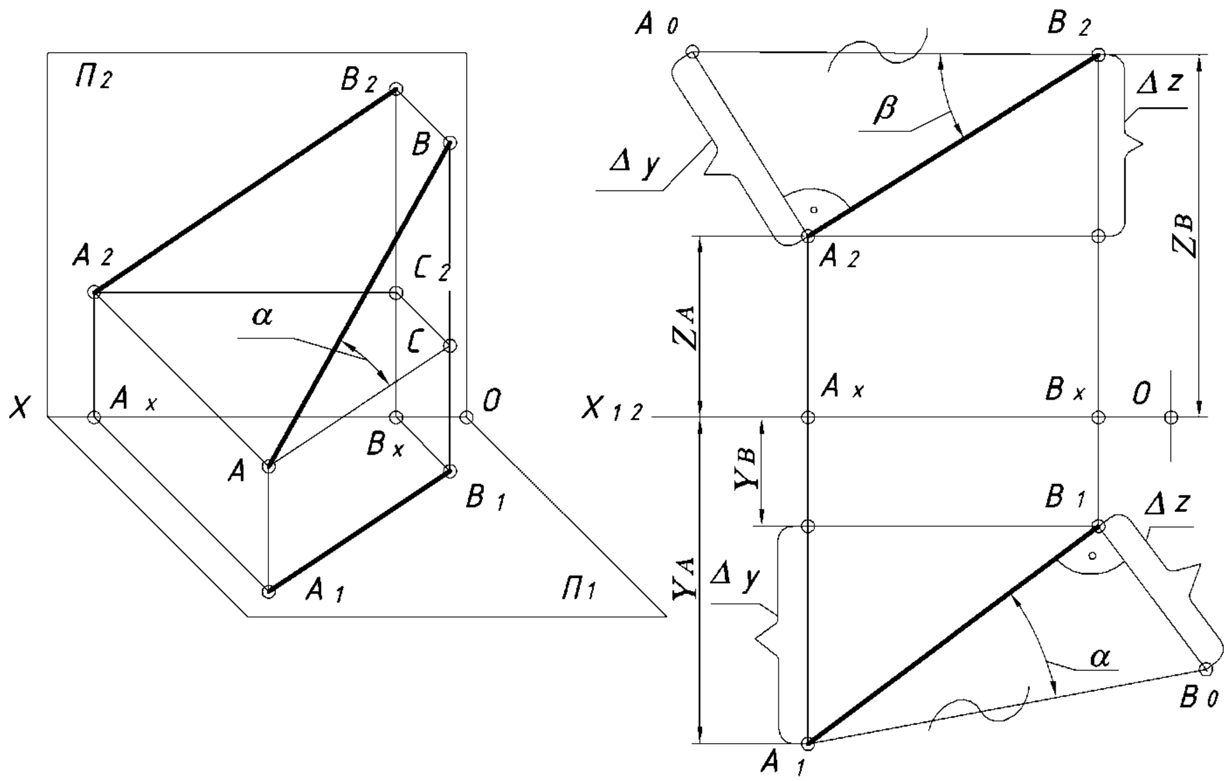


Рис. 1.49

Маючи дві проекції відрізка, приймаємо його проекцію $\mathbf{A_1B_1}$ за один катет прямокутного трикутника. З точки $\mathbf{B_1}$ під прямим кутом до $\mathbf{A_1B_1}$ проведемо пряму, на якій відкладаємо другий катет – відрізок $\mathbf{B_2C_2}$, що беремо з фронтальної проекції як різницю $\mathbf{B_2B_x}$ – $\mathbf{A_2A_x}$. Гіпотенуза $\mathbf{A_2B_2{=}AB}$, кут α з вершиною в точці $\mathbf{A_1}$ є кутом нахилу відрізка **AB** до площини $\mathbf{П_1}$.

Аналогічно можна визначити дійсну величину відрізка і кут β і γ нахилу його до площин проекцій $\mathbf{П_2}$ і $\mathbf{П_3}$, побудувавши прямокутний трикутник на площинах $\mathbf{П_2}$ і $\mathbf{П_3}$.

При побудові на площині проекцій $\mathbf{П_2}$ необхідно на другому катеті відкладати різницю координат по осі **Y** для точок **A** і **B**. Кут між дійсною величиною відрізка і проекцією його на $\mathbf{П_2}$ буде кутом між відрізком і площиною $\mathbf{П_2}$.

ТЕМА 2
ПРОЕКТУВАННЯ ПЛОЩИН НА ПЛОЩИНИ ПРОЕКЦІЇ

1. Зображення площини

1.1. Способи задавання площин на кресленні

Площина у просторі може бути задана:

– трьома точками, що не лежать на одній прямій;
– прямою і точкою, що не лежить на цій прямій;
– двома паралельними прямими;
– двома прямими, що перетинаються;
– геометричною фігурою (рис. 2.1).

Крім того, площину можна задати на епюрі ще одним способом – її власними слідами (рис. 2.3).

Слідом площини називають пряму лінію, по якій площина перетинається з площиною проекцій.

Візьмемо у просторі довільну площину **α**, нахилену до площин проекцій під довільними кутами. Вона перетинається з кожною з площин проекцій по своїх слідах, а саме:

З площиною $\mathbf{\Pi_1}$ – *по горизонтальному сліду* ($\mathbf{h_\alpha}$).

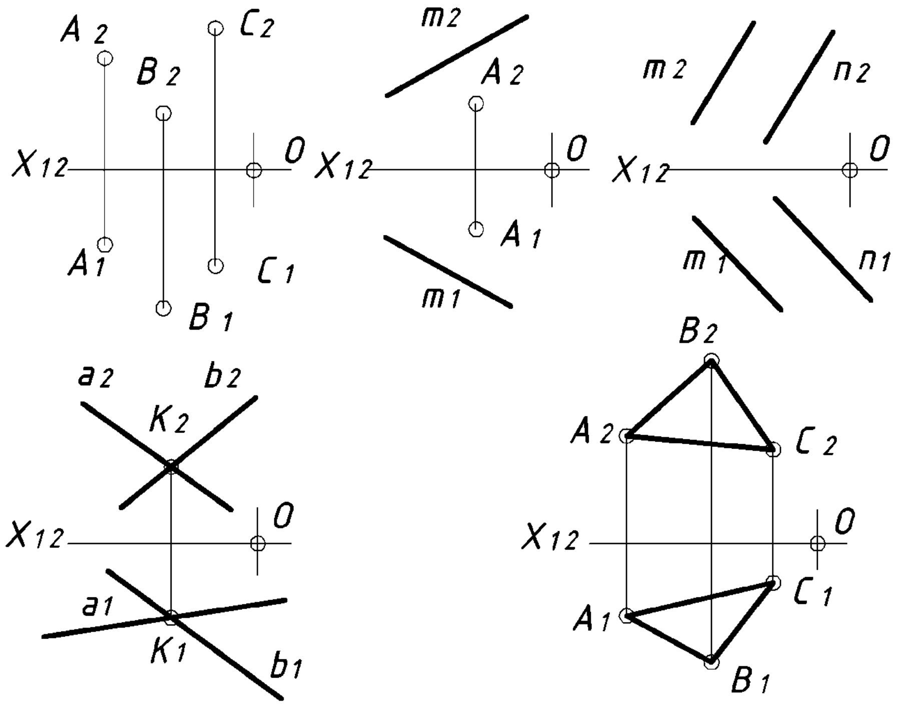


Рис. 2.1

З фронтальною **П₂** – *по фронтальному сліду* (**f_α**).

З профільною **П₃** – *по профільному сліду* (**p_α**).

Площина α перетинає також усі три осі в точках **Xα**, **Yα**, **Zα**, які є точками перетину відповідних слідів площини або точками збігу слідів.

Оскільки ці точки лежать на осях проекцій, вони мають лише одну числову координату, а інші дві дорівнюють нулю. Саме її й необхідно знати для побудови рисунка площини в системі **$П_1$ $П_2$ $П_3$**.

Необхідно зазначити, що сліди площини є прямими особливого положення, оскільки вони лежать на площинах проекцій. Тому проекції слідів на епюрі займатимуть цілком визначене положення. Наприклад, горизонтальна проекція горизонтального сліду **h_α** збігається зі слідом, його фронтальна і профільна проекції лежать відповідно на осях **X**,**Y**.

1.2. Класифікація площин

Положення площини у просторі характеризується її розміщенням відносно площин проекцій. У зв’язку з цим розрізняють площини довільного й особливого положення.

Площину, не перпендикулярну до жодної із площин проекцій, називають площиною *довільного* або *загального* положення. Зображення такої площини показано на рис. 2, епюр її слідів – на рис. 3. Характерною ознакою зображення довільної площини, заданої слідами, є те, що сліди такої площини ніколи не перпендикулярні до осей проекцій **X**, **Y**, **Z**.

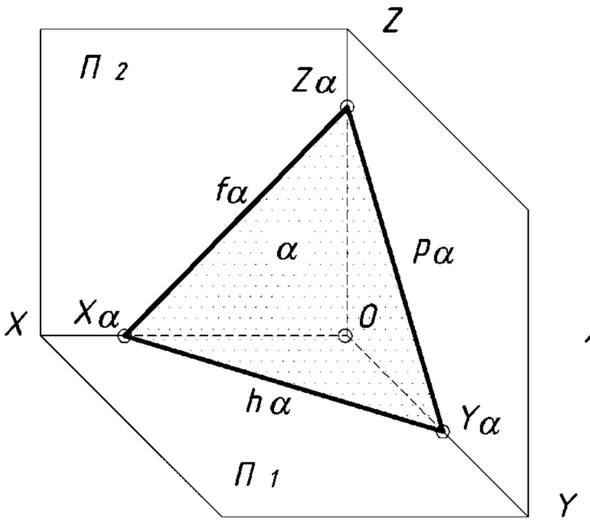


Рис. 2.2

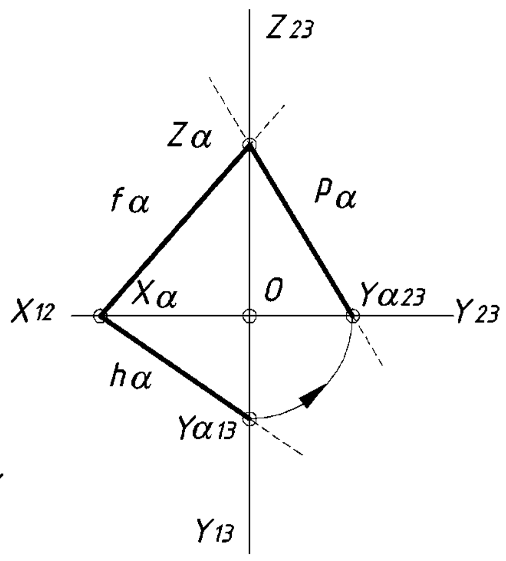


Рис. 2.3

Проте у багатьох випадках площину зручно задавати не слідами, а геометричними елементами – точками і прямими. Тоді на комплексному рисунку проекції цих елементів, як правило, займатимуть довільне положення (рис. 4).

Серед довільних площин виділимо рівнопохилу – похилу під довільним, але однаковим кутом до площини проекцій **П₂** і **П₁** у системі квадрантів. Епюр рівнопохилої площини **α** (рис. 2.5) характеризується тим, що горизонтальний $\mathbf{h}_\alpha$ і фронтальний $\mathbf{f}_\alpha$ сліди лежать на одній похилій прямій до осі **OX**, а профільний слід $\mathbf{p}_\alpha$ розміщений завжди під кутом 45° до осей **Y** і **Z**.

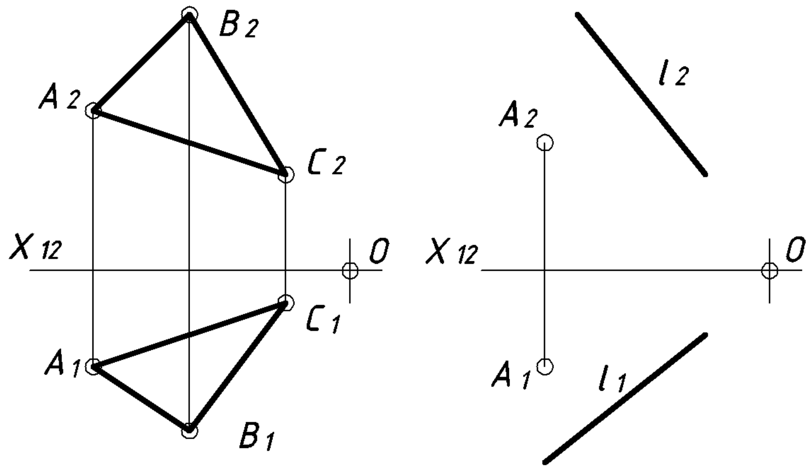


Рис. 2.4

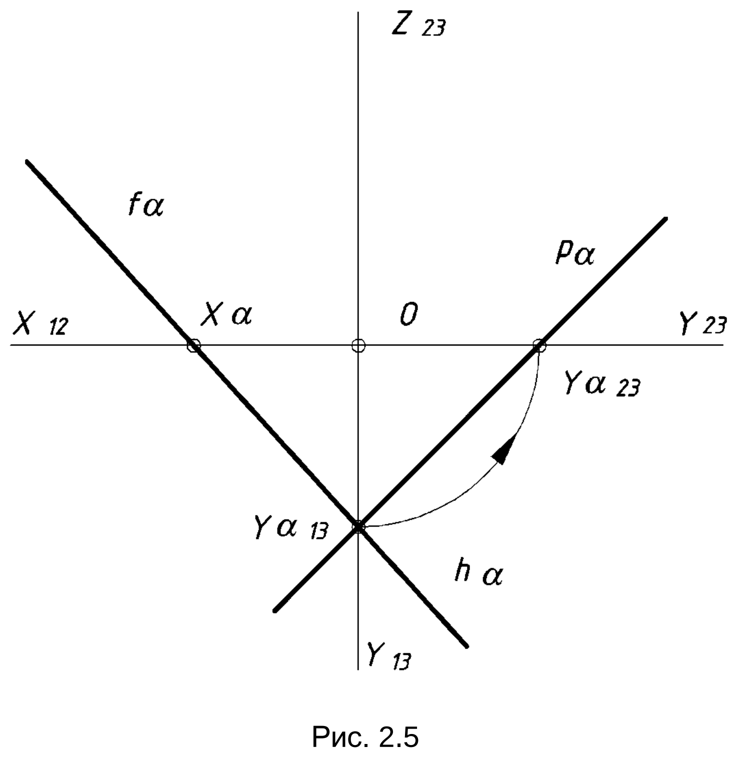


Рис. 2.5

Площини, які паралельні або перпендикулярні до однієї з площин проекцій, називають площинами *особливого* положення. Серед них розрізняють *проектуючі* площини і площини *рівня*.

Площину, перпендикулярну до горизонтальної площини проекцій, називають *горизонтально-проектуючою* (рис. 6). Сліди цієї площини будуть мати такий вигляд (рис. 2.7): горизонтальний слід $\mathbf{h_\alpha}$ розташований під кутом β до осі **OX** (це й визначає кут нахилу площини α до фронтальної площини прекцій), а фронтальний і профільний сліди є перпендикулярні до $\mathbf{П_1}$ (осі **OX** і **OY**).

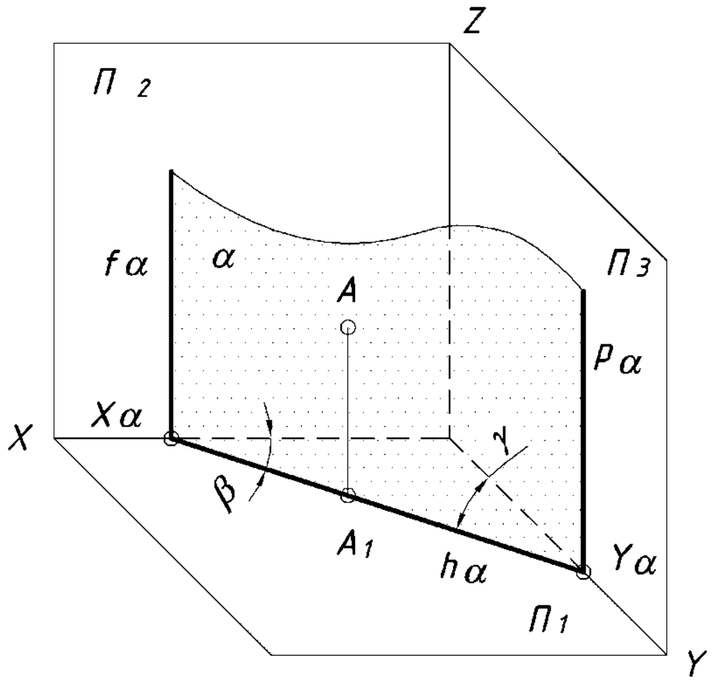


Рис. 6

Якщо горизонтально-проектуючу площину задати геометричною фігурою, а саме Δ**ABC** (рис. 2.8), то горизонтальна проекція цієї площини буде являти собою відрізок прямої лінії, кут β є кутом нахилу площини до $\mathbf{П_2}$, а проекція на фронтальну площину проекцій буде трикутником. Будь-яку точку, що належить цій площині (на рис. 8 точка **D**), визначають так: горизонтальна її проекція лежить на горизонтальному сліді площини. Це стосується також прямої лінії, плоскої кривої чи фігури, які лежать у горизонтально-проектуючій площині.

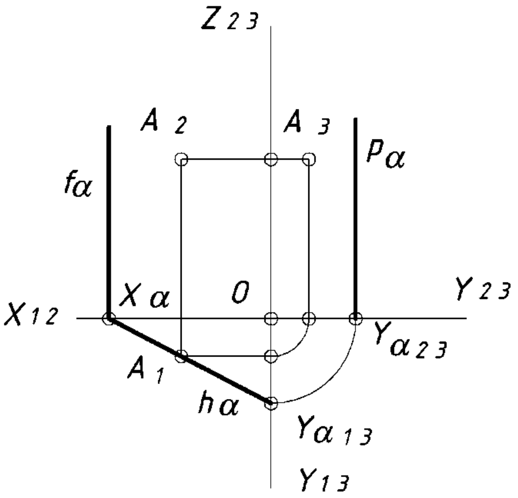


Рис. 2.7

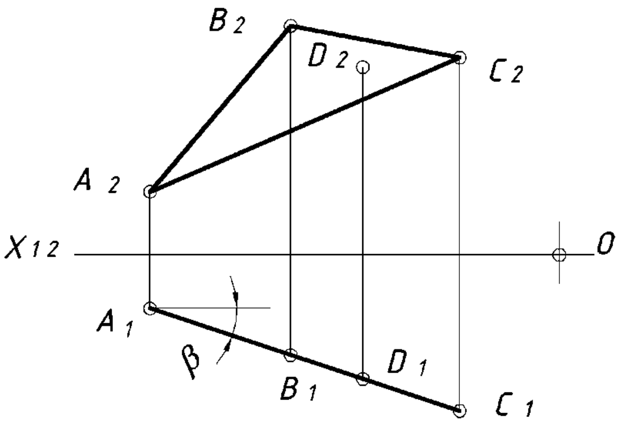


Рис. 2.8

Площину, перпендикулярну до фронтальної площини проекцій, називають *фронтально-проектуючою* (рис. 9). Як бачимо, фронтальний слід площини $\mathbf{f}_\alpha$ похилий до осі **OX** і **OZ**, а горизонтальний $\mathbf{h}_\alpha$ і профільний $\mathbf{p}_\alpha$ – перпендикулярні до тих самих осей. Фронтальний слід з віссю **OX** утворює кут β (кут нахилу площини α до $\mathbf{П}_1$) і кут γ з віссю **OZ** (кут нахилу площини α до $\mathbf{П}_3$).

Точка **A** розташована в площині α і має свою фронтальну проекцію, що збігається з фронтальним слідом.

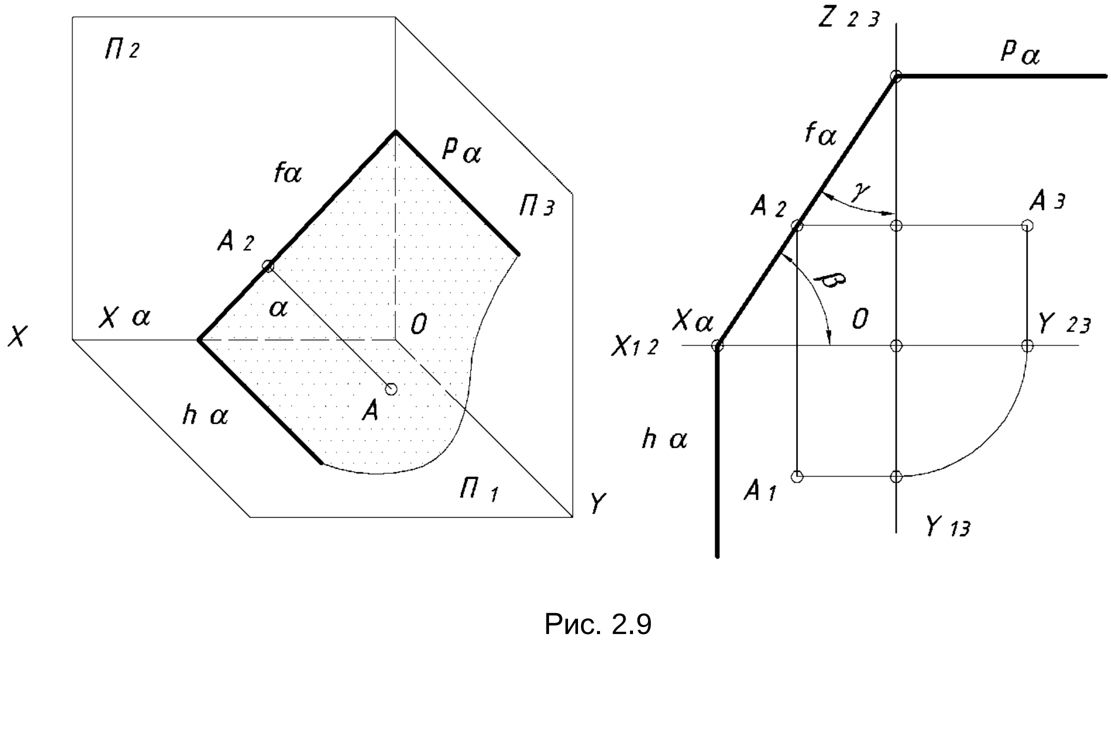


Рис. 2.9

Площину, перпендикулярну до профільної площини проекцій, називають *профільно-проектуючою* (рис. 2.10). Розглянемо профільно-проектуючу площину **α**. Профільний слід **p_α** нахилений під кутом **γ** до осі **OY** (до **$П_1$**), під кутом **β** – до осі **OZ** (до **$П_2$**).

Горизонтальний **h_α** і фронтальний **f_α** сліди, перпендикулярні до тих самих осей або паралельні до осі **OX**. Профільна проекція будь-якої точки або системи точок, що належать заданій площині (в даному випадку точка **A**) буде належати профільному сліду **p_α**.

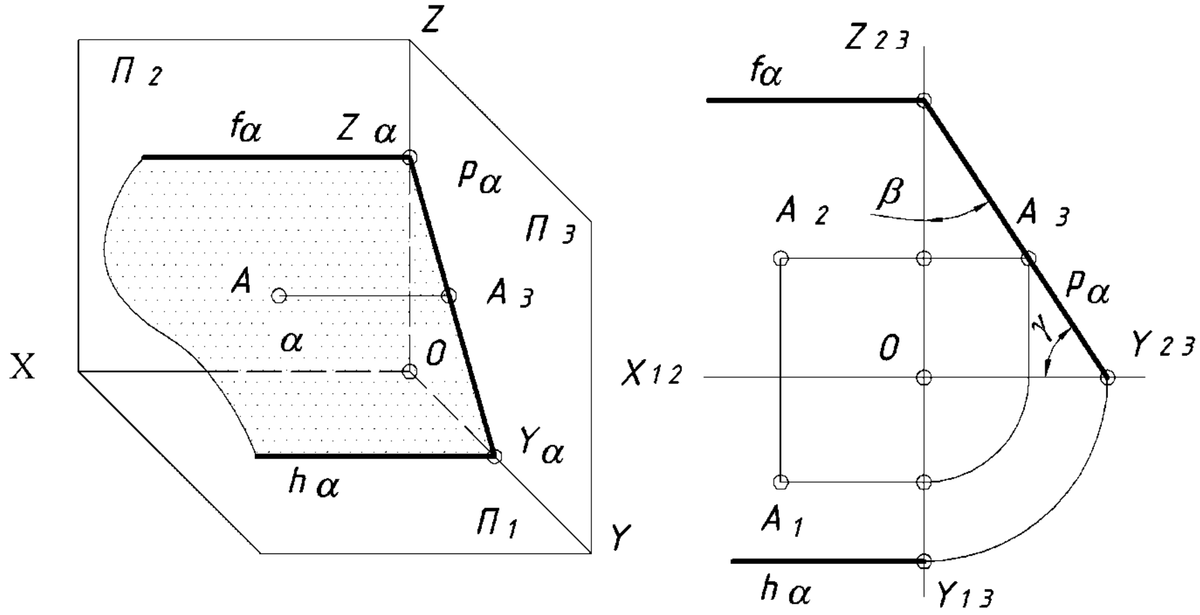


Рис. 2.10

Розглядаючи згадані вище побудови, бачимо, що всі проектуючі площини мають таку властивість: точки, прямі, плоскі криві чи фігури, які лежать у проектуючих площинах, проектуються на слід площини у тій площині проекцій, до якої задана площина є проектуючою.

Розглянемо *площини рівня* або площини, паралельні до однієї з площин проекцій. Вони ж є перпендикулярні до двох інших площин проекцій.

Площину, паралельну до горизонтальної площини проекцій **$П_1$,** називають *горизонтальною* (рис. 2.11). Ця площина перпендикулярна до площин проекцій **$П_2$** і **$П_3$**. Фронтальний і профільний сліди площини на епюрі утворюють пряму, паралельну до осі **OX** і **OY**. На горизонтальну площину проекцій **$П_1$** задана площина проектується в дійсну величину.

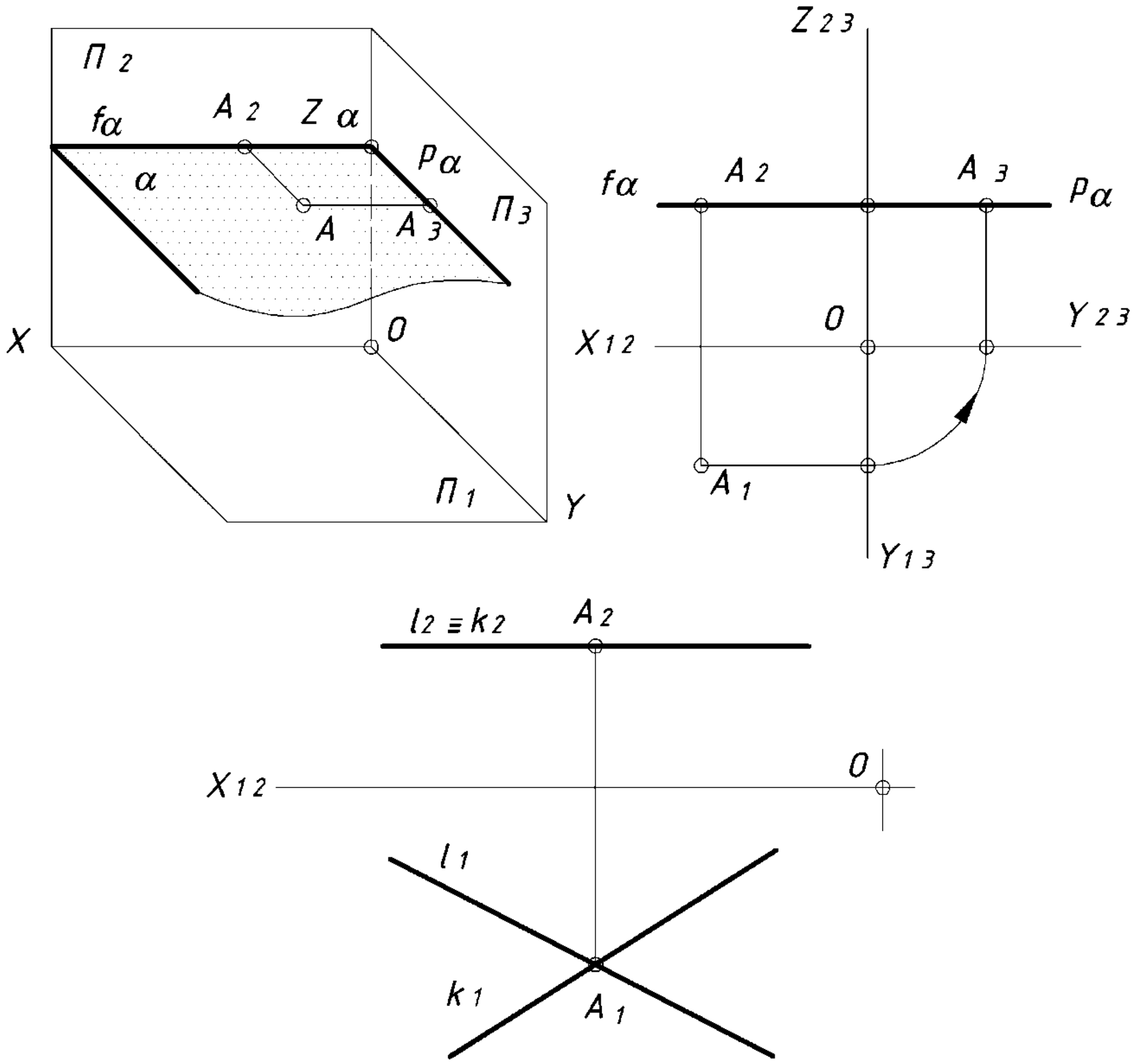


Рис. 2.11

Площину, паралельну до фронтальної площини проекцій **П₂**, називають *фронтальною площиною* (рис. 12).

Така площина є одночасно перпендикулярною до площин проекцій **П₂** і **П₃**. Горизонтальний і профільний сліди даної площини паралельні до **OX** і **OZ**. На фронтальну площину проекцій така площина, задана геометричною фігурою, проектується в дійсну величину.

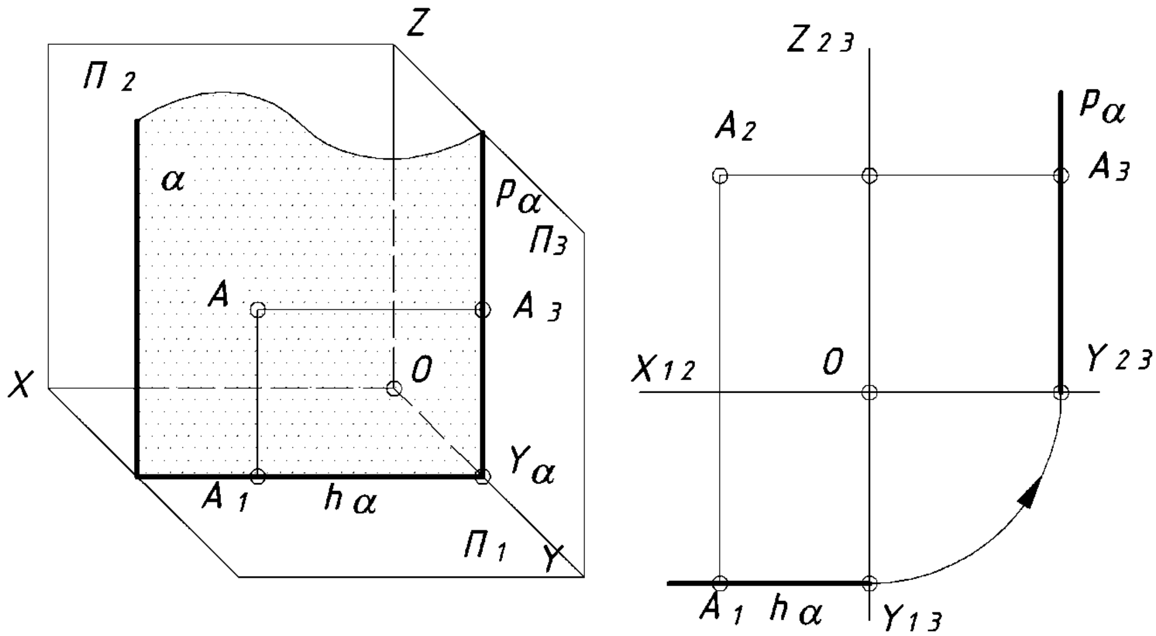


Рис. 2.12

Площину, паралельну до профільної площини проекцій **П** $_3$, називають *профільною* (рис. 2.13). Така площина є одночасно горизонтально- і фронтально-проектуючою, оскільки її горизонтальний і фронтальний сліди перпендикулярні до **OX**. Слід зазначити, що основна властивість проектуючих площин зберігається і для площин рівня. На рис. 2.11 – 2.13 проекції точки **A** лежать на відповідних двох слідах цих площин.

Крім описаних площин, слід звернути увагу ще на осьові та бісекторні площини.

Осьовою називають площину, що проходить через одну з осей проекцій **OX**, **OY**, **OZ**.

Бісекторною називають осьову площину, яка поділяє двогранний кут, утворений площинами проекцій навпіл. На рис. 2.14 зображено бісекторну площину **α**, яка розміщена в першому октанті й проходить через вісь проекцій **OX**.

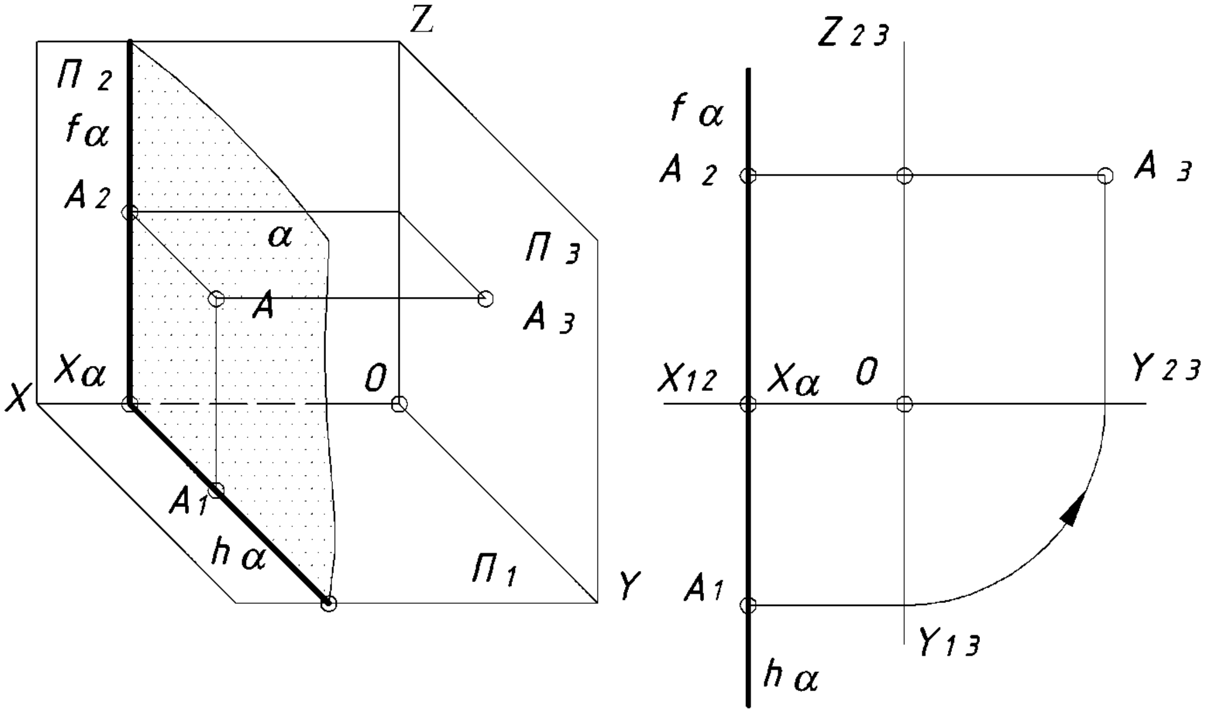


Рис. 2.13

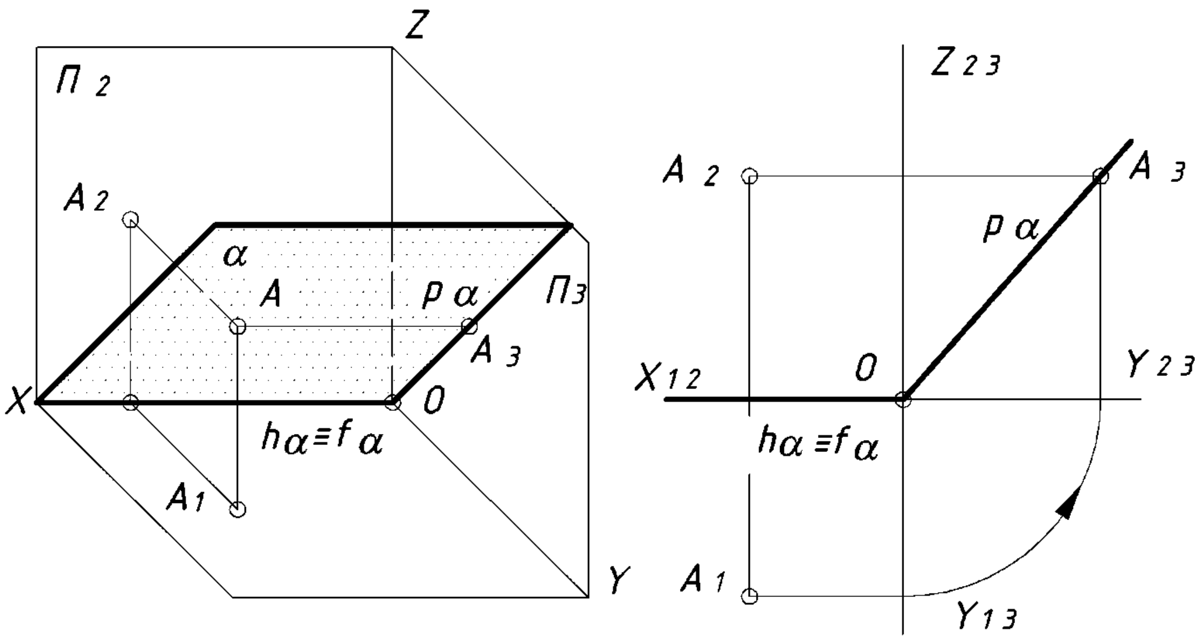


Рис. 2.14

2. Проекції плоских фігур

Плоскими називають такі фігури, в яких усі точки лежать в одній площині. Побудова проекцій плоскої фігури зводиться до побудови проекцій ряду її характерних точок, які утворюють контур фігури. Тому можна сказати, що проекції будь-якого многокутника можна побудувати, знаючи координати його вершин, оскільки побудова їх визначає проекції сторін, отже, й усієї фігури.

Вище описано зображення площин, що займають різні положення відносно площин проекцій.

Плоска фігура проектується в дійсну величину, якщо вона паралельна до будь-якої площини проекцій; у пряму лінію, – якщо перпендикулярна до площини проекцій. На рис. 2.15 побудовано проекції трикутника **ABC** за відомими координатами його вершин **A**, **B**, **C**. Сполучивши однойменні проекції вершин, визначаємо проекції сторін, тобто проекції трикутника. З рисунка випливає, що фронтальна проекція трикутника – пряма лінія, паралельна осі **OX**. Отже, трикутник **ABC** займає особливе положення відносно площин проекцій: паралельне до $\mathbf{П_1}$ і перпендикулярне до $\mathbf{П_2}$, тому на $\mathbf{П_1}$ він проектується в дійсну величину. Аналогічно будують проекції плоских фігур, перпендикулярних лише до однієї площини проекцій, з тією лише різницею, що жодна проекція не відповідає дійсній величині фігури (рис. 2.16).

Чотирикутник **ABCD** перпендикулярний лише до площини проекцій $\mathbf{П_1}$. На цю площину він проектується в пряму лінію, а на площину $\mathbf{П_2}$ – в чотирикутник $\mathbf{A_2B_2C_2D_2}$, який не дорівнює дійсній величині фігури **ABCD**.

Розглянемо побудову зображень плоских фігур, що нахилені до площини проекцій, тобто лежать у площинах загального положення. Зазначимо, що в цьому випадку проекції фігур є фігурами, подібними заданим: проекцією трикутника є трикутник, чотирикутника – чотирикутник, многокутника – многокутник.

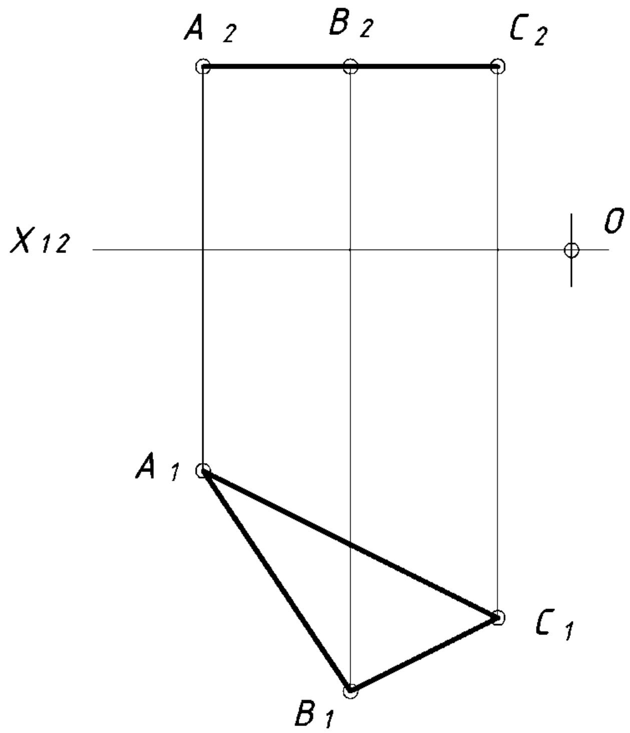


Рис. 2.15

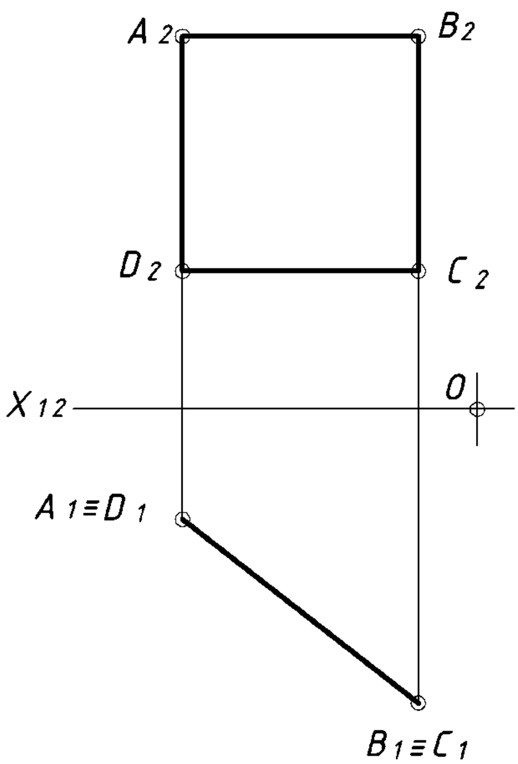


Рис. 2.16

Слід пам’ятати, що при проектуванні квадрата, прямокутника, ромба і паралелограма паралельність протилежних сторін зберігається. При побудові проекцій чотирикутника довільно можна задати лише одну його проекцію і проекцію трьох вершин на другій площині проекцій. Проекцію четвертої вершини, яка відсутня, необхідно побудувати. Шукану проекцію знаходять за допомогою діагоналей чотирикутника (рис. 2.17), використовуючи розглянуті раніше положення про точку і пряму. Подібний спосіб поділу фігури на трикутники використовують при побудові зображень інших многокутників.

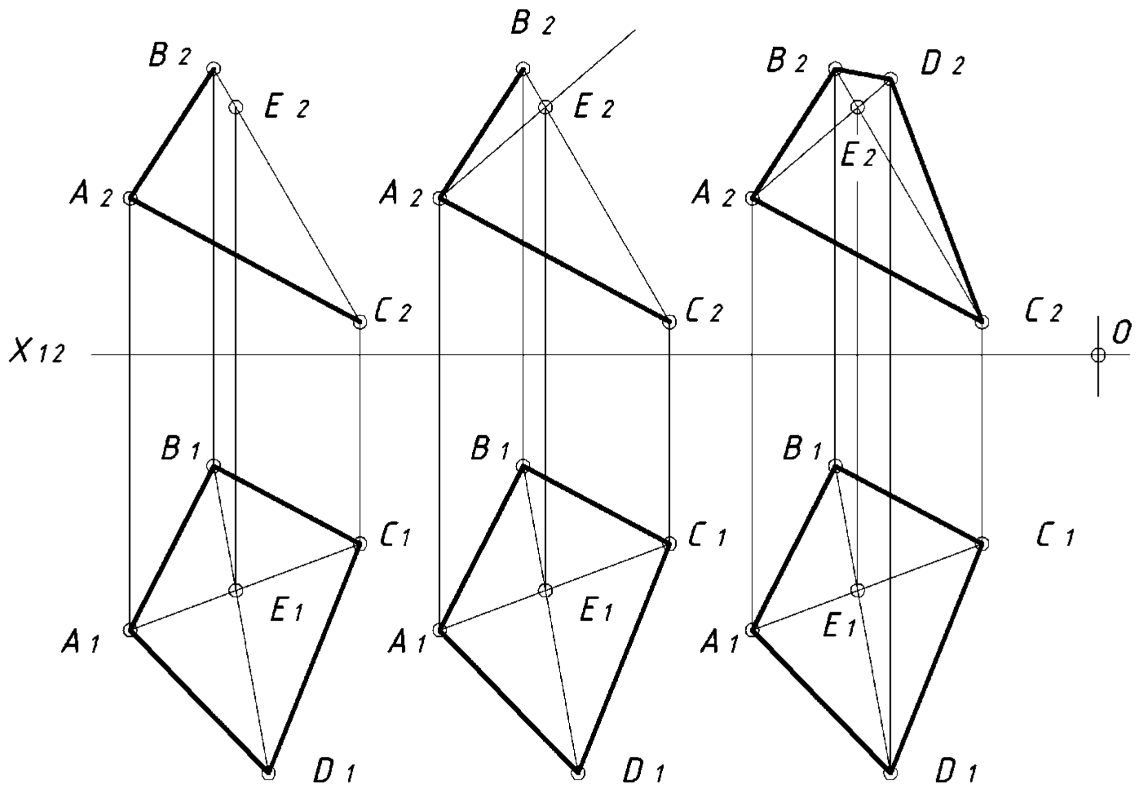


Рис. 2.17

3. Належність прямої і точки площині

Пряма належить площині тоді, коли:

– має, принаймні, дві спільні точки з площиною;

– пряма проходить через точку, яка лежить у площині й паралельна будь-якій прямій, що розташована у цій площині.

Точка належить площині тоді, коли вона лежить на прямій, що належить площині. Спираючись на ці твердження, розглянемо особливості побудови на епюрі прямих і точок, що належать площині.

Нехай у площині α, що задана двома паралельними прямими ***l*** і **k** (рис. 4.18), необхідно провести довільну пряму **t**. Для цього на прямій ***l*** візьмемо точку **1** і на прямій **k** – точку **2**. Відомо, що проекції цих точок $\mathbf{1_1}$, $\mathbf{1_2}$ і $\mathbf{2_1}$, $\mathbf{2_2}$ лежать на відповідних проекціях прямих ***l*** і **k**. Отже, прийняті точки **1** і **2** лежать у заданій площині α, тож пряма **t** ($\mathbf{t_1}$, $\mathbf{t_2}$), проведена через ці точки, – шукана.

На цьому ж рисунку зображена точка **A** (**A_1**, **A_2**), яка належить площині α, оскільки вона побудована на прямій ***l***, що лежить у заданій площині.

Площина α задана слідами в системі **$П_1$**, **$П_2$**. Щоб у такій площині провести довільну пряму ***l***, досить взяти у цій площині дві будь-які точки і сполучити їх прямою лінією. У заданому випадку вибираємо дві довільні точки на слідах площини α, які є слідами **H** і **F** шуканої прямої ***l***. Отже, сполучивши однойменні проекції точок **H** і **F**, отримаємо проекції l_1 і l_2 прямої ***l***, яка належить площині α. Звідси можна зробити висновок, що пряма лежить у площині тоді, коли сліди прямої лежать на однойменних слідах площини.

На рис. 4.19 зображено площину α, задану слідами і точки **A** і **B**. З рисунка можна зробити висновок, що точка **A** належить площині, оскільки вона лежить на прямій, що належить заданій площині, а точка **B** не належить площині, тому що вона не лежить на відповідній прямій (горизонтальна проекція точки **B_1** лежить на прямій, проте фронтальна **B_2** не належить прямій).

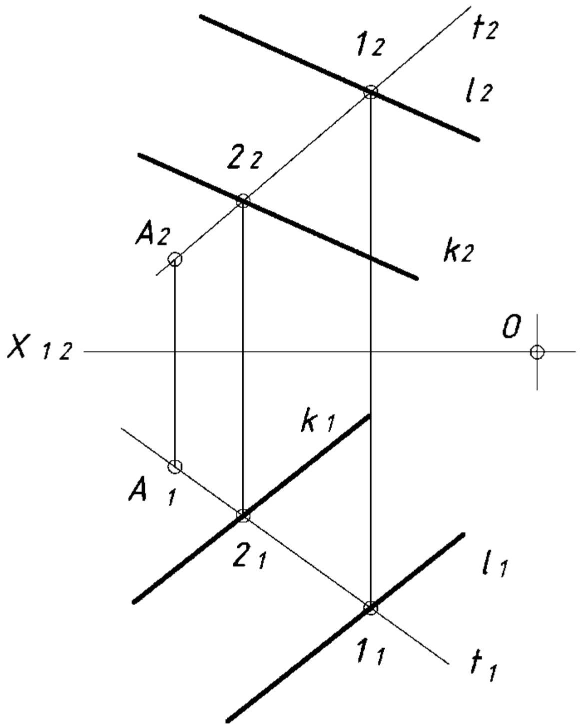


Рис. 2.18

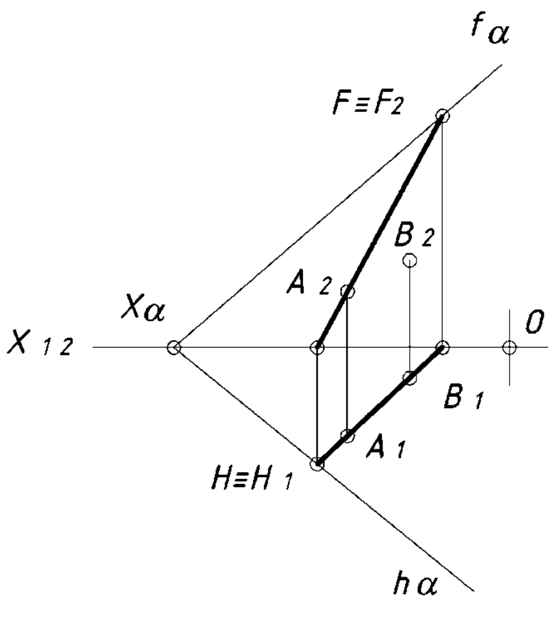


Рис. 2.19

4. Головні прямі площини

Серед безлічі прямих, які можна провести в площині, виділяють паралельні до площини проекцій, тобто які займають особливе положення: *горизонталі, фронталі, профілі*. До особливих також належать і лінії нахилу, які визначають кут нахилу площини до тієї чи іншої площини проекцій.

Ці прямі ще називають головними лініями площини.

Горизонталлю площини називають пряму, яка лежить у цій площині й паралельна до горизонтальної площини проекцій.

Розглянемо побудову горизонталі в площині α, заданій слідами (рис. 20). Візьмемо у цій площині будь-яку точку **A** і проведемо через неї пряму **h** паралельно до горизонтального сліду $\mathbf{h}_\alpha$. Пряма **h** лежатиме в площині і буде паралельною до $\mathbf{П}_1$, оскільки є спільною для площини α і $\mathbf{П}_1$ (слід площини α). Отже, пряма **h** є горизонталлю площини α. Горизонтальна проекція горизонталі $\mathbf{h}_1$ паралельна до горизонтального сліду площини α. Це випливає з того, що пряма **h** паралельна до $\mathbf{h}_\alpha$ за побудовою і до $\mathbf{h}_1$ як горизонтальна пряма до своєї горизонтальної проекції. Фронтальна $\mathbf{h}_2$ і профільна $\mathbf{h}_3$ проекції горизонталі паралельні до осей **OX** і **OY** відповідно, оскільки **h** – паралельна до площини $\mathbf{П}_1$ (рис. 2.21).

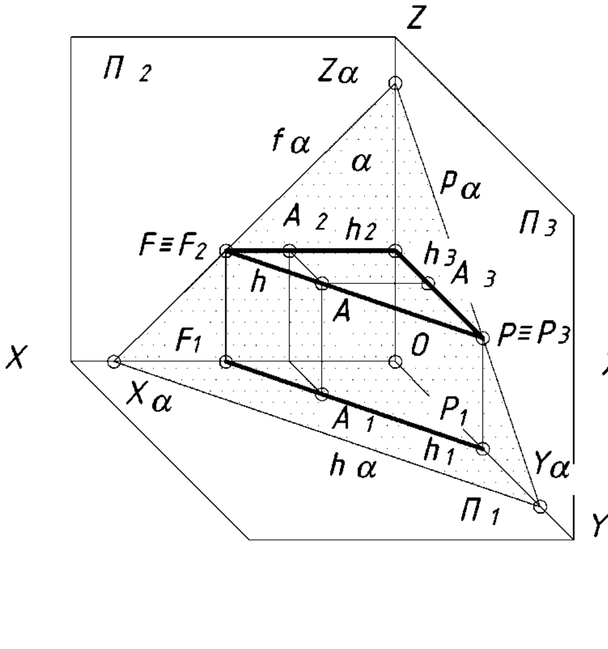


Рис. 2.20

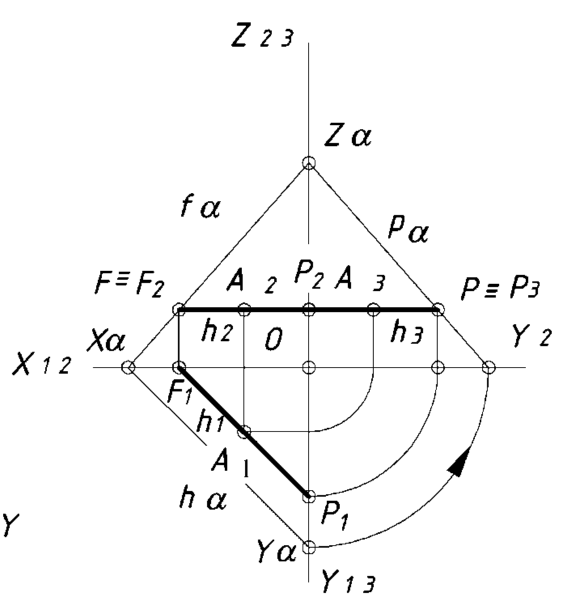


Рис. 2.21

У площинах, заданих на епюрі проекціями точок і прямих, головні лінії будують, виходячи з умови належності прямої площині та з урахуванням властивостей проекцій прямих особливого положення. Проведемо горизонталь у площині, заданій трикутником **ABC** (рис. 2.22). Виходячи з того, що горизонталь – пряма, паралельна до горизонтальної площини проекцій $\mathbf{\Pi_1}$, фронтальну $\mathbf{h_2}$ цієї прямої отримаємо, провівши пряму, паралельну до осі **OX**. Проведемо цю пряму через точку $\mathbf{A_2}$ для спрощення побудови. На перетині сторони $\mathbf{B_2C_2}$ позначимо точку $\mathbf{1_2}$. Для побудови горизонтальної проекції горизонталі знайдемо точку $\mathbf{1_1}$, яка лежить на $\mathbf{B_1C_1}$, провівши лінію зв’язку. З’єднавши точки $\mathbf{A_1}$ і $\mathbf{1_1}$, отримаємо горизонтальну проекцію $\mathbf{h_1}$ горизонталі.

Фронталлю площини називають пряму, що лежить у площині й паралельна до фронтальної площини проекцій. Виходячи із побудови горизонталі, аналогічно будуємо фронталь (рис. 4.23).

На рис. 2.23 зображено фронталь **f** ($\mathbf{f_1}$, $\mathbf{f_2}$) у площині, заданій двома паралельними прямими ***l*** і **k**.

Профіль площини – це пряма, яка лежить у площині й паралельна до профільної площини проекцій.

Побудову профілю площини зображено на рис. 2.24.

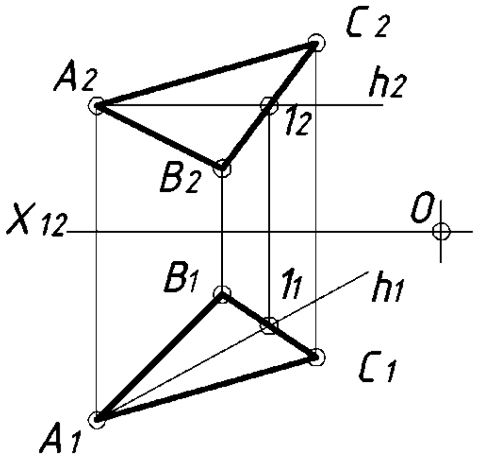


Рис. 2.22

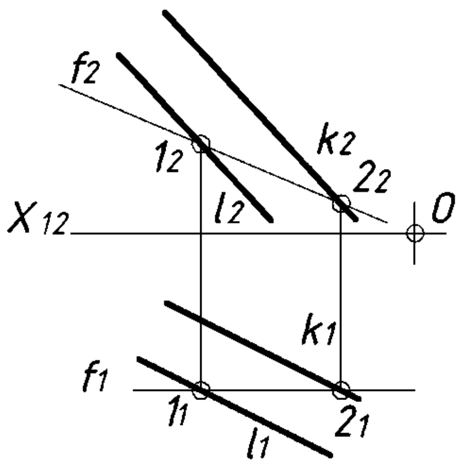


Рис. 2.23

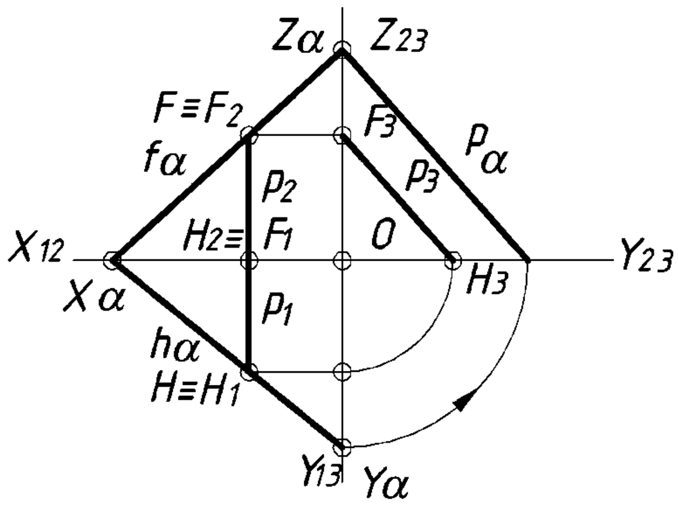


Рис. 2.24

Лінією найбільшого нахилу площини до площини проекцій називають пряму, яка лежить у площині й перпендикулярна до одного зі слідів площини.

Розглянемо лінії найбільшого нахилу площини до площин проекцій. Ці лінії, будучи перпендикулярними до відповідних слідів площин, є одночасно перпендикулярами і до відповідних головних ліній площини. За допомогою лінії найбільшого нахилу визначають кут нахилу площини до будь-якої площини проекцій, тобто найбільший кут, який утворюється з даною площиною проекцій.

Лінію найбільшого нахилу площини до площини $\mathbf{П_1}$ називають лінією схилу площини. На рис. 2.25 лінія схилу **AB** площини α перпендикулярна до $\mathbf{h_\alpha}$. Відповідно до правил проектування прямого кута горизонтальна проекція лінії схилу площини перпендикулярна до горизонтальної проекції горизонталі цієї самої площини або до її горизонтального сліду. Отже, $\mathbf{A_1B_1}$ також перпендикулярна до $\mathbf{h_\alpha}$. Тому кут $\mathbf{ABA_1} = \beta$ є лінійним кутом двогранного, утвореного площинами α і $\mathbf{П_1}$, тобто кутом нахилу площини α до горизонтальної площини проекцій.

На рис. 2.26 зображено лінію нахилу l (l_1, l_2) у площині α, заданій слідами. Кут β нахилу площини α до площини $\mathbf{П_1}$ виражений проекціями відрізка **HF**, а його величина визначена способом прямокутного трикутника. У площині, заданій трикутником (рис. 27), лінію схилу **k** ($\mathbf{k_1}$, $\mathbf{k_2}$) будуємо за допомогою горизонталі **h** ($\mathbf{h_1}$, $\mathbf{h_2}$) з урахуванням сказаного вище. Аналогічно будуємо лінії нахилу до площин проекцій $\mathbf{П_2}$ і $\mathbf{П_3}$.

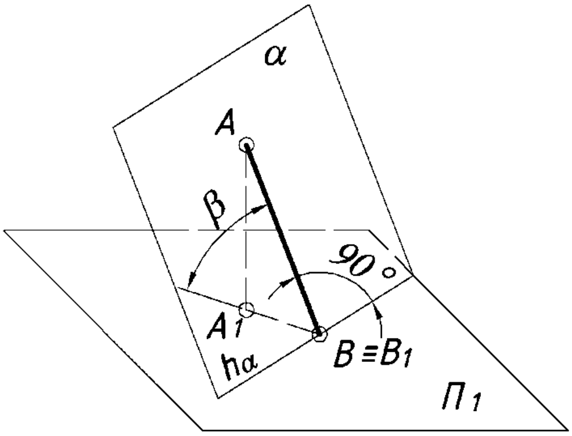


Рис. 2.25

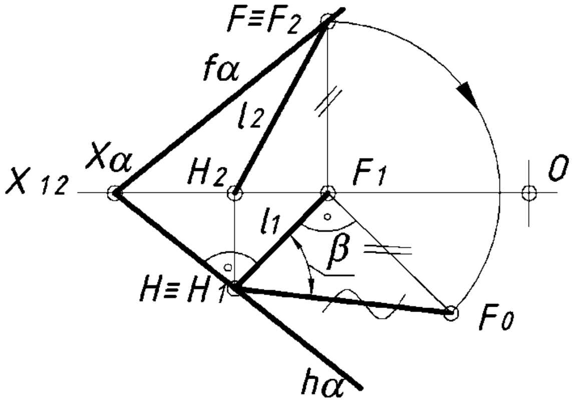


Рис. 2.26

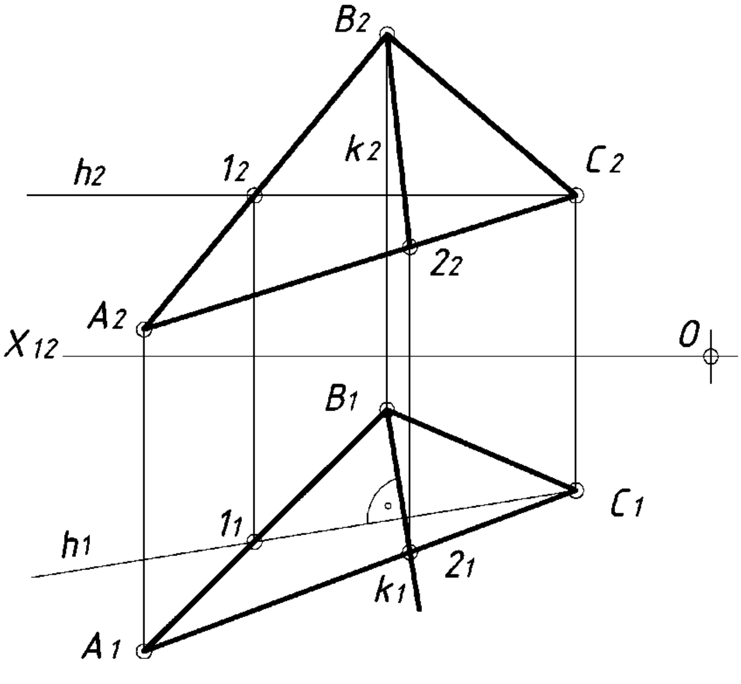


Рис. 2.27

Лініями рівня площини досить часто користуються при вирішенні інженерних задач.

ЗМІСТ