НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНА ЛІТЕРАТУРА

Тернопільський національний технічний
університет імені Івана Пулюя

Кафедра автоматизації
технологічних процесів
і виробництв

Лабораторна робота № 5
з курсу
”Гідрогазодинаміка”

Моделювання стаціонарного руху рідини та газу у середовищі FreeFem++.

Тернопіль 2018

Методичні вказівки до лабораторної роботи №5 "Моделювання стаціонарного руху рідини та газу у середовищі FreeFem++" з курсу "Гідрогазодинаміка". Шкодзінський О.К., Пісьціо В.П., Тернопіль: ТНТУ, 2018 - 10 с.

Для студентів напряму підготовки: 151 "Автоматизація та комп'терно-інтегровані технології"

Автори: Шкодзінський О.К., Пісьціо В.П.

Розглянуто і затверджено на засіданні кафедри автоматизації технологічних процесів і виробництв (протокол № 1 від 29.08.2018 року)

Тема роботи

Моделювання стаціонарного руху рідини та газу у середовищі FreeFem++.

Мета роботи

Ознайомитись із можливостями середовища FreeFem++ та технікою розв'язування задач руху рідин та газів.

Постановка задачі

Опис течій за допомогою рівнянь Нав'є-Стокса і теплопровідності це постановка крайових задач, в яких шуканими функціями були швидкість $u = (u_x, u_y, u_z)$ тиск p; температура T; густина ρ. У разі ізотермічних течій нестисливої рідини з постійними властивостями задача для швидкості і тиску відділяється від теплової задачі, тобто може бути вирішена незалежно. Число невідомих скорочується до чотирьох: компонент швидкості (u_x, u_y, u_z) та тиску p.

Як і у попередній лабораторній роботі знову розглянемо, двомірну задачу і будемо вважати, що швидкість по третій координаті рівна 0, а переміщення u_1 та u_2 не залежать від третьої координати. Тоді задача зводиться до плоскої задачі.

Стан рідини описується у такому випадку рівняннями Нав'є-Стокса в природних змінних.

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_1\frac{\partial u_i}{\partial x_1} + u_2\frac{\partial u_i}{\partial x_2} + u_3\frac{\partial u_i}{\partial x_3} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\mu}{\rho}\Delta u_i + g_i, \tag{1}$$

де ρ - густина рідини, g - прискорення масових сил, $\eta = \frac{\mu}{\rho}$ - кінематична в'язкість, μ - динамічна в'язкість. У випадку стаціонарного руху рідини похідна вихору за часом стає рівною 0 і тоді при відсутності масових сил рівняння може бути записано у вигляді:

$$u_1\frac{\partial u_i}{\partial x_1} + u_2\frac{\partial u_i}{\partial x_2} + u_3\frac{\partial u_i}{\partial x_3} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\mu}{\rho}\Delta u_i$$

Для замикання системи рівнянь використовують рівняння нерозривності:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \nabla\cdot(\rho u) = 0, \tag{2}$$

де $\nabla\cdot(\rho u) = \frac{\partial}{\partial x_1}(\rho u_1) + \frac{\partial}{\partial x_2}(\rho u_2) + \frac{\partial}{\partial x_3}(\rho u_3)$.

У випадку сталої густини рівняння може бути записано у формі:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}u_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}u_2 + \frac{\partial}{\partial x_3}u_3 = 0. \tag{3}$$

У випадку плоскої задачі переміщення частинок відбуваються лише за координатами x_1 та x_2 і не залежить від координати x_3, а тиск p не залежить від координати x_3. у такому випадку рівняння Нав'є-Стокса можуть бути записані у формі:

$$u_1\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2\frac{\partial u_1}{\partial x_2} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_1} + \eta\Delta u_1 \tag{4}$$

$$u_1\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + u_2\frac{\partial u_2}{\partial x_2} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_2} + \eta\Delta u_2 \tag{5}$$

а рівняння нерозривності у формі

$$\frac{\partial}{\partial x_1}u_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}u_2 = 0. \tag{6}$$

Дана задача лишилась нелінійною, але тепер змінні залежать лише від двох координат.

Слабке формулювання

Знайдемо слабке формулювання задачі. Введемо пробні переміщення v_1 v_2 та пробний тиск q, помножимо рівняння (4)-(5) на v_1, v_2, а рівняння нерозривності на q і проінтегруємо по всій області задачі S. Так як пробні переміщення і пробний тиск можуть змінюватись незалежно один від одного і можуть приймати любі значення у середині області S то рівняння (4) - (6) еквівалентні задачі. Знайти такі

u_1, u_2 та p, що інтеграл тотожньо рівний нулю

$$\int_S v_1\left(u_1\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+u_2\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_2}\right)-\eta v_1\Delta u_1+v_2\left(u_1\frac{\partial u_2}{\partial x_1}+u_2\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_2}\right)-\eta v_2\Delta u_2+$$

$$+q\left(\frac{\partial}{\partial x_1}u_1+\frac{\partial}{\partial x_2}u_2\right)ds=0 \qquad (7)$$

для будь-яких v_1, v_2 та q, що визначені всередині області S. Використовуючи формулу Гріна інтеграл можна записати у вигляді:

$$\int_S v_1\left(u_1\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+u_2\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)+v_2\left(u_1\frac{\partial u_2}{\partial x_1}+u_2\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)ds+\int_S v_1\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_1}+v_2\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_2}ds \quad .$$

$$+\int_S q\left(\frac{\partial}{\partial x_1}u_1+\frac{\partial}{\partial x_2}u_2\right)ds+\eta\int_S \frac{\partial v_1}{\partial x_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial v_1}{\partial x_2}\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial v_2}{\partial x_1}\frac{\partial u_2}{\partial x_1}+\frac{\partial v_2}{\partial x_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_2}ds$$

$$-\int_\Gamma v_1\frac{\partial u_1}{\partial n}+v_2\frac{\partial u_2}{\partial n}dl=0 \qquad (8)$$

де Г - границя області, dl - елемент границі. Задаючи, додатково, що v_1 та v_2 рівні 0 на границі Γ_u, де задані u_1 u_2 маємо:

$$\int_S v_1\left(u_1\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+u_2\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)+v_2\left(u_1\frac{\partial u_2}{\partial x_1}+u_2\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)ds+\frac{1}{\rho}\int_S v_1\frac{\partial p}{\partial x_1}+v_2\frac{\partial p}{\partial x_2}ds \quad .$$

$$+\eta\int_S \frac{\partial v_1}{\partial x_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial v_1}{\partial x_2}\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial v_2}{\partial x_1}\frac{\partial u_2}{\partial x_1}+\frac{\partial v_2}{\partial x_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_2}ds+\int_S q\left(\frac{\partial}{\partial x_1}u_1+\frac{\partial}{\partial x_2}u_2\right)ds$$

$$-\int_{\Gamma/\Gamma_u} v_1\frac{\partial u_1}{\partial n}+v_2\frac{\partial u_2}{\partial n}dl=0 \qquad (9)$$

Для скорочення обсягу необхідних перетворень введемо наступні позначення:

$$K(v,u,w)=\int_S v_1\left(u_1\frac{\partial w_1}{\partial x_1}+u_2\frac{\partial w_1}{\partial x_2}\right)+v_2\left(u_1\frac{\partial w_2}{\partial x_1}+u_2\frac{\partial w_2}{\partial x_2}\right)ds$$

$$M(v,p)=\frac{1}{\rho}\int_S v_1\frac{\partial p}{\partial x_1}+v_2\frac{\partial p}{\partial x_2}ds$$

$$L(v,u)=\eta\int_S \frac{\partial v_1}{\partial x_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial v_1}{\partial x_2}\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial v_2}{\partial x_1}\frac{\partial u_2}{\partial x_1}+\frac{\partial v_2}{\partial x_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_2}d$$

$$R(q,u)=\int_S q\left(\frac{\partial}{\partial x_1}u_1+\frac{\partial}{\partial x_2}u_2\right)ds$$

$$G(v,u)=-\int_{\Gamma/\Gamma_u} v_1\frac{\partial u_1}{\partial n}+v_2\frac{\partial u_2}{\partial n}dl$$

Легко довести, що оператори K(), M(), L(), R(), G() є лінійними відносно своїх других і наступних аргументів:

$K(v, u + \delta u, w + \delta w) = K(v, u, w) + K(v, \delta u, w) + K(v, u, \delta w) + K(v, \delta u, \delta w),$

$M(v, p + \delta p) = M(v, p) + M(v, \delta p),$

$L(v, u + \delta u) = L(v, u) + L(v, \delta u),$

$R(q, u + \delta u) = R(q, u) + R(q, \delta u),$

$G(v, u + \delta u) = G(v, u) + G(v, \delta u),$ (10)

У таких позначеннях основне співвідношення запишеться у формі:

$K(v, u, u) + M(v, p) + L(v, u) + R(q, u) + G(v, u) = 0$ (11)

Розв'язок задачі

Для побудови початкового наближення $u^{<0>}$ $p^{<0>}$ розв'язку припустимо, що у (11) член:

$$K(v, u^{<0>}, u^{<0>}) = \int_S v_1\left(u_1^{<0>}\frac{\partial u_1^{<0>}}{\partial x_1} + u_2^{<0>}\frac{\partial u_1^{<0>}}{\partial x_2}\right) + v_2\left(u_1^{<0>}\frac{\partial u_2^{<0>}}{\partial x_1} + u_2^{<0>}\frac{\partial u_2^{<0>}}{\partial x_2}\right)ds \approx 0$$

наближено рівний 0, тоді маємо лінійне функціональне рівняння:

$$\frac{1}{\rho}\int_S v_1\frac{\partial p^{<0>}}{\partial x_1} + v_2\frac{\partial p^{<0>}}{\partial x_2}ds + \int_S q\left(\frac{\partial}{\partial x_1}u_1^{<0>} + \frac{\partial}{\partial x_2}u_2^{<0>}\right)ds - \int_{\Gamma/\Gamma_u} v_1\frac{\partial u_1^{<0>}}{\partial n} + v_2\frac{\partial u_2^{<0>}}{\partial n}dl$$

$$+\eta\int_S \frac{\partial v_1}{\partial x_1}\frac{\partial u_1^{<0>}}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\frac{\partial u_1^{<0>}}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1}\frac{\partial u_2^{<0>}}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2}\frac{\partial u_2^{<0>}}{\partial x_2}ds = 0 \quad (12)$$

для будь-якого v_i та q що не рівні 0 на границі Γ/Γ_u та в області S. Рівняння можна записати у скороченій формі

$M(v, p^{<0>}) + L(v, u^{<0>}) + R(q, u^{<0>}) + G(v, u^{<0>}) = 0$ (13)

Для знаходження подальших наближень розв'язку використаємо такі міркування. Припустимо, що якимось методом знайдено наближення $u_i^{<n>}$, $p^{<n>}$, розв'язку рівняння, що задовольняє рівнянням із деякою похибкою. Задача зводиться до пошуку нового наближення $u_i^{<n+1>}$, $p^{<n+1>}$, що зменшує відповідну похибку. Представимо нове наближення через "старе" у формі:

$u_i^{<n+1>} = u_i^{<n>} + \delta u_i^{<n>}$ $\quad p^{<n+1>} = p^{<n>} + \delta p^{<n>}$ (14)

Граничні умови на частинах границі, де задані компоненти швидкості чи тиску не мають змінюватись при переході до нового наближення, тому $\delta u_i^{<n>}$ чи $\delta p_i^{<n>}$ мають бути рівні 0 на відповідних границях. Підставляючи у рівняння (10) відповідні представлення "нового наближення" отримаємо рівняння для визначення $\delta u_i^{<n>}$ та δp.

$K(v, u_i^{<n>} + \delta u_i^{<n>}, u_i^{<n>} + \delta u_i^{<n>}) + M(v, p_i^{<n>} + \delta p_i^{<n>}) + L(v, u_i^{<n>} + \delta u_i^{<n>}) + R(q, u_i^{<n>} + \delta u_i^{<n>}) +$
$+G(v, u_i^{<n>} + \delta u_i^{<n>}) = 0$ (15)

Використвуючі співвідношення лінійності маємо:

$K(v, u_i^{<n>}, u_i^{<n>}) + K(v, \delta u_i^{<n>}, u_i^{<n>}) + K(v, u_i^{<n>}, \delta u_i^{<n>}) + K(v, \delta u_i^{<n>}, \delta u_i^{<n>}) + M(v, p_i^{<n>}) + M(v, \delta p_i^{<n>}) +$
$+ L(v, u_i^{<n>}) + L(v, \delta u_i^{<n>}) + R(q, u_i^{<n>}) + R(q, \delta u_i^{<n>}) + G(v, u_i^{<n>}) + G(v, \delta u_i^{<n>}) = 0$ (16)

Так як наближення $u_i^{<n+1>}$, $p^{<n+1>}$ "мало" відрізняється від "точного" розв'язку логічно припустити, що величина $K(v, \delta u_i^{<n>}, \delta u_i^{<n>})$ є величиною більшого порядку малості ніж решта величин і нею можна знехтувати. Тоді маємо лінійне співвідношення відносно $\delta u_i^{<n>}$, $\delta p^{<n>}$:

$K(v, u_i^{<n>}, u_i^{<n>}) + K(v, \delta u_i^{<n>}, u_i^{<n>}) + K(v, u_i^{<n>}, \delta u_i^{<n>}) + M(v, p_i^{<n>}) + M(v, \delta p_i^{<n>}) + + L(v, u_i^{<n>}) +$
$+ L(v, \delta u_i^{<n>}) + R(q, u_i^{<n>}) + R(q, \delta u_i^{<n>}) + G(v, u_i^{<n>}) + G(v, \delta u_i^{<n>}) = 0$ (17)

котре легко вирішується стандартними методами.

Отже процес розв'язку може бути таким:

1. Встановити $n = 0$
2. Отримати нульове наближення $u_i^{<0>}$ та $p^{<0>}$ за допомогою співвідношення (13).
3. За допомогою співвідношення (17) лінійного відносно $\delta u_i^{<n>}$ та $\delta p^{<n>}$, отримати наближені значення $\delta u_i^{<n>}$ та $\delta p^{<n>}$
4. Отримати нові значення $u_i^{<n+1>} = u_i^{<n>} + \varepsilon\cdot\delta u_i^{<n>}$ та $p^{<n+1>} = p^{<n>} + \varepsilon\cdot\delta p^{<n>}$, де ε - деякий коефіцієнт ($\varepsilon = 0..1$).
5. Якщо абсолютне значення $\delta u_i^{<n>}$ та $\delta p^{<n>}$ більші за задану похибку збільшити n на 1 та перейти

на п.3 , противному випадку перейти на наступний пункт.

6. Вивести результати розрахунків.

Моделювання у FreeFem++

Припустимо, що область моделювання має границю G1, де заданий вектор переміщень, непроникну для потоку стінку G2 та границю G2 де задано складову переміщень u_2 та тиск p. Також нехай область задачі позначається символом Th.

Для зручності подальших викладок запишемо введені вище оператори у вигляді макросів. Макрос - спеціальний вид підстановки, котрий використовується у FreeFem++ для полегшення написання програм. Найпростіший формат опису макросу наведений нижче.

```
macro  BuildMat(u1,u2)(....)  //
```

Опис макросу починається ключовим словом macro за котрим слідує назва макросу. далі у перших дужках описуються формальні аргументи макросу, у других дужка записується код, що має бути підставлений у вираз замість назви макросу. Макрос закінчується кодом //.

На відміну від функцій, макроси не можна адресувати і проводити інші маніпуляції із його назвою. Коли у коді програми зустрінеться назва макросу інтерпретатор підставляє його опис замість, замінюючи формальні аргументи на фактичні.

Отже макрос, що описує оператори можуть бути записані у вигляді:

// $K(v,u,w) = \int_S v_1\left(u_1\frac{\partial w_1}{\partial x_1} + u_2\frac{\partial w_1}{\partial x_2}\right) + v_2\left(u_1\frac{\partial w_2}{\partial x_1} + u_2\frac{\partial w_2}{\partial x_2}\right)ds$

```
macro opK(v1,v2,u1,u2,w1,w2)(
  int2d(Th)(v1*(u1*dx(w1)+u2*dy(w1))
           +v2*(u1*dx(w2)+u2*dy(w2))))//
```

// $M(v,p) = \int_S v_1\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_1} + v_2\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_2}ds$

```
macro opM(v1,v2,p)(
  int2d(Th)((v1*dx(p)+v2*dy(p))/rho))//
```

// $L(v,u) = \eta\int_S \frac{\partial v_1}{\partial x_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1}\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_2}d$

```
macro opL(v1,v2,u1,u2)(
  int2d(Th)(eta*(dx(v1)*dx(u1)+dy(v1)*dy(u1)
           +dx(v2)*dx(u2)+dy(v2)*dy(u2))))//
```

// $R(q,u) = \int_S q\left(\frac{\partial}{\partial x_1}u_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}u_2\right)ds$

```
macro opR(q,u1,u2)(
  int2d(Th)(q*dx(u1)+q*dy(u2)))//
```

У такому випадку задача для початкового наближення може бути записана у формі:

```
solve Start([u1,u2,p],[v1,v2,q])
= opM(v1,v2,p)    // M(v, p<0>)
+ opL(v1,v2,u1,u2)// L(v, u<0>)
+ opR(q,u1,u2)    // R(q, u<0>)
+ on (G1, u1=(1-(y/h)^2),u2=0)//Задані граничні умови
+ on (G2, u1=0,u2=0)
+ on (G3, p=0, u2=0);
```

Задача для приростів переміщень і тисків може бути записана у вигляді:

```
solve Iter([du1,du2,dp],[v1,v2,q])
= opK(v1,v2, u1, u2, u1, u2)   //K(v, ui<n>, ui<n>)
```

```
+ opK(v1,v2,du1,du2, u1, u2)   //K(v, δui<n>, ui<n>)
+ opK(v1,v2, u1, u2,du1,du2)   //K(v, δui<n>, ui<n>)
+ opM(v1,v2,p)                 //M(v, pi<n> )
+ opM(v1,v2,dp)                //M(v, δpi<n> )
 +opL(v1,v2,u1,u2)             //L(v, ui<n> )
+ opL(v1,v2,du1,du2)           //L(v, δui<n>)
+ opR(q,u1,u2)                 //R(q, ui<n> )
+ opR(q,du1,du2)               //R(q, δui<n>)
+ on (G1, du1=0,du2=0)         //Нульові граничні умови
+ on (G2, du1=0,du2=0)
+ on (G3, dp=0 ,du2=0);
```

Так як задача суттєво нелінійна для покращення сходження задачі при початкових кроках варто прийняти, що нові значення переміщень і

$u_i^{<n+1>} = u_i^{<n>} + \varepsilon\, \delta u_i^{<n>}$ $\quad p^{<n+1>} = p^{<n>} + \varepsilon\, \delta p^{<n>}$

де ε стала, що знаходиться у межах 0,1..0,5. Великі значення сталої ε призводять до неможливості знайти стаціонарний фізично обґрунтований розв'язок, малі - сповільнюють сходження схеми.

Програма розрахунку

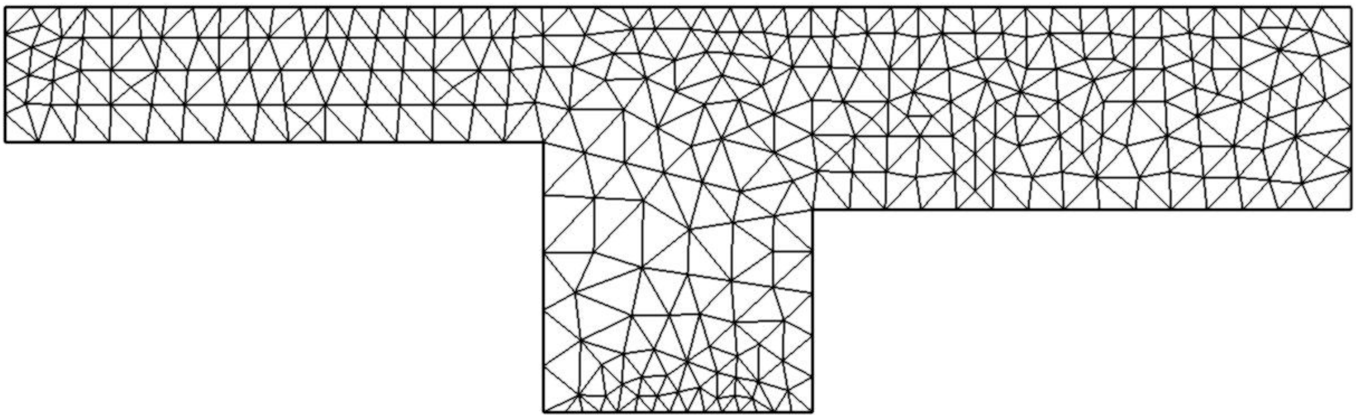

Рис. 1. Розрахункова область

Програма розрахунку течії у плоскому каналі, що зображений на рисунку наведена нижче.

```
int   n=5;
int G1 = 1; // 1 - вхід в канал
int G2 = 2; // 2 - непроникна стінка
int G3 = 3; // 3 - вихід з каналу
real  h = 0.1;
real X0 = -1;
real X1 = -0.2;
real Y1 = -5*h;
real X2 = 0.2;
real X3 = 1;
real rho=900;             //Густина масла 900 кг/м^3
real eta=46*0.001*0.001;  //Масло класу в'язкості 46
real umax=0.1;            //максимальна швидкість на вході в канал
border Left(t=-1,1){x = -1; y = t*h;             label=G1;}
border Top(t=-1,1){x = t; y = h ;                label=G2;}
border But1(t=0,1){x = X0*(1-t) + t*X1; y = -h;  label=G2;}
border But2(t=0,1){x = X1; y = -h*(1-t)+t*(Y1);  label=G2;}
border But3(t=0,1){x = X1*(1-t)+t*X2;   y = Y1;  label=G2;}
border But4(t=0,1){x = X2;  y = Y1*(1-t)-2*h*t;  label=G2;}
border But5(t=0,1){x = X2*(1-t)+t*X3; y = -2*h;  label=G2;}
border Right(t=-2,1){x = 1; y = t*h; label=G3;}
```

```
mesh Th=buildmesh(
   Left(n)+But1(3*n)+But2(n)+But3(3*n)+But4(n)+But5(3*n)+Right(n)+
   Top(-10*n));
plot(Th,wait=1);
fespace  Uh(Th,P2);
fespace  Ph(Th,P2);
Uh  u1,u2,v1,v2;
Ph  p,q;
Uh  du1,du2;
Ph  dp;
macro opK(v1,v2,u1,u2,w1,w2)(
  int2d(Th)(v1*(u1*dx(w1)+u2*dy(w1))
           +v2*(u1*dx(w2)+u2*dy(w2))))//
macro opM(v1,v2,p)(
  int2d(Th)((v1*dx(p)+v2*dy(p))/rho))//
macro opL(v1,v2,u1,u2)(
  int2d(Th)(eta*(dx(v1)*dx(u1)+dy(v1)*dy(u1)
           +dx(v2)*dx(u2)+dy(v2)*dy(u2))))//
macro opR(q,u1,u2)(
  int2d(Th)(q*dx(u1)+q*dy(u2)))//
solve Start([u1,u2,p],[v1,v2,q])
= opM(v1,v2,p)
+ opL(v1,v2,u1,u2)
+ opR(q,u1,u2)
+ on (G1, u1=umax*(1-(y/h)^2),u2=0)
+ on (G2, u1=0,u2=0)
+ on (G3, p=0, u2=0);
plot(p,  wait=1,coef=0.1, value=1);
plot(u1, wait=1,coef=0.1, value=1);
plot(u2, wait=1,coef=0.1, value=1);
int i=0 ;
real e = 0.2;
for(i;i<100;i++)
{
  solve Iter([du1,du2,dp],[v1,v2,q])
  = opK(v1,v2, u1, u2, u1, u2)   //K(v, u<n>, u<n>)
  + opK(v1,v2,du1,du2, u1, u2)   //K(v, du<n>,u<n>)
  + opK(v1,v2, u1, u2,du1,du2)   //K(v, u<n>,du<n>)
  + opM(v1,v2,p)                 //M(v, p<n> )
  + opM(v1,v2,dp)                //M(v, dp<n> )
  + opL(v1,v2,u1,u2)             //L(v, u<n> )
  + opL(v1,v2,du1,du2)           //L(v, du<n>)
  + opR(q,u1,u2)                 //R(q, d<n> )
  + opR(q,du1,du2)               //R(q, du<n>)
  + on (G1, du1=0,du2=0)         //Нульові граничні умови
  + on (G2, du1=0,du2=0)
  + on (G3, dp=0 ,du2=0);
  u1 = u1 + e*du1;
  u2 = u2 + e*du2;
  p  = p  + e*dp;
  plot([u1,u2], wait=0,coef=0.1, value=1);
}
plot(u1, wait=0,coef=0.1, value=1);
```

```
plot(u2, wait=0,coef=0.1, value=1);
```

Поле швидкостей частинок у процесі розрахунку показано на наступному рисунку.

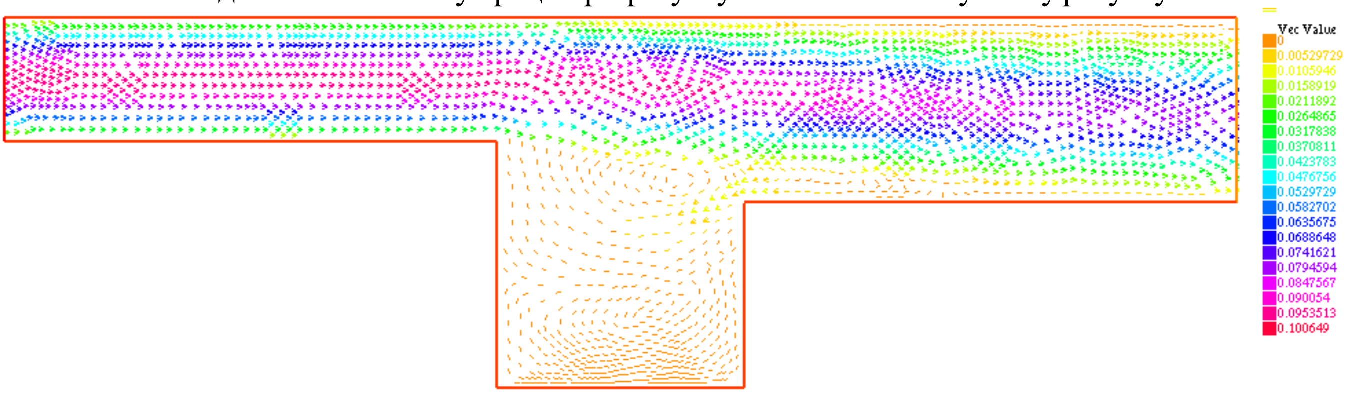

Рис. 2. Поле векторів швидкостей

Завдання

1. Запустити запропоновану програму і добитись її роботоздатності.
2. Розібратись із запропонованим кодом, і ознайомитись із способом розв'язку рівняння .
3. Добавити оператори для побудови поля переміщення
4. Визначити для результату розходження отриманих даних із теоретичною течією Пуазеля.
5. Спробуйте зменшити в'язкість рідини чи збільшить швидкість в 2 та 10 разів. Поясніть отримані результати.

Контрольні питання

1. Наведіть обмеження, що були використані для виведення рівнянь, котрі описують модельну задачу.
2. Наведіть обмеження Які основні можливості мови FreeFem++
4. У чому полягає суть метода скінчених елементів?
5. Як описати задачу обтікання профілю на мові FreeFem++?
6. Які граничні умови можна поставити для задачі обтікання профілю?

Література

1. Цуренко Ю.И. Гидромеханика. Техническая физика. Учебное пособие для студентов. Северодвинск, СЕВМАШВТУЗ, 2007 – 87 с., ил. [текст режим доступу https://studfiles.net/download.php?id=5583193&code=87cf67185a49dff031c64693a9ec9dfc]
2. Использование пакета конечных элементов FreeFem++ для задач гидродинамики, электрофореза и биологии/Жуков М. Ю., Ширяева Е. В.. — Ростов н/Д: Изд-во ЮФУ, 2008. - 256 с.
3. Hecht F., Pironneau O., Le Hyaric A., Ohtsuka K. FreeFem++. Version 3.17-1. http://www.freefem.org/ff++.
4. Пакет конечных элементов FreeFem++ (Учебное пособие) Жуков М. Ю., Ширяева Е. В. — Ростов н/Д: Изд-во ЮФУ, 2010. - 78.
5. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация. М.: Мир, 1986.

Зміст