УДК 519.62

Й. Лучко[1], докт. техн. наук; Р. Пелех[2]

[1]Львівський державний аграрний університет
[2]Проектно-конструкторське технологічне бюро АСУ залізничного транспорту

ДВОСТОРОННІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ВОЛЬТЕРРИ ДРУГОГО РОДУ

Виведено двосторонні розрахункові формули першого та другого порядку точності розв'язання нелінійних інтегральних рівнянь Вольтерри другого роду. Ці формули дозволяють у кожній вузловій точці отримувати не тільки верхні та нижні наближення до точного розв'язку, але й давати інформацію про величину головного члена похибки баз додаткових звертань до правої частини інтегрального рівняння Вольтерри.

J. Luchko, R. Pelekh

TWO-SIDE METHODS FOR THE SOLUTION NONLINEAR SECOND KIND VOLTERRA INTEGRAL EQUATIONS

The two-side formulas of the first and second order of accuracy for the solution of nonlinear second kind Volterra integral equations are constructed. The formulas give an opportunity to receive upper and lower approximation at each point to the exact solution and define the value of the main error without referring to the right part of Volterra integral equation.

Актуальність проблеми. У даний час для дослідження складних технологічних процесів широко використовується обчислювальний експеримент із застосуванням сучасних ПЕОМ. Він дозволяє у багатьох випадках з успіхом замінити реальний процес і дає можливість отримувати як якісну, так і кількісну картину модельованого процесу.

Задачі будівельної механіки, електротехніки, автоматичного управління, багатовимірної оптимізації приводять до необхідності розв'язування нелінійних інтегральних рівнянь Вольтерри.

Оскільки точні розв'язки досліджуваних математичних моделей вдається отримати в дуже окремих випадках, то необхідно використовувати наближені методи, які були б оптимальними по точності, економічними, займали мінімальний об'єм пам'яті ПЕОМ і найкраще відображали основні властивості початкової задачі.

Останнім часом в обчислювальній математиці знаходять застосування ланцюгові (неперервні) дроби, у зв'язку з їх важливим теоретичним і прикладним значенням. За певних умов, використання апарату ланцюгових дробів дає високу швидкість збіжності алгоритмів, двосторонні і монотонні наближення, сприяє обмеженому накопиченню похибок заокруглення і зменшенню кількості операцій при обрахунку на ПЕОМ. За допомогою неперервних дробів можна наближено обчислювати значення багатьох (але не всіх) функцій, для яких їх степеневі ряди сходяться дуже повільно, або навіть розходяться. Апарат ланцюгових дробів є одним з основних джерел отримання дробово-раціональних наближень функцій, які використовуються в сучасному забезпеченні ПЕОМ. Неперервні дроби дозволяють апроксимувати ширший клас функцій, ніж поліноми, зокрема функції з особливостями. У багатьох випадках доцільно за допомогою загальновідомих способів переходити від дробово-раціонального наближення до відповідного ланцюгового дробу, для обчислення якого потрібно виконати меншу кількість арифметичних операцій, ніж при обчисленні дробово-раціонального наближення. Значне підвищення інтересу до ланцюгових дробів пов'язане ще з тим, що процес їх обчислень є циклічним і легко піддається програмуванню на ПЕОМ.

Постановка задачі. Сама ідея застосування методів Рунге-Кутта для числового розв’язку нелінійних інтегральних рівнянь Вольтерри другого роду

$$f(x) = \int_a^x F[x, y, f(y)]dy\,,\ x \in I_L\,, \tag{1}$$

де $F[x, y, f(y)]$ - достатньо гладка функція в області $\Omega = \{(x, y, f): y \le x; y, x \in I_L, |f| < C\}$, була висловлена В.І. Криловим [1], а вперше використана Е.Араго [2] . В роботі [2] були побудовані формули методу Рунге-Кутта третього порядку точності. Найбільш повне дослідження методів виду Рунге-Кутта для рівняння (1) представлено в роботі [3]. Тут наближений розв’язок рівняння в кожній вузловій точці припускалося обчислювати тільки з допомогою формул методів Рунге-Кутта. В роботі [4] запропонований більш простий в реалізації алгоритм, в якому на кожному кроці інтегрування застосовуються як формули виду Рунге-Кутта, так і квадратурних сум відповідних порядків точності. Більш детально різні числові методи розв’язання інтегральних рівнянь Вольтерри наведено в роботах [5], [6].

У зв’язку з відсутністю ефективного способу оцінки локальної похибки числового розв’язку рівняння (1), виникла необхідність розробки двосторонніх алгоритмів, за допомогою яких можна отримувати наближення до точного розв’язку з надлишком (верхні) та недостачею (нижні). За наближений розв’язок приймають півсуму двосторонніх наближень, а модуль піврізниці дає похибку, яку при цьому отримуємо. В роботі [7] запропоновані двосторонні формули першого та другого порядку точності для розв’язання інтегрального рівняння (1).

Дана робота присвячена застосуванню неперервних дробів для побудови нових числових методів розв’язання нелінійних інтегральних рівнянь Вольтерри другого роду.

Побудова методів типу Рунге-Кутта

Розглянемо нелінійне інтегральне рівняння Вольтерри (1).

Розділимо інтервал $I_L: [a, b]$ на N частин довжини $h = \dfrac{b-a}{N}$ і позначимо $x_{i+1} = a + ih$ $(i = 0, 1, \ldots)$, $f_i = f(x_i)$, причому $f(x_1) = 0$. Розвинення шуканого розв’язку $f(x)$ в околі точки $x = a$ в ряд Тейлора по степенях h має вигляд

$$f_2 = hf_1' + \frac{1}{2}h^2 f_1'' + \frac{1}{6}h^3 f_1''' + \frac{1}{24}h^4 f_1^{IV} + \ldots\,, \tag{2}$$

де

$$f_1' = F[x, y, f(y)] \equiv F\,,$$

$$f_1'' = 2F_x + F_y + FF_z\,,$$

$$f_1''' = 3F_{xx} + 3F_{xy} + F_{yy} + 3F_{xz} + 2FF_{yz} + F^2F_{zz} + 2F_xF_z + F_yF_z + F(F_z)^2\,,$$

$$\begin{aligned} f_1^{IV} &= 4F_{xxx} + 6F_{xxy} + 4F_{xyy} + 6FF_{xxz} + 8FF_{xyz} + 3FF_{yyz} + \\ &+ F_{yyy} + 4F^2F_{xzz} + 3F^2F_{yzz} + F^3F_{zzz} + 8F_xF_{xz} + 6F_xF_{yz} + \\ &+ 4F_yF_{xz} + 3F_yF_{yz} + 7FF_zF_{xz} + 5FF_zF_{yz} + 6FF_xF_{zz} + 3FF_yF_{zz} + \\ &+ 4F^2F_zF_{z^2} + 3F_zF_{xx} + 3F_zF_{xy} + F_zF_{yy} + 2F_xF_{zz} + F_yF_{zz} + FF_{zzz} \end{aligned}$$

і т.д. Тут функція $F[x, y, f(y)]$ і всі її похідні взяті в точці $(a, a, 0)$.

Використовуючи апарат ланцюгових дробів [8-10] та ідею побудови методів Рунге-Кутта [5-7], наближений розв’язок рівняння (1) шукаємо у вигляді

$$Y_2^{[k,l]} = \cfrac{c_{0,0}}{\sum\limits_{i=0}^{k-1} d_{i,0} + \cfrac{d_{k,0}}{1 + \ddots + \cfrac{d_{k,l-1}}{1 + d_{k,l}}}} . \tag{3}$$

Вирази для $c_{0,0}$, $d_{i,j}$ при $k + l = 2$ $(k = 1,2; l = 0,1)$ мають вигляд

$$c_{0,0} = h\delta_1 ,\ d_{0,0} = 1 ,\ d_{1,0} = \frac{\delta_2}{\delta_1} ,\ (\delta_1 \neq 0) ,\ d_{2,0} = \frac{\delta_1\delta_3 + \delta_2^2}{\delta_1^2} ,\ d_{1,1} = \frac{d_{2,0}}{d_{1,0}} ,$$

$$\delta_i = \sum_{j=1}^{p} a_{ij} k_j \ ,\ k_j = F\left[a + \alpha_j h, a + \beta_j h, h\sum_{m=0}^{j-1} \gamma_{jm} k_m \right] ,\ \gamma_{j0} = 0 .$$

При $k = 1$, $l = 0$ отримаємо:

$$Y_2^{[1,0]} = \frac{c_{0,0}}{d_{0,0} + d_{1,0}} , \tag{4}$$

де

$$c_{0,0} = h\delta_1 ,\ d_{0,0} = 1 ,\ d_{1,0} = \frac{\delta_2}{\delta_1} ,$$

$$\delta_i = \sum_{j=1}^{p} a_{ij} k_j \ ,\ (\delta_1 \neq 0) ,\ p = 2 , \tag{5}$$

$$k_1 = F[a + \alpha_1 h, a + \beta_1 h, 0] ,\ (\delta_1 \neq 0) ,$$

$$k_2 = F[a + \alpha_2 h, a + \beta_2 h, \gamma_{21} h k_1] .$$

Параметри a_{ij}, α_i, β_i $(i, j = 1,2)$, γ_{21} визначимо з умови, щоб розвинення в ряд Тейлора в околі точки $x = x_1$ шуканого розв'язку f_2 і наближеного $Y_2^{[1,0]}$ співпадали з членами, що містять h^2 включно.

<u>Теорема.</u> *Якщо параметри* $a_{ij}, \alpha_i, \beta_i, \gamma_{21} (i, j = 1,2)$ *- задовольняють систему алгебраїчних рівнянь*

$$\begin{cases} a_{11} + a_{12} = 1 \\ a_{21} + a_{22} = 0 \\ 1 + (a_{21} - a_{11})\alpha_1 + (a_{22} - a_{12})\alpha_2 = 0 \\ \frac{1}{2} + (a_{21} - a_{11})\beta_1 + (a_{22} - a_{12})\beta_2 = 0 \\ \frac{1}{2} + (a_{22} - a_{12})\gamma_{21} = 0, \end{cases} \tag{6}$$

то існує такий набір їх значень, що $f_2 - Y_2^{[1,0]} = O(h^3)$.

<u>Доведення.</u> Формула (4) при значеннях $c_{0,0}$, $d_{0,0}$ і $d_{1,0}$, взятих з (5), набуде вигляду

$$Y_2^{[1,0]} = \frac{h\delta_1^2}{\delta_1 + \delta_2} = \frac{P_{[1,0]}}{Q_{[1,0]}} . \tag{7}$$

Розвинувши k_i , $i = 1,2$ в ряд Тейлора по степенях h

$$k_1 = F + h(\alpha_1 F_x + \beta_1 F_y) + \frac{h^2}{2}(\alpha_1^2 F_{xx} + 2\alpha_1\beta_1 F_{xy} + \beta_1^2 F_{yy}) + O(h^3)$$

$$k_2 = F + h\left(\alpha_2 F_x + \beta_2 F_y + \gamma_{21} F F_z\right) + \\ + \frac{h^2}{2}\left(\alpha_2^2 F_{xx} + 2\alpha_2\beta_2 F_{xy} + \beta_2^2 F_{yy} + 2\alpha_2\gamma_{21} F F_{xz} + \right. \\ \left. + 2\beta_2\gamma_{21} F F_{yz} + \gamma_{21}^2 F F_{zz} + 2\alpha_1\gamma_{21} F_x F_z + \beta_1\gamma_{21} F F_z\right) + O\left(h^3\right), \tag{8}$$

знайдемо, що

$$P_{[1,0]} = h\delta_1^2 = h\left(a_{11} + a_{12}\right)^2 F^2 + h^2\left\{\left(a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2\right)F_x + \left(a_{11}\beta_1 + a_{12}\beta_2\right)F_y + \right. \\ \left. + a_{12}\gamma_{21} F F_z\right\} \cdot 2\left(a_{11} + a_{12}\right)F + h^3\left\{\left(a_{11} + a_{12}\right)F\left[\left(a_{11}\alpha_1^2 + a_{12}\alpha_2^2\right)F_{xx} + \right.\right. \\ + 2\left(a_{11}\alpha_1\beta_1 + a_{12}\alpha_2\beta_2\right)F_{xy} + a_{12}\gamma_{21} F F_z\Big\} \cdot 2\left(a_{11} + a_{12}\right)F + \\ + h^3\Big\{\left(a_{11} + a_{12}\right)F\Big[\left(a_{11}\alpha_1^2 + a_{12}\alpha_2^2\right)F_{xx} + 2\left(a_{11}\alpha_1\beta_1 + a_{12}\alpha_2\beta_2\right)F_{xy} + \\ + \left(a_{11}\beta_1^2 + a_{12}\beta_2^2\right)F_{yy} + 2a_{12}\alpha_2\gamma_{21} F F_{xz} + 2a_{12}\beta_2\gamma_{21} F F_{yz} + a_{12}\gamma_{21}^2 F^2 F_{zz} + \\ + 2a_{21}\alpha_1\gamma_{21} F_x F_z + 2a_{12}\gamma_{21}\beta_1 F_y F_x\Big] + \Big[\left(a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2\right)F_x + \\ \left(a_{11}\beta_1 + a_{12}\beta_2\right)F_y + a_{12}\gamma_{21} F F_z\Big]^2\Big\} + O\left(h^4\right), \tag{9}$$

$$Q_{[1,0]} = \delta_1 + \delta_2 = \left(a_{11} + a_{12} + a_{21} + a_{22}\right)F + h\Big\{\Big[\left(a_{11} + a_{21}\right)\alpha_1 + \left(a_{12} + a_{22}\right)\alpha_2\Big]F_x + \\ + \Big[\left(a_{11} + a_{21}\right)\beta_1 + \left(a_{12} + a_{22}\right)\beta_2\Big]F_y + \left(a_{12} + a_{22}\right)\gamma_{21} F F_z\Big\} + \\ + \frac{h^2}{2}\Big\{\Big[\left(a_{11} + a_{21}\right)\alpha_1^2 + \left(a_{12} + a_{22}\right)\alpha_2^2\Big]F_{xx} + 2\Big[\left(a_{11} + a_{21}\right)\alpha_1\beta_1 + \left(a_{12} + a_{22}\right)\alpha_2\beta_2\Big]F_{xy} + \\ + \Big[\left(a_{11} + a_{21}\right)\beta_1^2 + \left(a_{12} + a_{22}\right)\beta_2^2\Big]F_{yy} + 2\left(a_{12} + a_{22}\right)\times \\ \times \alpha_2\gamma_{21} F F_{xz} + 2\left(a_{12} + a_{22}\right)\beta_2\gamma_{21} F F_{yz} + \\ + \left(a_{12} + a_{22}\right)\gamma_{21}^2 F^2 F_{zz} + 2\left(a_{12} + a_{22}\right)\gamma_{21}\left(\alpha_1 F_x + \beta_1 F_y\right)F_z\Big\} + O\left(h^3\right). \tag{10}$$

Знайдемо різницю

$$f_2 - Y_2^{[1,0]} = \Big\{h\Big[\left(a_{11} + a_{12} + a_{21} + a_{22}\right) - \left(a_{11} + a_{12}\right)^2\Big]F^2 + \\ + h^2 F\Big\{\Big[\left(a_{11} + a_{21}\right)\alpha_1 + \left(a_{12} + a_{22}\right)\alpha_2 + \left(a_{11} + a_{12} + a_{21} + a_{22}\right) - \\ - 2\left(a_{11} + a_{12}\right)\left(a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2\right)\Big]F_x + \Big[\left(a_{11} + a_{21}\right)\beta_1 + \left(a_{12} + a_{22}\right)\beta_2 + \\ + \frac{1}{2}\left(a_{11} + a_{12} + a_{21} + a_{22}\right) - 2\left(a_{11} + a_{12}\right)\left(a_{11}\beta_1 + a_{12}\beta_2\right)\Big]F_y + \\ + \Big[\left(a_{12} + a_{22}\right)\gamma_{21} + \frac{1}{2}\left(a_{11} + a_{12} + a_{21} + a_{22}\right) - 2\left(a_{11} + a_{12}\right)a_{12}\gamma_{21}\Big]F F_z\Big\} + \\ + h^3\Big\{\frac{1}{6}\left(a_{11} + a_{12} + a_{21} + a_{22}\right)f_1''' F + \frac{1}{2}\left(2F_x + F_y + F F_z\right)\times \\ \times\Big(\Big[\left(a_{11} + a_{21}\right)\alpha_1 + \left(a_{12} + a_{22}\right)\alpha_2\Big]F_x + \Big[\left(a_{11} + a_{21}\right)\beta_1 + \left(a_{12} + a_{22}\right)\beta_2\Big]F_y + \\ + \left(a_{12} + a_{22}\right)F F_z\Big) - \Big(\Big[\left(a_{11} + a_{21}\right)\alpha_1 + \left(a_{12} + a_{22}\right)\alpha_2\Big]F_x + \\ + \Big[\left(a_{11} + a_{21}\right)\beta_1 + \left(a_{12} + a_{22}\right)\beta_2\Big]F_y + \left(a_{12} + a_{22}\right)F F_z\Big)^2 - \\ - \frac{1}{2}\Big[\left(a_{11} - a_{21}\right)\alpha_1^2 + \left(a_{12} - a_{22}\right)\alpha_2^2\Big]F F_{xx} - \Big[\left(a_{11} - a_{21}\right)\alpha_2\beta_1 + \\ + \left(a_{12} - a_{22}\right)\alpha_2\beta_2\Big]F F_{xy} - \frac{1}{2}\Big[\left(a_{11} - a_{21}\right)\beta_1^2 + \left(a_{12} - a_{22}\right)\beta_2^2\Big]F F_{yy} - \\ - \left(a_{11} - a_{22}\right)\alpha_2\gamma_{21} F^2 F_{xz} - \left(a_{11} - a_{22}\right)\beta_2\gamma_{21} F^2 F_{yz} - \frac{1}{2}\left(a_{11} - a_{22}\right)\gamma_{21}^2 F^3 F_{zz} - \\ - \left(a_{12} - a_{22}\right)\gamma_{21}\alpha_1 F F_x F_z - \left(a_{12} - a_{22}\right)\gamma_{21}\beta_1 F F_y F_z\Big\}\Big/ Q_{[1,0]}.$$

Випишемо коефіцієнти і відповідні функції, що стоять в чисельнику при h і h^2:

$$hF^2: \quad a_{11}+a_{12}+a_{21}+a_{22}-(a_{11}+a_{12})^2;$$

$$h^2FF_x: \quad (a_{11}+a_{21})\alpha_1+(a_{12}+a_{22})\alpha_2-2(a_{11}+a_{12})(a_{11}+a_{12})(a_{11}\alpha_1+a_{12}\alpha_2)$$
$$+(a_{11}+a_{12}+a_{21}+a_{22});$$

$$h^2FF_y: \quad (a_{11}+a_{21})\beta_1+(a_{12}+a_{22})\beta_2-2(a_{11}+a_{12})(a_{11}\beta_1+a_{12}\beta_2)+$$
$$+\frac{1}{2}(a_{11}+a_{12}+a_{21}+a_{22});$$

$$h^2F^2F_z: \quad (a_{12}+a_{22})\gamma_{21}-2(a_{11}+a_{12})a_{12}\gamma_{21}+\frac{1}{2}(a_{11}+a_{12}+a_{21}+a_{22}). \tag{11}$$

Поклавши $a_{11}+a_{12}=1$ і прирівнявши відповідні коефіцієнти при hF^2, h^2FF_x, h^2FF_y, $h^2F^2F_z$ до нуля, після очевидних спрощень, отримаємо систему алгебраїчних рівнянь (6).

Теорему доведено.

З останнього рівняння виразимо a_{22} через a_{12} і γ_{21}; з першого знайдемо a_{21}, а з другого – a_{11}:

$$a_{22}=a_{12}-\frac{1}{2\gamma_{21}},\ a_{21}=-a_{12}+\frac{1}{2\gamma_{21}},\ (\gamma_{21}\neq 0),\ a_{11}=1-a_{12}.$$

Розв'язуючи третє і четверте рівняння системи (6) відносно α_1 і β_1, отримаємо:

$$\alpha_2=2\gamma_{21}+(1-2\gamma_{21})\alpha_1,\ \beta_2=\gamma_{21}+(1-2\gamma_{21})\beta_1.$$

Зауваження 1. Взявши у формулі (4) один і два поверхи дробу, отримаємо наближення відповідно першого та другого порядку точності.

Побудуємо двосторонні обчислювальні формули з оцінкою головного члена похибки для розв'язування інтегрального рівняння (1). Розв'язок шукатимемо у вигляді (4)-(5), але коефіцієнти $a_{ij},\alpha_i,\beta_i (i,j=1,2),\gamma_{21}$ визначимо з умови, щоб локальна похибка схеми в точці $x=x_2$ мала вигляд:

$$f_2-Y_2=\omega h^2\psi(f)+O(h^3), \tag{12}$$

де $\psi(f)$– деякий диференціальний оператор, ω - параметр двосторонності.

I. Прирівняємо третє рівняння системи (6) до ω_1

$$1+(a_{21}-a_{11})\alpha_1+(a_{22}-a_{12})\alpha_2=\omega_1,$$

а решта рівнянь залишимо без змін. Тоді, розв'язавши отриману систему, матимемо наступну множину розв'язків :

$$a_{11}=1-a_{12},\ a_{21}=\frac{1}{2\gamma_{21}}-a_{12},\ a_{22}=a_{12}-\frac{1}{2\gamma_{21}},$$
$$\alpha_2=(1-2\gamma_{21})\alpha_1+2\gamma_{21}(1-\omega_1),\ \beta_2=(1-2\gamma_{21})\beta_1+\gamma_{21}, \tag{13}$$

де $\gamma_{21}\neq 0$, α_1, β_1, a_{12} - параметри.

Локальна похибка має вигляд :

$$f_2-Y_2=\omega_1 h^2F_x+O(h^3). \tag{14}$$

II. Поклавши $\frac{1}{2}+(a_{21}=a_{11})\beta_1+(a_{22}-a_{12})\beta_2=\omega_2$, а решта рівнянь прирівнявши до нуля, отримаємо таке сімейство розв'зків :

$$a_{11}=1-a_{12},\quad a_{21}=\frac{1}{2\gamma_{21}}-a_{12},\quad a_{22}=-a_{21},$$
$$\alpha_2=2\gamma_{21}+(1-2\gamma_{21})\alpha_1,\ \beta_2=(1-2\gamma_{21})\beta_1+\gamma_{21}(1-2\omega_2), \tag{15}$$

де α_1, β_1, a_{12} і $\gamma_{21}\neq 0$ - параметри.

У цьому випадку:

$$f_2 - Y_2 = \omega_2 h^2 F_y + O(h^3). \quad (16)$$

III. Якщо ж покладемо $\frac{1}{2} + (a_{22} - a_{12})\gamma_{21} = \omega_3$, а інші рівняння прирівняємо до нуля, то отримаємо таку множину розв’язків :

$$a_{11} = 1 - a_{12}, \quad a_{21} = -a_{12} + \frac{1 - 2\omega_3}{2\gamma_{21}}, \quad a_{22} = a_{12} + \frac{2\omega_3}{2\gamma_{21}},$$

$$\alpha_2 = \frac{(2\gamma_{21} + 2\omega_3 - 1)\beta_1 - \gamma_{21}}{2\omega_3 - 1}, \; \beta_2 = \frac{(2\gamma_{21} + 2\omega_3 - 1)\beta_1 - \gamma_{21}}{2\omega_3 - 1}, \quad (17)$$

причому

$$f_2 - Y_2 = \omega_3 h^2 F F_z + O(h^3). \quad (18)$$

Прирівняємо тепер третє, четверте та п’яте рівняння відповідно до ω_1, ω_2, ω_3.

IV. Покладемо тепер $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = \omega_3 = \omega$. Маємо наступну множину розв’язків системи (6):

$$a_{11} = 1 - a_{12}, \quad a_{21} = \frac{1}{2\gamma_{21}} - a_{12}, \quad a_{22} = a_{12} - \frac{1}{2\gamma_{21}},$$

$$\alpha_2 = 2\gamma_{21}(1-\omega) + \left(1 - 2\gamma_{21}\right)\alpha_1, \; \beta_2 = \gamma_{21}(1 - 2\omega) + \left(1 - 2\gamma_{21}\right)\beta_1, \quad (19)$$

де $\gamma_{21} \neq 0$, a_{12}, α_1, β_1-довільні числа.

При цьому

$$f_2 - Y_2 = \omega\, h^2 (F_x + F_y) + O(h^3).$$

V. Якщо $\omega_1 = \omega_3 = \omega, \omega_2 = 0$, то будемо мати таку множину розв’язків системи (6):

$$a_{11} = 1 - a_{12}, \quad a_{21} = \frac{1 - 2\omega}{2\gamma_{21}} - a_{12}, \quad a_{22} = a_{12} - \frac{2\omega - 1}{2\gamma_{21}},$$

$$\alpha_2 = \frac{2\omega(\gamma_{21} + \alpha_1) - 2\gamma_{21} + (2\gamma_{21} - 1)\alpha_1}{2\omega - 1}, \; \beta_2 = \frac{(2\omega + 2\gamma_{21} - 1)\beta_1 - \gamma_{21}}{2\omega - 1}, \quad (20)$$

де $\gamma_{21} \neq 0$, a_{12}, α_1, β_1-довільні параметри. Тоді

$$f_2 - Y_2 = \omega\, h^2 (F_x + F F_z) + O(h^3).$$

VI. Поклавши $\omega_2 = \omega_3 = \omega$ і $\omega_1 = 0$, отримаємо ще одну чотирипараметричну множину розв’язків системи (6):

$$a_{11} = 1 - a_{12}, \quad a_{21} = \frac{1 - 2\omega}{2\gamma_{21}} - a_{12}, \quad a_{22} = a_{12} + \frac{2\omega - 1}{2\gamma_{21}},$$

$$\alpha_2 = \frac{(2\omega + 2\gamma_{21} - 1)\alpha_1 - 2\gamma_{21}}{2\omega - 1}, \; \beta_2 = \frac{2\omega(\gamma_{21} + \beta_1) - \gamma_{21} + (2\gamma_{21} - 1)\beta_1}{2\omega - 1}, \quad (21)$$

де $\gamma_{21} \neq 0$, a_{12}, α_1, β_1-довільні числа.

При цьому

$$f_2 - Y_2 = \omega h^2 (F_y + F F_z) + O(h^3).$$

VII. Покладемо тепер $\omega_1 = \omega$, $\omega_2 = \omega_3 = \frac{\omega}{2}$. Маємо наступну множину розв’язків системи (6):

$$a_{11} = 1 - a_{12}, \quad a_{21} = \frac{1 - \omega}{2\gamma_{21}} - a_{12}, \quad a_{22} = a_{12} + \frac{\omega - 1}{2\gamma_{21}},$$

$$\alpha_2 = \frac{\omega(2\gamma_{21}+\alpha_1)-2\gamma_{21}+(2\gamma_{21}-1)\alpha_1}{\omega-1},\ \beta_2 = \frac{\omega(\gamma_{21}+\beta_1)-\gamma_{21}+(2\gamma_{21}-1)\beta_1}{\omega-1}, \tag{22}$$

де $\gamma_{21} \neq 0$, a_{12}, α_1, β_1-довільні числа.

$$f_2 - Y_2 = \omega h^2 f_1^{II} + O(h^3) = \omega h(k_2 - k_1) + O(h^3). \tag{23}$$

При $\gamma_{21} = \dfrac{1}{2}$ формули (22) значно спрощуються:

$$a_{11} = 1 - a_{12},\quad a_{21} = 1 - a_{12} - \omega,\quad a_{22} = a_{12} - 1 + \omega,$$

$$\alpha_2 = 1 + \frac{\alpha_1}{\omega-1},\ \beta_2 = \frac{1}{2} + \frac{\omega\beta_1}{\omega-1}, \tag{24}$$

де a_{12}, α_1, β_1 - параметри.

Якщо ж ще покласти $\alpha_1 = \beta_1 = 0,$ то отримаємо наступний набір параметрів:

$$a_{11} = 1 - a_{12},\quad a_{21} = 1 - a_{12} - \omega,\quad a_{22} = a_{12} - 1 + \omega,$$

$$\alpha_1 = \beta_1 = 0,\ \alpha_2 = 1,\ \beta_2 = \frac{1}{2}, \gamma_{21} = \frac{1}{2}. \tag{25}$$

Зауваження 2. З оцінки локальної похибки (23) видно, що при значеннях параметрів (22), (24), (25) маємо двосторонні наближення до точного розв'язку і головний член похибки можна порахувати без додаткових звертань до правої частини рівняння (1), що вигідно відрізняє ці формули від відповідних алгоритмів, запропонованих у роботі [7].

Для знаходження чисельного розв'язку задачі (1) в наступних вузлових точках застосуємо метод рухомого початку. Для цього представимо (1) у вигляді

$$f(x) = \Phi_{n-1}(x) + \Psi_n(x),\ x \in [x_{n-1}, x_n],\ (n \geq 3), \tag{26}$$

$$\Phi_{n-1}(x) = \int_{x_1}^{x_{n-1}} F[x, y, f(y)]dy, \tag{27}$$

$$\Psi_n(x) = \int_{x_{n-1}}^{x} F[x, y, f(y)]dy. \tag{28}$$

Підставляючи в (28) вираз для $f(x)$ з (26) отримаємо інтегральне рівняння з новим початком

$$\Psi_n(x) = \int_{x_{n-1}}^{x} F^*[x, y, \psi_n(y)]dy, \tag{29}$$

де

$$F^*[x, y, v] = F[x, y, \Phi_{n-1}(y) + v].$$

Нехай відомі наближення $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ $(n \geq 3)$. Для отримання $Y_n(Y_n \cong f(x_{n-1}+h))$ потрібно мати наближення для $\Phi_{n-1}(x)$ і $\Psi_n(x)$ при $x = x_{n-1}+h$. Наближення до $\Phi_{n-1}(x)$ можна знайти двома способами:

a) представити $\Phi_{n-1}(x)$ у вигляді

$$\Phi_{n-1}(x) = \sum_{k=1}^{n-2} \mu_k(x),\ \mu_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} F[x, y, f(y)]dy \tag{30}$$

і μ_k $\left(k = \overline{1, n-1}\right)$ шукати з застосуванням формул (4)-(5);

b) використати двосторонні квадратурні формули, тобто

$$\Phi_{n-1}(x) = \sum_{j=1}^{n-1} A_{n-1,j} F[x, x_j, Y_j]. \tag{31}$$

Для знаходження наближення до (29) застосовуємо формули (4)-(5) з новим початком інтегрування.

Висновки. Запропоновано двосторонні методи типу Рунге-Кутта для знаходження наближеного розв'язку інтегрального рівняння Вольтерри другого роду, що базуються на ланцюгових дробах.

Література

1. Крылов В.И. Приложение формулы Эйлера-Лапласа к приближенному решению интегральных уравнений типа Вольтерра // Труды матем. ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР. - 1949. - 28. - С. 33-72.
2. Aparo E. Sulla risoluzione numerica delle equaziono integrali di Volterra di seconda specie // Atti Acad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. – 1959. - 26. - S. 183-188.
3. Pouzet P. Etude en ven dc leur traitement numerique des equations integrales de type Volterra // Revue Francaise de traitement de 1'information. – 1963. - 6, N2 – p. 79-112.
4. Бельтюков Б.А. Аналог метода Рунге-Кутта для решения нелинейных интегральных уравнений Вольтерра // Дифференц. уравнения. - 1965. - 1, № 4. - С. 545-556.
5. Baker C.T.H. The numerical treatment of integral equations. Oxford: Calarendon Press, 1977. -1033p.
6. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Интегральные уравнения: Методы, алгоритмы, программы. - Киев:Наук.думка, 1986. - 544 с.
7. Іщук В.А. Двосторонні методи виду Рунге-Кутта для нелінійного інтегрального рівняння Вольтерра // Докл. АН УССР. Сер А. - 1975. - №1. - С. 14-17.
8. Джоунс У. Трон В. Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения. - М.:Мир, 1985. -414с.
9. Пелех Я.Н. Численные методы решения интегральных уравнений Вольтерра // Математические методы и физико-механические поля: Респ. межвед. сб. - Киев: Наук. думка.–1983. -Вып.18.–С.15-18.
10. Скоробагатько В. Я. Теория ветвящихся цепных дробей и ее применение в вычислительной математике. - М. : Наука, 1983. - 312 с.

Одержано 15.04.2008 р.