УДК 517.443

М.Ленюк[1], докт.фіз.-мат.наук; Б.Шелестовський[2], канд.фіз.-мат.наук

[1]Чернівецький факультет Національного технічного університету “Харківський політехнічний інститут”
[2]Тернопільський державний технічний університет імені Івана Пулюя

ОБЧИСЛЕННЯ НЕВЛАСНИХ ІНТЕГРАЛІВ ЗА ВЛАСНИМИ ЕЛЕМЕНТАМИ ГІБРИДНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ЕЙЛЕРА-ФУР’Є НА СЕГМЕНТІ $[0, R_2]$ ПОЛЯРНОЇ ВІСІ

Методом порівняння розв’язків, побудованих на сегменті полярної осі з одною точкою спряження для сепаратної системи модифікованих диференціальних рівнянь Ейлера та Фур’є методом функцій Коші і методом відповідного гібридного інтегрального перетворення, обчислено полі параметричну сім’ю невласних інтегралів.

M. Lenyuk, B. Shelestovsky

CALCULATION OF THE NON-PERSONAL INTEGRALS ACCORDING TO THE OWN ELEMENTS OF THE EILER-FURIER HYBRID DIFFERENTIAL OPERATOR IN $[0, R_2]$ SEGMENT OF THE POLAR AXIS

Polyparametric family of the non-personal integrals was calculated using the method of the solutions comparison, built in the polar axis segment with the single junction point for the separate system of the modificated differential Eiler-Furier equations using the Caushier function method and the method of the definite hybrid integration transformation.

Постановка проблеми. Тонкостінні елементи композитного типу, як правило, знаходяться в короткочасному стаціонарному режимі, на який вони виходять після стрибкоподібного температурного або силового навантаження. Вивчення їх фізико-технічних характеристик приводить до задач механіки (термомеханіки) кусково-однорідних середовищ. Практика показує, що навіть в найпростіших випадках величини, які характеризують стаціонарний режим композита, виражаються у вигляді поліпараметричного невласного інтегралу, який може бути умовно збіжним навіть тоді, коли зображає аналітичну функцію. Звідси виникає природне бажання замінити невласний інтеграл його результатом збіжності (функцією), що особливо важливо при інженерних розрахунках. Обчисленню однієї сім’ї невласних інтегралів присвячена дана робота.

Основна частина. Розглянемо крайову задачу про побудову обмеженого на множині $\mathrm{I}_1 = \{r : r \in (0, R_1) \mathrm{U} (R_1, R_2);\ R_2 < \infty\}$ розв’язку системи модифікованих диференціальних рівнянь Ейлера та Фур’є

$$\begin{gathered}\left(\mathrm{B}_\alpha - q_1^2\right) u_1(r) = -g_1(r), \quad r \in (0, R_1) \\ \left(\frac{d^2}{dr^2} - q_2^2\right) u_2(r) = -g_2(r), \quad r \in (R_1, R_2)\end{gathered} \tag{1}$$

за умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^1 \frac{d}{dr} + \beta_{j1}^1\right) u_1(r) - \left(\alpha_{j2}^1 \frac{d}{dr} + \beta_{j2}^1\right) u_2(r)\right]\Big|_{r=R_1} = \omega_{j1}, \quad j = 1,2 \tag{2}$$

та крайовими умовами

$$\lim_{r\to 0}\left[r^{\gamma}u_1(r)\right]=0,\quad \left(\alpha_{22}^2 \tfrac{d}{dr}+\beta_{22}^2\right)u_2(r)\Big|_{r=R_2}=g_R. \tag{3}$$

У рівностях (1)-(3) $q_j>0$, $c_{11}\cdot c_{21}>0$, $c_{j1}=\alpha_{2j}^1\beta_{1j}^1-\alpha_{1j}^1\beta_{2j}^1$, $\alpha_{jk}^m\ge 0$, $\beta_{jk}^m\ge 0$, $\alpha_{22}^2+\beta_{22}^2\ne 0$, $\mathrm{B}_\alpha=r^2 \tfrac{d^2}{dr^2}+(2\alpha+1)r\tfrac{d}{dr}+\alpha^2$, $2\alpha+1>0$, B_α – диференціальний оператор Ейлера другого порядку [1].

Фундаментальну систему розв'язків для рівняння Ейлера $\left(\mathrm{B}_\alpha-q_1^2\right)v=0$ утворюють функції $v_1=r^{-\alpha-q_1}$ та $v_2=r^{-\alpha+q_1}$. Фундаментальну систему розв'язків для рівняння Фур'є $\left(\tfrac{d^2}{dr^2}-q_2^2\right)v(r)=0$ утворюють функції $v_1=chq_2r$ та $v_1=shq_2r$ [1].

Наявність фундаментальної системи розв'язків дозволяє побудувати загальний розв'язок крайової задачі (1)-(3) методом функцій Коші [1, 2]:

$$\begin{aligned} u_1(r)&=\mathrm{A}_1 r^{-\alpha+q_1}+\int_0^{R_1}\mathrm{E}_1(r,\rho)g_1(\rho)\rho^{2\alpha-1}d\rho,\\ u_2(r)&=\mathrm{A}_2 chq_2r+\mathrm{B}_2 shq_2r+\int_{R_1}^{R_2}\mathrm{E}_2(r,\rho)g_2(\rho)d\rho. \end{aligned} \tag{4}$$

У рівностях (4) $\mathrm{E}_j(r,\rho)$ – функції Коші [1, 2]:

$$\begin{aligned} &\mathrm{E}_j(r,\rho)\big|_{r=\rho+0}-\mathrm{E}_j(r,\rho)\big|_{r=\rho-0}=0,\\ &\frac{d\mathrm{E}_j(r,\rho)}{dr}\bigg|_{r=\rho+0}-\frac{d\mathrm{E}_j(r,\rho)}{dr}\bigg|_{r=\rho-0}=-\left[\varphi_j(\rho)\right]^{-1}, \end{aligned} \tag{5}$$

де $\varphi_1(\rho)=\rho^{2\alpha_1-1}$, $\varphi_2(\rho)=1$.

Нехай функція Коші

$$\mathrm{E}_1=\begin{cases}\overset{-}{\mathrm{E}}_1\equiv \mathrm{A}_1 r^{-\alpha+q_1}, & 0<r<\rho<R_1,\\ \overset{+}{\mathrm{E}}_1\equiv \mathrm{A}_2 r^{-\alpha+q_1}+\mathrm{B}_2 r^{-(\alpha+q_1)}, & 0<\rho<r<R_1.\end{cases}$$

Властивості (5) функції Коші дають алгебраїчну систему з двох рівнянь:

$$\begin{aligned} &(\mathrm{A}_2-\mathrm{A}_1)\rho^{-\alpha+q_1}+\mathrm{B}_2\rho^{-(\alpha+q_1)}=0,\\ &(\alpha-q_1)(\mathrm{A}_2-\mathrm{A}_1)\rho^{-\alpha+q_1}+(\alpha+q_1)\mathrm{B}_2\rho^{-(\alpha+q_1)}=\rho^{-2\alpha}. \end{aligned}$$

Звідси знаходимо співвідношення:

$$\mathrm{A}_2-\mathrm{A}_1=\frac{1}{2q_1}\rho^{-(\alpha+q_1)},\quad \mathrm{B}_2=-\frac{1}{2q_1}\rho^{-\alpha+q_1}. \tag{6}$$

Доповнимо рівності (6) рівнянням:

$$\left(\alpha_{11}^1\tfrac{d}{dr}+\beta_{11}^1\right)\overset{+}{\mathrm{E}}_1\Big|_{r=R_1}=0:\quad \mathrm{Z}_{\alpha,11}^{12}(q_1,R_1)\mathrm{A}_2+\mathrm{Z}_{\alpha,11}^{11}(q_1,R_1)\mathrm{B}_2=0. \tag{7}$$

Із системи (6), (7) знаходимо, що

$$\mathrm{A}_1=-\frac{1}{2q_1\mathrm{Z}_{\alpha,11}^{12}}\Psi_{\alpha,j1}^{1*}(q_1,\rho).$$

Цим функція Коші E_1 визначена й внаслідок симетрії відносно діагоналі $r=\rho$ має структуру:

$$\mathrm{E}_1(r,\rho)=-\frac{1}{2q_1\mathrm{Z}_{\alpha,11}^{12}}\begin{cases} r^{-\alpha+q_1}\Psi_{\alpha,j1}^{1*}(q_1,\rho), & 0<r<\rho<R_1,\\ \rho^{-\alpha+q_1}\Psi_{\alpha,j1}^{1*}(q_1,r), & 0<\rho<r<R_1.\end{cases} \tag{8}$$

У рівностях (7), (8) беруть участь функції:

$$Z_{\alpha,j1}^{11}(q_1,\,R_1)=\left(\alpha_{j1}^1\,{}^{d}\!\!\diagup_{dr}+\beta_{j1}^1\right)r^{-\alpha-q_1}\Big|_{r=R_1}=\left[\beta_{j1}^1-(\alpha+q_1)\alpha_{j1}^1R_1^{-1}\right]R_1^{-\alpha-q_1},$$

$$Z_{\alpha,j1}^{12}(q_1,\,R_1)=\left(\alpha_{j1}^1\,{}^{d}\!\!\diagup_{dr}+\beta_{j1}^1\right)r^{-\alpha+q_1}\Big|_{r=R_1}=\left[\beta_{j1}^1-\alpha_{j1}^1\alpha R_1^{-1}+\alpha_{j1}^1q_1R_1^{-1}\right]R_1^{-\alpha+q_1},$$

$$\Psi_{\alpha,j1}^{1*}(q_1,\,r)=Z_{\alpha,j1}^{12}(q_1,\,R_1)\,r^{-(\alpha+q_1)}-Z_{\alpha,j1}^{11}(q_1,\,R_1)\,r^{-\alpha+q_1}.$$

Припустимо, що функція Коші

$$E_2=\begin{cases}\bar{E}_2=C_1chq_2r+D_1shq_2r, & R_1<r<\rho<R_2,\\ \overset{+}{E}_2=C_2chq_2r+D_2shq_2r, & R_1<\rho<r<R_2.\end{cases}$$

Властивості (5) функції Коші дають алгебраїчну систему з двох рівнянь:

$$(C_2-C_1)chq_2\rho+(D_2-D_1)shq_2\rho=0,$$

$$(C_2-C_1)shq_2\rho+(D_2-D_1)chq_2\rho=-q_2^{-1}.$$

Звідси знаходимо співвідношення:

$$C_2-C_1=q_2^{-1}shq_2\rho,\qquad D_2-D_1=-q_2^{-1}chq_2\rho. \tag{9}$$

Співвідношення (9) доповнимо рівняннями:

$$\begin{aligned}&\left(\alpha_{12}^1\,{}^{d}\!\!\diagup_{dr}+\beta_{12}^1\right)\bar{E}_2\Big|_{r=R_1}=0: \\ &\left(\alpha_{22}^2\,{}^{d}\!\!\diagup_{dr}+\beta_{22}^2\right)\overset{+}{E}_2\Big|_{r=R_2}=0:\end{aligned}\quad \begin{cases}V_{12}^{11}(q_2R_1)C_1+V_{12}^{12}(q_2R_1)D_1=0,\\ V_{22}^{21}(q_2R_2)C_2+V_{22}^{22}(q_2R_2)D_2=0.\end{cases} \tag{10}$$

Алгебраїчна система (10) внаслідок рівностей (9) набуває вигляду:

$$\begin{cases}V_{12}^{11}(q_2R_1)C_1+V_{12}^{12}(q_2R_1)D_1=0,\\ V_{22}^{21}(q_2R_2)C_1+V_{22}^{22}(q_2R_2)D_1=\dfrac{1}{q_2}\Phi_{22}^2(q_2R_2,q_2\rho).\end{cases}$$

Звідси ми знаходимо, що

$$C_1=-\frac{V_{12}^{12}(q_2R_1)\Phi_{22}^2(q_2R_2,q_2\rho)}{q_2\Delta_{12}(q_2R_1,q_2R_2)},\qquad D_1=\frac{V_{12}^{11}(q_2R_1)\Phi_{22}^2(q_2R_2,q_2\rho)}{q_2\Delta_{12}(q_2R_1,q_2R_2)}.$$

Цим функція Коші $E_2(r,\rho)$ визначена й внаслідок симетрії відносно діагоналі $r=\rho$ має структуру:

$$E_2(r,\rho)=-\frac{1}{q_2\Delta_{12}}\begin{cases}\Phi_{12}^1(q_2R_1,q_2r)\Phi_{22}^2(q_2R_2,q_2\rho), & R_1<r<\rho<R_2,\\ \Phi_{12}^1(q_2R_1,q_2\rho)\Phi_{22}^2(q_2R_2,q_2r), & R_1<\rho<r<R_2.\end{cases} \tag{11}$$

Тут беруть участь функції:

$$V_{jk}^{m1}(q_2R_m)=\alpha_{jk}^m q_2shq_2R_m+\beta_{jk}^m chq_2R_m,$$

$$V_{jk}^{m2}(q_2R_m)=\alpha_{jk}^m q_2chq_2R_m+\beta_{jk}^m shq_2R_m,$$

$$\Phi_{jk}^m(q_2R_m,q_2r)=V_{jk}^{m2}(q_2R_m)chq_2r-V_{jk}^{m1}(q_2R_m)shq_2r,$$

$$\Delta_{j2}(q_2R_1,q_2R_2)=V_{j2}^{11}(q_2R_1)V_{22}^{22}(q_2R_2)-V_{j2}^{12}(q_2R_1)V_{22}^{21}(q_2R_2),\quad j=1,2.$$

Повертаємось до рівностей (4). Умови спряження (2) й крайова умова в точці $r=R_2$ для визначення величин A_1,A_2,B_2 дають алгебраїчну систему з трьох рівнянь:

$$\begin{gathered}Z_{\alpha,11}^{12}(q_1,R_1)A_1-V_{12}^{11}(q_2R_1)A_2-V_{12}^{12}(q_2R_1)B_2=\omega_{11},\\ Z_{\alpha,21}^{12}(q_1,R_1)A_1-V_{22}^{11}(q_2R_1)A_2-V_{22}^{12}(q_2R_1)B_2=\omega_{21}+G_{12},\\ V_{22}^{21}(q_2R_2)A_2+V_{22}^{22}(q_2R_2)B_2=g_R.\end{gathered} \tag{12}$$

У системі (12) функція

$$G_{12} = -\frac{c_{11}}{R_1^{2\alpha_1+1}} \int_0^{R_1} \frac{\rho^{-\alpha+q_1}}{Z_{\alpha,11}^{12}} g_1(\rho)\rho^{2\alpha-1} d\rho + c_{21} \int_{R_1}^{R_2} \frac{\Phi_{22}^2(q_2R_2, q_2\rho)}{\Delta_{12}(q_2R_1, q_2R_2)} g_2(\rho) d\rho.$$

Припустимо, що виконана умова однозначної розв'язності крайової задачі (1)-(3): для довільного ненульового вектора $\vec{q} = \{q_1; q_2\}$ визначник алгебраїчної системи (12) відмінний від нуля, тобто для $q = (q_1, q_2)$

$$\Delta_\alpha(q) \equiv Z_{\alpha,21}^{12}(q_1, R_1)\Delta_{12}(q_2R_1, q_2R_2) - Z_{\alpha,11}^{12}(q_1, R_1)\Delta_{22}(q_2R_1, q_2R_2) \neq 0. \quad (13)$$

Визначимо головні розв'язки даної крайової задачі:

1) породжені неоднорідністю умов спряження функції Гріна

$$\Re_{\alpha,11}^1(r,q) = -\frac{\Delta_{22}}{\Delta_\alpha(q)} r^{-\alpha+q_1}, \qquad \Re_{\alpha,21}^1(r,q) = \frac{\Delta_{12}(q_2R_1, q_2R_2)}{\Delta_\alpha(q)} r^{-\alpha+q_1}, \quad (14)$$

$$\Re_{\alpha,11}^2(r,q) = -\frac{Z_{\alpha,21}^{12}}{\Delta_\alpha(q)} \Phi_{22}^2(q_2R_2, q_2r), \qquad \Re_{\alpha,21}^2(r,q) = \frac{Z_{\alpha,11}^{12}}{\Delta_\alpha(q)} \Phi_{22}^2(q_2R_2, q_2r);$$

2) породжені крайовою умовою в точці $r = R_2$ функції Гріна

$$W_{\alpha,21}(r,q) = \frac{c_{21}q_2}{\Delta_\alpha(q)} r^{-\alpha+q_1}, \quad (15)$$

$$W_{\alpha,22}(r,q) = \frac{1}{\Delta_\alpha(q)}\left[Z_{\alpha,11}^{12}(q_1,R_1)\Phi_{22}^1(q_2R_1, q_2r) - Z_{\alpha,21}^{12}(q_1,R_1)\Phi_{12}^1(q_2R_1, q_2r)\right];$$

3) породжені неоднорідністю системи (1) функції впливу

$$H_{\alpha,11}(r,\rho,q) = \frac{1}{2q_1\Delta_\alpha(\rho)} \begin{cases} r^{-\alpha+q_1}\left[\Delta_{22}(q_2R_1, q_2R_2)\Psi_{\alpha,11}^{1*}(q_1,\rho) - \right. \\ \rho^{-\alpha+q_1}\left[\Delta_{22}(q_2R_1, q_2R_2)\Psi_{\alpha,11}^{1*}(q_1,r) - \right. \end{cases}$$

$$\left. - \Delta_{12}(q_2R_1, q_2R_2)\Psi_{\alpha,21}^{1*}(q_1,\rho)\right], \quad 0 < r < \rho < R_1,$$

$$\left. - \Delta_{12}(q_2R_1, q_2R_2)\Psi_{\alpha,21}^{1*}(q_1,r)\right], \quad 0 < \rho < r < R_1,$$

$$H_{\alpha,12}(r,\rho,q) = \frac{c_{21}}{\Delta_\alpha(q)} r^{-\alpha+q_1}\Phi_{22}^2(q_2R_2, q_2\rho), \quad (16)$$

$$H_{\alpha,21}(r,\rho,q) = -\frac{c_{11}}{R_1^{2\alpha+1}} \frac{1}{\Delta_\alpha(q)} \rho^{-\alpha+q_1}\Phi_{22}^2(q_2R_2, q_2r),$$

$$H_{\alpha,22}(r,\rho,q) = \frac{1}{q_2} \begin{cases} W_{\alpha,22}(r,q)\Phi_{22}^2(q_2R_2, q_2\rho), & R_1 < r < \rho < R_2, \\ W_{\alpha,22}(\rho,q)\Phi_{22}^2(q_2R_2, q_2r), & R_1 < \rho < r < R_2. \end{cases}$$

У результаті однозначної розв'язності алгебраїчної системи (12) й підстановки обчислених значень A_1, A_2, B_2 в формули (4) одержуємо єдиний розв'язок крайової задачі (1)-(3):

$$u_j(r) = W_{\alpha,2j}(r,q)g_R + \Re_{\alpha,11}^j(r,q)\omega_{11} + \Re_{\alpha,21}^j(r,q)\omega_{21} +$$

$$+\int_0^{R_1} H_{\alpha,j1}(r,\rho,q)g_1(\rho)\rho^{2\alpha-1}d\rho + \int_{R_1}^{R_2} H_{\alpha,j2}(r,\rho,q)g_2(\rho)d\rho, \quad j = 1,2.$$

Побудуємо розв'язок крайової задачі (1)-(3) методом інтегрального перетворення, породженого на множині I_1 гібридним диференціальним оператором (ГДО)

$$M_\alpha = \theta(r)\theta(R_1 - r)B_\alpha + \theta(r - R_1)\theta(R_2 - r)\frac{d^2}{dr^2}, \quad (18)$$

де $\theta(x)$ – одинична функція Гевісайда.

Оператор M_α самоспряжений і має одну особливу точку $r=0$. Тому його спектр дійсний та неперервний [3]. Можна вважати, що спектральний параметр $\beta\in(0,\infty)$.

Для побудови власних елементів оператора M_α (спектра та відповідної йому спектральної вектор-функції) розглянемо спектральну задачу Штурма-Ліувілля: побудувати ненульовий розв'язок сепаратної системи диференціальних рівнянь Ейлера та Фур'є для звичайних функцій

$$\begin{gathered}\left(\mathrm{B}_\alpha+b_1^2\right)V_{\alpha,1}(r,\beta)=0,\quad r\in(0,R_1)\\ \left(\frac{d^2}{dr^2}+b_2^2\right)V_{\alpha,2}(r,\beta)=0,\quad r\in(R_1,R_2)\end{gathered}\tag{19}$$

за крайовими умовами

$$\lim_{r\to0}\left[r^\gamma V_{\alpha,1}(r,\beta)\right]=0,\quad \left(\alpha_{22}^2\frac{d}{dr}+\beta_{22}^2\right)V_{\alpha,2}(r,\beta)=0\tag{20}$$

та умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{11}^1\frac{d}{dr}+\beta_{11}^1\right)V_{\alpha,1}(r,\beta)-\left(\alpha_{12}^1\frac{d}{dr}+\beta_{12}^1\right)V_{\alpha,2}(r,\beta)\right]\Big|_{r=R_1}=0.\tag{21}$$

Фундаментальну систему розв'язків для рівняння Ейлера $\left(\mathrm{B}_\alpha+b_1^2\right)v=0$ утворюють функції $v_1=r^{-\alpha}\cos(b_1\ln r)$ та $v_2=r^{-\alpha}\sin(b_1\ln r)$ [1]. Фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Фур'є $\left(\frac{d^2}{dr^2}+b_2^2\right)v=0$ утворюють функції $v_1=\cos b_2r$ та $v_2=\sin b_2r$ [1].

Визначимо функції:

$$Y_{\alpha,j1}^{11}(b_1,\ln R_1)=\left[\left(\beta_{j1}^1-\alpha R_1^{-1}\alpha_{j1}^1\right)\cos(b_1\ln R_1)-\alpha_{j1}^1R_1^{-1}b_1\sin(b_1\ln R_1)\right]R_1^{-\alpha},$$

$$Y_{\alpha,j1}^{12}(b_1,\ln R_1)=\left[\left(\beta_{j1}^1-\alpha R_1^{-1}\alpha_{j1}^1\right)\sin(b_1\ln R_1)+\alpha_{j1}^1R_1^{-1}b_1\cos(b_1\ln R_1)\right]R_1^{-\alpha},$$

$$\Psi_{\alpha,j1}^1(b_1,r)=Y_{\alpha,j1}^{12}(b_1,\ln R_1)r^{-\alpha}\cos(b_1,\ln r)-Y_{\alpha,j1}^{11}(b_1,\ln R_1)r^{-\alpha}\sin(b_1,\ln r),$$

$$v_{j2}^{m1}(b_2R_m)=-\alpha_{j2}^mb_2\sin b_2R_m+\beta_{j2}^m\cos b_2R_m,$$

$$v_{j2}^{m2}(b_2R_m)=\alpha_{j2}^mb_2\cos b_2R_m+\beta_{j2}^m\sin b_2R_m,$$

$$\delta_{j2}(\beta)=v_{j2}^{11}(b_2R_1)v_{22}^{22}(b_2R_2)-v_{j2}^{12}(b_2R_1)v_{22}^{21}(b_2R_2),\quad j=1,2,$$

$$\omega_{\alpha,j}(\beta)=\delta_{12}(\beta)Y_{\alpha,21}^{1j}(b_1,\ln R_1)-\delta_{22}(\beta)Y_{\alpha,11}^{1j}(b_1,\ln R_1).$$

Якщо покласти

$$\begin{gathered}V_{\alpha,1}(r,\beta)=\mathrm{A}_1r^{-\alpha}\cos(b_1\ln r)+\mathrm{B}_1r^{-\alpha}\sin(b_1\ln r),\\ V_{\alpha,2}(r,\beta)=\mathrm{A}_2\cos b_2r+\mathrm{B}_2\sin b_2r,\end{gathered}\tag{22}$$

то умови спряження (21) та крайова умова в точці $r=R_2$ для визначення величин $\mathrm{A}_j,\mathrm{B}_j\ (j=1,2)$ дають однорідну алгебраїчну систему з трьох рівнянь:

$$\begin{gathered}Y_{\alpha,j1}^{11}(b_1,\ln R_1)\mathrm{A}_1+Y_{\alpha,j1}^{12}(b_1,\ln R_1)\mathrm{B}_1-v_{j2}^{11}(b_2R_1)\mathrm{A}_2-v_{j2}^{12}(b_2R_1)\mathrm{B}_2=0,\\ v_{22}^{21}(b_2R_2)\mathrm{A}_2+v_{22}^{22}(b_2R_2)\mathrm{B}_2=0,\quad j=1,2.\end{gathered}\tag{23}$$

У результаті розв'язання алгебраїчної системи стандартним методом й підстановки одержаних значень в рівності (22) маємо функції:

$$\begin{gathered}V_{\alpha,1}(r,\beta)=\omega_{\alpha,2}(\beta)r^{-\alpha}\cos(b_1\ln r)-\omega_{\alpha,1}(\beta)r^{-\alpha}\sin(b_1\ln r),\\ V_{\alpha,2}(r,\beta)=\frac{c_{11}b_1(\beta)}{R_1^{2\alpha+1}}\left[v_{22}^{22}(b_2R_2)\cos b_2r-v_{22}^{21}(b_2R_2)\sin b_2r\right].\end{gathered}\tag{24}$$

Наявність вагової функції

$$\sigma(r)=\theta(r)\theta(R_1-r)\sigma_1 r^{2\alpha-1}+\theta(r-R_1)\theta(R_2-r)\sigma_2,\quad \sigma_1=1,\quad \sigma_2=\frac{c_{21}}{c_{11}}R_1^{2\alpha+1}$$

спектральної функції

$$V_\alpha(r,\beta)=\theta(r)\theta(R_1-r)V_{\alpha,1}(r,\beta)+\theta(r-R_1)\theta(R_2-r)V_{\alpha,2}(r,\beta)$$

та спектральної щільності

$$\Omega_\alpha(\beta)=\beta\big(b_1(\beta)\big)^{-1}\Big(\big[\omega_{\alpha,1}(\beta)\big]^2+\big[\omega_{\alpha,2}(\beta)\big]^2\Big)^{-1}$$

дає можливість визначити пряме H_α та обернене H_α^{-1} гібридне інтегральне перетворення, породжене на множині I_1 оператором M_α [3]:

$$\mathrm{H}_\alpha\big[g(r)\big]=\int_0^{R_2} g(r)V_\alpha(r,\beta)\sigma(r)\,dr\equiv\tilde{g}(\beta),\tag{25}$$

$$\mathrm{H}_\alpha^{-1}\big[\tilde{g}(\beta)\big]=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \tilde{g}(\beta)V_\alpha(r,\beta)\Omega_\alpha(\beta)\,d\beta\equiv g(r),\tag{26}$$

де функція $g(r)=\{g_1(r);\ g_2(r)\}$ із області визначення ГДО M_α.

При цьому має місце основна тотожність інтегрального перетворення ГДО M_α:

$$\mathrm{H}_\alpha\big[\mathrm{M}_\alpha\big[g(r)\big]\big]=-\beta^2\tilde{g}(\beta)-k_1^2\int_0^{R_1} g_1(r)V_{\alpha,1}(r,\beta)\sigma_1 r^{2\alpha-1}dr-k_2^2\int_{R_1}^{R_2} g_2(r)V_{\alpha,2}(r,\beta)\sigma_2 dr+$$

$$+c_{11}^{-1}R_1^{2\alpha+1}\big[Z_{\alpha,12}^1(\beta)\omega_{21}-Z_{\alpha,22}^1(\beta)\omega_{11}\big]+\sigma_2\left(\alpha_{22}^2\right)^{-1}V_{\alpha,2}(R_2,\beta)g_R,\tag{27}$$

$$Z_{\alpha,j2}^1(\beta)=\left(\alpha_{j2}^1\, d/dr+\beta_{j2}^1\right)V_{\alpha,2}(r,\beta)\Big|_{r=R_1},\quad j=1,2.$$

Припустимо, що $\max\{q_1^2,q_2^2\}=q_1^2$. Покладемо всюди $k_1^2=0,\quad k_2^2=q_1^2-q_2^2\ge 0$ $\left(b_1=\beta,\ b_2=\sqrt{\beta^2+q_1^2-q_2^2}\right)$.

Побудований методом запровадженого формулами (25), (26) інтегрального перетворення за відомого логічною схемою [4] єдиний розв'язок крайової задачі (1)-(3) має структуру:

$$u_j(r)=\int_0^{R_1}\left(\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{V_{\alpha,j}(r,\beta)V_{\alpha,1}(\rho,\beta)}{\beta^2+q_1^2}\Omega_\alpha(\beta)\,d\beta\right)g_1(\rho)\sigma_1\rho^{2\alpha-1}d\rho+$$

$$+\int_{R_1}^{R_2}\left(\frac{2}{\pi}\int_0^\infty V_{\alpha,j}(r,\beta)V_{\alpha,2}(\rho,\beta)\frac{\Omega_\alpha(\beta)\,d\beta}{\beta^2+q_1^2}\right)g_2(\rho)\sigma_2 d\rho+$$

$$+\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{V_{\alpha,2}(R_2,\beta)V_{\alpha,j}(r,\beta)}{\alpha_{22}^2\left(\beta^2+q_1^2\right)}\Omega_\alpha(\beta)\,d\beta\,\sigma_2 g_R+\frac{2}{\pi}\int_0^\infty Z_{\alpha,12}^1(\beta)V_{\alpha,j}(r,\beta)\frac{\Omega_\alpha(\beta)\,d\beta}{\beta^2+q_1^2}\cdot\frac{R_1^{2\alpha+1}}{c_{11}}\omega_{21}-$$

$$-\frac{2}{\pi}\int_0^\infty Z_{\alpha,22}^1(\beta)V_{\alpha,j}(r,\beta)\frac{\Omega_\alpha(\beta)\,d\beta}{\beta^2+q_1^2}\cdot\frac{R_1^{2\alpha+1}}{c_{11}}\omega_{11}.\tag{28}$$

Порівнюючи в силу єдиності розв'язки (17) та (18), отримуємо формули обчислення поліпараметричних невласних інтегралів:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty V_{\alpha,j}(r,\beta)V_{\alpha,k}(\rho,\beta)\frac{\Omega_\alpha(\beta)\,d\beta}{\beta^2+q_1^2}=\frac{1}{\sigma_k}\mathrm{H}_{\alpha,jk}(r,\rho,q),\quad j,k=1,2,\tag{29}$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{V_{\alpha,2}\left(R_2,\beta\right)V_{\alpha,j}\left(r,\beta\right)}{\alpha_{22}^2\left(\beta^2+q_1^2\right)}\Omega_\alpha\left(\beta\right)d\beta=\frac{1}{\sigma_2}W_{\alpha,2j}\left(r,q\right),\quad j=1,2, \tag{30}$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\mathrm{Z}_{\alpha,12}^1\left(\beta\right)V_{\alpha,j}\left(r,\beta\right)}{\beta^2+q_1^2}\Omega_\alpha\left(\beta\right)d\beta=\frac{c_{11}}{R_1^{2\alpha+1}}\Re_{\alpha,21}^j\left(r,q\right),\quad j=1,2, \tag{31}$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{Z}_{\alpha,22}^1\left(\beta\right)V_{\alpha,j}\left(r,\beta\right)\frac{\Omega_\alpha\left(\beta\right)d\beta}{\beta^2+q_1^2}=-\frac{c_{11}}{R_1^{2\alpha+1}}\Re_{\alpha,11}^j\left(r,q\right),\quad j=1,2. \tag{32}$$

Функції $\mathrm{H}_{\alpha,jk}\left(r,\rho,q\right)$ визначені формулами (16), функції $W_{\alpha,2j}\left(r,q\right)$ визначені формулами (15), а функції Гріна $\Re_{\alpha,m1}^j\left(r,q\right)$ визначені формулами (14).

Основна теорема. Якщо вектор-функція $f\left(r\right)=\left\{\mathrm{B}_\alpha\left[g_1\left(r\right)\right];\ g_2''(r)\right\}$ неперервна на множині I_1, а вектор-функція $g\left(r\right)=\left\{g_1\left(r\right);\ g_2\left(r\right)\right\}$ задовольняє крайові умови (3) та умови спряження (2) і виконується умова (13) однозначної розв'язності крайової задачі (1)-(3), то справджуються формули (29)-(32) обчислення невласних інтегралів за власними елементами ГДО M_α, визначеного рівністю (18).

Висновок. Результати даної роботи поповнюють довідкову математичну літературу й можуть бути використанні при обчисленні невласних інтегралів за власними елементами ГДО, які появляються при моделюванні фізико-технічних процесів в неоднорідних середовищах.

Література

1. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. – М.: Физмагиз, 1959. – 468с.
2. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй специальный курс. – М.: Наука, 1965. – 328с.
3. Ленюк М.П., Шинкарик М.І. Гібридні інтегральні перетворення (Фур'є, Бесселя, Лежандра). Частина 1. – Тернопіль: Економічна думка, 2004. – 368с.
4. Ленюк М.П. Обчислення невласних інтегралів методом гібридних інтегральних перетворень (Фур'є, Бесселя, Лежандра). Том V. – Чернівці: Прут, 2005. – 368с.

Одержано 25.03.2008 р.