УДК 623.407

Володимир Медвідь, Ірина Бєлякова, Вадим Пісьціо, Олег Шкодзінський
Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

ОПТИМІЗАЦІЯ П'ЄЗОТРАНСФОРМАТОРА

Volodymyr Medvid, Iryna Belyakova, Piscio Vadim, Oleh Shkodzinsky

OPTIMIZATION OF A PIEZOTRANSFORMER

Розглянемо оптимізацію форми плоского п'єзотрансформатора струму (ПТ) з поляризацією за товщиною пластини. Нехай, її товщина h, а середня площина співпадає з площиною $x_1 0 x_2$, матеріал має густину ρ. Також будемо вважати, що задача є симетричною відносно координатних осей. Бічні поверхні п'єзотрансформатора вільні від електродів, а верхня і нижня поверхні покриті системою електродів, зазор між якими наближається до 0. Для зменшення втрат енергії ПТ закріплюють так, щоб його поверхні не передавали зусилля на закріплення. Така умова призводить до граничної умови: $\sigma_{ij} n_j = 0$, де n_j - вектор зовнішньої нормалі. У випадку двомірної моделі при змінній ширині п'єзотрансформатора та симетрії ПТ відносно осі Ox рівняння, що описує коливання із частотою ω, у лінійному наближенні може бути записано у наступній формі: $\sigma_{ij,j} + \rho\omega^2 u_i = 0$, де ρ - густина матеріалу ПТ. На границі, при умові вільної бічної поверхні п'єзоелемента, має виконуватись умова: $\sigma_{ij}\ n_j = 0$. Для подальшого моделювання перейдемо від диференціальної до слабкої постановки задачі. Використовуючи пробні функції v_i, котрі змінюються незалежно на границі області та у об'ємі V, формулу Гауса та співвідношення між напруженнями та деформаціями: $\sigma_{ij} = c_{ijkl}\varepsilon_{kl} + d_{31}\frac{\varphi}{h}$, де c_{ijkl} - сталі, що описують пружні властивості матеріалу. Враховуючи, що п'єзотрансформатор працює у режимі, близькому до режиму механічного резонансу, унаслідок чого вимушена форма коливань близька до вільної форми, і тому складову $d_{31}\frac{\varphi}{h}$ можна вважати рівною нулю, отримаємо функціонал, котрий описує коливання п'єзосередовища для заданої задачі:

$$\int_V \frac{\partial v_1}{\partial x_1}\left(c_{11}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + c_{12}\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial v_2}{\partial x_2}\left(c_{12}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + c_{11}\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) + \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right)c_{66}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)dV + \quad +$$

$$\int_V \rho\omega^2\left(v_1 u_1 + v_2 u_2\right)dV \ = 0;$$

де $c_{66} = \left(c_{11} - c_{12}\right)/2$. Матеріал п'єзокераміки крихкий, а коливання матеріалу проходять за гармонійним законом, тому використаємо таке обмеженням на напруження: $\max(\sigma_1(t), \sigma_2(t)) \le [\sigma]$, де $\sigma_1(t), \sigma_2(t)$ - головні напруження у матеріалі, [σ] - допустимі напруження у матеріалі. Всі напруження змінюються із однаковою фазою, тому умову міцності матеріалу запишемо у вигляді:

$$\sigma_e \ = \frac{1}{2}\left(\left|\sigma_{11} + \sigma_{22}\right| + \sqrt{\left(\sigma_{11} - \sigma_{22}\right)^2 + 4\sigma_{12}{}^2}\right) \le [\sigma] \cdot$$

Оптимальним вважаємо ПТ із максимумом коефіцієнта використання матеріалу:

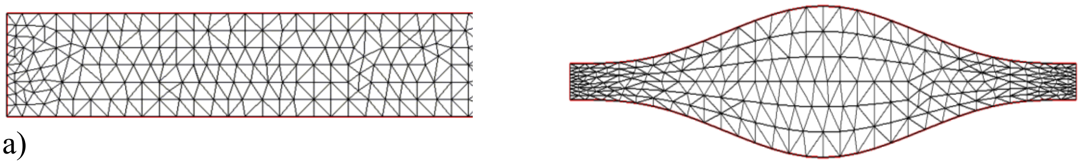
$$K_M = \frac{1}{V \cdot \max(\sigma_e)} \int_V \sigma_e dV \cdot$$

ця величина позитивна і знаходиться у межах від 0 до 1.

Як показує практика, оптимальна форма, що є результатом вирішення поставленої задачі, має нескінчену протяжність по одній із координат. Для того, щоб уникнути фізично нереалізованих форм ПТ, накладемо обмеження на довжину: будемо вважати, що довжина ПТ рівна 2L. Границю по осі Ox_2 запишемо у вигляді ряду Фур'є:

$$\pm x_2 = y_\Gamma(x_1) = \sum_{k=0}^{N} a_k \cos\left(\frac{\pi k x_1}{L}\right) + \sum_{k=1}^{N} b_k \sin\left(\frac{\pi k x_1}{L}\right).$$

У випадку симетрії границі відносно осі Ox_2 функція границі $x_2 = \pm y_\Gamma(x_1)$ має володіти властивістю $y_\Gamma(x_1) = y_\Gamma(-x_1)$, що є можливим, коли $b_i = 0$. Також введемо обмеження на об'єм п'єзоелемента: припустимо, що об'єм сталий і рівний V_0. Як відомо об'єм ПТ рівний: $V = 2h\int_{-L}^{L} y_\Gamma(x_1)dx_1$, отже $V = 4\, a_0\, h\, L$, за властивостями ряду Фур'є.



а) б)

Рис. 1. Зміна форми ПТ та тріангуляційної сітки у процесі оптимізації

Для розв'язання задачі використано програму Freefem++ версії 3.46. Програма приймає на вхід файл із скриптом, що описує алгоритм розв'язку на спеціальній С-подібній мові. При реалізації алгоритму оптимізації у якості початкового наближення використовується скінченоелементна модель у вигляді прямокутника із нерівномірною тріангуляційною сіткою (рис 1. а). У процесі оптимізації сітка деформується (рис.1 б) за законом:

$$\begin{bmatrix} \overline{x_1} \\ \overline{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \sum_{k=0}^{N} a_k \cos\left(\frac{\pi k x_1}{L}\right) \end{bmatrix},$$

де $\overline{x_i}$ - нові координати. Процес оптимізації змінює коефіцієнти, a_k так, щоб значення корисної функції - коефіцієнта використання матеріалу збільшувалось. У якості алгоритму оптимізації використовується метод Нелдера-Міда описаний в [1] та [2].

Підпрограма обчислення функції мети отримує вектор змінних, котрі описують пропоновану геометрію. Далі перевіряється коректність пропонованої геометрії. Якщо вона не коректна, коефіцієнт використання матеріалу набуває випадкового значення у межах -200..-1 (обрання випадкового значення запобігає зациклюванню алгоритму). Якщо ж форма є коректною, то алгоритм будує квадратичні форми:

$$V_B(v,u) = \int_V \rho\omega^2 (v_1 u_1 + v_2 u_2) dV\ ;$$

$$V_A(v,u) = \int_V \frac{\partial v_1}{\partial x_1}\left(c_{11}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + c_{12}\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial v_2}{\partial x_2}\left(c_{12}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + c_{11}\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) + \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right) c_{66}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) dV\ ;$$

і на їх основі визначаються матриці А та В, котрі описують відповідну задачу. Далі за допомогою бібліотеки ARPACK, що входить у FreeFem++, будується набір із 10 власних форм коливань та відповідних їм власних чисел λ_i. Для кожного власного вектора коливань обчислюється значення максимальних напружень і коефіцієнта використання матеріалу $K_м$, знаходиться форма коливань із максимальним значенням коефіцієнта, яка і повертається як результат. Обчислення кількох власних функцій необхідне через те, що серед власних коливань є коливання згину п'єзопластини, котрі мають коефіцієнт використання матеріалу, близький до 0.

1. Nelder J.A. Mead R. A simplex method for function minimization. Computer Jornal. 7 (1965) pp. 308-313
2. Банди. Методы оптимизации. Вводный курс. - М. Радио и связь, 1988. 128 с.