СЕКЦІЯ 1. МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

УДК 519.632

І. Баран
(Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя)

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ДИФУЗІЇ ТА ФІЛЬТРАЦІЇ В СКЛАДЕНІЙ ОБЛАСТІ ІЗ ТОНКИМ ВКЛЮЧЕННЯМ

На практиці зустрічаються реальні об’єкти, в яких тонкі включення/тріщини довільно розміщені в просторі та характеризуються різними фізичними параметрами, а процеси, які в них відбуваються, є, принаймні, двовимірними. Вирішення практичних проблем потребує побудови нових математичних моделей, що враховують вплив на досліджувані процеси тонких включень/тріщин. Особливість таких моделей полягає в тому, що вони описуються крайовими та початково-крайовими задачами з умовами спряження. Як правило, це задачі з розривними розв’язками на лініях, що замінюють тонкі включення/тріщини [1].

Формулюється крайова задача в двовимірній анізотропній області. В подальшому, ця задача зводиться до деякої варіаційної задачі, яка полягає у знаходженні мінімуму відповідного функціоналу, що включає умови спряження неідеального контакту на поверхнях розриву розв’язку. На границі області можуть бути задані крайові умови I, II або III роду.

В основу моделей покладено умови узагальненого зосередженого власного джерела, які можуть описувати температурний та фільтраційний стан різноманітних складних об’єктів. Також розглянуто умови, які є частковими випадками умов спряження, зокрема: умови тришарового тонкого включення (неоднорідні) та умови із заданими стрибками розв’язку і потоку. Задачі розглядаються в декартових (x,y), циліндричних (r,z) та полярних $(r,\square)$ координатах. Розглянуто можливість заміни головної умови спряження природною умовою з малим параметром та отримано оцінка залежності розв’язку від цього параметру. Отримані нові еквівалентні узагальнені задачі.

Для розв’язування задач у варіаційній постановці використовується обчислювальний підхід – дискретизація області на основі методу скінчених елементів (МСЕ) [1]. Варто зазначити, що у побудований функціонал входять параметри крайових умов II, III роду та умов спряження. Умови мінімуму функціоналу ведуть до системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) з симетричною розрідженою додатно визначеною матрицею МСЕ. Врахування неоднорідних крайових умов першого роду відбувається програмно на етапі формування матриці МСЕ, шляхом її переформування. Зменшення ширини стрічки ненульових елементів матриці забезпечується її впорядкуванням – перенумерацією вузлів профільним методом. СЛАР розв’язується за допомогою модифікованого методу квадратних коренів.

Такий підхід на основі МСЕ дозволяє будувати обчислювальні алгоритми підвищеного порядку точності, які використовують для апроксимації області кусково - поліноміальні функції МСЕ. Експериментально доведено, що використання для апроксимації лінійних і квадратичних функцій МСЕ для однакової кількості вузлів розбиття дає розв’язки однакового порядку точності.

1. Дейнека В.С., Сергиенко И.В. Модели и методы решения задач в неоднородных средах. – Киев: Наукова думка, 2001. – 606 с.