УДК 621.791.927.7

С.Ф. Дячук, канд.техн.наук, доц.; М.М. Михайлишин, канд. фіз.-мат. наук, доц.
Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя,Україна

ОПТИМІЗАЦІЯ ІНДУКЦІЙНОГО НАГРІВУ ЦИЛІНДРИЧНИХ ДЕТАЛЕЙ

S.Dyachuk, Ph.D., Assoc. Prof.; M. Mykhailyshyn, Ph.D., Assoc. Prof.

OPTIMIZATION OF INDUCTIVE HEATING OF CYLINDRICAL PARTS

В промисловому виробництві широко застосовується індукційний нагрів з метою забезпечення деякого технологічного процесу. Найчастіше згідно типових вимог технології індукційний нагрів повинен забезпечити досягнення заданої кінцевої температури виробу з допустимою нерівномірністю по його об'єму. Для підвищення ефективності технологічного процесу повинен бути вибраний такий режим роботи індукційної установки, який забезпечує найкращі економічні показники, наприклад мінімізує енергетичні затрати.

Розглядається індукційний нагрів порожнинного циліндра, внутрішній і зовнішній радіуси якого R_1 і R_2 відповідно і довжина якого значно перевищує його діаметр. Процес теплопровідності описується рівнянням

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{a}{\lambda}u(t)v(r), \tag{1}$$

в якому $u(t)v(r) -$ густина внутрішніх теплових джерел, $v(r)$- задана функція радіуса. Температура відраховується від температури зовнішнього середовища. На внутрішній і зовнішній поверхнях виконуються умови конвективного теплообміну із зовнішнім середовищем

$$\frac{\partial T}{\partial r} - k_1 T = 0 \text{ при } r = R_1, \quad \frac{\partial T}{\partial r} + k_2 T = 0 \text{ при } r = R_2. \tag{2}$$

В початковий момент часу температура дорівнює температурі зовнішнього середовища, тобто

$$T(0, r) = 0 \tag{3}$$

Необхідно за заданий час t^* нагріти деталь до заданої температури $T^*(r)$, тобто

$$T(r, t^*) = T^*(r), \tag{4}$$

і при цьому функціонал

$$S = \int_0^{t^*} u^2(t)dt$$

приймав мінімальне значення.

Власні функції однорідної крайової задачі

$$\frac{\partial^2 X}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial X}{\partial r} + \mu^2 X = 0,$$

$$\frac{\partial X(R_1)}{\partial r} - k_1 X(R_1) = 0\,, \quad \frac{\partial X(R_2)}{\partial r} + k_2 X(R_2) = 0$$

є функції

$$X_k(r) = [k_2 Y_0(\mu_k R_2) - \mu_k Y_1(\mu_k R_2)]J_0(\mu_k r) - [k_2 J_0(\mu_k R_2) - \mu_k J_1(\mu_k R_2)]Y_0(\mu_k r),$$

в яких $\mu_k -$ корені рівняння

$$[k_2 J_0(\mu R_2) - \mu J_1(\mu R_2)][k_1 Y_0(\mu R_1) + \mu Y_1(\mu R_1)] -$$
$$-[k_2 Y_0(\mu R_2) - \mu Y_1(\mu R_2)][k_1 J_0(\mu R_1) + \mu J_1(\mu R_1)] = 0.$$

Розкладемо в ряд по власних функціях задачі задану функцію $v(r)$

$$v(r) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n X_n(r)\,, \qquad v_n = \frac{1}{\|X_n\|^2}\int_{R_1}^{R_2} v(r) X_n(r) r dr,$$

$$\|X_n\|^2 = \frac{(\mu_n^2 + k_2^2)[k_1 J_0(\mu_n R_1) + \mu_n J_1(\mu_n R_1)]^2 - (\mu_n^2 + k_1^2)[k_2 J_0(\mu_n R_2) - \mu_n J_1(\mu_n R_2)]^2}{\frac{\pi^2 \mu_n^2}{2}[k_2 J_0(\mu_n R_2) - \mu_n J_1(\mu_n R_2)]^2}.$$

Розв'язок рівняння (1) шукаємо у вигляді

$$T(r,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) X_k(r) \qquad (5)$$

Підставивши (5) в (1) отримаємо рівняння для знаходження невідомих функцій $T_k(t)$

$$\frac{\partial T_k}{\partial t} = -a\mu_k^2 T_k(t) + \frac{a}{\lambda} v_k u(t),$$

розв'язок якого при умові (3)

$$T_k(t) = \int_0^t \frac{a}{\lambda} v_k u(\tau) e^{-a\mu_k^2 (t-\tau)} d\tau, \;\; k = 1,2,\dots \qquad (6)$$

Розкладемо функцію бажаного розподілу температури $T^*(r)$ в ряд по власних функціях

$$T^*(r) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k^* X_k(r), \qquad T_k^* = \frac{1}{\|X_k\|^2} \int_{R_1}^{R_2} T^*(r) X_k(r) r dr,$$

і після задоволення умови (4) отримаємо

$$\int_0^{t^*} u(\tau) e^{-a\mu_k^2 (t^*-\tau)} d\tau = \frac{\lambda}{a v_k} T_k^*, \;\; k = 1,2,\dots \qquad (7)$$

Отже задача визначення $u(t)$ звелася до відшукання такого розв'язку нескінченної системи рівнянь (6), на якій функціонал S приймає найменше можливе значення. Ми отримали так звану нескінченно-вимірну проблему моментів. Будемо шукати наближений розв'язок задачі, обмежуючи кількість рівнянь до m. Побудуємо функцію $u^m(t)$, яка мінімізує функціонал S. Так як експоненти $e^{-a\mu_k^2 (t^*-\tau)}$ для різних k лінійно незалежні, то

$$u^m(t) = \sum_{n=1}^{m} \alpha_n \, e^{-a\mu_n^2 (t^*-\tau)}, \qquad (8)$$

де α_n – невідомі коефіцієнти. Підставляючи (7) в (6) для $k = 1,2,\dots,m$, отримаємо лінійну систему рівнянь для знаходження коефіцієнтів α_n

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{\alpha_k}{a(\mu_n^2 + \mu_k^2)} \left[1 - e^{-a(\mu_n^2 + \mu_k^2) t^*}\right] = \frac{\lambda}{a v_n} T_n^*.$$

Вибором величини m можна регулювати точність забезпечення умови (4).

Розв'язання задачі оптимізації індукційного нагріву порожнистого циліндра дозволяє визначити оптимальні потужності джерел, що забезпечують нагрів циліндра до заданої температури за заданий час t з забезпеченням бажаного розподілу температури.

Література:

1. Подстригач, Я.С. Термоупругость электропроводных тел [Текст] / Я.С. Подстригач, Я.И. Бурак, А.Р. Гачкевич, Л.В. Чернявская. – К.: Наукова думка, 1977. – 247 с.
2. Гачкевич, О. Математичне моделювання процесу індукційного нагрівання електропровідних тіл [Текст] / О. Гачкевич, Б. Дробенко // Вісник Львівського ун-ту. – 2004. − № 8. – С.97 − 111.
3. А.И.Егоров. Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами [Текст] / А.И.Егоров. – М.: Наука, 1978. – 463 с.
4. Слухоцкий, А.Е. Установки индукционного нагрева [Текст] / А.Е. Слухоцкий. – Л.: Энергоиздат, Ленинградское отделение, 1981. – 325 с.
5. Абрамовиц, М. Справочник по специальным функциям [Текст] / М.Абрамовиц, И.Стиган. – М.: Наука, 1979. – 830 с.