

# СТОХАСТИЧЕСКИЕ ЗАКОНОМЕРНОСТИ МНОЖЕСТВЕННОГО РАЗРУШЕНИЯ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

С.Р. Игнатович, В.С Краснопольский, А.Д. Кравченко

Национальный авиационный университет, Украина

**Abstract.** This paper proposes the model of crack length probability distribution, obtained on the basis of experimental data on the formation and growth of fatigue cracks. The density of this distribution corresponds to the Pareto's power law. It is shown that the Pareto distribution can be used to describe the accumulation of scattered defects in a wide range of cracking scale levels. Critical values of the Pareto's distribution exponent are validated. These values correspond to the limiting states of solids multiple destruction.

**Введение.** Соотношение между количеством и размерами дефектов сплошности является фундаментальной характеристикой поврежденности твердых тел при множественном разрушении. Данное соотношение в виде статистического распределения размера трещин широко используется для построения моделей разрушения и решения многих проблемных задач по прогнозированию несущей способности реальных конструкций.

В работах [1,2] установлено подобие эмпирических зависимостей количества дефектов  $n$  от их размера  $a$  в самом широком диапазоне масштабов повреждаемости – от микронного размерного уровня до масштабов разрушения земной коры. Например, стадийность поврежденности зоны пластической деформации перед вершиной растущей трещины характеризуется изменением распределения размеров рассеянных микродефектов от экспоненциального типа ( $n \propto \exp(-a)$ ) к степенному  $n \propto a^{-\gamma}$  [3]. На основании гипотезы о подобии множественного разрушения, показатель  $\gamma$  степенного (гиперболического) распределения микродефектов связывают с показателем  $b$  обобщенной функции Гуттенберга-Рихтера, описывающей зависимость числа сейсмических событий от их энергии [3,4]. Параметр  $b$  является диагностическим параметром тектонических событий – перед землетрясением его величина уменьшается. Такое же явление характерно разрушению металлических материалов с рассеянными трещинами [3].

С использованием статистического распределения размера дефектов решаются многие задачи, связанные с прогнозированием ресурса конструкций, вероятностной оценкой их прочности и надежности [5]. Информация о распределении размера дефектов позволяет решать задачи по оценке надежности их обнаружения при неразрушающем контроле конструкций [6], а также является базовой при прогнозировании объединения рассеянных на поверхности трещин в условиях множественного разрушения [7,8].

**Экспериментальные данные.** Воспользуемся данными экспериментального исследования усталостного разрушения плоских образцов с множественными концентраторами в виде отверстий [9]. Образцы нагружались циклическим растяжением ( $R = 0$ ) с частотой 11 Гц при трех значениях максимального номинального напряжения цикла: 80 МПа; 100 МПа и 120 МПа.

Зависимости длины трещин  $a$  от числа циклов нагружения  $N$  в размерном диапазоне  $1\text{мм} \leq a \leq 16\text{мм}$  описываются функцией вида

$$\ln a = p + hN, \quad (1)$$

где  $p$  и  $h$  – коэффициенты регрессии.

Для начальной трещины  $a_0 = 1$  мм из (1) следует

$$p = -hN_0, \quad (2)$$

где  $N_0$  – число циклов до образования начальной трещины.

Коэффициент  $h$  в (1) определяет скорость роста трещины ( $da/dN = ha$ ) и является функцией действующего напряжения. Отметим, что экспоненциальный рост усталостных трещин на начальной стадии распространения характерен для авиационных конструкций из алюминиевых сплавов [10,11].

При фиксированном уровне действующего напряжения коэффициент  $h$  задает случайную траекторию роста трещины и, следовательно, является случайной величиной. Для статистических выборок исследуемых трещин на каждом уровне действующих напряжений распределение значений данного коэффициента удовлетворительно описывается равномерным законом с плотностью распределения

$$f(h) = \frac{1}{h_{\max} - h_{\min}}, \quad (3)$$

где  $h_{\min}$  и  $h_{\max}$  – границы интервала возможных значений коэффициента  $h$ .

Интенсивность образования трещин  $\lambda$  определяется по зависимостям количества накопленных трещин  $n$  от числа циклов нагружения. Для всех исследуемых режимов нагружения такие зависимости удовлетворительно описываются линейными функциями вида

$$n = \lambda N + c, \quad (4)$$

где  $c$  – коэффициент регрессии.

**Модель размерной стохастичности длины трещин.** Статистический разброс значений длины трещин при постоянном уровне циклического напряжения обусловлен двумя случайными факторами – образованием и ростом дефектов во времени.

Если предположить, что все трещины растут с одинаковой (детерминированной) скоростью, однако каждая трещина образуется в случайный момент наработки, то разброс значений их размеров будет обусловлен исключительно продолжительностью роста – ранее возникшие трещины будут иметь большую длину. С другой стороны, вполне очевидным фактом является наличие стохастичности траекторий роста трещин при постоянном режиме нагружения [11].

Введем параметр размера  $y$ , однозначно связанный с длиной трещины соотношением  $y = \ln a$ . Принимаем, что длина трещин  $a$  измеряется в миллиметрах, а их начальная длина  $a_0 = 1$  мм. Согласно уравнению (1), запишем

$$y = p + hN, \quad (5)$$

Определим функцию распределения параметра  $y$  в фиксированный момент наработки  $N' > N_{\min}$ , где  $N_{\min}$  – пороговое значение числа циклов до образования трещин. Такая функция задает вероятность события  $y < y'$ , где  $y'$  – любое фиксированное значение параметра  $y$  при  $N'$  (рис.1).

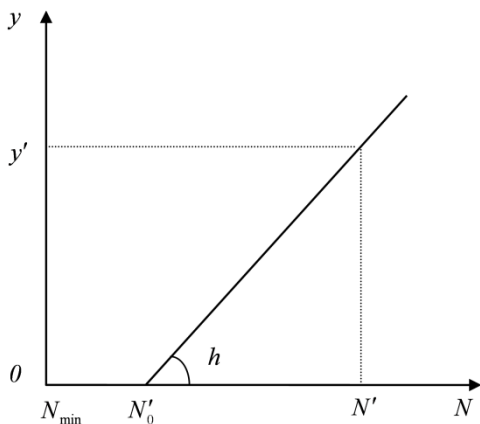


Рис. 1. Схема роста трещин.

Пусть все трещины растут с одинаковым значением параметра скорости  $h$ . Для некоторой трещины, скорость которой задается параметром  $h$ , а длина при наработке  $N'$  равна  $y'$ , число циклов до образования будет соответствовать значению  $N'_0$  (рис.1). Вполне очевидно, что в данном случае событие  $y < y'$  будет выполняться для всех трещин, которые образуются в интервале наработки  $(N'_0, N']$ . Условная функция распределения параметра  $y$

определяется из соотношения

$$F(y; N|h) = P\{y < y'; N|h\} = P\{N_0 \in (N'_0, N']|h\}, \quad (6)$$

где знак  $\wedge$  обозначает случайную величину;  $P\{\cdot\}$  – вероятность события.

Полагаем, что образование трещин отвечает пуассоновскому потоку событий, обладающим свойствами ординарности и отсутствия последствий. Согласно экспериментально установленной зависимости (4), интенсивность образования трещин  $\lambda$  в соответствующих интервалах наработки является постоянной величиной. Тогда, вероятность образования трещины в интервале наработки  $(N'_0, N']$  определится как

$$P\{N_0 \in (N'_0, N']|h\} = 1 - \exp[-\lambda(N' - N'_0)]. \quad (7)$$

С учетом того, что в (7)  $N' - N'_0 = y'/h$  (рис.1), для любых значений  $N'$  и  $y'$  выражение (6) примет вид

$$F(y|h) = 1 - \exp(-\lambda y/h). \quad (8)$$

Формула (8) задает распределение параметра размера  $y$  с учетом только одного фактора – случайного образования дефектов. Влияние случайного роста трещин на распределение их длины можно описать случайной величиной параметра скорости  $h$ . Применяя формулу полной вероятности для условной функции распределения (8), получим безусловную функцию распределения параметра размеров дефектов  $y$ :

$$G(y) = \int_{H(h)} f(h)F(y|h)dh = 1 - \int_{H(h)} f(h)\exp(-\lambda y/h)dh \quad (9)$$

где  $f(h)$  – плотность распределения параметра  $h$ ;  $H(h)$  – область его определения.

С учетом полученного эмпирического распределения параметра скорости  $h$  (3), а также принимая во внимание соотношение  $y = \ln a$  выражение (9) преобразуется к распределению длины трещины  $a$  в виде

$$f(a) = \frac{\lambda}{a(h_{\max} - h_{\min})} \left[ E_1\left(\frac{\lambda \ln a}{h_{\max}}\right) - E_1\left(\frac{\lambda \ln a}{h_{\min}}\right) \right], \quad (10)$$

где  $E_1(z) = \int_z^\infty u^{-1} \exp(-u)du$  – интегральная показательная функция.

**Осуждение результатов.** Расчеты, проведенные по формуле (10) с учетом экспериментальных значений параметров  $\lambda$ ,  $h_{\min}$  и  $h_{\max}$ , указывают на гиперболический тип функции для плотности распределения длины трещин  $a$ :

$$f(a) \cong A/a^\gamma, \quad (11)$$

где  $A$  и  $\gamma$  – постоянные, экспериментальные значения которых для различных действующих напряжений в цикле связаны регрессионной зависимостью  $A = 1,0036 \cdot \gamma - 1,0992$  (коэффициент корреляции 0,9937). С учетом естественных погрешностей аппроксимации можно принять  $A = \gamma - 1$  и записать формулу (11) как

$$f(a) = (\gamma - 1)/a^\gamma. \quad (12)$$

Распределение (12) относится к типу степенных распределений, наиболее известными из которых являются распределение Парето (или Ципфа) для непрерывных величин и распределение Юла для дискретных [13]. Например, с использованием принятых обозначений, плотность распределения длины трещин по закону Парето имеет вид

$$f(a) = \frac{\gamma - 1}{a_{\min}} \left( \frac{a_{\min}}{a} \right)^\gamma. \quad (13)$$

где  $a_{\min}$  – минимальная длина трещин в выборке (в нашем случае  $a_{\min} = 1$  мм).

Покажем, что формула (13), полученная для частного случая экспоненциального роста трещин, способна описывать общие закономерности множественного разрушения твердых тел. При этом показатель степени  $\gamma$  в (13) можно трактовать как диагностический параметр опасности множественного разрушения независимо от масштаба и ориентации трещин.

Обнаружено, что при развитии множественного разрушения металлических материалов показатель степени  $\gamma$  уменьшается до некоторого порогового значения. Например, при растяжении стали 20 окончательному разрушению соответствует значение  $\gamma \approx 2$  для рассеянных микротрещин [3]. Аналогичная закономерность имеет место и при тектонических событиях, когда перед землетрясением показатель  $b$  обобщенной функции Гутенберга-Рихтера уменьшается до критического значения  $b \approx 1$ . Учитывая связь данного показателя с параметром  $\gamma$ :  $\gamma = 2b + 1$  [4], получаем критическое значение  $\gamma = 3$ . Подобие этих проявлений множественного разрушения, которые отличающихся по масштабам на несколько порядков, объясняется особенностями (сингулярностью) для математического ожидания ( $m[a]$ ) и дисперсии ( $D[a]$ ) длины трещин по распределению Парето при  $\gamma = 2$  и  $\gamma = 3$ . Так, из формулы для плотности распределения (12) следует

$$m[a] = \frac{\gamma - 1}{\gamma - 2}, \quad D[a] = \frac{\gamma - 1}{(\gamma - 2)^2 (\gamma - 3)}.$$

При  $\gamma = 3$  разрушение реализуется за счет слияния части дефектов и формирования одной большой трещины, соизмеримой с характерным размером тела (критерий «хрупкого» множественного разрушения). При  $\gamma \rightarrow 2$  реализуется массовое слияние рассеянных дефектов, их укрупнение и переход поврежденности на более высокий размерный уровень (критерий «вязкого» множественного разрушения).

#### Список литературы

1. Ботвина Л.Р., Баренблатт Г.И. Автомодельность накопления повреждаемости // Пробл. прочности. – 1985. – №12. – С. 17-24.
2. Ботвина Л.Р. Кинетика разрушения конструкционных материалов.–М.: Наука, 1989.– 232с.
3. Ботвина Л.Р. Разрушение: кинетика, механизмы, общие закономерности. – М.: Наука, 2008. – 334с.
4. Карпинтери А., Лачидонья Дж., Пуцци С. Прогноз развития трещин в полномасштабных конструкциях на основе анализа показателя  $b$  и статистики Юла // Физическая мезомеханика. – 2008. – 11.3. – С. 75 - 87.
5. Болотин В.В. Ресурс машин и конструкций. - М.: Машиностроение, 1990. - 448 с.
6. Ignatovich S.R., Bouraoui N.I. The reliability of detecting cracks during nondestructive testing of aircraft components // Russian journal of nondestructive testing. – 2013. Vol. 49, N.5. – P. 294–300.
7. Игнатович С.Р. Прогнозирование объединения рассеянных дефектов // Пробл. прочности. – 1992. – № 2. – С. 71-77.
8. Игнатович С.Р., Кучер А.Г., Якушенко А.С., Баишта А.В. Моделирование объединения рассеянных поверхностных трещин. Сообщение 1. Вероятностная модель объединения трещин // Там же. – 2004. – № 2. – С. 21-32.
9. Игнатович С.Р., Каран Е.В. Кинетика роста усталостных трещин в образцах алюминиевого сплава Д16АТ с множественными концентраторами // Пробл. прочности. – 2015. – № 4. – С. 91-101.
10. Barter S., Molent L., Goldsmith N., Jones R. An experimental evaluation of fatigue crack growth // Engineering Failure Analysis. – 2005. – V.12. – P. 99-128.
11. Molent L., Jones R., Barter S., Pitt S. Recent developments in fatigue crack growth assessment // Int. J. Fatigue. – 2006. – V.28. – P. 1759-1768.
12. Virkler D.A., Hillberry B.M., Goel P.K. The statistical nature of fatigue crack propagation // J. Eng. Mater. Technol. – 1979. – V. 101, No. 2– P. 148–153.

13. Newman M.E.J. Power laws, Pareto distributions and Zipf's law // Contemporary Physics. – 2005. – V.46, No. 5. – P. 323-351.

## ВИЗНАЧЕННЯ ВІБРОДІАГНОСТИЧНИХ ПОКАЗНИКІВ НАЯВНОСТІ ТРІЩИНИ В ПЕРІ ЛОПАТКИ З ДИХАЮЧОЮ ТРІЩИНОЮ НОРМАЛЬНОГО ВІДРИВУ НА ВИХІДНІЙ КРОМЦІ ПРИ ОСНОВНОМУ, СУПЕР- ТА СУБГАРМОНІЧНОМУ РЕЗОНАНСАХ

Є.О. Онищенко, А.П. Зіньковський, В.О. Круц

Інститут проблем міцності імені Г.С. Писаренка НАН України,  
Київ, Україна

**Abstract.** The paper presents the results of numerical investigations on the determination of mechanisms of influence of the parameters of the breathing fatigue crack of the opening mode on the flexural vibration characteristics of the aircraft gas-turbine engine blade airfoil portion. The relations between the amplitudes of dominant harmonics of displacements and accelerations at principal, super- and subharmonic resonances are considered as the vibration diagnostic factors indicating the presence of a crack.

Робочі лопатки турбомашин працюють в жорстких умовах термосилового навантаження та навколишнього середовища, які з часом можуть бути причиною виникнення різного типу поверхневих пошкоджень, таких як забоїни, ерозійні та корозійні язви, тощо [1, 2], а також тріщин втоми.

Для діагностування тріщин в елементах конструкцій використовують різні методи досліджень. Стосовно лопаток турбомашин широко використовуються вібродіагностичні методи, які базуються на встановленні взаємозв'язку між параметрами пошкодження і зміною характеристик коливань, зокрема частоти коливань [3 - 5]. Однак, як показано в [4, 6 - 8], більш чутливими показниками наявності тріщин невеликих глибин в стрижневих елементах конструкцій є параметри, пов'язані з виникненням гармонік, кратних змушувальній частоті коливань, а також зі збудженням нелінійних резонансів, які обумовлені почерговим відкриттям-закриттям берегів тріщини в процесі циклічного деформування об'єкту дослідження.

Мета роботи полягає у визначенні вібродіагностичних показників наявності дихаючої тріщини нормального відриву в пері лопатки авіаційного газотурбінного двигуна при основному, супер- та субгармонічному резонансах.

Об'єкт дослідження - лопатка турбіни середнього тиску авіаційного газотурбінного двигуна АГТД Д 18-Т (рис. 1, а), яка виготовлена з жароміцного сплаву ЖС 26 – ВІ. Його фізико-механічні характеристики такі: модуль пружності  $E = 1,9 \cdot 10^{11}$  Па; густина  $\rho = 8570$  кг/м<sup>3</sup>; коефіцієнт Пуассона  $\mu = 0,3$ ; декремент коливань матеріалу  $\delta = 0,003$ .

Визначення характеристик вимушених коливань лопатки здійснювалося з використанням методу скінченних елементів (МСЕ). Відомо, що першим етапом в цьому випадку є створення СЕ моделі об'єкту дослідження. Зважаючи на те, що розв'язання таких задач для складних елементів конструкцій, як робочі лопатки, потребує великої кількості машинних ресурсів, в роботі розглядалася лише найменш закручена частина пера лопатки, довжина якої  $L = 0,086$  м (рис. 1, б). Для побудови СЕ моделі пера лопатки були використані широко апробовані лінійні 8-ми вузлові елементи.

Тріщина нормального відриву була нанесена на вихідній кромці пера лопатки на відстані  $x_T = 0,1L$  від торцевого перерізу лопатки зі сторони хвостовика (рис. 1, б). Вигляд тріщини в поперечному перерізі пера лопатки представлено на рис. 1, с більш темним кольором. При побудові моделі вона представляється у вигляді математичного розрізу, а