

ТЕРМОМАГНІТОЕЛЕКТРОПРУЖНІСТЬ АНІЗОТРОПНИХ ТІЛ ІЗ ПРОСТОРОВИМИ НЕПЛОСКИМИ ТОНКИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ

Я. Пастернак¹, Г. Сулим²

¹ Луцький національний технічний університет, Луцьк, Україна

² Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, Україна

Summary. Based on the application of coupling principle for continua of different dimension mathematical models of thin deformable inclusions are proposed for thermomagnetoelastic solids. Corresponding integral equations are derived and the boundary element method for their solution is developed. The key features of the latter are usage of discontinuous boundary elements, special shape functions, nonlinear mappings for smoothing the integrand at the element's boundary, and modified Kutt's quadrature for numerical evaluation of singular integrals. All these allow developing efficient numerical approach for solution of formulated problem class. Numerical example is considered, which studies thin inhomogeneity of paraboloidal shape.

Постановка проблеми. Сучасні розвинуті високотехнологічні виробництва, особливо приладів точної механіки, все частіше використовують при виготовленні різноманітних пристроїв термомагнітоелектропружні матеріали. Останні є інтелектуальними композитами, створеними на основі механічного поєднання (стохастичного чи впорядкованого) піроелектричних (сегнетоелектричних) та мігнітоелектричних (п'єзомагнітних) матеріалів, що дає можливість перетворювати поля різної фізичної природи, тобто є засобом створення давачів, пристроїв точного позиціонування тощо. У свою чергу виробництво висуває перед наукою завдання та проблеми побудови цілісних математичних моделей та методів аналізу відповідних тіл, що можуть містити як дефекти структури, так і цілеспрямовано впроваджені тонкі прошарки, що змінюють функціональні макро- та мікро-властивості цих тіл.

Аналіз відомих результатів досліджень. На даний час інтенсивно розвиваються методи аналізу взаємодії механічного, електричного та магнітного полів в анізотропних інтелектуальних матеріалах. Зокрема, це стосується і методу граничних елементів. Наприклад, Rungamornrat та Mear [1], а також Rungamornrat et al. [2] отримали симетричний метод граничних елементів типу Галеркіна для дослідження просторових тріщин у п'єзоелектричних тілах. Zhao et al. [3] запропонували метод граничних інтегральних рівнянь стосовно розширених стрибків фізико-механічних полів при вивченні систем вертикальних тріщин у магнітоелектропружному середовищі. Miñoz-Reja et al. [4] розробили тривимірний метод граничних елементів для вивчення задач механіки руйнування анізотропних магнітоелектропружних матеріалів.

Натомість задач, де враховуються теплові впливи, стосуються лише поодинокі роботи, у яких розглядаються тільки пласкі дефекти. Зокрема, у працях [5–7] розглянуто задачі термоелектропружності для трансверсально-ізотропних тіл із однією чи двома концентричними дисковими тріщинами.

Лише нещодавно вдалося отримати інтегральні рівняння тривимірної термомагнітоелектропружності анізотропних тіл довільної форми із системами отворів чи внутрішніх розрізів [8, 9], що дали можливість вивчити взаємодію полів різної фізичної природи в анізотропних тілах із просторовими тріщинами [9]. Ці ж інтегральні співвідношення дають можливість аналізу значно ширшого класу задач, зокрема і для тіл із тонкими включеннями.

Мета роботи. Побудувати інтегральні рівняння та високоточну і швидку схему методу граничних елементів для числового аналізу анізотропних термомагнітоелектропружних тіл із тонкими неплоскими включеннями, зокрема й негладкими.

Формулювання задачі. Відповідно до [8–10] у нерухомій прямокутній системі координат $Ox_1x_2x_3$ рівняння рівноваги, рівняння Максвелла (теорема Гаусса для електричного й магнітного полів) та балансові співвідношення теплопровідності у стаціонарному випадку набудуть такого вигляду:

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0, \quad D_{i,i} - q = 0, \quad B_{i,i} + b_m = 0, \quad h_{i,i} - f_h = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (1)$$

Тут σ_{ij} – компоненти тензора напружень; h_i – компоненти вектора густини теплового потоку; D_i – електричне зміщення; B_i – індукція магнітного поля; f_i – об’ємні сили; q – густина вільних зарядів; f_h – густина розподілених джерел (стоків) тепла; b_m – об’ємна густина постійного електричного струму, яка для діелектрика є нульовою. У формулах прийняте правило Айнштайна підсумовування за індексом, що повторюється. Кома в індексах означає операцію диференціювання за координатою, індекс якої стоїть після коми, тобто, $u_{i,j} \equiv \partial u_i / \partial x_j$.

Визначальні співвідношення лінійної термомагнітоелектропружності та теплопровідності відповідно до [10] мають такий вигляд:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= C_{ijkm} u_{k,m} - e_{pij} E_p - h_{pij} H_p - \beta_{ij} \theta, \\ D_i &= e_{ikm} u_{k,m} + \kappa_{ip} E_p + \gamma_{ip} H_p + \chi_i \theta, \\ B_i &= h_{ikm} u_{k,m} + \gamma_{ip} E_p + \mu_{ip} H_p - \nu_i \theta, \\ h_i &= -k_{ij} \theta_{,j}, \end{aligned} \quad (2)$$

де u_i – переміщення точок тіла; ϕ – електричний потенціал; ψ – потенціал стаціонарного магнітного поля; θ – зміна температури порівняно з відліковою; C_{ijkm} – пружні сталі; k_{ij} – коефіцієнти теплопровідності; β_{ij} – модулі теплового розширення (коефіцієнти теплових напружень); e_{ijk} – п’єзоелектричні сталі; κ_{ij} – діелектричні сталі матеріалу; h_{ijk} – п’єзомагнітні сталі; μ_{ij} , γ_{ij} – магнітна та електромагнітна проникності матеріалу; χ_i – піроелектричні коефіцієнти; ν_i – піромагнітні коефіцієнти. Тензори з компонентами C_{ijkm} , k_{ij} , κ_{ij} , μ_{ij} , γ_{ij} та β_{ij} вважаються симетричними.

Рівняння (1) та (2) зручно подати у такому уніфікованому вигляді:

$$\tilde{\sigma}_{Ij,j} + \tilde{f}_I = 0, \quad h_{i,i} - f_h = 0; \quad (3)$$

$$\tilde{\sigma}_{Ij} = \tilde{C}_{IjKlm} \tilde{u}_{K,m} - \tilde{\beta}_{Ij} \theta, \quad h_i = -k_{ij} \theta_{,j}, \quad (4)$$

де

$$\begin{aligned} \tilde{u}_i &= u_i, \quad \tilde{u}_4 = \phi, \quad \tilde{u}_5 = \psi; \quad \tilde{f}_i = f_i, \quad \tilde{f}_4 = -q, \quad \tilde{f}_5 = b_m; \\ \tilde{\sigma}_{ij} &= \sigma_{ij}, \quad \tilde{\sigma}_{4j} = D_j, \quad \tilde{\sigma}_{5j} = B_j; \\ \tilde{C}_{ijkm} &= C_{ijkm}, \quad \tilde{C}_{ij4m} = e_{mij}, \quad \tilde{C}_{4jkm} = e_{jkm}, \quad \tilde{C}_{4j4m} = -\kappa_{jm}, \\ \tilde{C}_{ij5m} &= h_{mij}, \quad \tilde{C}_{5jkm} = h_{jkm}, \quad \tilde{C}_{5j5m} = -\mu_{jm}, \\ \tilde{C}_{4j5m} &= -\gamma_{jm}, \quad \tilde{C}_{5j4m} = -\gamma_{jm}; \\ \tilde{\beta}_{ij} &= \beta_{ij}, \quad \tilde{\beta}_{4j} = -\chi_j, \quad \tilde{\beta}_{5j} = \nu_j. \end{aligned} \quad (5)$$

Тут і далі позначені великими літерами індекси змінюються від 1 до 5, а малими – від 1 до 3, тобто, $I = 1, 2, \dots, 5$. $i = 1, 2, 3$.

Відповідно до [9] крайові задачі для диференціальних рівнянь в частинних похідних (3), (4) у випадку тіла з поверхнями розриву фізико-механічних полів зводиться до розв’язування таких систем гіперсингулярних інтегральних рівнянь:

– теплопровідності

$$\frac{1}{2}\Sigma\theta(\mathbf{x}_0) = \iint_S \Theta^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)\Sigma h_n(\mathbf{x})dS(\mathbf{x}) - \text{CPV} \iint_S H^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)\Delta\theta(\mathbf{x})dS(\mathbf{x}),$$

$$\frac{1}{2}\Delta h_n(\mathbf{x}_0) = n_i(\mathbf{x}_0) \left[\text{CPV} \iint_S \Theta_i^{**}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)\Sigma h_n(\mathbf{x})dS(\mathbf{x}) - \right. \quad (6)$$

$$\left. - \text{HFP} \iint_S H_i^{**}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)\Delta\theta(\mathbf{x})dS(\mathbf{x}) \right],$$

– термомагнітоелектропружності

$$\frac{1}{2}\Delta\tilde{t}_l(\mathbf{x}_0) = n_j \left[\text{CPV} \iint_S D_{ljk}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)\Sigma\tilde{t}_k(\mathbf{x})dS(\mathbf{x}) - \text{HFP} \iint_S S_{ljk}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)\Delta\tilde{u}_k(\mathbf{x})dS(\mathbf{x}) \right. \quad (7)$$

$$\left. + \text{CPV} \iint_S Q_{lj}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)\Delta\theta(\mathbf{x})dS(\mathbf{x}) + \iint_S W_{lj}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)\Sigma h_n(\mathbf{x})dS(\mathbf{x}) \right],$$

де S – поверхня розриву фізико-механічних полів з берегами S^+ та S^- відповідно; $\Sigma f = f^+ + f^-$; $\Delta f = f^+ - f^-$; n_p – компоненти одиничного вектора нормалі до поверхні S (S^+); $\tilde{t}_l = \tilde{\sigma}_{lj}n_j$ – компоненти розширеного вектора напружень; $h_n = h_i n_i$ – тепловий потік через поверхню; CPV – головне значення інтеграла за Коші (Cauchy Principal Value); HFP – скінченна частина інтеграла за Адамаром (Hadamard Finite Part). Ядра цих інтегральних залежностей подані в [9].

Моделювання тонкого включення.

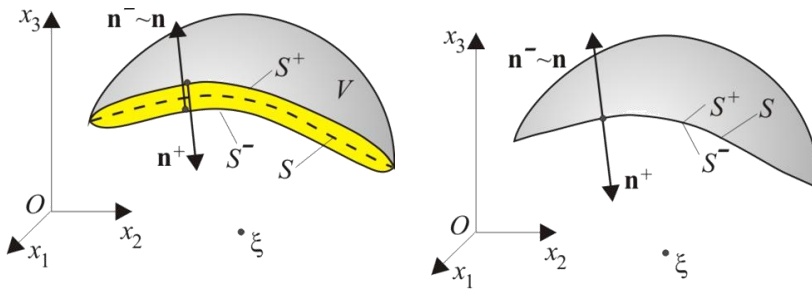


Рисунок 1. Схема моделювання тонкого включення за принципом спряження
Figure 1. Sketch for modeling of thin inclusion based on the coupling principle

У цій роботі для моделювання тонкої неоднорідності застосуємо принцип спряження континуумів різної вимірності [11] (рис. 1). Таким чином зовнішню щодо включення задачу опишемо співвідношеннями (6), (7). Модель включення отримано шляхом усереднення визначальних рівнянь (3), (4) за малою товщиною включення за припущення про податність та невеликі (порівняно з властивостями тіла) електричні, магнітні та теплові проникності його матеріалу. Відповідні рівняння записано у такому вигляді:

$$\Sigma h_n(\mathbf{x}_0) = 0; \quad \Delta h_n(\mathbf{x}_0) = \frac{k_{11}^n(\mathbf{x}_0)}{h(\mathbf{x}_0)} \Delta\theta(\mathbf{x}_0) + 2h_0(\mathbf{x}_0);$$

$$\Sigma\tilde{t}_l = 0; \quad \Delta\tilde{t}(\mathbf{x}_0) = -\frac{\mathbf{V}(\mathbf{x}_0)}{h(\mathbf{x}_0)} \Delta\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}_0) - \mathbf{v}(\mathbf{x}_0)\Sigma\theta(\mathbf{x}_0) + 2\tilde{\mathbf{t}}_0(\mathbf{x}_0); \quad (8)$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{\Omega}^T \mathbf{C}_{33}^n \mathbf{\Omega}; \quad \mathbf{v} = \mathbf{\Omega}^T \tilde{\boldsymbol{\beta}}_3^n.$$

Тут $\mathbf{\Omega}$ – матриця повороту до системи координат, вісь Ox'_3 якої спрямована уздовж нормалі \mathbf{n} ; $2h$ – товщина включення; h_0 , $\tilde{\mathbf{t}}_0$ – прикладене до включення зовнішнє теплове та магніто-електро-механічне навантаження.

Співвідношення (7), (8) утворюють систему інтегральних рівнянь стосовно невідомих функцій стрибка температури $\Delta\theta$ та розширеного вектора переміщень $\Delta\tilde{\mathbf{u}}$ на берегах серединної поверхні S модельного тонкого включення. Розв'язування цих інтегральних рівнянь, особливо у випадку поверхонь неканонічної форми, зручно здійснювати числово за допомогою методу граничних елементів.

Метод граничних елементів для неплоских тонких включень. За основу візьмемо запропоновану у роботі [9] схему методу граничних елементів. Відповідно до неї поверхня S розбивається на чотирикутні квадратичні розривні граничні елементи. Це означає, що вузли колокації лежать виключно на елементі, а не на його межі. У випадку неплоских поверхонь використання таких граничних елементів дає можливість уникнути необхідності обчислення граничних переходів та градієнтів в околі точки колокації, адже остання завжди лежатиме на гладкій поверхні.

Із кожним граничним елементом пов'язується криволінійна система координат $O\xi\eta$, а сам елемент у ній відображається у квадрат $-1 \leq \xi \leq 1$, $-1 \leq \eta \leq 1$. При цьому вузли інтерполяції геометрії елемента лежать у 9 точках, для яких криволінійні координати відповідно рівні $-1; 0; 1$, а вузли колокації – у дев'яти точках, для яких $\xi = (-2/3; 0; 2/3)$; $\eta = (-2/3; 0; 2/3)$.

Крайові умови разом з невідомими крайовими функціями та функціями стрибків інтерполюються за точками колокації на кожному граничному елементі Γ_N так:

$$\mathbf{b}_N(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \mathbf{b}_N^{i,j} \phi_i(\xi) \phi_j(\eta), \quad (9)$$

де $\mathbf{b} = (\theta, \Delta\theta, \Sigma\theta, h_n, \Sigma h_n, \Delta h_n, \tilde{u}_1, \Delta\tilde{u}_1, \Sigma\tilde{u}_1, \tilde{t}_1, \Sigma\tilde{t}_1, \Delta\tilde{t}_1)^T$, а розривні функції форми задані у вигляді

$$\phi_1(\xi) = \xi \left(\frac{9}{8}\xi - \frac{3}{4} \right), \quad \phi_2(\xi) = \left(1 - \frac{3}{2}\xi \right) \left(1 + \frac{3}{2}\xi \right), \quad \phi_3(\xi) = \xi \left(\frac{9}{8}\xi + \frac{3}{4} \right). \quad (10)$$

Окрім функцій форми (10) в рівнянні (9) можна використовувати й інші, зокрема, при моделюванні фронтальної лінії тонкого включення чи тріщини з метою урахування кореневої особливості полів теплових потоків та розширених напружень функції форми для стрибків температури та розширених переміщень вибираються у вигляді [9]

$$\phi_i^\Delta(\xi) = \sqrt{1 \pm \xi} \left(\Phi_{i1}^\Delta + \sum_{j=2}^3 \Phi_{ij}^\Delta (1 \pm \xi)^{j-1} \right), \quad (11)$$

де сталі Φ_{ij}^Δ визначаються з системи рівнянь $\phi_i(\xi_j) = \delta_{ij}$ при $\xi_j = (-2/3; 0; 2/3)$.

Ці функції форми дають можливість високоточного обчислення узагальнених коефіцієнтів інтенсивності фізико-механічних полів на фронті тонкої неоднорідності [9].

Крім того, у випадку ліній зламу на поверхні S , функції форми треба вибирати з урахуванням особливостей, що виникають на цій лінії. Тому при обчисленні інтегралів (6), (7) на граничних елементах, що є дотичними до ліній зламу або фронтальної лінії включення, запропоновано використовувати нелінійні відображення

$$\xi = \frac{1}{2}(3 - \xi_1^2)\xi_1, \quad \eta = \frac{1}{2}(3 - \eta_1^2)\eta_1, \quad d\xi d\eta = \frac{9}{4}(1 - \xi_1^2)(1 - \eta_1^2)d\xi_1 d\eta_1, \quad (12)$$

що згладжують підінтегральний вираз на межі граничного елемента, оскільки якобіан заміни змінних там дорівнює нулю.

Такі відображення дають можливість істотно підвищити точність числової реалізації методу, що у свою чергу дає можливість підвищити швидкість розрахунків унаслідок використання меншої кількості елементів розбиття.

При обчисленні сингулярних та гіперсингулярних інтегралів використано перехід до полярної системи координат із подальшим застосуванням модифікованої квадратури Кутта

[9], що дає можливість без особливих складнощів визначити головне значення та скінченну частину Адамара поверхневого особливого інтегралу.

Числовий приклад. Розглянемо трансверсально-ізотропне піроелектричне середовище з тинтанату барію, що має зазначені в [12] властивості. Вивчимо тонку неоднорідність, серединна поверхня якої утворює відтинок еліптичного параболоїда обертання:

$$x_3 = \rho(x_1^2 + x_2^2), \quad x_1^2 + x_2^2 \leq R^2. \quad (13)$$

Вважатимемо, що включення є дуже податним (непроникна тріщина), адже у цьому випадку коефіцієнти інтенсивності фізико-механічних полів є найбільшими. Також припустимо, що включення майже не зазнає ефекту теплового розширення.

Нехай на поверхні включення задане самозрівноважене теплове навантаження $h_0 = \text{const}$. Додаткове механічне навантаження відсутнє: $\tilde{\mathbf{t}}_0 \equiv 0$. До термомагнітоелектропружного середовища, що містить включення, жодного іншого навантаження не прикладено.

Розіб'ємо серединну поверхню неоднорідності на 12 граничних елементів так, як зображено на рис. 2 (вигляд уздовж осі Ox_3).

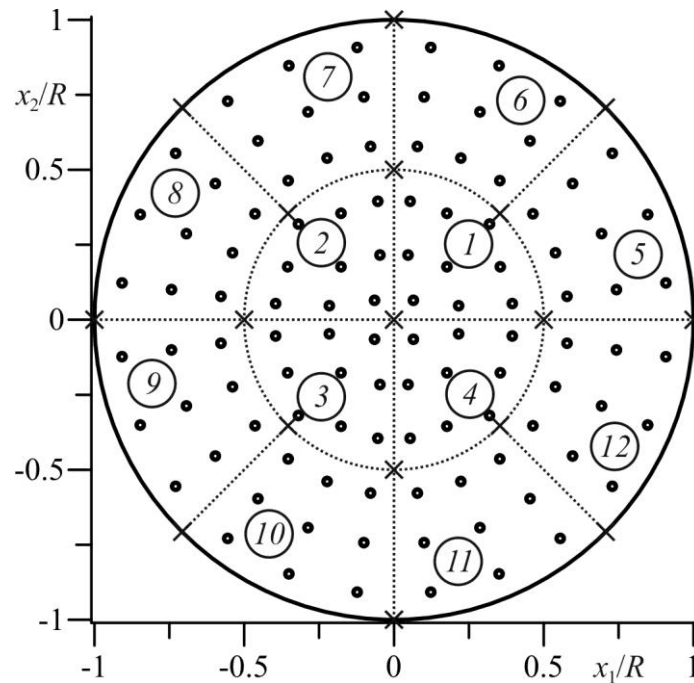


Рисунок 2. Сітка граничних елементів
Figure 2. Boundary element mesh

Дослідимо вплив параметра ρ форми серединної поверхні включення (тріщини) на коефіцієнти інтенсивності фізико-механічних полів на фронтальній лінії неоднорідності. При цьому коефіцієнтами нормування виберемо величини $K_\sigma = h_0 \beta_{11} R \sqrt{\pi R} / k_{11}$, $K_\chi = h_0 \chi_3 R \sqrt{\pi R} / k_{11}$, $K_{h_0} = -2h_0 \sqrt{R/\pi}$. Розраховані для фіксованих значень ρ (0,2; 0,4; 0,6 та 0,8) величини нормованих коефіцієнтів інтенсивності фізико-механічних полів зображено на рис. 3.

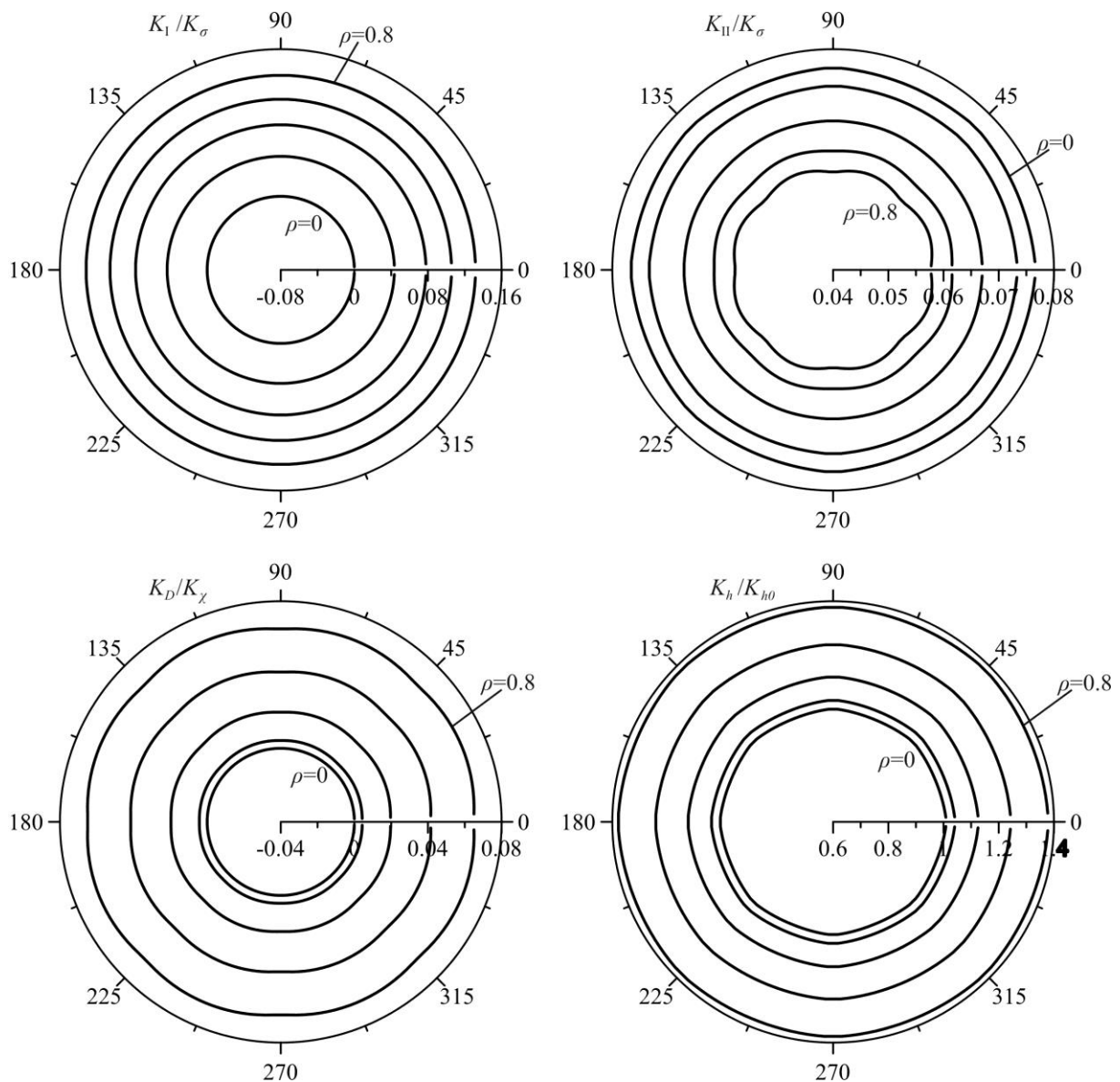


Рисунок 3. Коефіцієнти інтенсивності фізико-механічних полів на фронті включення
 Figure 3. Field intensity factors at inclusion's front line

Видно, що коефіцієнти інтенсивності фізико-механічних полів є практично сталими уздовж фронту. Незначні коливання зумовлені апроксимацією реальної колової межі поверхні квадратичними граничними елементами. Можна навіть простежити, що ці коливання є симетричними та однаковими на кожному з елементів. Проте вони лежать в межах усього 0.7 %. Сталість значень коефіцієнтів інтенсивності уздовж фронту зумовлена тим, що він лежить у площині ізотропії матеріалу середовища, а сама серединна поверхня включення (тріщина) є поверхнею обертання навколо осі поляризації Ox_3 .

У випадку $\rho = 0$ плоскої дископодібної тріщини результати розрахунків збігаються із відомими [9], що верифікує розроблений підхід. Зі збільшенням параметра ρ , що характеризує «неплоскість» тонкої неоднорідності, коефіцієнти інтенсивності напружень моди I зростають, а моди II – спадають. Коефіцієнти інтенсивності напружень моди III дорівнюють нулю. Збільшення також зазнають коефіцієнти інтенсивності теплового потоку, адже площа поверхні тріщини зі збільшенням ρ зростає. Для неплоских дефектів, на відміну від плоских, істотних значень також набуває коефіцієнт K_D інтенсивності електричного зміщення.

Висновки. Розроблено математичну модель термомагнітоелектропружного тіла із тонкими включеннями, а також метод граничних елементів, що дає можливість ефективного

(високоточного та швидкого) розв'язування відповідних просторових задач. Особливістю запропонованого граничноелементного підходу є застосування принципу спряження континуумів різної вимірності при моделюванні тонких включень, а також використання розривних граничних елементів, нелінійних відображень та модифікованих квадратур для розв'язування отриманих на основі цього принципу систем інтегральних рівнянь. При цьому за допомогою спеціальних функцій форми можна враховувати як особливості на фронті неоднорідності, так і відповідні на лініях зламу чи в кутових точках. Усе це дає можливість розв'язувати із високою точністю задачі термомагнітоелектропружності для тіл із неплоскими тонкими включеннями чи тріщинами, що не вдавалося зробити до цього часу застосуванням традиційних числових підходів, зокрема методів граничних чи скінченних елементів.

References

1. Rungamornrat J., Mear M.E. Analysis of fractures in 3D piezoelectric media by a weakly singular integral equation method, *Int J Fract*, Vol. 151, 2008, pp. 1–27.
2. Rungamornrat J., Phongtinnaboot W., Wijeyewickrema A.C. Analysis of cracks in 3D piezoelectric media with various electrical boundary conditions, *International Journal of Fracture*, Vol. 192, 2015, pp. 133–153.
3. Zhao M.H., Guo Z.H., Fan C.Y., Zhang R.L., Pan E. Three-dimensional vertical cracks in magneto-electroelastic media via the extended displacement discontinuity boundary integral equation method, *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, Vol. 24, 2013, pp. 1969–1984.
4. Muñoz-Reja M.M., Buroni F.C., Sáez A., García-Sánchez F. 3D explicit-BEM fracture analysis for materials with anisotropic multifield coupling, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 40, 2016, pp. 2897–2912.
5. Shang F., Wang Z., Li Z. Thermal stresses analysis of a three-dimensional crack in a thermopiezoelectric solid, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 55, 1996, pp. 737–750.
6. Shang F., Kuna M., Scherzer M. Analytical solutions for two penny-shaped crack problems in thermo-piezoelectric materials and their finite element comparisons, *International Journal of Fracture*, Vol. 117, 2002, pp. 113–128.
7. Kirilyuk V.S. Thermostressed state of a piezoceramic body with a plane crack in a symmetric heat flow from its surfaces, *International Applied Mechanics*, Vol. 46, 2010, pp. 753–762.
8. Pasternak I., Pasternak R., Sulym H. A comprehensive study on Green's functions and boundary integral equations for 3D anisotropic thermomagneto-electroelasticity, *Eng Anal Bound Elem*, Vol. 64, 2016 pp. 222–229.
9. Pasternak Ia., Pasternak R., Pasternak V., Sulym H. Boundary element analysis of 3D cracks in anisotropic thermomagneto-electroelastic solids, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 74, 2017, pp. 70–78.
10. Qin Q.H. Green's function and boundary elements of multifield materials, Oxford, Elsevier, 2007, 254 pp.
11. Sulym H.T. Bases of mathematical theory of thermoelastic equilibrium of deformable solids with thin inclusions, Lviv, 2007, 716 pp. [in Ukrainian]
12. Dunn M.L. Micromechanics of coupled electroelastic composites: effective thermal expansion and pyroelectric coefficients, *J Appl Phys*, Vol. 73, 1993, pp. 5131–5140.