

УДК 537.8, 539.3

**О. Король, Б. Береженко**

Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

**ДОСЛІДЖЕННЯ ПИТОМОЇ ПОТУЖНОСТІ ТЕПЛОВИХ ДЖЕРЕЛ ПРИ ІНДУКЦІЙНІМ НАГРІВАННІ ЦИЛІНДРИЧНИХ ДЕТАЛЕЙ**

**O. Korol, V. Berezhenko**

**CALCULATION AND INVESTIGATION OF HEAT SOURCES SPECIFIC CAPACITY UNDER CYLINDER PARTS INDUCTIVE HEATING**

Розроблено математичну модель для визначення питомої потужності теплових джерел, які виникають у результаті індукційного нагріву масивних циліндричних тіл. Такий нагрів використовується в технологічних процесах відновлювання експлуатаційних властивостей коліс залізничного транспорту методом нарощування їхньої робочої поверхні за допомогою заливки рідкого металу в тигель і схоплення його з підготовленою для відновлювання поверхнею.

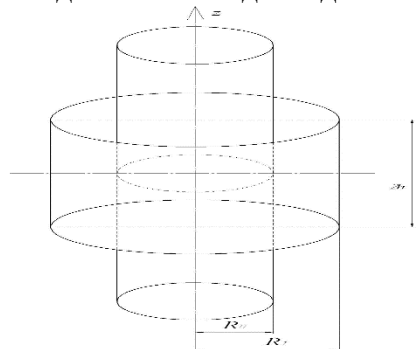


Рисунок 1 Розрахункова схема

Розглянемо довгий суцільний циліндр радіуса  $R_0$ , вісь симетрії якого співпадає з віссю  $z$ . Циліндр поміщений в коаксіальний з ним індуктор радіуса  $R_1$  і довжиною  $2h$ .

В такій області магнітна проникливість матеріалу різко падає і стає близькою до магнітної проникливості вакууму. В зв'язку з цим розглянемо випадок, коли можна вважати циліндр двохшаровим. В області I ( $R_k \leq r \leq R_0$ ) магнітна проникливість і питома об'ємна провідність  $\mu_1$  і  $\sigma_1$ , а в області II ( $0 \leq r \leq R_k$ ) - відповідно  $\mu_2$  і  $\sigma_2$ . В технічних розрахунках, як правило, приймають  $\mu_1 = \mu_0$ , а  $\mu_2 = \mu$ , де  $\mu$  - значення магнітної проникливості матеріалу до втрати ним феромагнітних властивостей. Значення питомої об'ємної провідності в технічних розрахунках приймають  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ . Рівняння для визначення комплексної амплітуди напруженостей електричного поля в області вакууму залишається без зміни у вигляді, а в областях (I) і (II) циліндра одержимо такі рівняння

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + k_i^2 - \frac{1}{r^2} \right) E^{(i)} = 0, \quad k_i^2 = -i\mu_i\omega\sigma, \quad (1)$$

$i = 1$ , якщо  $R_k \leq r \leq R_0$ ,  $i = 2$ , якщо  $0 \leq r \leq R_k$ .

Умови обмеженості розв'язку при  $r = 0$  і випромінювання на нескінченості залишаються без зміни. Умови спряження електромагнітного поля при  $r = R_0$  приймуть вигляд  $E^{(1)} = E^{(0)}$ ,

$$\frac{1}{\mu_1} \left( \frac{\partial E^{(1)}}{\partial r} + \frac{1}{r} E^{(1)} \right) = \frac{1}{\mu_0} \left( \frac{\partial E^{(0)}}{\partial r} + \frac{1}{r} E^{(0)} \right), \quad \text{при } r = R_0. \quad (2)$$

Аналогічні умови спряження повинні виконуватися на границі  $r = R_k$

$$E^{(2)} = E^{(1)}, \quad \frac{1}{\mu_2} \left( \frac{\partial E^{(2)}}{\partial r} + \frac{1}{r} E^{(2)} \right) = \frac{1}{\mu_1} \left( \frac{\partial E^{(1)}}{\partial r} + \frac{1}{r} E^{(1)} \right), \quad \text{при } r = R_k. \quad (3)$$

Застосовуючи інтегральне перетворення до рівнянь (1) і умов спряження прийдемо до наступної крайової задачі для зображення напруженості електричного поля в області циліндра

$$\left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \chi_i^2 - \frac{1}{r^2} \right) \tilde{E}^{(i)}(r, \xi) = 0, \quad \chi_i^2 = k_i^2 - \xi_2, \quad (4)$$

$i = 1$ , якщо  $R_k \leq r \leq R_0$ ;  $i = 2$ , якщо  $0 \leq r \leq R_k$ ,  $\tilde{E}^{(2)}(0, \xi)$  - обмежене.

$$\tilde{E}^{(2)} = \tilde{E}^{(1)}, \quad \frac{1}{\mu_2} \left( \frac{d\tilde{E}^{(2)}}{dr} + \frac{1}{r} \tilde{E}^{(2)} \right) = \frac{1}{\mu_1} \left( \frac{d\tilde{E}^{(1)}}{dr} + \frac{1}{r} \tilde{E}^{(1)} \right), \quad \text{при } r = R_k. \quad (5)$$

$$H_1^{(1)}(\chi_0 R_0) \frac{d\tilde{E}^{(1)}}{dr}(\xi, R_0) + \tilde{E}^{(1)}(\xi, R_0) \left[ \frac{H_1^{(1)}(\chi_0 R_0)}{R_0} - \frac{\mu_1 \chi_0}{\mu_0} H_0^{(1)}(\chi_0 R_0) \right] = -i \frac{R_1}{R_0} \mu_1 \omega j_0 \tilde{N}(\xi) H_1^{(1)}(\chi_0 R_1),$$

Загальний розв'язок в областях I і II має вигляд

$$\tilde{E}^{(i)}(\xi, r) = C_1^{(i)} J_1(\chi_i r) + C_2^{(i)} Y_1(\chi_i r), \quad i = 1, 2. \quad (6)$$

Враховуючи обмеженість розв'язку при  $r = 0$  покладемо  $C_2^{(2)} = 0$ .

Задовольняючи умови (5) знайдемо  $\tilde{E}^{(1)}(\xi, r) = \frac{i \frac{R_1}{R_0} \mu_1 \omega j_0 \tilde{N}(\xi) H_1^{(1)}(\chi_0 R_1)}{\tilde{\Delta}} [\tilde{F}_1 J_1(\chi_1 r) - \tilde{F}_2 Y_1(\chi_1 r)],$

$$\tilde{E}^{(2)}(\xi, r) = \frac{i \frac{R_1}{R_0} \mu_1 \omega j_0 \tilde{N}(\xi) H_1^{(1)}(\chi_0 R_1)}{\tilde{\Delta}} [\tilde{F}_1 J_1(\chi_1 R_k) - \tilde{F}_2 Y_1(\chi_1 R_k)] \frac{J_1(\chi_2 r)}{J_1(\chi_2 R_k)}, \quad \text{де позначено } \tilde{\Delta} = \tilde{M}_1 \tilde{F}_2 - \tilde{M}_2 \tilde{F}_1,$$

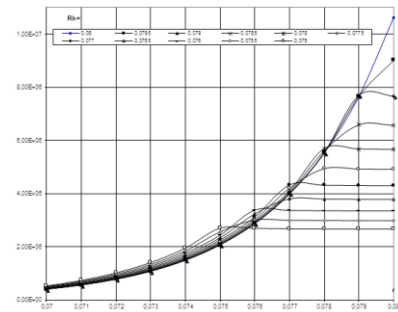


Рисунок 2 Залежність потужності джерел тепла від радіуса циліндра

$$\tilde{F}_1 = \chi_2 \mu_1 Y_1(\chi_1 R_k) J_0(\chi_2 R_k) - \chi_1 \mu_2 Y_0(\chi_1 R_k) J_1(\chi_2 R_k)$$

$$\tilde{F}_2 = \chi_2 \mu_1 J_1(\chi_1 R_k) J_0(\chi_2 R_k) - \chi_1 \mu_2 J_0(\chi_1 R_k) J_1(\chi_2 R_k),$$

$$\tilde{M}_1 = \chi_1 \mu_0 H_1^{(1)}(\chi_0 R_0) Y_0(\chi_1 R_0) - \chi_0 \mu_1 H_0^{(1)}(\chi_0 R_0) Y_1(\chi_1 R_0),$$

$$\tilde{M}_2 = \chi_1 \mu_0 H_1^{(1)}(\chi_0 R_0) J_0(\chi_1 R_0) - \chi_0 \mu_1 H_0^{(1)}(\chi_0 R_0) J_1(\chi_1 R_0).$$

Напруженість електричного поля в області циліндра отримуємо згідно з формулою. Якщо індуктор безмежної довжини, то напруженість електричного поля в області циліндра прийме вигляд

$$E^{(1)}(r) = \frac{i \frac{R_1}{R_0} \mu_1 \omega j_0 H_1^{(1)}(k_0 R_1)}{\Delta} [F_1 J_1(k_1 r) - F_2 Y_1(k_1 r)], \quad E^{(2)}(r) = \frac{i \frac{R_1}{R_0} \mu_1 \omega j_0 H_1^{(1)}(k_0 R_1)}{\tilde{\Delta}} [F_1 J_1(k_1 R_k) - F_2 Y_1(k_1 R_k)] \frac{J_1(k_2 r)}{J_1(k_2 R_k)},$$

$$\Delta = M_1 F_2 - M_2 F_1.$$

Питома потужність джерел тепловиділення обчислюємо, як і в попередньому

випадку, за формулою 
$$Q(r) = \begin{cases} \frac{\sigma}{2} E^{(1)}(r) \bar{E}^{(1)}(r), & R_k \leq r \leq R_0, \\ \frac{\sigma}{2} E^{(2)}(r) \bar{E}^{(2)}(r), & 0 \leq r \leq R_k. \end{cases} \quad (7)$$

На рисунку 2 наведено графіки залежності питомої потужності джерел тепла, піднесеної до квадрата густини струму в індукторі, від радіуса циліндра для різних значень  $R_x$ . За допомогою розробленої математичної моделі проведено дослідження залежності питомої потужності теплових джерел від частоти і сили струму в індукторі та тривалості нагрівання.