

УДК 517.944

Пирха В.–ст. гр. КС-21

Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

РОЗВ'ЯЗОК КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ 4-ГО ПОРЯДКУ В ПРЯМОКУТНІЙ ОБЛАСТІ

Науковий керівник: к.ф.-м.н., доцент Шелестовський Б.Г.

Pyrkha V.

Ternopil Ivan Pul'uj National Technical University

SOLUTION OF THE BOUNDARY TASK FOR DIFFERENTIAL 4 – ORDER EQUATION IN THE RECTANGULAR AREA

Ключові слова: краєва задача, диференціальне рівняння, граничні умови
Keywords: boundary task, differential equation, boundary condition

Розглянемо диференціальне рівняння з частинними похідними

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 0, \quad (1)$$

з граничними умовами:

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad \text{при } x = 0 \text{ та } x = a; \quad (2) \quad w = 0, \quad \text{при } y = \pm \frac{b}{2} \quad (3)$$

$$-D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = f(x), \quad \text{при } y = \pm \frac{b}{2}. \quad (4)$$

Розв'язок рівня (1) знайдемо у вигляді ряду

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m(y) \sin \frac{m\pi x}{a}. \quad (5)$$

Функція (5) задовольняє умови (2). Після підстановки (5) в (1) для визначення $Y_m(y)$ одержимо лінійне диференціальне рівняння з сталими коефіцієнтами

$$Y_m^{IV}(y) - 2 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 Y_m''(y) + \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 Y_m(y) = 0. \quad (6)$$

Загальний розв'язок рівняння (6) є лінійна комбінація фундаментальної системи розв'язків

$$Y_m(y) = A_m \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} + B_m \cdot \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} + C_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} + D_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a}. \quad (7)$$

Так як граничні умови симетричні відносно y , то функція $Y_m(y)$ повинна бути парною функцією від y , і тоді необхідно покласти $A_m = D_m = 0$ і з (5) отримаємо вираз для шуканої функції

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \left(B_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} + C_m \frac{m\pi y}{a} \cdot \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} \right) \sin \frac{m\pi x}{a}. \quad (8)$$

Задовольняючи граничні умови (3), (4), можемо знайти сталі C_m та B_m .