

Б. Г. Шелестовський, Г. В. Габрусєв

НАБЛИЖЕНЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ДЕЯКИХ НЕКОРЕКТНИХ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ

Запропоновано спосіб наближеного розв'язування некоректних задач у вигляді частинних сум узагальненого ряду Фур'є за ортогональними функціями. Застосовано методи регуляризації рівняння Фредгольма першого роду та ортогоналізації функціонального рівняння для одержання системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів полінома-розв'язку. Одержано умову для вибору оптимальної кількості його членів.

При розв'язанні багатьох прикладних задач, зокрема контактних задач теорії пружності, виникає необхідність побудови наближеного розв'язку рівняння Фредгольма першого роду

$$\int_a^b y(t) \mathbf{K}(t, r) dt = f(r), \quad a \leq r \leq b. \quad (1)$$

Як відомо [5], така задача є некоректною внаслідок порушення умови 2 означення за Адамаром. Тобто навіть малі відхилення правої частини $f(r)$, ядра $\mathbf{K}(t, r)$ чи методу розв'язування можуть призводити до настільки великих похибок у розв'язку, що він не матиме нічого спільногого із шуканою функцією. Тому тривалий час вважалося, що некоректні задачі не мають практичного значення, а їх постановка є недоцільною. І лише з появою публікацій А. М. Тихонова [5, 6], М. О. Лаврентьєва [3], А. А. Самарського, В. Я. Арсеніна, В. А. Морозова та ін. починається розвиток методів, які дозволяють будувати стійкі розв'язки таких задач. За останні роки з'явилося багато публікацій, присвячених цій тематиці, зокрема, і роботи львівських математиків [2, 4].

Розглянемо спосіб побудови наближених розв'язків рівняння Фредгольма першого роду, для яких максимальні значення відносної похибки виконання рівняння (1) не перевищували би заданих.

Регуляризацією рівняння Фредгольма першого роду за методом Лаврентьєва [3] (методом «помірного псування») отримуємо рівняння Фредгольма другого роду

$$\beta y(r) + \int_a^b y(t) \mathbf{K}(t, r) dt = f(r), \quad a \leq r \leq b, \quad \beta > 0. \quad (2)$$

Нестійкість розв'язку рівняння (1) зумовлена тим, що спектр власних значень оператора A ($Ax = f$) згущується до нуля, в результаті чого обернений оператор A^{-1} або необмежений, або не існує. Доданок βy , зсуваючи цей спектр на величину β , «покращує» обернений оператор, підвищуючи стійкість розв'язку. Потрібно лише, щоб цей зсув був помірним.

Одним із найочевидніших підходів до побудови наближеного розв'язку рівняння (2) є метод зведення інтегрального рівняння до системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Для цього шукаємо $y(r)$ у вигляді узагальненого ряду Фур'є за ортогональними функціями $\varphi_n = \sqrt{r} L(r, \gamma_n)$, де

$$L(r, \gamma_n) = N_0(\gamma_n) J_0\left(\frac{r}{a} \gamma_n\right) - J_0(\gamma_n) N_0\left(\frac{r}{a} \gamma_n\right),$$

а γ_n – додатні корені рівняння $N_0(z)J_0\left(\frac{b}{a}z\right) - J_0(z)N_0\left(\frac{b}{a}z\right) = 0$, тобто

$$y(r) = \sqrt{r} \sum_{n=1}^{\infty} a_n L(r, \gamma_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n(r).$$

Розв'язок задачі (1) або (2) шукатимемо в просторі L_2 із нормою

$$\|y(r)\|^2 = \int_a^b y^2(r) dr. \text{ Наближені розв'язки подамо у вигляді полінома}$$

$$\tilde{y}(r) = \sqrt{r} \sum_{n=1}^N a_n L(r, \gamma_n). \quad (3)$$

Враховуючи (3), інтегральне рівняння (2) запишемо у вигляді

$$\beta \sqrt{r} \sum_{n=1}^N a_n L(r, \gamma_n) + \sum_{n=1}^N a_n \int_a^b \sqrt{t} L(t, \gamma_n) K(t, r) dt = f(r), \quad a \leq r \leq b,$$

або

$$\sum_{n=1}^N a_n [\beta \sqrt{r} L(r, \gamma_n) + K_n(r)] = f(r), \quad a \leq r \leq b, \quad (4)$$

де

$$K_n(r) = \int_a^b \sqrt{t} L(t, \gamma_n) K(t, r) dt.$$

Функції $K_n(r)$ та $f(r)$ у практичних застосуваннях перетворюються в нуль при $r = a$ та $r = b$ і є кусково-неперервними на проміжку $a \leq r \leq b$. Тому кожну з них можна подати у вигляді суми узагальненого ряду Фур'є за функціями $\phi_j(r) = \sqrt{r} L(r, \gamma_j)$.

Замінивши згадані ряди N частинними сумами, будемо мати

$$K_n(r) = \sqrt{r} \sum_{j=1}^N c_j^{(n)} L(r, \gamma_j), \quad f(r) = \sqrt{r} \sum_{j=1}^N b_j L(r, \gamma_j). \quad (5)$$

Використавши ортогональність системи функцій $\sqrt{r} L(r, \gamma_j)$, одержимо

$$c_q^{(n)} = \frac{1}{M_q} \int_a^b \sqrt{r} K_n(r) L(r, \gamma_q) dr, \quad b_q = \frac{1}{M_q} \int_a^b \sqrt{r} f(r) L(r, \gamma_q) dr, \quad (6)$$

де

$$\begin{aligned} M_q &= \int_a^b r L^2(r, \gamma_q) dr = \\ &= \frac{a^2}{2(\gamma_q)^2} \left\{ \left(\frac{b}{a} \gamma_q \left[N_0(\gamma_q) J_1\left(\frac{b}{a} \gamma_q\right) - J_0(\gamma_q) N_1\left(\frac{b}{a} \gamma_q\right) \right] \right)^2 - \frac{4}{\pi^2} \right\}. \end{aligned}$$

Врахувавши (5), співвідношення (4) запишемо у вигляді

$$\sum_{n=1}^N a_n \left[\beta \sqrt{r} L(r, \gamma_n) + \sqrt{r} \sum_{j=1}^N c_j^{(n)} L(r, \gamma_j) \right] = \sqrt{r} \sum_{j=1}^N b_j L(r, \gamma_j), \quad a \leq r \leq b.$$

Помноживши ліву та праву частину останньої рівності на $\sqrt{r} L(r, \gamma_q)$ і проінтегрувавши отриману рівність по r на проміжку $[a, b]$, одержимо

$$\beta a_q M_q + \sum_{n=1}^N a_n c_q^{(n)} M_q = b_q M_q, \quad q = 1, \dots, N,$$

або остаточно

$$\sum_{n=1}^N a_n \left[c_q^{(n)} + \beta \begin{cases} 1, & n = q \\ 0, & n \neq q \end{cases} \right] = b_q, \quad q = 1, \dots, N. \quad (7)$$

Це співвідношення і дає систему N рівнянь для визначення N невідомих a_n , $n = 1, \dots, N$. Очевидно, що рівняння системи (7), а, значить, і її розв'язки a_n (отже, й функція $\tilde{y}(r)$) залежать від параметра регуляризації β .

Згідно з методом «нев'язки», запропонованим Лаврентьевим [3], значення коефіцієнта регуляризації β потрібно вибирати з умови

$$\|A\tilde{y} - f\| = \Delta f, \quad (8)$$

$$\text{де } \Delta f = \|\tilde{f}(r) - f(r)\| = \sqrt{\int_a^b [\tilde{f}(r) - f(r)]^2 dr}.$$

Оскільки при числових розрахунках рівність (8) може не виконуватись точно, доцільно мінімізувати функціонал

$$\Psi(\tilde{y}) = \left| \sqrt{\int_a^b \left[\int_a^b \mathbf{K}(r, t) \tilde{y}(t) dt - f(r) \right]^2 dr} - \Delta f \right|$$

або

$$\Psi(\tilde{y}) = \left| \beta \sqrt{\int_a^b \tilde{y}^2 dr} - \Delta f \right|.$$

Врахувавши, що

$$\tilde{y}(r) = \sqrt{r} \sum_{n=1}^N a_n L(r, \gamma_n),$$

одержимо

$$\tilde{y}^2(r) = r \left(\sum_{n=1}^N a_n L(r, \gamma_n) \right) \left(\sum_{j=1}^N a_j L(r, \gamma_j) \right) = \sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^N a_n a_j r L(r, \gamma_n) L(r, \gamma_j).$$

Отже,

$$\Psi(\tilde{y}) = \left| \beta \sqrt{\int_a^b r \sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^N a_n a_j r L(r, \gamma_n) L(r, \gamma_j) dr} - \Delta f \right| = \left| \beta \sqrt{\sum_{n=1}^N a_n^2 M_n} - \Delta f \right|.$$

Величину N – степінь полінома (3), а, значить, і кількість рівнянь в системі (7), вибираємо з умови, щоб відносна похибка виконання рівності (1) $\epsilon(N, \beta)$ не перевищувала заданої ϵ_0 :

$$\epsilon(N, \beta) = \max_{r \in [a, b]} \frac{1}{f(r)} \left(\int_a^b \tilde{y}(t) \mathbf{K}(t, r) dt - f(r) \right) \cdot 100 < \epsilon_0$$

або, враховуючи (3), в розгорнутому вигляді:

$$\epsilon(N, \beta) = \max_{r \in [a, b]} \frac{1}{f(r)} \left(\sum_{n=1}^N a_n \int_a^b \sqrt{t} L(t, \gamma_n) \mathbf{K}(t, r) dt - f(r) \right) \cdot 100 < \epsilon_0. \quad (9)$$

Розглянемо інший підхід до побудови наближеного розв'язку рівняння Фредольма першого роду (1).

Враховуючи (3), співвідношення (1) подамо у такому вигляді:

$$\sum_{n=1}^N a_n \int_a^b \sqrt{t} L(t, \gamma_n) \mathbf{K}(t, r) dt = f(r), \quad a \leq r \leq b,$$

або

$$\sum_{n=1}^N a_n \mathbf{K}_n(r) = f(r), \quad a \leq r \leq b.$$

На основі (5) останнє співвідношення перепишемо так:

$$\sum_{n=1}^N a_n \left(\sqrt{r} \sum_{j=1}^N c_j^{(n)} L(r, \gamma_j) \right) = \sqrt{r} \sum_{j=1}^N b_j L(r, \gamma_j).$$

Звідси з огляду на ортогональність системи функцій $\varphi_n(r) = \sqrt{r} L(r, \gamma_n)$ матимемо

$$\sum_{n=1}^N a_n c_q^{(n)} = b_q, \quad q = 1, \dots, N. \quad (10)$$

Зрозуміло, що числова реалізація системи (7) (метод Лаврент'єва) із по-переднім визначенням параметра регуляризації β є значно складнішою, ніж реалізація системи (10). Тому з метою вибору кращого (стосовно точності) підходу до побудови розв'язків задачі (1), доцільно провести порівняння максимальних відносних похибок виконання цієї рівності при $a \leq r \leq b$ для запропонованих вище методів.

Таке порівняння проведемо для побудови функції розподілу контактних напружень при взаємодії жорсткого кільцевого штампа з трансверсально ізотропним шаром (рис. 1).

У роботі [1] ця задача зводиться до розв'язання рівняння Фредгольма першого роду (1), де $y(r) =$

$= \sqrt{r} \cdot x(r)$ – шукана функція, $x(r)$ – функція, через яку описується розподіл контактних напружень під штампом, а також

$$K(t, r) = \sqrt{t} \int_0^\infty F(\alpha) \begin{cases} J_0(r\alpha) - J_0(a\alpha), & a \leq r < c \\ J_0(r\alpha) - J_0(b\alpha), & c \leq r \leq b \end{cases} J_0(t\alpha) d\alpha,$$

$$F(\alpha) = \frac{(1 - e^{-4\mu_1 h \alpha})(1 - e^{-4\mu_3 h \alpha})}{\varphi^*(2\mu_3, 2\mu_1, \alpha)},$$

$$\varphi^*(2\mu_3, 2\mu_1, \alpha) = 2\mu_3 (1 - e^{-4\mu_3 \alpha}) (1 + e^{-4\mu_1 \alpha}) - 2\mu_1 (1 - e^{-4\mu_1 \alpha}) (1 + e^{-4\mu_3 \alpha}),$$

$$f(r) = B^{(1)}(r) = \begin{cases} (a - r_a)^2 - (r - r_a)^2, & a \leq r \leq r_a, \\ (a - r_a)^2, & r_a \leq r < c, \\ 0, & c \leq r \leq b, \end{cases}$$

або

$$f(r) = B^{(2)}(r) = \begin{cases} 0, & a \leq r < c, \\ (b - r_b)^2, & c \leq r < r_b, \\ (b - r_b)^2 - (r - r_b)^2, & r_b \leq r \leq b. \end{cases}$$

Реалізуючи метод регуляризації Лаврент'єва, отримуємо дві системи вигляду (7) для визначення $a_n^{(1)}$ та $a_n^{(2)}$, $n = 1, \dots, N$, де $c_q^{(n)}$, b_q та M_q обчислюються за співвідношеннями (6). У цих рівностях для обчислення $a_n^{(1)}$ і $a_n^{(2)}$ використовуємо відповідно $f(r) = B^{(1)}(r)$ і $f(r) = B^{(2)}(r)$. Розв'язавши ці системи, одержимо наближення шуканої функції $x(r)$:

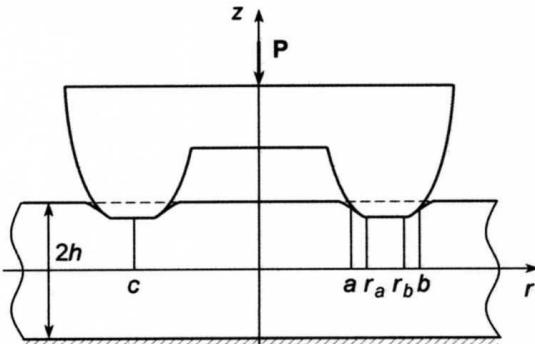


Рис. 1

$$\tilde{x}(r) = \sum_{n=1}^N (a_n^{(1)} z_1 + a_n^{(2)} z_2) L(r, \gamma_n),$$

через яку виражається функція контактних напружень:

$$\sigma_{zz}(r) = \frac{P}{2\pi a^2} \tilde{x}(r).$$

Задамо $\varepsilon_0 = 4\%$ і перевіримо для $N_1 = 11$ та $N_2 = 21$ виконання умови (9) для знайдених значень $a_n = a_n^{(1)} z_1 + a_n^{(2)} z_2$ при

$$f^*(r) = z_1 B^{(1)}(r) + z_2 B^{(2)}(r), \quad z_i = \frac{1}{R_i}, \quad i = 1, 2,$$

де R_i – радіуси кривини парабол, обертанням яких утворено штамп.

Числові розрахунки виконано для таких випадків геометричних параметрів штампа:

- 1) $a = 0.4, \quad b = 1.0, \quad r_a = r_b = 0.7;$
 - 2) $a = 0.4, \quad b = 1.0, \quad r_a = 0.55, \quad r_b = 0.85.$
- (11)

Для $N = 11$ і $N = 21$ отримано відповідно такі значення відносних похибок:

$$\varepsilon_1(N = 11) = 6.9\%, \quad \varepsilon_1(N = 21) = 1.9\%,$$

$$\varepsilon_2(N = 11) = 9.6\%, \quad \varepsilon_2(N = 21) = 0.9\%.$$

Отже, для побудови наближення функцій розподілу контактних напружень з використанням методу Лаврентьєва (формула (7)), щоб задовільнялась умова (9), достатньо вибрати $N = 21$.

Графіки функції $\tilde{x}(r)$ для випадків 1 і 2 значень геометричних параметрів штампа (11) зображені на рис. 2 і 3 відповідно при $N = 11$ і $N = 21$.

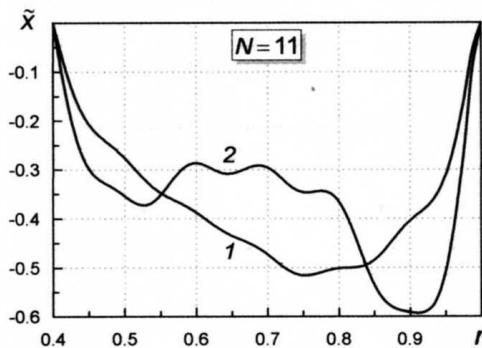


Рис. 2

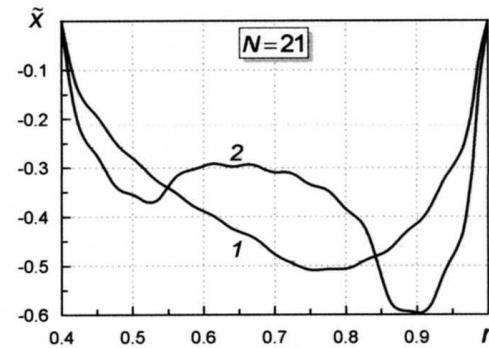


Рис. 3

З метою порівняння виконано розрахунки за методикою зведення рівняння Фредгольма першого роду (1) до системи алгебраїчних рівнянь вигляду (10).

Вибираючи $N = 11$ та $N = 21$, для розглянутих вище випадків 1 і 2 значень геометричних параметрів штампа (11) відповідно одержимо такі значення відносних похибок:

$$\varepsilon_1(N = 11) = 7.1\%, \quad \varepsilon_1(N = 21) = 2.1\%,$$

$$\varepsilon_2(N = 11) = 10.1\%, \quad \varepsilon_2(N = 21) = 2.7\%.$$

Отже, запропоновані підходи до побудови наближеного розв'язку задачі (1) при $N = 21$ цілком задовільняють практичні потреби. Зауважимо, що застосування методу Лаврентьєва дає більш точне наближення розв'язку, ніж у випадку побудови розв'язку системи алгебраїчних рівнянь вигляду (10), яка є простішою з точки зору реалізації.

- Габрусєв Г. В. Осесиметрична контактна задача термопружності про тиск кільцевого штампу на трансверсально-ізотропний шар // Віsn. Тернопіль. держ. техн. ун-ту. – 2005. – **10**, № 1. – С. 30–37.
- Герасимчук О. Б., Рибицька О. М. Нормальний розв'язок інтегрального рівняння першого роду зі слабкою особливістю // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2005. – **48**, № 2. – С. 43–52.
- Лаврентьев М. А. О некоторых некорректных задачах математической физики. – Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1962. – 92 с.
- Сяваево М. С., Пасечник Т. В., Рыбыцька О. М. Псевдообратный оператор и рациональные алгоритмы нормального решения интегральных уравнений Фредгольма первого рода // Электрон. моделирование. – 1995. – **17**, № 1. – С. 10–16.
- Тихонов А. Н. О регуляризации некорректно поставленных задач // Докл. АН СССР. – 1963. – **153**, № 1. – С. 49–52.
- Тихонов А. Н., Гончарский А. В., Степанов В. В., Ягола А. Г. Численные методы решения некорректных задач. – Москва: Наука, 1990. – 231 с.

**ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ НЕКОРРЕКТНЫХ
ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ**

Предложен способ приближенного решения некорректных задач в виде частичных сумм обобщенного ряда Фурье по ортогональным функциям. Применены методы регуляризации уравнения Фредгольма первого рода и ортогонализации функционального уравнения для получения системы линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов полинома-решения. Найдено условие для выбора оптимального количества его членов.

**APPROXIMATE SOLUTION OF SOME ILL-POSED
PROBLEMS OF ELASTICITY THEORY**

A way of approximation of solution of ill-posed problem in the form of partial sums of Fourier series by orthogonal functions is proposed. The methods of regularization of the first-kind Fredholm-type equation and orthogonalization of the functional equation for finding a linear algebraic equations system relative to the polynomial's coefficients are applied. The condition for choice of optimum quantity of its terms is obtained.

Тернопіль. держ. техн.
ун-т ім. Івана Пулюя, Тернопіль

Одержано
10.03.06 |