УДК 539.3

Б. Г. Шелестовський[1], *Г. В. Габрусєв*[1]

Контактна задача про тиск кільцевого штампа на шар, що лежить на основі з вирізом, із урахуванням залишкових деформацій

Контактні задачі пружності та термопружності є теоретичною основою розрахунків на міцність конструкцій елементів деталей машин та вузлів приладів. Особливо важливим є дослідження впливу залишкових деформацій, що виникли в зварювальних конструкціях в результаті контактної взаємодії їх з твердими жорсткими або пружними тілами [1]. Нижче подано аналітико-числову методику одержання формул контактних напружень у шарі із залишковими деформаціями, в який втискується жорсткий кільцевий штамп.

Розглянемо плоско паралельний ізотропний шар скінченної товщини h, що лежить на абсолютно гладкій жорсткій основі з вирізом у формі циліндра радіуса d. У шар силою P, лінія дії якої збігається з віссю вирізу основи, втискується жорсткий, гладкий штамп, що є тілом обертання фігури, обмеженої двома вітками півпарабол, спряжених у своїх вершинах з відрізком прямої, перпендикулярним до осі обертання. Осі парабол паралельні до лінії дії сили втискування. У кільцевій області контакту у шарі в результаті зварювання відбулося зосереджене нагрівання, що зумовило поле залишкових деформацій. Потрібно визначити функції розподілу контактних напружень під штампом, обумовлені дією сили P та наявністю цих залишкових деформацій.

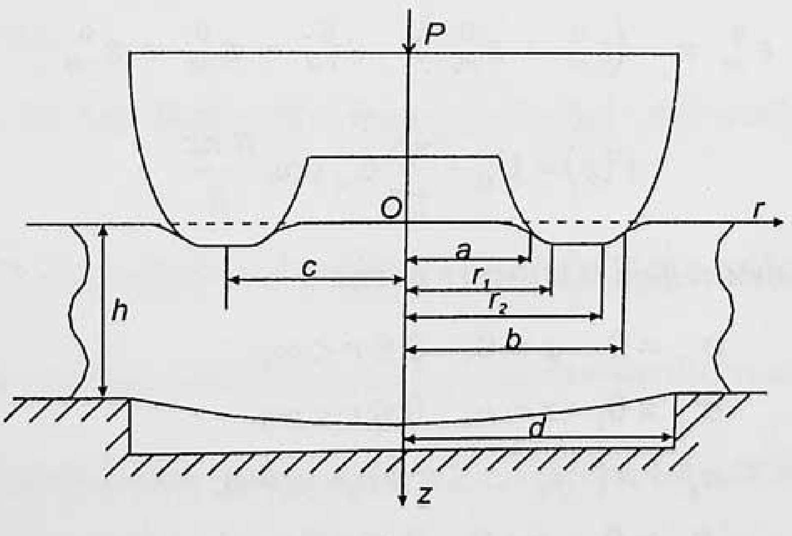

Рис. 1. Схема взаємодії кільцевого штампа з шаром, що лежить на основі з вирізом

[1] Тернопільський державний технічний університет ім. Ів. Пулюя, Тернопіль.

Для розв'язання задачі виберемо циліндричну систему координат (r,θ,z), так щоб координатна площина (O,r,θ) збіглася з верхньою граничною площиною шара, а вісь Oz була напрямлена вертикально вниз, паралельно до лінії дії сили P. Тоді функція $w(r)$, яка описуватиме вертикальні переміщення точок області контакту шару зі штампом, набере виду

$$w(r)=\begin{cases} w(a)+\dfrac{1}{2R_1}\left[(r_1-a)^2-(r_1-r)^2\right], & a\le r<r_1;\\ w(a)+\dfrac{1}{2R_1}(r_1-a)^2, & r_1\le r<c;\\ w(b)+\dfrac{1}{2R_2}(r_2-b)^2, & c\le r<r_2;\\ w(b)+\dfrac{1}{2R_2}\left[(r_2-b)^2-(r_2-r)^2\right], & r_2\le r\le b, \end{cases} \tag{1}$$

тут $c=\dfrac{r_1+r_2}{2}$, R_1 та R_2 – радіуси кривини півпарабол, обертанням яких утворено штамп.

Поле залишкових деформацій, на основі експериментальних даних [2], описується виразами

$$\varepsilon_{rr}^0=-\varepsilon_0\left(1-\omega p^2r^2\right)\exp\left(-p^2r^2\right)f(z),$$

$$\varepsilon_{\theta\theta}^0=-\varepsilon_0\left(1+\omega p^2r^2\right)\exp\left(-p^2r^2\right)f(z),$$

$$\varepsilon_{zz}^0=-\left(\varepsilon_{rr}^0+\varepsilon_{\theta\theta}^0\right),\quad \varepsilon_{r\theta}^0=\varepsilon_{rz}^0=\varepsilon_{z\theta}^0,$$

$$f(z)=C_0+\sum_{n=1}^{N_1}C_n\cos\frac{\pi nz}{h}.$$

Крайові умови задачі матимуть вигляд:

$$\begin{aligned} &\sigma_{rz}=0,\quad z=0,\quad 0\le r<\infty;\\ &\sigma_{rz}=0,\quad z=h,\quad 0\le r<\infty;\\ &u_z=w(r),\quad a\le r\le b,\quad z=0;\\ &\sigma_{zz}=0,\quad z=0,\quad 0\le r\le a,\quad b\le r<\infty;\\ &\sigma_{zz}=0,\quad z=h,\quad 0\le r<d;\\ &u_z=0,\quad z=h,\quad d\le r<\infty. \end{aligned} \tag{2}$$

тут $\sigma_{i,j} = \bar{\sigma}_{i,j} + \bar{\bar{\sigma}}_{i,j}$, де $\bar{\sigma}_{i,j}$ – компоненти напруженого стану, що відповідають частковому розв'язку рівнянь рівноваги та полю залишкових деформацій і визначаються за формулами

$$\frac{\bar{\sigma}_{zz}}{G\varepsilon_0} = m_2 \left\{ \left[2\left(\nu - 2 - \nu\omega + \omega\nu p^2 r^2\right) \right] \exp\left(-p^2 r^2\right) \cdot f(z) + \right.$$

$$+ \frac{\pi^2}{p^2} \sum_{n=1}^{N_1} n^2 C_n \cos\frac{\pi n z}{h} \int_0^\infty \frac{\alpha}{\alpha^2 h^2 + \pi^2 n^2} \left[\nu \Phi_2(\alpha) + 5 - 4\nu + \frac{\omega\alpha^2}{4p^2} - \right.$$

$$\left. \left. - \frac{\pi^2 n^2}{\alpha^2 h^2 + \pi^2 n^2} \Phi_2(\alpha) \right] \cdot \exp\left(-\frac{\alpha^2}{4p^2}\right) \cdot J_0(\alpha r) d\alpha \right\};$$

$$\frac{\bar{\sigma}_{rz}}{G\varepsilon_0} = \frac{m_2 h \pi}{p^2} \sum_{n=1}^{\infty} n C_n \sin\frac{\pi n z}{h} \int_0^\infty \frac{\alpha^2}{\alpha^2 h^2 + \pi^2 n^2} \left[\nu - 2 - \nu\frac{\omega\alpha^2}{4p^2} + \right.$$

$$\left. \left. + \frac{\pi^2 n^2}{\alpha^2 h^2 + \pi^2 n^2} \Phi_2(\alpha) \right] \cdot \exp\left(-\frac{\alpha^2}{4p^2}\right) \cdot J_1(\alpha r) d\alpha \right\};$$

$$\Phi_1(\alpha) = 1 + \frac{\omega\alpha^2}{4p^2}, \quad \Phi_2(\alpha) = 3 + \frac{\omega\alpha^2}{4p^2}, \quad m_1 = \frac{1-2\nu}{1-\nu}, \quad m_2 = \frac{1}{1-\nu}.$$

Складові $\bar{\bar{\sigma}}_{i,j}$, що відповідають загальному розв'язку, за допомогою функції Лява

$$L = \int_0^\infty \alpha^{-2} \left\{ A(\alpha)\mathbf{sh}\,\alpha z + B(\alpha)\mathbf{ch}\,\alpha z + \alpha z \left[C(\alpha)\mathbf{sh}\,\alpha z + D(\alpha)\mathbf{ch}\,\alpha z \right] \right\} J_0(r\alpha) d\alpha$$

подамо у вигляді:

$$\bar{\bar{\sigma}}_{zz} = \frac{2G}{1-2\nu} \int_0^\infty \alpha \left\{ \left[(1-2\nu)C(\alpha) - B(\alpha) - \alpha z D(\alpha) \right] \mathbf{sh}\,\alpha z + \left[(1-2\nu)D(\alpha) - A(\alpha) - \alpha z C(\alpha) \right] \mathbf{ch}\,\alpha z \right\} J_0(\alpha r) d\alpha,$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_{rz} = \frac{2G}{1-2\nu} \int_0^\infty \alpha \left\{ \left[2\nu C(\alpha) + B(\alpha) + \alpha z D(\alpha) \right] \mathbf{ch}\,\alpha z + \left[2\nu D(\alpha) + A(\alpha) + \alpha z C(\alpha) \right] \mathbf{sh}\,\alpha z \right\} J_1(\alpha r) d\alpha.$$

Вертикальні ж переміщення точок шару обчислюватимуться за формулою:

$$u_z = \frac{1}{1-2\nu} \int_0^\infty \left\{ \left[2(1-2\nu)C(\alpha) - B(\alpha) - \alpha z D(\alpha) \right] \mathbf{ch}\,\alpha z + \left[2(1-2\nu)D(\alpha) - A(\alpha) - \alpha z C(\alpha) \right] \mathbf{sh}\,\alpha z \right\} J_0(\alpha r) d\alpha.$$

Зведення задачі до системи інтегральних рівнянь. Вимагаючи виконання крайових умов задачі (2), прийдемо до системи двох лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$2\nu C(\alpha)+B(\alpha)=0,$$

$$\left(2\nu C(\alpha)+B(\alpha)+\alpha hD(\alpha)\right)ch\alpha h+\left(2\nu D(\alpha)+A(\alpha)+\alpha hC(\alpha)\right)sh\alpha h=0, \tag{3}$$

а також системи потрійних

$$\frac{1}{1-2\nu}\int_0^\infty\left[2(1-2\nu)C(\alpha)-B(\alpha)\right]J_0(\alpha r)d\alpha=w(r),\quad a\le r\le b,$$

$$\int_0^\infty\alpha\left\{\frac{2G}{1-2\nu}\left[(1-2\nu)D(\alpha)-A(\alpha)\right]+2G\varepsilon_0^*\chi_1(\alpha)\right\}J_0(\alpha r)d\alpha=0,\quad 0\le r\le a,\ \ r\ge b, \tag{4}$$

та парних

$$\int_0^\infty\alpha\left\{\frac{2G}{1-2\nu}\Big[\left((1-2\nu)C(\alpha)-B(\alpha)-\alpha hD(\alpha)\right)\mathbf{sh}\,\alpha h+\left((1-2\nu)D(\alpha)-A(\alpha)-\alpha hC(\alpha)\right)\mathbf{ch}\,\alpha h\Big]+\right.$$

$$\left.+2G\varepsilon_0^*\chi_2(\alpha)\right\}J_0(\alpha r)d\alpha=0,\quad 0\le r\le d, \tag{5}$$

$$\frac{1}{1-2\nu}\int_0^\infty\left\{\left[2(1-2\nu)C(\alpha)-B(\alpha)-\alpha hD(\alpha)\right]\mathbf{ch}\,\alpha h+\left[2(1-2\nu)D(\alpha)-A(\alpha)-\alpha hC(\alpha)\right]\mathbf{sh}\,\alpha h\right\}\times$$

$$\times J_0(\alpha r)d\alpha=0,\qquad d\le r<\infty$$

інтегральних рівнянь.

Знайшовши з рівняння (3) функції $B(\alpha)$ та $D(\alpha)$ через $A(\alpha)$ та $C(\alpha)$, формули (4) та (5) подамо у вигляді

$$\int_0^\infty C(\alpha)J_0(\alpha r)d\alpha=\frac{m_1}{2}w(r),\quad a\le r\le b,$$

$$\int_0^\infty\alpha\left\{\frac{2G}{1-2\nu}\left[\varphi_5(\alpha)\tilde{N}(\alpha)+\varphi_6(\alpha)A(\alpha)\right]+2G\varepsilon_0^*\chi_1(\alpha)\right\}J_0(\alpha r)d\alpha=0, \tag{6}$$

$$0\le r\le a,\ \ r\ge b,$$

та

$$\int_0^\infty\alpha\left[\frac{1}{1-2\nu}\left(\varphi_1(\alpha)C(\alpha)+\varphi_2(\alpha)A(\alpha)\right)+\varepsilon_0^*\chi_2(\alpha)\right]J_0(\alpha r)d\alpha=0,\ 0\le r\le d,$$

$$\frac{1}{1-2\nu}\int_0^\infty\left[\varphi_3(\alpha)C(\alpha)+\varphi_4(\alpha)A(\alpha)\right]J_0(\alpha r)d\alpha=0,\ \ d\le r<\infty, \tag{7}$$

де

$$\chi_1(\alpha)=\sum_{n=0}^{N_1}C_n f_1(\alpha)+\sum_{n=0}^{N_1}C_n n^2 f_2(\alpha),$$

$$\chi_2(\alpha)=\sum_{n=0}^{N_1}(-1)^n C_n f_1(\alpha)+\sum_{n=0}^{N_1}(-1)^n C_n n^2 f_2(\alpha),$$

$$\varphi_s(\alpha)=\frac{\Delta_s(\alpha)}{\Delta_0(\alpha)},\quad s=\overline{1,6},$$

$$f_1(\alpha)=\frac{\varepsilon_0^{\bullet}}{2(1-\nu)}\left[\frac{\nu-2}{p^2}-\frac{\nu\omega\alpha^2}{4p^4}\right]e^{-\frac{\alpha^2}{4p^2}},$$

$$f_2(\alpha)=\frac{\varepsilon_0^{\bullet}}{2(1-\nu)}\frac{\pi^2}{p^2}\left\{\frac{1}{\alpha^2h^2+\pi^2}\left[\left(\nu-\frac{\pi^2}{\alpha^2h^2+\pi^2}\right)\left(3+\frac{\omega\alpha^2}{4p^2}\right)+5-4\nu+\frac{\omega\alpha^2}{4p^2}\right]\right\}e^{-\frac{\alpha^2}{4p^2}},$$

$\Delta_1(\alpha)=2\nu\,\mathbf{sh}\alpha h-\alpha^2h^2,$ $\qquad\Delta_2(\alpha)=-(\alpha h+\mathbf{sh}\alpha h\cdot\mathbf{ch}\alpha h),$

$\Delta_3(\alpha)=2(1-\nu)(\alpha h+\nu\,\mathbf{sh}2\alpha h),$ $\qquad\Delta_4(\alpha)=2(\nu-1)\mathbf{sh}^2\alpha h,$

$\Delta_5(\alpha)=(2\nu-1)\alpha h\cdot\mathbf{sh}\alpha h,$ $\qquad\Delta_6(\alpha)=-(\mathbf{sh}\alpha h+\alpha h\cdot\mathbf{ch}\alpha h),$

$\Delta_0(\alpha)=\alpha h\mathbf{ch}\alpha h+2\nu\,\mathbf{sh}\alpha h.$

Розв'язання системи інтегральних рівнянь. Для побудови розв'язку інтегральних рівнянь (6) та (7) продовжимо співвідношення цієї системи, визначені на нескінченних проміжках зміни на весь півнескінченний інтервал $0\le r<\infty$:

$$\int_0^\infty\alpha\left\{\frac{2G}{1-2\nu}\left(\varphi_5(\alpha)C(\alpha)+\varphi_6(\alpha)A(\alpha)\right)+2G\varepsilon_0^*\chi_1(\alpha)\right\}J_0(\alpha r)d\alpha=$$

$$=x(r)\left[U(r-a)-U(r-b)\right],\quad 0\le r<\infty, \tag{8}$$

$$\int_0^\infty\left(\varphi_3(\alpha)C(\alpha)+\varphi_4(\alpha)A(\alpha)\right)J_0(\alpha r)d\alpha=(1-2\nu)U(d-r)y(r),\ 0\le r<\infty,$$

де $U(x)=\begin{cases}1, & x\ge0,\\ 0, & x<0\end{cases}$ – функція Гевісайда.

Тут $x(r)$ та $y(r)$ – невідомі функції, які мають цілком певний фізичний зміст: $x(r)$ – функція розподілу контактних напружень під штампом, а $y(r)$ – функція вертикальних переміщень нижньої площини шару в межах $0\le r\le d$. Ці функції доцільно вибрати у вигляді

$$x(r)=\sum_{n=1}^{N_1}b_n\left[J_0\left(\frac{r}{a}\gamma_n\right)N_0(\gamma_n)-J_0(\gamma_n)N_0\left(\frac{r}{a}\gamma_n\right)\right]=\sigma_{zz}(r,0),\quad a\le r\le b, \tag{9}$$

$$y(r)=\sum_{n=1}^{N_2}a_nJ_0\left(\frac{\lambda_n r}{d}\right),\ 0\le r\le d,$$

де: λ_n та γ_n – додатні корені рівнянь $J_0(x)=0$ та $J_0\left(\frac{b}{a}x\right)N_0(x)-J_0(x)N_0\left(\frac{b}{a}x\right)=0$ відповідно, a_n та b_n – коефіцієнти, що підлягають визначенню.

Застосовуючи до співвідношень (8) формулу обернення інтегрального перетворення Ганкеля, одержимо

$$\varphi_3(\alpha)C(\alpha)+\varphi_4(\alpha)A(\alpha)=-(1-2\nu)\alpha\sum_{n=1}^{N_2}a_n\frac{\lambda_n J_1(\lambda_n)J_0(\alpha d)}{\alpha^2-\frac{\lambda_n^2}{d^2}},$$

$$\frac{2G}{1-2\nu}\left[\varphi_5(\alpha)C(\alpha)+\varphi_6(\alpha)A(\alpha)\right]+2G\varepsilon_0^*\chi_1=$$

$$=\sum_{n=1}^{N}\frac{a_n}{\alpha^2-\left(\frac{\gamma_n}{a}\right)^2}\left\{\frac{2}{\pi}J_0(a\alpha)-J_0(b\alpha)R\left(\frac{b}{a}\gamma_n,\gamma_n\right)\right\},$$

де $R\left(\frac{x}{a}\gamma_n,\gamma_n\right)=\frac{x}{a}\gamma_n\left[N_0(\gamma_n)J_1\left(\frac{x}{a}\gamma_n\right)-J_0(\gamma_n)N_1\left(\frac{x}{a}\gamma_n\right)\right].$

Визначивши з попередньої системи $A(\alpha)$ та $C(\alpha)$ і підставивши знайдені вирази в перші рівності (6) та (7), із врахуванням (1), матимемо:

$$-\sum_{n=1}^{N_2}a_n\lambda_n J_1(\lambda_n)\int_0^\infty\frac{\alpha\Delta_0(\alpha)\Delta_6(\alpha)J_0(\alpha d)}{\varphi(\alpha)\left(\alpha^2-\left(\frac{\lambda_n}{d}\right)^2\right)}\begin{Bmatrix}J_0(r\alpha)-J_0(a\alpha)\\J_0(r\alpha)-J_0(b\alpha)\end{Bmatrix}d\alpha-$$

$$-\frac{1}{2}b_n\int_0^\infty\frac{\Delta(\alpha)}{\alpha^2-\left(\frac{\gamma_n}{a}\right)^2}\left(\frac{2}{\pi}J_0(a\alpha)-J_0(b\alpha)R\left(\frac{b}{a}\gamma_n,\gamma_n\right)\right)\begin{Bmatrix}J_0(r\alpha)-J_0(a\alpha)\\J_0(r\alpha)-J_0(b\alpha)\end{Bmatrix}d\alpha=$$

$$=\frac{1}{2(1-\nu)}w(r)-\int_0^\infty\Delta(\alpha)\chi_1(\alpha)\begin{Bmatrix}J_0(r\alpha)-J_0(a\alpha)\\J_0(r\alpha)-J_0(b\alpha)\end{Bmatrix}d\alpha,\quad a\le r\le b; \tag{10}$$

$$-\sum_{n=1}^{N_2}a_n\lambda_n J_1(\lambda_n)\int_0^\infty\frac{\alpha^2\psi_1(\alpha)J_0(d\alpha)J_0(r\alpha)}{\varphi(\alpha)\left(\alpha^2-\left(\frac{\lambda_n}{d}\right)^2\right)}d\alpha+$$

$$-\frac{1}{2}b_n\int_0^\infty\frac{\alpha\psi_3(\alpha)J_0(r\alpha)}{\varphi(\alpha)\left(\alpha^2-\left(\frac{\gamma_n}{a}\right)^2\right)}\left(\frac{2}{\pi}J_0(a\alpha)-J_0(b\alpha)R\left(\frac{b}{a}\gamma_n,\gamma_n\right)\right)d\alpha=$$

$$=\int_0^\infty\left[\frac{\alpha}{\varphi(\alpha)}\psi_2(\alpha)\chi_1(\alpha)-\alpha\chi_2(\alpha)\right]J_0(r\alpha)d\alpha,\quad 0\le r\le d, \tag{11}$$

де

$$\varphi(\alpha)=2(1-\nu)\left[(2\nu-1)\alpha h\,\mathrm{sh}^3\alpha h-(\alpha h+\nu\,\mathrm{sh}2\alpha h)(\mathrm{sh}\alpha h+\alpha h\,\mathrm{ch}\alpha h)\right],$$

$$\psi_1(\alpha)=\left(\alpha^2h^2-2\nu\,\mathrm{sh}^2\alpha h\right)(\mathrm{sh}\alpha h+\alpha h\,\mathrm{ch}\alpha h)+(2\nu-1)\alpha h(\alpha h+\mathrm{sh}\alpha h\,\mathrm{ch}\alpha h)\,\mathrm{sh}\alpha h,$$

$$\psi_2(\alpha)=2(\nu-1)\left[\alpha^2h^2\mathrm{ch}^2\alpha h+\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\alpha h\,\mathrm{sh}\alpha h+2\nu\,\mathrm{sh}^2\alpha h\right].$$

Одержання системи алгебраїчних рівнянь та визначення контактних напружень. Домноживши ліву і праву частини рівняння (10) на $J_0\left(\frac{r}{a}\gamma_s\right)N_0(\gamma_s)-J_0(\gamma_s)N_0\left(\frac{r}{a}\gamma_s\right)$ та (13) на $J_0\left(\frac{r}{d}\lambda_s\right)$ і зінтегрувавши одержані співвідношення по r на проміжках $a\le r\le b$ та $0\le r\le d$ відповідно, перейдемо до системи $2N$ рівнянь з $2N$ невідомими a_n та b_n, ($n=\overline{1, N}$). Якщо ввести позначення

$$\begin{aligned} a_n&=\left[-a_n^{(1)}z_1-a_n^{(2)}z_2+a_n^{(3)}\varepsilon_0^*\right]\frac{1}{2(1-\nu)},\\ b_n&=\left[-b_n^{(1)}z_1-b_n^{(2)}z_2+b_n^{(3)}\varepsilon_0^*\right]\frac{1}{2(1-\nu)}, \end{aligned} \tag{12}$$

де $z_i=\dfrac{1}{2R_i}$, $i=1,2$, то з використанням методу суперпозиції ця система приведе до двох систем відносно невідомих $a_n^{(i)}$ та $b_n^{(i)}$, $i=1,2,3$:

$$\sum_{n=1}^{N}a_n^{(i)}x_nJ_1(x_n)\int_0^\infty\frac{\alpha\,\Delta_0(\alpha)\Delta_6(\alpha)}{\varphi(\alpha)\left[\alpha^2-\left(\frac{\lambda_n}{d}\right)^2\right]}J_0(d\alpha)I_s(\alpha)d\alpha+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}b_n^{(i)}\int_0^\infty\frac{\Delta(\alpha)\left[\frac{2}{\pi}J_0(a\alpha)-J_0(b\alpha)R\left(\frac{b}{a}\gamma_s,\gamma_s\right)\right]I_s(\alpha)}{\left[\alpha-\left(\frac{\gamma_n}{a}\right)^2\right]}d\alpha=A_s^{(i)}, \tag{13}$$

$$\sum_{n=1}^{N}a_n^{(i)}\lambda_nJ_1(\lambda_n)\lambda_sJ_1(\lambda_s)\int_0^\infty\frac{\alpha^2\psi_1(\alpha)J_0^2(d\alpha)}{\varphi(\alpha)\left[\alpha^2-\left(\frac{\lambda_n}{d}\right)^2\right]\cdot\left[\alpha^2-\left(\frac{\lambda_s}{d}\right)^2\right]}d\alpha-$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} b_n^{(i)} \lambda_s J_1(\lambda_s) \int_0^{\infty} \frac{\alpha \psi_2(\alpha)\left[\frac{2}{\pi} J_0(a\alpha) - J_0(b\alpha) R\left(\frac{b}{a}\gamma_n, \gamma_n\right)\right] J_0(d\alpha)}{\varphi(\alpha)\left[\alpha^2 - \left(\frac{\gamma_n}{a}\right)^2\right]\cdot\left[\alpha^2 - \left(\frac{\lambda_s}{d}\right)^2\right]} d\alpha = B_s^{(i)},\ s = \overline{1,N}\ (i = 1,2,3). \tag{14}$$

Тут

$$A_s^{(1)} = \int_a^{r_1} r\left[(a - r_1)^2 - (r - r_1{}^2)\right]\left[J_0\left(\frac{r}{a}\gamma_s\right) N_0(\gamma_s) - J_0(\gamma_s) N_0\left(\frac{r}{a}\gamma_s\right)\right] dr +$$

$$+ (a - r_1)^2 \left(\frac{a}{\gamma_s}\right)^2 \left(R\left(\frac{c}{a}\gamma_s, \gamma_s\right) - R\left(\frac{r_1}{a}\gamma_3, \gamma_3\right)\right),$$

$$A_s^{(2)} = (b - r_2)^2 \left(\frac{a}{\gamma_s}\right)^2 \left(R\left(\frac{r_2}{a}\gamma_s, \gamma_s\right) - R\left(\frac{c}{a}\gamma_3, \gamma_3\right)\right) + \int_{r_2}^{b} r\left[(b - r_2)^2 - (r - r_2)^2\right]$$

$$\left[J_0\left(\frac{r}{a}\gamma_s\right) N_0(\gamma_s) - J_0(\gamma_s) N_0\left(\frac{r}{a}\gamma_s\right)\right] \mathrm{dr},$$

$$A_s^{(3)} = \frac{2(1-\nu)}{\varepsilon_0}\int_0^{\infty} \Delta(\alpha)\chi_1(\alpha) I_s(\alpha) d\alpha\ ,\ B_s^{(1)} = 0,\ B_s^{(2)} = 0,$$

$$B_s^{(3)} = -\frac{2(1-\nu)}{\varepsilon_0}\lambda_s J_1(\lambda_s)\int_0^{\infty}\left[\frac{\alpha}{\varphi(\alpha)}\psi_2(\alpha)\chi_1(\alpha) - \alpha\chi_2(\alpha)\right]\frac{J_0(d\alpha)}{\alpha^2 - \left(\frac{\lambda_s}{d}\right)^2} d\alpha,$$

$$I_s(\alpha) = \left\{\frac{1}{\alpha^2 - \left(\frac{\gamma_s}{a}\right)^2} + \left(\frac{a}{\gamma_s}\right)^2\right\}\cdot\left\{\frac{2}{\pi}J_0(a\alpha) - J_0(b\alpha) R\left(\frac{b}{a}\gamma_s, \gamma_s\right)\right\} +$$

$$+ \left(\frac{a}{\gamma_s}\right)^2 \left[J_0(b\alpha) - J_0(a\alpha)\right] R\left(\frac{c}{a}\gamma_s, \gamma_s\right).$$

Розв'язавши систему (13) – (14) за співвідношеннями (12), визначимо a_n та b_n.

Величини z_i в співвідношеннях (14) знаходимо з умови рівноваги штампа та умови рівності вертикальних переміщень верхньої основи штампа при $r = r_1$ та $r = r_2$:

$$\begin{cases} 2\pi\int_a^b r\sigma_{zz}(r) dr = -P, \\ w(r_1) = w(r_2). \end{cases}$$

Або в розгорнутому вигляді

$$\begin{cases} z_1 K_1 + z_2 K_2 = \dfrac{P}{2\pi a^2} 2(1-\nu) + \varepsilon_0 K_3 \\ z_1\left[\Phi_1 - (a - z_1)^2\right] + z_2\left[\Phi_2 + (b - r_2)^2\right] = \varepsilon_0\left[\Phi_3 - \Gamma\right], \end{cases} \tag{15}$$

де

$$K_i = \sum_{n=1}^{N} b_n^{(i)} \frac{1}{\gamma_n^2}\left[R\left(\frac{b}{a}\gamma_n, \gamma_n\right) - \frac{2}{\pi}\right],$$

$$\Phi_i = \sum_{n=1}^{N} a_n^{(i)} x_n J_1(\lambda_n) \int_0^\infty \frac{\alpha\, \Delta_0(\alpha)\Delta_6(\alpha) J_0(d\alpha)}{\varphi(\alpha)\left[\alpha^2 - \left(\dfrac{\lambda_n}{d}\right)^2\right]}\left[J_0(b\alpha) - J_0(a\alpha)\right] d\alpha +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} b_n^{(i)} \int_0^\infty \frac{\Delta(\alpha)\left[\dfrac{2}{\pi} J_0(a\alpha) - J_0(b\alpha) R\left(\dfrac{b}{a}\gamma_n, \gamma_n\right)\right]}{\left[\alpha^2 - \left(\dfrac{\lambda_n}{a}\right)^2\right]}\left[J_0(b\alpha) - J_0(a\alpha)\right] d\alpha,$$

$$\Gamma = \frac{2(1-\nu)}{\varepsilon_0^*}\int_0^\infty \Delta(\alpha)\chi_1(\alpha)\left[J_0(b\alpha) - J_0(a\alpha)\right] d\alpha.$$

Після введення позначень

$$z_1 = \frac{P}{2\pi a^2} z_1^{(1)} + \varepsilon_0^* z_1^{(2)}, \qquad z_2 = \frac{P}{2\pi a^2} z_2^{(1)} + \varepsilon_0^* z_2^{(2)}, \tag{16}$$

система (18) розпадається на дві –

$$\begin{cases} z_1^{(1)} K_1 + z_2^{(1)} K_2 = 2(1-\nu), \\ z_1^{(1)}\left[\Phi_1 - (a - r_1)^2\right] + z_2^{(1)}\left[\Phi_2 + (b - r_2)^2\right] = 0; \end{cases} \tag{17}$$

$$\begin{cases} z_1^{(2)} K_1 + z_2^{(2)} K_2 = K_3, \\ z_1^{(2)}\left[\Phi_1 - (a - r_1)^2\right] + z_2^{(2)}\left[\Phi_2 + (b - r_2)^2\right] = \Phi_3 - P. \end{cases} \tag{18}$$

Розв'язавши (17) та (18), з використанням (16), (12) та (9), одержимо формули для вираження силової складової $\sigma_{zz}^{(P)}$ та складової, обумовленої наявністю залишкових деформацій $\sigma_{zz}^{(\varepsilon)}$ – залишково-деформаційної складової контактних напружень під штампом

$$\sigma_{zz}^{(P)}(r) = -\frac{P}{2\pi a^2}\cdot\frac{1}{2(1-\nu)}\sum_{n=1}^{N}\left(z_1^{(1)}b_n^{(1)} + z_2^{(1)}b_n^{(1)}\right)S_n(r),$$

$$\sigma_{zz}^{(\varepsilon)}(r) = \frac{\varepsilon_0^*}{2(1-\nu)}\sum_{n=1}^{N}\left(-z_1^{(2)}b_n^{(1)} + z_2^{(2)}b_n^{(2)} + b_n^{(3)}\right)S_n(r),$$

де

$$S_n(r) = J_0\left(\frac{r}{a}\gamma_n\right)N_0(\gamma_n) - J_0(\gamma_n)N_0\left(\frac{r}{a}\gamma_n\right).$$

Числові приклади. Проведемо дослідження впливу величини радіуса вирізу основи, а також товщини шара на розподіл силової та залишково-диформаційної складових контактних напружень. Для цього реалізуємо запропоновану в роботі схему розв'язання задачі при таких даних:

$$a = 0.4,\ b = 1.0,\ r_1 = r_2 = 0.7,\ S_1 = 1.6,\ \varpi = \frac{2}{3},\ \nu = 0.3,\ c_0 = 1,\ c_1 = 0,$$

а також:

1) – $h = 2$, d = 0,01;
2) – $h = 1$, $d = 1$;
3) – h = 1, $d = 2$.

Графіки функцій $\sigma_{zz}^{*(p)} = -\frac{2\pi a^2}{P}\sigma_{zz}^{(p)}$ – крива *1*, та $\sigma_{zz}^{*(\varepsilon)} = \frac{1}{\varepsilon_0^*}\sigma_{zz}^{(\varepsilon)}$ – крива *2*, для зазначених випадків 1, 2, 3, зображені відповідно на рисунках 2, 3, 4.

Висновки. Побудовано методику визначення контактних напружень у шарі, що лежить на гладкій жорсткій основі з вирізом, в який втискується кільцевий штамп, за наявності в шарі залишкових деформацій, зумовлених зосередженим нагріванням при зварюванні. Наведено числовий приклад

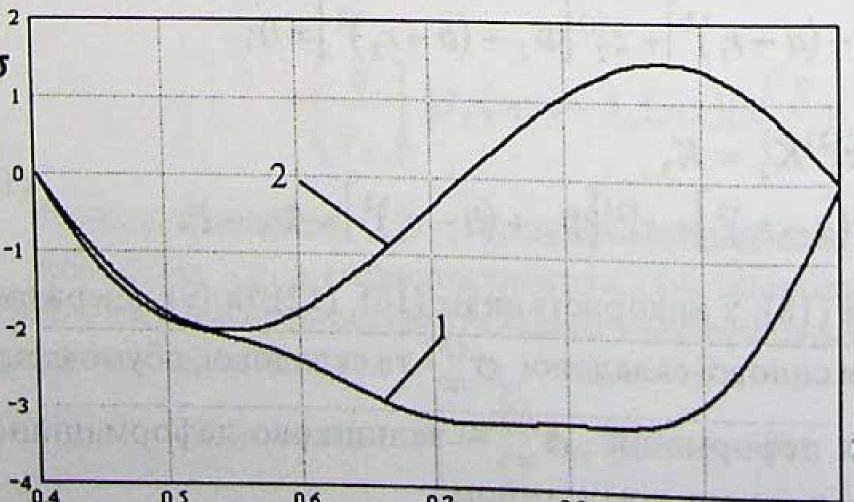

Рис. 2. Розподіл контактних напружень під штампом для значень параметрів h=2, d=0,01

і показано, що геометрія штампа і наявність у шарі вирізу та поля залишкових деформацій істотно впливає на величину і характер розподілу контактних напружень.

Summary. The method of determination of contact stresses in a fall laying on the smooth rigid notched base, in which ring punch is forced, is built the ball having residual stresses caused by the focused heating while welding. Numerical task is presented and shown that the geometry of the punch, availability of the notch and the residual stresses field effect sufficiently the degree and the character of the contact stresses distribution.

1. *Шелестовський Б., Габрусєв Г.* Контактна взаємодія штампа з шаром із залишковими деформаціями, зумовленими кільцевим зварним швом // Машинознавство. – 2003. – № 2. – С.9 – 12.

2. *Недосека А.Я.* Основы расчета сварных конструкций. – К.: Вища школа, 1998. – 263с.