

# **ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ**

**Серія механіко-математична**

**ВИПУСК 67**

*Виходить з 1965 р.*

**Львівський національний університет  
імені Івана Франка  
2007**

Міністерство освіти і науки України  
Львівський національний університет імені Івана Франка

**Вісник Львівського університету. Серія механіко-математична.** – 2007.  
– Випуск 67.

**Visnyk of the Lviv University. Series Mechanics and Mathematics.** – 2007.  
– Vol. 67.

Вісник містить статті з теорії крайових задач для диференціальних рівнянь, алгебри, топології, теорії функцій комплексного змінного, функціонального аналізу, теорії ймовірності та статистики, проблем математичного моделювання фізико-механічних процесів і механіки.

Для наукових працівників, аспірантів і студентів старших курсів.

The issue contains articles on theory of boundary value problems for differential equations, algebra, topology, complex analysis, functional analysis, probability theory and statistics, problems of mathematical modelling of physical and mechanical processes and mechanics.

For scientists, post graduates and students.

Редакційна колегія: д-р фіз.-мат. наук, проф. **В. Лянце** (почесний ред.); д-р фіз.-мат. наук, проф. **М. Зарічний** (відп. ред.); д-р фіз.-мат. наук, проф. **М. Комарницький** (заст. ред.); д-р фіз.-мат. наук, проф. **С. Лавренюк** (заст. ред.); канд. фіз.-мат. наук, доц. **О. Бугрій** (відп. секр.); д-р фіз.-мат. наук, проф. **М. Іванчов**; д-р фіз.-мат. наук, проф., член-кор. НАН України **О. Андрейків**; д-р фіз.-мат. наук, проф. **В. Андрійчук**; д-р фіз.-мат. наук, проф. **О. Артемович**; д-р фіз.-мат. наук, проф. **Т. Банак**; д-р фіз.-мат. наук, проф., член-кор. НАН України **Я. Бурак**; д-р фіз.-мат. наук, проф. **Я. Єлейко**; д-р фіз.-мат. наук, проф. **М. Заболоцький**; д-р фіз.-мат. наук, проф. **А. Кондратюк**; д-р фіз.-мат. наук, проф. **Б. Копитко**; канд. фіз.-мат. наук, проф. **Я. Прытула**; д-р фіз.-мат. наук, проф. **О. Скасків**; д-р фіз.-мат. наук, проф. **О. Сторож**; д-р фіз.-мат. наук, проф. **Г. Сулим**; д-р фіз.-мат. наук, проф. **М. Шеремета**.

Editorial board: **V. Lyantse** (honorary editor-in-chief), **M. Zarichny** (executive editor-in-chief), **M. Komarnitskyi** (associate editor), **S. Lavrenyuk** (associate editor), **O. Buhrii** (executive secretary), **M. Ivanchov**, **O. Andreykiv**, **V. Andriychuk**, **O. Artemovych**, **T. Banakh**, **Ya. Burak**, **Ya. Yeleyko**, **M. Zabolotskyi**, **A. Kondratiuk**, **B. Kopytko**, **Ya. Prytula**, **O. Skaskiv**, **O. Storozh**, **G. Sulym**, **M. Sheremeta**.

Адреса редакційної колегії:  
Львівський національний університет  
імені Івана Франка,  
механіко-математичний факультет,  
вул. Університетська, 1 79602 Львів  
Україна тел. (0322) 74-11-07  
E-mail: [diffeq@franko.lviv.ua](mailto:diffeq@franko.lviv.ua)

Editorial address:  
Ivan Franko National University  
of Lviv  
Mechanical and Mathematical department  
Universytets'ka st. 1 UA-79602 Lviv,  
Ukraine tel. +(38) (0322) 74-11-07

Редактор **Н. Плиса**

Друкується за ухвалою Вченої Ради

Львівського національного університету імені Івана Франка

© Львівський національний університет імені Івана Франка, 2007

## ЗМІСТ

<i>Боднар Тарас.</i> Оптимальний інвестиційний портфель для різних типів розподілів повернень . . . . .	5
<i>Бридун Андрій.</i> Голоморфні функції скінченного $\lambda$ -типу в півсмузі . . . . .	14
<i>Бугрій Олег.</i> Задача з початковою умовою для нелінійної параболічної варіаційної нерівності в необмеженій за просторовими змінними області . . . . .	30
<i>Волох Олександр.</i> Про цілі функції з $r$ -листими в одиничному крузі похідними . . . . .	53
<i>Габрусев Григорій.</i> Побудова наближених розв'язків рівняння Фредгольма першого роду в деяких контактних задачах теорії пружності . . . . .	59
<i>Головатий Юрій, Грабчак Геннадій.</i> Асимптотика спектра задачі Штурма-Ліувілля на геометричному графі зі збуренням густини в околі вузлів . . . . .	66
<i>Гринців Надія.</i> Обернена задача для сильно виродженого параболічного рівняння в області з вільними межами . . . . .	84
<i>Доманська Олена.</i> Нелінійні еліптичні рівняння в квазіциліндричних областях . . . . .	104
<i>Єлейко Ярослав, Киричинська Ірина, Охрім Остап.</i> Асимптотична поведінка $S$ -зупинених гіллястих процесів зі зліченною кількістю типів . . . . .	119
<i>Жерновий Юрій.</i> Стационарний розподіл імовірностей станів для одноканальної замкненої системи масового обслуговування . . . . .	130
<i>Заболоцький Тарас.</i> Властивості зліченновимірних матричних мір . . . . .	137
<i>Зеліско Михайло.</i> Модифікація узагальненого порядку цілого ряду Діріхле та її застосування . . . . .	143
<i>Йоник Лілія.</i> Групи, багаті на $AC$ -підгрупи або $CA$ -підгрупи . . . . .	149
<i>Коркун Олесь, Лавренюк Сергій.</i> Про носій розв'язку задачі Коші для нелінійного $2b$ -параболічного рівняння . . . . .	153
<i>Кшановський Іван.</i> Аналітичні в крузі з проколотим центром функції з обмеженою неванліннівською характеристикою . . . . .	166
<i>Лопушанська Галина.</i> Узагальнені розв'язки півлінійних еліптичних рівнянь із сильними степеневими особливостями на межі області . . . . .	176
<i>Лугова Любомира.</i> Про тричленну степеневу асимптотику логарифма максимального члена цілого ряду Діріхле . . . . .	191
<i>Мулява Оксана, Шеремета Мирослав.</i> Про належність абсолютно збіжних у півплощині рядів Діріхле скінченного $R$ -порядку до класу збіжності . . . . .	200
<i>Нечепуренко Максим.</i> Мішана задача для нелінійної зв'язної еволюційної системи рівнянь в обмеженій області . . . . .	207
<i>Пирч Назар.</i> Ізоморфізми вільних паратопологічних груп та вільних однорідних просторів $I$ . . . . .	224
<i>Снітко Галина.</i> Визначення невідомого множника в коефіцієнті при першій похідній в параболічному рівнянні в області з вільною межею . . . . .	233
<i>Торган Галина.</i> Мішана задача для еволюційного рівняння типу Ейдельмана в необмеженій області . . . . .	248
<i>Федусь Уляна.</i> Визначення невідомого коефіцієнта при похідній за часом у параболічному рівнянні з нелокальною умовою перевизначення . . . . .	268

## CONTENT

<i>Bodnar Taras</i> . Optimal investment portfolio for different types of asset returns distribution . . . . .	5
<i>Brydun Andriy</i> . Holomorphic functions of finite $\lambda$ -type in a half-strip . . . . .	14
<i>Buhrii Oleh</i> . Initial-value problem for nonlinear parabolic variational inequality in unbounded with respect to the space variables domain . . . . .	30
<i>Volokh Oleksandr</i> . On the entire functions with $p$ -valent derivatives in the unit disk . . . . .	53
<i>Habrusiev Hryhorii</i> . Construction of the approximate solution of the first kind Frenholm-type equation in some contact tasks of the elastic theory . . . . .	59
<i>Golovaty Yuriy, Hrabchak Hennadij</i> . Asymptotics of spectrum of Sturm-Liouville operator on networks with perturbed density . . . . .	66
<i>Hryntsiu Nadiya</i> . An inverse problem for a strongly degenerate parabolic equation in a domain with free boundaries . . . . .	84
<i>Domaska Olena</i> . Nonlinear elliptic equations in quasicylindrical domain . . . . .	104
<i>Elejko Yaroslav, Kyrychynska Iryna, Okhrin Ostap</i> . Asymptotic behaviour of the $S$ -stopped branching processes with countable state space . . . . .	119
<i>Zhernovyi Yuriy</i> . Statistical-equilibrium state probabilities distribution for the single-server closed queueing systems . . . . .	130
<i>Zabolotskyy Taras</i> . Properties of the countable matrix measures . . . . .	137
<i>Zelisko Mykhailo</i> . Modification of generalized order and as application . . . . .	143
<i>Yonyk Liliya</i> . Groups with many $A\check{C}$ -subgroups or $\check{C}A$ -subgroups . . . . .	149
<i>Korkun Oles', Lavreniuk Serhiy</i> . On a support of a solution Cauchy problem for the nonlinear $2b$ -parabolic equation . . . . .	153
<i>Kshanovskyy Ivan</i> . On the analytic in punctured discs functions with bounded Nevanlinna characteristic. . . . .	166
<i>Lopushaska Halyna</i> . Generalised solutions to semilinear elliptic equation with strong power singularities at frontiers . . . . .	176
<i>Luhova Liubomyra</i> . On three-term power asymptotic for the logarithm of the maximal term of entire Dirichlet series . . . . .	191
<i>Mylyava Osana, Sheremeta Myroslav</i> . On the belonging of Dirichlet series absolutely convergent in half-plane to a convergence class . . . . .	200
<i>Nechepurenko Maksym</i> . The mixed problem for a nonlinear coupled evolution system in a bounded domain . . . . .	207
<i>Pyrch Nazar</i> . On isomorphisms of the free paratopological groups and free homogeneous spaces I . . . . .	224
<i>Snitko Halyna</i> . Determination of unknown multiplier in the coefficient at the first derivative in a parabolic equation in a free boundary domain . . . . .	233
<i>Torhan Halyna</i> . Mixed problem for Eidelman type evolution equation in unbounded region . . . . .	248
<i>Fedus Ulyana</i> . On inverse problem for parabolic equation with unknown coefficient at the derivative with respect to time variable . . . . .	268

УДК 539.3

## ПОБУДОВА НАБЛИЖЕНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ РІВНЯННЯ ФРЕДГОЛЬМА ПЕРШОГО РОДУ В ДЕЯКИХ КОНТАКТНИХ ЗАДАЧАХ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ

Григорій ГАБРУСЕВ

Тернопільський державний технічний університет імені Івана Пулюя,  
46001, Тернопіль, вул. Руська, 56

Отримано зображення наближеного розв'язку рівняння Фредгольма першого роду у вигляді полінома за ортогональними функціями. Проаналізовано можливість застосування варіаційної задачі з нерухомими кінцями та задачі поточкового зведення розв'язку до системи лінійних алгебричних рівнянь для визначення коефіцієнтів полінома. Одержано умову для вибору оптимальної кількості членів полінома-розв'язку.

*Ключові слова:* рівняння Фредгольма першого роду, регуляризація, контактна задача, контактні напруження, розподіл напружень.

Як відомо, задача відшукування розв'язку рівняння Фредгольма першого роду

$$\int_a^b y(t) K(t, r) dt = f(r), \quad a \leq r \leq b, \quad (1)$$

де ядро  $K(t, r) \in L_2$  та права частина  $f(r) \in L_2$  – відомі функції, у зв'язку з порушенням другої умови означення [1], некоректно сформульована. Навіть дуже малі збурення правої частини  $f(r)$ , ядра  $K(t, r)$  чи методу розв'язання можуть призвести до великих похибок у побудованому розв'язку.

До середини минулого століття розгляд некоректно сформульованих задач вважався недоцільним і лише з публікаціями А.Н. Тихонова [1, 2] та М.М. Лаврентьєва [3] розпочався період розробки регуляризуючих алгоритмів. Побудові таких алгоритмів присвячені також праці львівських математиків [4, 5]. Мета нашої праці – розглянути випадки, коли наближений розв'язок задачі (1) цілком задовольняє потреби практики.

**1. Метод регуляризації нульового порядку Тихонова.** Запишемо (1) у вигляді операторного рівняння першого роду

$$Ay = f, \quad y, f \in L_2.$$

Нехай  $\delta$  – похибка задання  $f$ ,  $f^*$  – точна права частина,  $y_\beta$  – наближений, а  $y$  – точний розв'язки операторного рівняння. Оператор  $R(f, \beta)$ , залежний від параметра регуляризації  $\beta$ , називається *регуляризуючим* для заданого рівняння в околі  $f^*(r)$ , якщо:

- 1)  $R(f, \beta)$  визначений для довільних  $f \in L_2$  та  $\beta > 0$ ;
- 2) існує така функція  $\beta = \beta(\delta)$ , що для  $\forall \varepsilon > 0$  знайдеться число  $\delta(\varepsilon)$  таке, що у випадку  $\|f(r) - f^*(r)\| \leq \delta(\varepsilon)$  виконуватиметься  $\|y_\beta(r) - y(r)\| \leq \varepsilon$ , де  $y_\beta(r) = R(f, \beta(\delta))$ .

Залежність  $\beta(\delta)$  повинна бути такою, щоб при  $\delta \rightarrow 0$  також  $\beta \rightarrow 0$ , тобто наближений розв'язок повинен переходити у точний.

У методі регуляризації нульового порядку Тихонова вводиться згладжуючий функціонал

$$M^\beta[y_\beta] = \|Ay_\beta - f\|_{L_2}^2 + \beta \|y_\beta\|_{L_2}^2,$$

мінімізація якого і дає шуканий оператор  $R(f, \beta)$  [2].

Розв'язок задачі (1) будуємо в просторі  $L_2$  із нормою  $\|y(t)\|^2 = \int_a^b y^2(t) dt$ . Звідки одержимо

$$M^\beta[y_\beta] = \int_a^b \left[ \int_a^b y_\beta(t) K(t, r) dt - f(r) \right]^2 dr + \beta \int_a^b y_\beta^2(t) dt. \quad (2)$$

Будемо шукати  $y_\beta(t)$  у вигляді узагальненого ряду Фур'є за ортогональними функціями  $\varphi_n(t) = \sqrt{t} \cdot L(t, \gamma_n)$ , тобто  $y_\beta(t) = \sqrt{t} \sum_{n=1}^{\infty} a_n L(t, \gamma_n)$ , де

$$L(t, \gamma_n) = N_0(\gamma_n) J_0\left(\frac{r}{a} \gamma_n\right) - J_0(\gamma_n) N_0\left(\frac{r}{a} \gamma_n\right).$$

Тут  $J_0$  та  $N_0$  – функції Бесселя першого та другого роду, а  $\gamma_n$  – додатні корені рівняння  $N_0(z) J_0\left(\frac{b}{a} z\right) - J_0(z) N_0\left(\frac{b}{a} z\right) = 0$ .

Запишемо наближений розв'язок, що відповідає параметру  $\beta$ , як поліном

$$\tilde{y}(t) = \tilde{y}_\beta(t) = \sqrt{t} \sum_{n=1}^N a_n L(t, \gamma_n). \quad (3)$$

Враховуючи (3), вираз (2) подамо у вигляді

$$M^\beta[y_\beta] = \int_a^b \left[ \sum_{n=1}^N a_n K_n(r) - f(r) \right]^2 dr + \beta \int_a^b t \left( \sum_{n=1}^N a_n L(t, \gamma_n) \right)^2 dt,$$

де  $K_n(r) = \int_a^b \sqrt{t} L(t, \gamma_n) K(t, r) dt$ .

Шукаючи  $a_n$ , де  $n = \overline{1, N}$ , з умови мінімізації функціонала  $M^\beta[y_\beta]$ , тобто  $\frac{\partial M}{\partial a_n} = 0$  (варіаційна задача з нерухомими кінцями), матимемо

$$\int_a^b \left[ \sum_{n=1}^N a_n K_n(r) - f(r) \right] K_q(r) dr + \beta \int_a^b t \left( \sum_{n=1}^N a_n L(t, \gamma_n) \right) L(t, \gamma_q) dt = 0. \quad (4)$$

У практичних застосуваннях функції  $K_n(r)$  та  $f(r)$  перетворюються в нуль при  $r = a$  та  $r = b$  і є кусково-неперервними на проміжку  $a \leq r \leq b$ . Тому кожному з них можна подати у вигляді суми узагальненого ряду Фур'є за функціями  $\varphi_j(r)$ .

Замінімо згадані ряди  $N$ -частинними сумами

$$K_n(r) = \sqrt{r} \sum_{j=1}^N c_j^{(n)} L(r, \gamma_j), \quad f(r) = \sqrt{r} \sum_{j=1}^N b_j L(r, \gamma_j). \quad (5)$$

Враховуючи ортогональність системи функцій  $\sqrt{r} \cdot L(r, \gamma_j)$ , знайдемо

$$\begin{aligned} c_q^{(n)} &= \frac{1}{M_q} \int_a^b \sqrt{r} K_n(r) L(r, \gamma_q) dr, \\ b_q &= \frac{1}{M_q} \int_a^b \sqrt{r} f(r) L(r, \gamma_q) dr, \\ M_q &= \int_a^b r L^2(r, \gamma_q) dr = \frac{b^2}{2} \frac{1}{\left(\frac{b}{a} \gamma_q\right)^2} \left[ R^2\left(\frac{b}{a} \gamma_q\right) - \frac{4}{\pi^2} \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

Підставивши (5) та (6) у (4), одержимо

$$\begin{aligned} \int_a^b \left[ \sum_{n=1}^N a_n \sqrt{r} \left( \sum_{j=1}^N c_j^{(n)} L(r, \gamma_j) \right) - f(r) \right] \sqrt{r} \left( \sum_{s=1}^N c_s^{(q)} L(t, \gamma_s) \right) dr + \\ + \beta \int_a^b t \left( \sum_{n=1}^N a_n L(t, \gamma_n) \right) L(t, \gamma_q) dt = 0. \end{aligned}$$

Проінтегрувавши по  $r$  на проміжку  $[a, b]$ , матимемо

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N a_n \left[ \sum_{s=1}^N c_s^{(n)} c_s^{(q)} M_s + \beta \begin{pmatrix} M_n, & n = q \\ 0, & n \neq q \end{pmatrix} \right] = \\ = \sum_{n=1}^N c_j^{(q)} \int_a^b \sqrt{r} f(r) L(r, \gamma_j) dr, \quad q = \overline{1, N}. \end{aligned} \quad (7)$$

Параметр регуляризації  $\beta$  шукатимемо згідно з принципом узагальненої нев'язки [2] як нуль функції  $p(\beta) = \|Ay_\beta - f\|^2 - (\delta + h \|y_\beta\|)^2$ , де  $h$  – точність задання оператора  $A$ . Задана функція після зображення  $y_\beta$  через коефіцієнти  $a_n$  набуде такого вигляду:

$$p(\beta) = (1 - h)^2 \beta^2 \sum_{n=1}^N a_n M_n - \delta^2.$$

Величину  $N$ , кількість членів полінома (3), а отже, і кількість рівнянь у системі (7), вибираємо з тієї умови, щоб відносна похибка виконання рівності (1)  $\gamma(N, \beta)$  не перевищувала заданої  $\gamma_0$

$$\gamma(N, \beta) = \max_{r \in [a, b]} \frac{1}{f^*(r)} \left( \int_a^b y_\beta(t) K(t, r) dt - f^*(r) \right) \cdot 100 < \gamma_0.$$

У розгорнутому вигляді, з врахуванням (3)

$$\max_{r \in [a, b]} \frac{1}{f^*(r)} \left( \sum_{n=1}^N a_n \int_a^b \sqrt{t} L(t, \gamma_n) K(t, r) dt - f^*(r) \right) \cdot 100 < \gamma_0. \quad (8)$$

**2. Метод поточкового одержання системи алгебричних рівнянь.** Ще одним підходом до побудови наближеного розв'язку задачі (1) є метод поточкового одержання системи алгебричних рівнянь. Вибираючи  $\tilde{y}(t)$  у вигляді (3), рівняння (1) зведемо до співвідношення

$$\sum_{n=1}^N a_n \int_a^b \sqrt{t} L(t, \gamma_n) K(t, r) dt = f(r), \quad a \leq r \leq b.$$

Вимагаючи виконання цієї умови в  $N$  точках проміжку  $a \leq r \leq b$ , одержимо систему  $N$  рівнянь із  $N$  невідомими  $a_n$

$$\sum_{n=1}^N a_n \int_a^b \sqrt{t} L(t, \gamma_n) K(t, r_i) dt = f(r_i), \quad i = \overline{1, N}.$$

Величину  $N$  вибиратимемо як і в попередньому випадку, а саме, вимагаючи, щоб відносна похибка виконання (1) не перевищувала заданої ( $a_n$  при  $n = \overline{1, N}$  повинні задовольняти (8)).

**3. Числовий приклад.** Як числові приклади розглянемо запропоновані методи для побудови наближених функцій розподілу контактних напружень при взаємодії жорсткого кільцевого штамп з трансверсально ізотропним шаром.

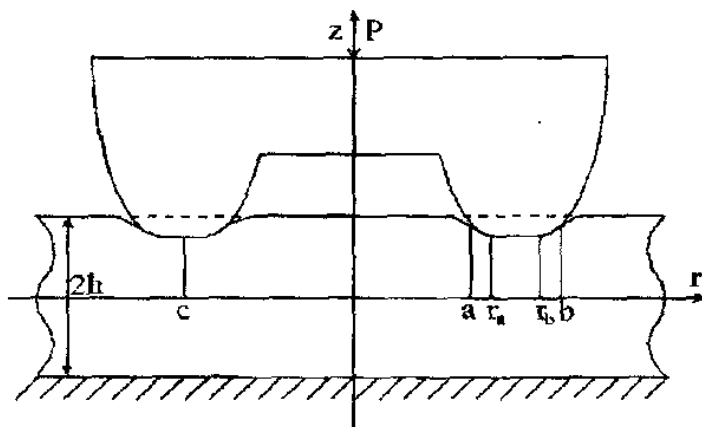


Рис. 1. Схема контактної взаємодії штамп із шаром

У [6] задана задача зводиться до розв'язання рівняння Фредгольма першого роду (1), де  $y(t) = \sqrt{t} \cdot x(t)$  – шукана функція,  $x(t)$  – функція, через яку описується розподіл контактних напружень під штампом, а також

$$K(t, r) = \sqrt{t} \int_0^{\infty} F(\alpha) \left\{ \begin{array}{l} J_0(r\alpha) - J_0(a\alpha) \\ J_0(r\alpha) - J_0(b\alpha) \end{array} \right\} J_0(t\alpha) d\alpha, \quad \left\{ \begin{array}{l} a \leq r < c \\ c \leq r \leq b \end{array} \right\},$$



$$F(\alpha) = \frac{(1 - e^{-4\mu_1 h \alpha})(1 - e^{-4\mu_3 h \alpha})}{\varphi^*(2\mu_3, 2\mu_1, \alpha)},$$

$$\varphi^*(2\mu_3, 2\mu_1, \alpha) = 2\mu_3(1 - e^{-4\mu_3 \alpha})(1 + e^{-4\mu_1 \alpha}) - 2\mu_1(1 - e^{-4\mu_1 \alpha})(1 + e^{-4\mu_3 \alpha}),$$

$$f(r) = B^{(1)}(r) = \begin{cases} (a - r_a)^2 - (r - r_a)^2, & a \leq r \leq r_a; \\ (a - r_a)^2, & r_a \leq r < c; \\ 0, & c \leq r \leq b, \end{cases}$$

або

$$f(r) = B^{(2)}(r) = \begin{cases} 0, & a \leq r < c; \\ (b - r_b)^2, & c \leq r < r_b; \\ (b - r_b)^2 - (r - r_b)^2, & r_b \leq r \leq b. \end{cases}$$

Реалізуючи метод регуляризації нульового порядку Тихонова, прийдемо до двох систем вигляду (7) для відшукування  $a_n^{(1)}$  та  $a_n^{(2)}$   $n = \overline{1, N}$ , де  $c_q^{(n)}$ ,  $b_q$  та  $M_q$  обчислюють за співвідношеннями (6), в яких  $f(r) = B^{(1)}(r)$  для відшукування  $a_n^{(1)}$  та  $f(r) = B^{(2)}(r)$  для відшукування  $a_n^{(2)}$ . Розв'язавши ці системи й одержимо наближення шуканої функції  $x(r)$

$$\tilde{x}(r) = \sum_{n=1}^N (a_n^{(1)} z_1 + a_n^{(2)} z_2) L(r, \gamma_n),$$

через яку виражається функція контактних напружень  $\sigma_{zz}(r) = \frac{P}{2\pi a^2} \tilde{x}(r)$ . Задамо  $\gamma_0 = 4\%$  і перевіримо для  $N_1 = 11$  та  $N_2 = 21$  виконання умови (8) при  $f^*(r) = z_1 B^{(1)}(r) + z_2 B^{(2)}(r)$ ,  $z_i = \frac{1}{R_i}$ ,  $i = 1, 2$ , де  $R_i$  - радіуси кривизни парабол, обертанням яких утворено штамп.

У результаті перевірки для випадків:

- 1)  $a = 0.4, b = 1.0, r_a = r_b = 0.7;$
  - 2)  $a = 0.4, b = 1.0, r_a = 0.55, r_b = 0.85$
- (9)

відповідно, одержимо

$$\begin{array}{ll} \gamma_1(11) = 7.2\%, & \gamma_2(11) = 10.2\%; \\ \gamma_1(21) = 2.3\%, & \gamma_2(21) = 3.0\%. \end{array}$$

Отже, випадок  $N = 21$  задовольняє умову (8). Для побудови наближень функцій розподілу контактних напружень достатньо вибрати  $N = 21$ . Графіки функції  $\tilde{x}(r)$  у наведених випадках зображено на рис. 2, 3.

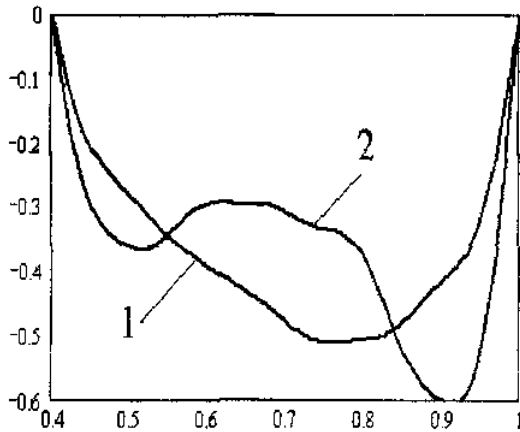


Рис. 2. Графіки функції  $\tilde{x}(r)$  для випадків 1 та 2 при  $N = 11$

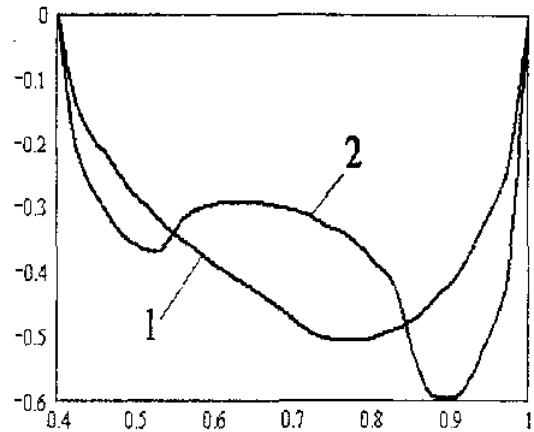


Рис. 3. Графіки функції  $\tilde{x}(r)$  для випадків 1 та 2 при  $N = 21$

Проаналізуємо з погляду визначення відносної похибки виконання рівності (1) методику поточкового зведення рівняння Фредгольма першого роду до системи алгебричних рівнянь.

Вибравши  $N_1 = 11$  та  $N_2 = 21$  для розглянутих значень геометричних параметрів (9) відповідно отримуємо

$$\gamma_1(11) = 8.6\%,$$

$$\gamma_2(11) = 11.9\%;$$

$$\gamma_1(21) = 2.9\%,$$

$$\gamma_2(21) = 3.8\%.$$

Графіки функції  $\tilde{x}(r)$  для цих випадків показано на рис. 4, 5.

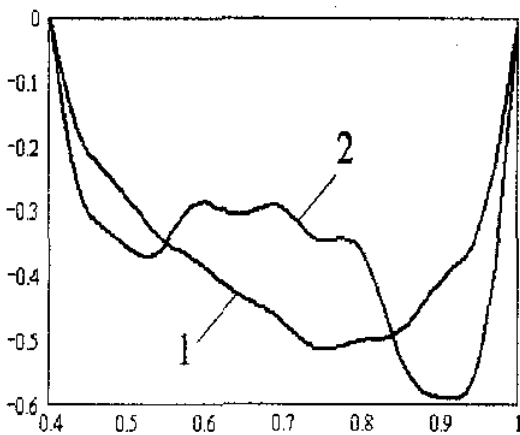


Рис. 4. Графіки функції  $\tilde{x}(r)$  для випадків 1 та 2 при  $N = 11$

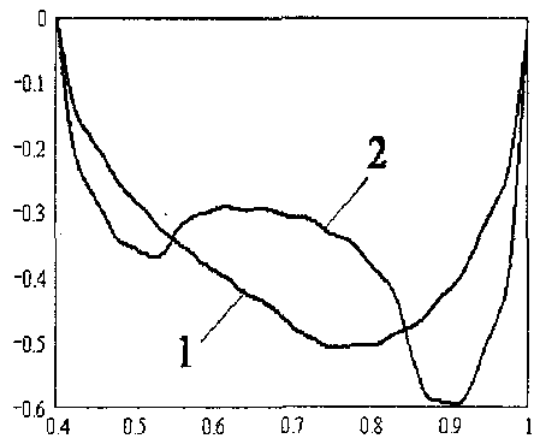


Рис. 5. Графіки функції  $\tilde{x}(r)$  для випадків 1 та 2 при  $N = 21$

Отже, запропонований підхід до побудови наближеного розв'язку задачі (1) при  $N = 21$  цілком задовольняє практичні потреби.

Зазначимо, що методика поточкового зведення (1) до СЛАР не регуляризує задачу побудови наближеного розв'язку рівняння Фредгольма першого роду. Проте вона дає змогу провести оптимальний вибір кількості членів полінома, а отже, і кількості рівнянь СЛАР. Зауважимо лише, що застосування методу Тихонова дає більш зглажене наближення розв'язку (1), ніж у випадку поточної побудови СЛАР, що і забезпечує меншу відносну похибку наближення розв'язку цим методом.

1. Тихонов А.Н. О регуляризации некорректно поставленных задач. – ДАН СССР. – 1963. – Т. 153, №1. – С. 49-52.
2. Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г. Численные методы решения некорректных задач. – М., 1990.
3. Лаврентьев М.М. О некоторых некорректных задачах математической физики. – Новосибирск, 1962.
4. Сяваєко М.С., Пасечник Т.В., Рыбичка О.М. Псевдообратный оператор и рациональные алгоритмы нормального решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода // Электрон. моделирование. – 1995. – 17, №1. – С. 10-16.
5. Герасимчук О.Б., Рыбичка О.М. Нормальный розв'язок інтегрального рівняння першого роду із слабкою особливістю // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2005. – 48, №2. – С. 43-52.
6. Габрусев Г.В. Осесиметрична контактна задача термопружності про тиск кільцевого штамп на трансверсально ізотропний шар // Вісник Тернопільського державного технічного університету – 2005. – Т. 10, № 1.

## CONSTRUCTION OF THE APPROXIMATE SOLUTION OF THE FIRST KIND FRENDRHOLM-TYPE EQUATION IN SOME CONTACT TASKS OF THE ELASTIC THEORY

**Hryhorii HABRUSIEV**

*Ivan Puliuy State Technical University of Ternopil,  
46001, Ternopil, Rus'ka Str., 56*

Representations of the approximate solution of the first kind Frenrdholm-type equation in the form of a polynom on orthogonal functions are carried out. The opportunity of application of a variational task with the motionless ends and task of pointwise transition to system of the linear algebraic equations for determination a polynom's coefficients are analysed. The condition for a choice of optimum quantity of members of a polynom is received.

*Key words:* the first kind Frenrdholm-type equation, regularization, contact task, contact stresses, stress distribution.

Стаття надійшла до редколегії 22.03.2006

Прийнята до друку 24.10.2007