

ISSN 0032 - 8243

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ
ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ им. С.П. ТИМОШЕНКО

МЕЖДУНАРОДНЫЙ НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

**ПРИКЛАДНАЯ
МЕХАНИКА**

**INTERNATIONAL
APPLIED MECHANICS**

**ТОМ
40**

*Началу третьего
тысячелетия
посвящается*

4

2004

*Журнал переводится на английский язык
в США (Нью-Йорк) издательством
Kluwer Academic/Plenum Publishers под названием*

INTERNATIONAL APPLIED MECHANICS

*International Applied Mechanics is indexed /abstracted
in Cambridge Scientific Abstracts, Chemical Abstracts, Current
Contents/Engineering, Computing and Technology,
The ISI Alerting Services, Materials Science Citation Index,
Mathematical Reviews Database, Science Citation Index,
Science Citation Index Expanded, and Zentralblatt MATH*

Impact-Factor in 2002: 1,142

Главный редактор А.Н.Гузь

Редакционная коллегия

*И.Ю. Бабич, В.П. Голуб, Я.М. Григоренко, В.А. Заруцкий,
А.А. Каминский, В.Г. Карнаухов, Ю.В. Коханенко, В.Д. Кубенко,*

В.Б. Ларин, А.А. Мартынюк, Ю.Н. Подильчук, Л.П. Хорошун,

И.С. Чернышенко (зам. главного редактора), Ю.Н. Шевченко, Н.А. Шульга.

**Международный редакционный совет
на 2003 — 2004 гг.**

*Л.А. Агаловян (Армения), С.Д. Акбаров (Азербайджан), С.Н. Атлuri (США),
В.В. Болотин (Россия), К.П. Герман (Германия), Г.М.Л. Гладвелл (Канада),*

И.А. Гузь (Шотландия), В.В. Зозуля (Мексика), Г.А.Манг (Австрия),

Ш. Маркуш (Словакия), И.Ф. Образцов (Россия), Ф.Г. Раммерсторфер (Австрия),

В.П. Тамуж (Латвия), К.В. Фролов (Россия),

Цянь Вэйцан (Китай), Г.П. Черепанов (США), Ю.К. Энгельбрехт (Эстония).

Editor-in-chief A.N.Guz

Editorial Board:

*I.Yu. Babich, V.P. Golub, Ya.M. Grigorenko, V.A. Zarutsky,
A.A.Kaminsky, V.G. Karnaughov, Yu.V. Kokhanenko, V.D. Kubenko,*

V.B. Larin, A.A. Martynuk, Yu.N. Podil'chuk, L.P. Khoroshun,

I.S. Chernyshenko (Associate Editor), Yu.N. Shevchenko, N.A. Shul'ga.

International Editorial Advisory Board:

in 2003 — 2004 years

L.A. Aghalovyan (Armenia), S.D. Akbarov (Azerbaijan), S. N. Atluri (USA),

V.V. Bolotin (Russia), K.P. Herrmann (Germany), G.M.L. Gladwell (Canada),

I.A. Guz (Scotland), V.V. Zozulya (Mexico), G.A.Mang (Austria),

S. Markus (Slovakia), I.F. Obraztsov (Russia), F.G. Rammerstorfer (Austria),

V.P. Tamuzs (Latvia), K.V. Frolov (Russia), Chuen Weizang (China),

G.P. Cherepanov (USA), J.K. Engelbrecht (Estonia).

Ответственный секретарь редакции Д.И. Чернопиский

Адрес редакции: 03057 Киев, 57, ул. Нестерова, 3

Институт механики НАН Украины

тел.: 0-44-456-62-92, 454-77-79; факс: 380-44-456-03-19

e-mail: prikl@inmech.kiev.ua

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ
ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ им. С.П. ТИМОШЕНКО
Международный научный журнал

ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

Том 40 (50), № 4, апрель, 2004

Основан в марте 1955 г.

Выходит ежемесячно

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Балтов А.</i> Материалы, чувствительные к типу процесса*	3
<i>Рушицкий Я.Я.</i> Характер совместного влияния микроструктуры и нагрузки на статическое напряженное состояние в упругих телах*	13
<i>Хорошун Л.П., Шикула Е.Н.</i> Теория кратковременной микроповреждаемости однородного материала при физически нелинейном деформировании	35
<i>Голуб В.П., Касперская В.В., Русинов А.А.</i> К задаче расчета времени разрушения тонкостенных труб в условиях ползучести под действием внутреннего давления	44
<i>Денисюк И.Т.</i> О напряженном состоянии трехмерных тел с негладкими включениями	53
<i>Шелестовский Б.Г., Габрусев Г.В.</i> О термоупругом состоянии трансверсально-изотропного слоя с двумя кольцевыми штампами	67
<i>Гоцуляк Е.А., Сиянов А.И.</i> Устойчивость и нелинейное деформирование цилиндрических сетчатых оболочек	78
<i>Фиалко С.Ю.</i> К исследованию напряженно-деформированного состояния тонкостенных оболочек с массивными ребрами	84
<i>Немировский Ю.В., Романова Т.П.</i> Динамическое поведение жестко-пластических пластин в форме сектора	93
<i>Зирка А.И., Малежик М.П., Чернышенко И.С.</i> О распределении напряжений в ортотропной пластине с круговыми отверстиями при импульсном нагружении	102
<i>Мартынюк А.А., Никитина Н.В.</i> Об исследовании сложных колебаний звезды в поле галактики	107
<i>Ларин В.Б., Матиясевич В.М.</i> Алгоритм управления пространственным движением прыгающего аппарата	117
<i>Матвийчук К.С.</i> Асимптотическая техническая устойчивость по мере нелинейного управляемого движения упругой летательной системы	127
<i>Шамолин М.В.</i> Геометрическое представление движения в одной задаче о взаимодействии тела со средой	137

* Началу третьего тысячелетия посвящается

CONTENTS

<i>Ballov A.</i> Materials sensitive to the type of the process*	3
<i>Rushchitsky J.J.</i> Character of Joint Influence of the Microstructure and the Load on Static Stress State in Elastic Bodies*	13
<i>Khoroshun L.P., Shikula E.N.</i> A Theory of Short-Time Damageability of Homogeneous Material for the Physically Nonlinear Deformation	35
<i>Golub V.P., Kasperskaya V.V., Rusinov A.A.</i> To the Problem of the Time of Fracture Calculation of Thin-Walled Tubes in the Creep State under Action of Internal Pressure	44
<i>Denisyuk I.T.</i> On Stress State of Three-Dimensional Bodies with Non- Smooth Inclusions	53
<i>Shelestovsky B.P., Gabrusev G.V.</i> On Thermo-Elastic State of Transversally- Isotropic Layer with Two Annular Stamps	67
<i>Gotsulyak E.A., Siyanov A.I.</i> Stability and Nonlinear Deformation of Cylindrical Net Shells	78
<i>Fialko S.Yu.</i> To Investigation of Stress-Strain State of Thick-Walled Shells with Massive Ribs	84
<i>Nemirovsky Yu.V., Romanova T.P.</i> Dynamic Behaviour of Rigid-Plastic Plates in the Form of Sector	93
<i>Zirka A.I., Malezhik M.P., Chernyshenko I.S.</i> On Stress Distribution in the Orthotropic Plate with Circular Holes under Impulse Loading	102
<i>Martynyuk A.A., Nikitina N.V.</i> On Investigation of Combine Oscillations of a Star in the Field of Galaxy	107
<i>Larin V.B., Matiyasevich V.M.</i> An Algoritm of Control of Spatial Motion of the Hopping Apparatus	117
<i>Matviychuk K.S.</i> Asymptotic Technical Stability by the Measure of Nonlinear Control Motion of an Elastic Flying System	127
<i>Shamolin M. V.</i> A Geometrical Representation of the Motion in Certain Problem of Interaction of a Body with a Medium	137

to the Beginning of the Third Millennium

В издании журнала принимает участие
ТОО «А. С. К.»

Научный редактор *И.С.Чернышенко*

Редактор *Л.П.Чаповская*

Художественный редактор *П.В.Беккер*

Набор и компьютерная верстка:

Т.К.Лещенко, Т.В.Максимова, Г.М.Никифорова, Л.П.Чаповская

Оригинал-макет подготовлен

редакцией журнала «Прикладная механика»

Утв. в печ. 27.01.2004. Формат 70×108/16. Бум. офс. №1. Офс. печ.

Усл. печ. л. 12,6. Тираж 340 экз. Цена 8,72 грн. Заказ

УДК 539.3

© 2004 Б.Г. Шелестовский, Г.В. Габрусев

О ТЕРМОУПРУГОМ СОСТОЯНИИ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОГО СЛОЯ С ДВУМЯ КОЛЬЦЕВЫМИ ШТАМПАМИ

Контактные задачи теории упругости являются теоретической основой расчетов на прочность деталей конструкций и сооружений, взаимодействующих с упругими основаниями. В последние годы внимание исследователей привлекают задачи все более сложной постановки, а именно: исследуются взаимодействия упругих тел с остаточными деформациями, обусловленными технологическими процессами [2, 5], контактные задачи с учетом анизотропии упругой среды или с учетом температурных факторов [1], а также задачи с усложнением геометрической конфигурации контактирующих тел [6].

Целью данной работы является определение влияния формы нагретых кольцевых штампов, а также теплофизических характеристик упругого трансверсально-изотропного слоя на распределение силовой и температурной составляющих контактных напряжений под штампами.

1. Постановка задачи. Рассмотрим плоскопараллельный трансверсально-изотропный слой конечной толщины $2h$, в который силой P вдавливаются два кольцевых штампа. Плоскости изотропии слоя параллельны его граничным плоскостям. Оба штампа являются телами, образованными вращением полупарabol, сопряженных в вершинах с отрезком прямой, перпендикулярной оси вращения, которая совпадает с линией действия силы P , перпендикулярной к граничным плоскостям слоя.

Тепловой контакт между слоем и штампами, а также между слоем и внешней средой осуществляется по закону Ньютона.

Зафиксируем цилиндрическую систему координат (r, φ, z) так, чтобы координатная плоскость (r, φ) совпадала с срединной плоскостью слоя, а ось Oz с линией действия силы P . Контактное взаимодействие кольцевых штампов со слоем схематически изображено на рис. 1.

Используя традиционные обозначения для компонент тензора напряжений, перемещений, а также температуры, граничные условия задачи можно представить в виде

$$\begin{aligned}
 & \sigma_{rz}(r, z) = 0, \quad 0 \leq r < \infty; \\
 & \text{при } z = h \quad \sigma_{zz}(r, z) = 0, \quad 0 \leq r < a, \quad r \geq b; \\
 & \quad w(r, z) = w_1(r), \quad a \leq r \leq b; \\
 & \quad \sigma_{rz}(r, z) = 0, \quad 0 \leq r < \infty; \\
 & \text{при } z = -h \quad \sigma_{zz}(r, z) = 0, \quad 0 \leq r < c, \quad r \geq d; \\
 & \quad w(r, z) = w_2(r), \quad c \leq r \leq d;
 \end{aligned} \tag{1}$$

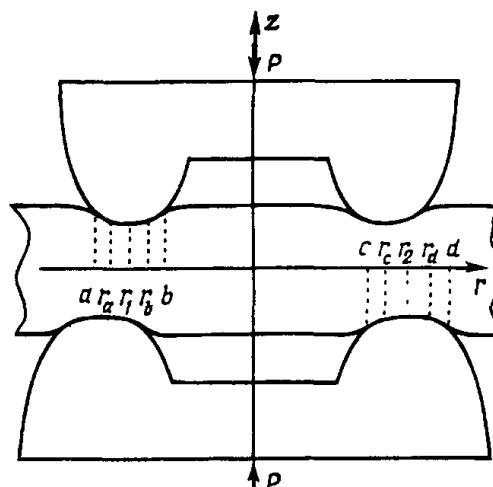


Рис. 1

$$\begin{aligned}
\text{при } z = h \quad & \frac{dT}{dz} = -k_i(T - T_0^{(i)}) \quad (i = 1, 2, 3); \quad r_{i-1}^{(1)} \leq r \leq r_i^{(1)}; \\
& r_0^{(1)} = 0, \quad r_1^{(1)} = a, \quad r_2^{(1)} = b, \quad r_3^{(1)} = \infty; \\
\text{при } z = -h \quad & \frac{dT}{dz} = k_j(T - T_0^{(j)}) \quad (j = 4, 5, 6); \quad r_{j-1}^{(2)} \leq r \leq r_j^{(2)}; \\
& r_3^{(2)} = 0, \quad r_4^{(2)} = c, \quad r_5^{(2)} = d, \quad r_6^{(2)} = \infty.
\end{aligned} \tag{2}$$

Здесь $T = T(r, z)$ – функция распределения температуры в слое; $T_0^{(2)}$ и $T_0^{(5)}$ – температура верхнего и нижнего штампов; $T_0^{(1)}$, $T_0^{(3)}$ и $T_0^{(4)}$, $T_0^{(6)}$ – температура внешней среды над верхней и нижней граничными плоскостями слоя; k_i и k_j – коэффициенты теплообмена; $w_1(r)$ и $w_2(r)$ – известные функции, которые определяются конфигурацией штампов [1].

При заданных граничных условиях необходимо определить распределение контактных напряжений под штампами.

При решении задачи будем использовать соотношения термоупругости, предложенные В. Новацким [3]. Применяя к этим соотношениям интегральное преобразование и формулу обращения Ханкеля [4], получаем выражения для компонент напряжений σ_{rz} , σ_{zz} , вертикальных перемещений w и температуры $T(r, z)$ в виде

$$\begin{aligned}
\sigma_{rz}(r, z) &= \beta A_{33} A_{44} \int_0^\infty \alpha^2 \frac{d}{dz} \left(e \frac{d^2}{dz^2} - d^* \alpha^2 \right) \bar{\psi}(\alpha, z) J_1(r\alpha) d\alpha; \\
\sigma_{zz}(r, z) &= -\beta A_{33} A_{44} \int_0^\infty \alpha^3 \left(e \frac{d^2}{dz^2} - d^* \alpha^2 \right) \bar{\psi}(\alpha, z) J_0(r\alpha) d\alpha; \\
w(r, z) &= \beta A_{44} \int_0^\infty \alpha \frac{d}{dz} \left(c^* \frac{d^2}{dz^2} - b^* \alpha^2 \right) \bar{\psi}(\alpha, z) J_0(r\alpha) d\alpha; \\
T(r, z) &= B \int_0^\infty \alpha^5 (C_5(\alpha) \operatorname{sh} \mu_5 z \alpha + D_5(\alpha) \operatorname{ch} \mu_5 z \alpha) J_0(r\alpha) d\alpha,
\end{aligned} \tag{3}$$

где

$$\begin{aligned}
B &= A_{33} A_{44} (\mu_5^2 - \mu_1^2)(\mu_5^2 - \mu_3^2); \\
\bar{\psi}(\alpha, z) &= \sum_{j=1, 3, 5} (C_j(\alpha) \operatorname{sh} \mu_j z \alpha + D_j(\alpha) \operatorname{ch} \mu_j z \alpha)
\end{aligned} \tag{4}$$

– трансформанта Ханкеля термоупругого потенциала.

2. Температурная составляющая задачи. Требуя выполнения граничных условий (2) для температуры, приходим к системе двух тройных интегральных уравнений относительно двух неизвестных функций $C_5(\alpha)$ и $D_5(\alpha)$

$$\begin{aligned}
B \int_0^\infty \alpha^5 (C_5(\alpha) Q_i(\alpha) + D_5(\alpha) R_i(\alpha)) J_0(r\alpha) d\alpha &= k_i T_0^{(i)}; \\
(i = 1, 2, 3); \quad r_{i-1}^{(1)} &\leq r < r_i^{(1)}; \\
B \int_0^\infty \alpha^5 (C_5(\alpha) Q_j(\alpha) - D_5(\alpha) R_j(\alpha)) J_0(r\alpha) d\alpha &= -k_j T_0^{(j)};
\end{aligned} \tag{5}$$

$$(j = 4, 5, 6); \quad r_{j-1}^{(2)} \leq r < r_j^{(2)}.$$

Здесь приняты обозначения:

$$Q_s(\alpha) = \mu_5 \alpha \cdot \operatorname{ch} \mu_5 h \alpha + k_s \operatorname{sh} \mu_5 h \alpha;$$

$$R_s(\alpha) = \mu_5 \alpha \cdot \operatorname{sh} \mu_5 h \alpha + k_s \operatorname{ch} \mu_5 h \alpha; \quad s = i, j.$$

Продолжая соотношения (5) при $i = 3$ и $j = 6$ на весь интервал $0 \leq r \leq \infty$, вводя при этом неизвестные функции $x^{(T)}(r)$ и $y^{(T)}(r)$, получаем

$$\begin{aligned} B \int_0^\infty \alpha^5 (C_5(\alpha)Q_3(\alpha) + D_5(\alpha)R_3(\alpha)) J_0(r\alpha) d\alpha = \\ = k_3 T_0^{(3)} (U(r-b) + x^{(T)}(r)U(b-r)); \quad 0 \leq r < \infty, \\ B \int_0^\infty \alpha^5 (C_5(\alpha)Q_6(\alpha) - D_5(\alpha)R_6(\alpha)) J_0(r\alpha) d\alpha = \\ = -k_6 T_0^{(6)} (U(r-d) + y^{(T)}(r)U(d-r)), \quad 0 \leq r < \infty \end{aligned} \quad (6)$$

Равенства (6) с использованием формулы обращения интегрального преобразования Ханкеля приводят к системе двух линейных функциональных уравнений относительно двух неизвестных $C_5(\alpha)$ и $D_5(\alpha)$

$$\begin{aligned} B\alpha^4 (C_5(\alpha)Q_3(\alpha) + D_5(\alpha)R_3(\alpha)) = k_3 T_0^{(3)} \left(\int_b^\infty r J_0(r\alpha) dr + \int_0^b rx^{(T)}(r) J_0(r\alpha) dr \right) = X^{(T)}(\alpha); \\ B\alpha^4 (C_5(\alpha)Q_6(\alpha) - D_5(\alpha)R_6(\alpha)) = -k_6 T_0^{(6)} \left(\int_d^\infty r J_0(r\alpha) dr + \int_0^d ry^{(T)}(r) J_0(r\alpha) dr \right) = Y^{(T)}(\alpha). \end{aligned}$$

Решив эту систему, найдем

$$\begin{aligned} C_5(\alpha) &= \frac{1}{B\alpha^4 \Delta_0(\alpha)} [X^{(T)}(\alpha)R_6(\alpha) + Y^{(T)}(\alpha)R_3(\alpha)]; \\ D_5(\alpha) &= \frac{1}{B\alpha^4 \Delta_0(\alpha)} [X^{(T)}(\alpha)Q_6(\alpha) - Y^{(T)}(\alpha)Q_3(\alpha)]. \end{aligned} \quad (7)$$

Выбирая функции $x^{(T)}(r)$ и $y^{(T)}(r)$ в виде

$$x^{(T)}(r) = 1 + \sum_{n=1}^{N_1} a_n^{(T)} J_0\left(\frac{r}{b}\omega_n\right), \quad y^{(T)}(r) = 1 + \sum_{n=1}^{N_1} b_n^{(T)} J_0\left(\frac{r}{d}\omega_n\right),$$

где ω_n – положительные корни уравнения $J_0(x) = 0$, а $a_n^{(T)}$ и $b_n^{(T)}$ – неизвестные коэффициенты, получаем представление для $X^{(T)}(r)$ и $Y^{(T)}(r)$, а значит и для $C_5(\alpha)$ и $D_5(\alpha)$, через $a_n^{(T)}$ и $b_n^{(T)}$

$$X^{(T)}(\alpha) = k_3 T_0^{(3)} \left[\frac{1}{\alpha} \lim_{\Delta \rightarrow 0} \delta(\alpha - \Delta) - \sum_{n=1}^{N_1} a_n^{(T)} \omega_n J_1(\omega_n) \frac{J_0(b\alpha)}{\alpha^2 - \left(\frac{\omega_n}{b}\right)^2} \right]; \quad (8)$$

$$Y^{(T)}(\alpha) = -k_6 T_0^{(6)} \left[\alpha \lim_{\Delta \rightarrow 0} \delta(\alpha - \Delta) - \sum_{n=1}^{N_1} b_n^{(T)} \omega_n J_1(\omega_n) \frac{J_0(d\alpha)}{\alpha^2 - \left(\frac{\omega_n}{d}\right)^2} \right].$$

Равенства (5) при $i = 1, 2$ и $j = 4, 5$ для определенных соотношениями (7), с учетом (8), значений $C_5(\alpha)$ и $D_5(\alpha)$ преобразуются к системе

$$\begin{aligned} & k_3 T_0^{(3)} \sum_{n=1}^{N_1} a_n^{(T)} \omega_n J_1(\omega_n) \int_0^\infty \frac{\Delta_{1,2}^{(1)*}(\alpha)}{\Delta_0^*(\alpha)} \frac{\alpha J_0(b\alpha) J_0(r\alpha)}{\alpha^2 - \left(\frac{\omega_n}{b}\right)^2} d\alpha + \\ & + k_6 T_0^{(6)} \sum_{n=1}^{N_1} b_n^{(T)} \omega_n J_1(\omega_n) \int_0^\infty \frac{2\mu_5 \alpha^2 \left(\begin{Bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{Bmatrix} - k_3 \right) e^{-2\mu_5 h\alpha} J_0(d\alpha) J_0(r\alpha)}{\Delta_0^*(\alpha) \left(\alpha^2 - \left(\frac{\omega_n}{d}\right)^2 \right)} d\alpha = \\ & = - \begin{Bmatrix} k_1 T_0^{(1)} \\ k_2 T_0^{(2)} \end{Bmatrix} + \frac{k_3 T_0^{(3)} \left[2k_6 h \begin{Bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{Bmatrix} + \left(k_6 + \begin{Bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{Bmatrix} \right) \right]}{[2k_3 k_6 h + (k_3 + k_6)]} + \frac{k_6 T_0^{(6)} \left[\begin{Bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{Bmatrix} - k_3 \right]}{[2k_3 k_6 h + (k_3 + k_6)]}, \\ & \quad \begin{Bmatrix} 0 \leq r \leq a \\ a \leq r \leq b \end{Bmatrix}; \tag{9} \\ & -k_3 T_0^{(3)} \sum_{n=1}^{N_1} a_n^{(T)} \omega_n J_1(\omega_n) \int_0^\infty \frac{2\mu_5 \alpha^2 \left(k_6 - \begin{Bmatrix} k_4 \\ k_5 \end{Bmatrix} \right) e^{-2\mu_5 h\alpha} J_0(b\alpha) J_0(r\alpha)}{\Delta_0^*(\alpha) \left(\alpha^2 - \left(\frac{\omega_n}{b}\right)^2 \right)} d\alpha + \\ & + k_6 T_0^{(6)} \sum_{n=1}^{N_1} b_n^{(T)} \omega_n J_1(\omega_n) \int_0^\infty \frac{\Delta_{4,5}^{(2)*}(\alpha)}{\Delta_0^*(\alpha)} \frac{\alpha J_0(d\alpha) J_0(r\alpha)}{\alpha^2 - \left(\frac{\omega_n}{d}\right)^2} d\alpha = \\ & = - \begin{Bmatrix} k_4 T_0^{(4)} \\ k_5 T_0^{(5)} \end{Bmatrix} - \frac{k_3 T_0^{(3)} \left[k_6 - \begin{Bmatrix} k_4 \\ k_5 \end{Bmatrix} \right]}{[2k_3 k_6 h + (k_3 + k_6)]} + \frac{k_6 T_0^{(6)} \left[2k_3 h \begin{Bmatrix} k_4 \\ k_5 \end{Bmatrix} + \left(k_3 + \begin{Bmatrix} k_4 \\ k_5 \end{Bmatrix} \right) \right]}{[2k_3 k_6 h + (k_3 + k_6)]}, \\ & \quad \begin{Bmatrix} 0 \leq r \leq c \\ c \leq r \leq d \end{Bmatrix}. \end{aligned}$$

В последних уравнениях обозначено:

$$\Delta_0^*(\alpha) = \left[(\mu_5 \alpha)^2 + k_3 k_6 \right] \left(1 - e^{-4\mu_5 h\alpha} \right) + \mu_5 \alpha (k_3 + k_6) \left(1 + e^{-4\mu_5 h\alpha} \right);$$

$$\Delta_{1,2}^{(1)*}(\alpha) = \left[(\mu_5 \alpha)^2 + k_6 \begin{Bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{Bmatrix} \right] \left(1 - e^{-4\mu_5 h \alpha} \right) + \mu_5 \alpha \left(k_3 + \begin{Bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{Bmatrix} \right) \left(1 + e^{-4\mu_5 h \alpha} \right);$$

$$\Delta_{4,5}^{(2)*}(\alpha) = \left[(\mu_5 \alpha)^2 + k_3 \begin{Bmatrix} k_4 \\ k_5 \end{Bmatrix} \right] \left(1 - e^{-4\mu_5 h \alpha} \right) + \mu_5 \alpha \left(k_3 + \begin{Bmatrix} k_4 \\ k_5 \end{Bmatrix} \right) \left(1 + e^{-4\mu_5 h \alpha} \right).$$

Требуя выполнения (9) в N_1 точках каждого из промежутков $0 \leq r \leq b$ и $0 \leq r \leq d$, получаем систему $2N_1$ линейных алгебраических уравнений с $2N_1$ неизвестными $a_n^{(T)}$ и $b_n^{(T)}$, определив которые, будем иметь и конкретные значения для функций $C_5(\alpha)$ и $D_5(\alpha)$.

Используя четвертое уравнение (3), можем получить и формулу распределения температуры в слое

$$T(r, z) = \frac{k_3 T_0^{(3)} [1 + k_6(z + h)]}{[2k_3 k_6 h + (k_3 + k_6)]} -$$

$$-k_3 T_0^{(3)} \sum_{n=1}^{N_1} a_n^{(T)} \omega_n J_1(\omega_n) \int_0^\infty \frac{\mathcal{Q}^*(\alpha, z)}{\Delta_0^*(\alpha)} \frac{\alpha J_0(b\alpha) J_0(r\alpha)}{\alpha^2 - \left(\frac{\omega_n}{b}\right)^2} d\alpha +$$

$$+ \frac{k_6 T_0^{(6)} [1 + k_3(h - z)]}{[2k_3 k_6 h + (k_3 + k_6)]} - k_6 T_0^{(6)} \sum_{n=1}^{N_1} b_n^{(T)} \omega_n J_1(\omega_n) \int_0^\infty \frac{\mathcal{R}^*(\alpha, z)}{\Delta_0^*(\alpha)} \frac{\alpha J_0(d\alpha) J_0(r\alpha)}{\alpha^2 - \left(\frac{\omega_n}{d}\right)^2} d\alpha.$$

Здесь принято:

$$\mathcal{Q}^*(\alpha, z) = \mu_5 \alpha (e^{\mu_5(z-h)\alpha} + e^{-\mu_5(z+3h)\alpha}) + k_6 (e^{\mu_5(z-h)\alpha} - e^{-\mu_5(z+3h)\alpha});$$

$$\mathcal{R}^*(\alpha, z) = \mu_5 \alpha (e^{-\mu_5(h+z)\alpha} + e^{-\mu_5(3h-z)\alpha}) + k_3 (e^{-\mu_5(h+z)\alpha} - e^{-\mu_5(3h-z)\alpha}).$$

3. Определение контактных напряжений. Границные условия (1) для напряжений с учетом (3) дают систему двух тройных интегральных уравнений

$$\beta A_{33} A_{44} \int_0^\infty \alpha^2 \frac{d}{dz} \left(e \frac{d^2}{dz^2} - d^* \alpha^2 \right) \bar{\psi}(\alpha, z) J_1(r\alpha) d\alpha = 0;$$

$$z = h, \quad 0 \leq r < +\infty;$$

$$-\beta A_{33} A_{44} \int_0^\infty \alpha^3 \left(e \frac{d^2}{dz^2} - d^* \alpha^2 \right) \bar{\psi}(\alpha, z) J_0(r\alpha) d\alpha = 0;$$

$$z = h, \quad 0 \leq r \leq a, \quad r \geq b; \tag{10}$$

$$\beta A_{44} \int_0^\infty \alpha \frac{d}{dz} \left(c^* \frac{d^2}{dz^2} - b^* \alpha^2 \right) \bar{\psi}(\alpha, z) J_0(r\alpha) d\alpha = w_1(r);$$

$$z = h, \quad a \leq r \leq b;$$

$$\begin{aligned}
& \beta A_{33} A_{44} \int_0^\infty \alpha^2 \frac{d}{dz} \left(e \frac{d^2}{dz^2} - d^* \alpha^2 \right) \bar{\psi}(\alpha, z) J_1(r\alpha) d\alpha = 0; \\
& z = -h, \quad 0 \leq r < +\infty; \\
& -\beta A_{33} A_{44} \int_0^\infty \alpha^3 \left(e \frac{d^2}{dz^2} - d^* \alpha^2 \right) \bar{\psi}(\alpha, z) J_0(r\alpha) d\alpha = 0; \\
& z = -h, \quad 0 \leq r \leq c, \quad r \geq d; \\
& \beta A_{44} \int_0^\infty \alpha \frac{d}{dz} \left(c^* \frac{d^2}{dz^2} - b^* \alpha^2 \right) \bar{\psi}(\alpha, z) J_0(r\alpha) d\alpha = w_2(r); \\
& z = -h, \quad c \leq r \leq d.
\end{aligned} \tag{11}$$

Учитывая равенство (4), получаем

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dz} \left(e \frac{d^2}{dz^2} - d^* \alpha^2 \right) \bar{\psi}(\alpha, z) = \\
& = \alpha^3 \sum_{j=1, 3, 5} \mu_j (e\mu_j^2 - d^*) [C_j(\alpha) ch\mu_j z\alpha + D_j(\alpha) sh\mu_j z\alpha]; \\
& \frac{d}{dz} \left(c^* \frac{d^2}{dz^2} - b^* \alpha^2 \right) \bar{\psi}(\alpha, z) = \\
& = \alpha^3 \sum_{j=1, 3, 5} \mu_j (c^*\mu_j^2 - b^*) [C_j(\alpha) ch\mu_j z\alpha + D_j(\alpha) sh\mu_j z\alpha]; \\
& \left(e \frac{d^2}{dz^2} - d^* \alpha^2 \right) \bar{\psi}(\alpha, z) = \alpha^2 \sum_{j=1, 3, 5} (e\mu_j^2 - d^*) [C_j(\alpha) sh\mu_j z\alpha + D_j(\alpha) ch\mu_j z\alpha].
\end{aligned} \tag{12}$$

Вторые соотношения тройных уравнений (10) и (11) продолжим на весь интервал $0 \leq r < +\infty$, тогда получим

$$\begin{aligned}
& -\beta A_{33} A_{44} \int_0^\infty \alpha^5 \sum_{j=1, 3, 5} (e\mu_j^2 - d) [C_j(\alpha) sh\mu_j h\alpha + D_j(\alpha) ch\mu_j h\alpha] J_0(r\alpha) d\alpha = \\
& = x(r) [u(r-a) - u(r-b)], \quad 0 \leq r < +\infty, \\
& \beta A_{33} A_{44} \int_0^\infty \alpha^5 \sum_{j=1, 3, 5} (e\mu_j^2 - d) [C_j(\alpha) sh\mu_j h\alpha - D_j(\alpha) ch\mu_j h\alpha] J_0(r\alpha) d\alpha = \\
& = y(r) [u(r-c) - u(r-d)], \quad 0 \leq r < +\infty,
\end{aligned} \tag{13}$$

где $x(r)$ и $y(r)$ – неизвестные функции, которые определяют контактные напряжения под верхним и нижним штампами соответственно.

Применяя к первым соотношениям (10) и (11), а также (13), формулы обращения интегрального преобразования Ханкеля, приходим к системе четырех уравнений с четырьмя неизвестными $C_j(\alpha)$ и $D_j(\alpha)$, $j = 1, 3$

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1,3,5} \left(e\mu_j^2 - d^* \right) \left[C_j(\alpha) \ sh\mu_j h\alpha + D_j(\alpha) \ ch\mu_j h\alpha \right] = \\
& - \frac{1}{\beta A_{33} A_{44} \alpha^4} \int_a^b r \ x(r) \ J_0(r\alpha) dr = X(\alpha); \\
& \sum_{j=1,3,5} \left(e\mu_j^2 - d^* \right) \left[C_j(\alpha) \ sh\mu_j h\alpha - D_j(\alpha) \ ch\mu_j h\alpha \right] = \\
& = \frac{1}{\beta A_{33} A_{44} \alpha^4} \int_c^d r \ y(r) \ J_0(r\alpha) dr = -Y(\alpha); \tag{14}
\end{aligned}$$

$$\sum_{j=1,3,5} \mu_j \left(e\mu_j^2 - d^* \right) \left[C_j(\alpha) \ ch\mu_j h\alpha + D_j(\alpha) \ sh\mu_j h\alpha \right] = 0;$$

$$\sum_{j=1,3,5} \mu_j \left(e\mu_j^2 - d^* \right) \left[C_j(\alpha) \ ch\mu_j h\alpha - D_j(\alpha) \ sh\mu_j h\alpha \right] = 0.$$

Здесь $C_5(\alpha)$ и $D_5(\alpha)$ – известные функции, определяемые равенствами (7).

Решив эту систему, найдем

$$\begin{aligned}
C_1(\alpha) &= -\frac{\left(e\mu_5^2 - d^* \right)}{\left(e\mu_1^2 - d^* \right)} C_5(\alpha) \frac{f(\mu_5, \mu_3, \alpha)}{f(\mu_1, \mu_3, \alpha)} - \frac{\mu_3 ch\mu_3 h\alpha \ (X(\alpha) - Y(\alpha))}{2(e\mu_1^2 - d^*) f(\mu_1, \mu_3, \alpha)}; \\
C_3(\alpha) &= -\frac{\left(e\mu_5^2 - d^* \right)}{\left(e\mu_3^2 - d^* \right)} C_5(\alpha) \frac{f(\mu_1, \mu_5, \alpha)}{f(\mu_1, \mu_3, \alpha)} + \frac{\mu_1 ch\mu_1 h\alpha \ (X(\alpha) - Y(\alpha))}{2(e\mu_3^2 - d^*) f(\mu_1, \mu_3, \alpha)}; \tag{15} \\
D_1(\alpha) &= -\frac{\left(e\mu_5^2 - d^* \right)}{\left(e\mu_1^2 - d^* \right)} D_5(\alpha) \frac{\varphi(\mu_5, \mu_3, \alpha)}{\varphi(\mu_1, \mu_3, \alpha)} - \frac{\mu_3 sh\mu_3 h\alpha \ (X(\alpha) + Y(\alpha))}{2(e\mu_1^2 - d^*) \varphi(\mu_1, \mu_3, \alpha)}; \\
D_3(\alpha) &= -\frac{\left(e\mu_5^2 - d^* \right)}{\left(e\mu_3^2 - d^* \right)} D_5(\alpha) \frac{\varphi(\mu_1, \mu_5, \alpha)}{\varphi(\mu_1, \mu_3, \alpha)} + \frac{\mu_1 sh\mu_1 h\alpha \ (X(\alpha) + Y(\alpha))}{2(e\mu_3^2 - d^*) \varphi(\mu_1, \mu_3, \alpha)},
\end{aligned}$$

где

$$f(\mu_i, \mu_j, \alpha) = \mu_i \ ch\mu_i h\alpha \ sh\mu_j h\alpha - \mu_j \ ch\mu_j h\alpha \ sh\mu_i h\alpha;$$

$$\varphi(\mu_i, \mu_j, \alpha) = \mu_i \ sh\mu_i h\alpha \ ch\mu_j h\alpha - \mu_j \ sh\mu_j h\alpha \ ch\mu_i h\alpha.$$

Неизвестные функции $x(r)$ и $y(r)$, описывающие контактные напряжения под штампами, определяем в виде

$$\begin{aligned}
x(r) &= \sum_{n=1}^N a_n \left[J_0\left(\frac{r}{a} \gamma_n\right) N_0(\gamma_n) - J_0(\gamma_n) N_0\left(\frac{r}{a} \gamma_n\right) \right], \tag{16} \\
y(r) &= \sum_{n=1}^N b_n \left[J_0\left(\frac{r}{c} \lambda_n\right) N_0(\lambda_n) - J_0(\lambda_n) N_0\left(\frac{r}{c} \lambda_n\right) \right],
\end{aligned}$$

где γ_n и λ_n – положительные корни уравнений

$$J_0\left(\frac{b}{a}z\right) N_0(z) - J_0(z) N_0\left(\frac{b}{a}z\right) = 0, \quad J_0\left(\frac{d}{c}z\right) N_0(z) - J_0(z) N_0\left(\frac{d}{c}z\right) = 0$$

соответственно, a_n и b_n – неизвестные коэффициенты

Учитывая (16), после вычисления интегралов (14), получим формулы для $X(\alpha)$ и $Y(\alpha)$

$$X(\alpha) = -\frac{1}{\beta A_{33} A_{44} \alpha^4} \sum_{n=1}^N \frac{a_n}{\alpha^2 - \left(\frac{\gamma_n}{a}\right)^2} \left(\frac{2}{\pi} J_0(a\alpha) - J_0(b\alpha) R\left(\frac{b}{a}; \gamma_n\right) \right); \quad (17)$$

$$Y(\alpha) = -\frac{1}{\beta A_{33} A_{44} \alpha^4} \sum_{n=1}^N \frac{b_n}{\alpha^2 - \left(\frac{\lambda_n}{c}\right)^2} \left(\frac{2}{\pi} J_0(c\alpha) - J_0(d\alpha) R\left(\frac{d}{c}; \lambda_n\right) \right),$$

где

$$R\left(\frac{b}{a}; \gamma_n\right) = \frac{b}{a} \gamma_n \left[N_0(\gamma_n) J_1\left(\frac{b}{a} \gamma_n\right) - J_0(\gamma_n) N_1\left(\frac{b}{a} \gamma_n\right) \right];$$

$$R\left(\frac{d}{c}; \lambda_n\right) = \frac{d}{c} \lambda_n \left[N_0(\lambda_n) J_1\left(\frac{d}{c} \lambda_n\right) - J_0(\lambda_n) N_1\left(\frac{d}{c} \lambda_n\right) \right].$$

В результате подстановки (12), (15) и (17) в третьи соотношения (10) и (11) получим равенства, служащие для определения неизвестных a_n и b_n

Реализацию этих соотношений проводим, вводя обозначения

$$a_n = \frac{A_{33}}{M_{13}} \left(\frac{1}{R_1} a_n^{(1)} + \frac{1}{R_2} a_n^{(2)} + \frac{1}{R_3} a_n^{(3)} + \frac{1}{R_4} a_n^{(4)} + \frac{\beta A_{44} (e\mu_5^2 - d^*)}{B} a_n^{(5)} \right); \quad (18)$$

$$b_n = \frac{A_{33}}{M_{13}} \left(\frac{1}{R_1} b_n^{(1)} + \frac{1}{R_2} b_n^{(2)} + \frac{1}{R_3} b_n^{(3)} + \frac{1}{R_4} b_n^{(4)} + \frac{\beta A_{44} (e\mu_5^2 - d^*)}{B} b_n^{(5)} \right).$$

Тогда получим:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^N a_n^{(i)} \int_0^\infty \frac{H(\alpha) S_n(\alpha)}{D(\alpha)} \begin{cases} J_0(r\alpha) - J_0(a\alpha) \\ J_0(r\alpha) - J_0(b\alpha) \end{cases} d\alpha + \\ & + \sum_{n=1}^N b_n^{(i)} \int_0^\infty \frac{G(\alpha) Q_n(\alpha)}{D(\alpha)} \begin{cases} J_0(r\alpha) - J_0(a\alpha) \\ J_0(r\alpha) - J_0(b\alpha) \end{cases} d\alpha = B_i^{(i)}(r), \quad (19) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} a < r < r_1 \\ r_1 < r < b \end{cases}, \quad i = \overline{1, 5};$$

$$\sum_{n=1}^N a_n^{(i)} \int_0^\infty \frac{G(\alpha) S_n(\alpha)}{D(\alpha)} \begin{cases} J_0(r\alpha) - J_0(c\alpha) \\ J_0(r\alpha) - J_0(d\alpha) \end{cases} d\alpha +$$

$$+\sum_{n=1}^N b_n^{(i)} \int_0^\infty \frac{H(\alpha) Q_n(\alpha)}{D(\alpha)} \begin{cases} J_0(r\alpha) - J_0(c\alpha) \\ J_0(r\alpha) - J_0(d\alpha) \end{cases} d\alpha = B_2^{(i)}(r); \quad (20)$$

$$\begin{cases} c < r < r_2 \\ r_2 < r < d \end{cases}; \quad i = \overline{1, 5};$$

выражения для функций, в равенствах (19) (20) не приводятся.

Требуя выполнения (19), (20) в N точках промежутка $a < r < b$ и N точках промежутка $c < r < d$, получаем пять систем по $2N$ уравнений с $2N$ неизвестными $a_n^{(i)}$, $b_n^{(i)}$ ($i = 1, 2, 3, 4, 5$). Найдя решения этих систем, возвращаясь к соотношениям (18), получаем значения a_n и b_n , в которых будут фигурировать величины $Z_i = 1/R_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$), связанные с радиусами кривизны полупарабол, вращением которых образованы штампы. Обозначив

$$Z_i = \frac{P}{2\pi a^2} \frac{M_{13}}{A_{33}} Z_i^{(1)} + \frac{\beta A_{44}(e\mu_5^2 - d^*)}{B} Z_i^{(2)} \quad (i = 1, 2, 3, 4), \quad (21)$$

вводим в рассмотрение безразмерные величины $Z_i^{(1)}$, $Z_i^{(2)}$.

Используя условия равновесия двух штампов, а также равенства вертикальных перемещений в точках $r = r_1$ и $r = r_2$ на верхней и нижней границах слоя, получаем две системы из четырех уравнений, содержащих по четыре неизвестные величины $Z_i^{(1)}$, $Z_i^{(2)}$ ($i = 1, 2, 3, 4$), решая которые, определяем, с помощью соотношений (21), величины Z_i . Подставляя a_n и b_n (соотношения (18) с использованием (21)) в выражения для $x(r)$ и $y(r)$, получаем формулы для определения контактных напряжений под штампами

$$\sigma_{zz}^{(p)}(r, h) = -\frac{P}{2\pi a^2} \left(Z_1^{(1)} x^{(1)}(r) + Z_2^{(1)} x^{(2)}(r) + Z_3^{(1)} x^{(3)}(r) + Z_4^{(1)} x^{(4)}(r) \right);$$

$$a < r < b;$$

$$\sigma_{zz}^{(T)}(r, h) = \frac{\beta A_{33} A_{44} (e\mu_5^2 - d^*)}{M_{13} B} \left(Z_1^{(2)} x^{(1)}(r) + Z_2^{(2)} x^{(2)}(r) + Z_3^{(2)} x^{(3)}(r) + \right.$$

$$\left. + Z_4^{(2)} x^{(4)}(r) + x^{(5)}(r) \right), \quad a < r < b;$$

$$x^{(i)}(r) = \sum_{n=1}^N a_n^{(i)} \left[J_0\left(\frac{r}{a} \gamma_n\right) N_0(\gamma_n) - J_0(\gamma_n) N_0\left(\frac{r}{a} \gamma_n\right) \right] \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5);$$

$$\sigma_{zz}^{(p)}(r, -h) = -\frac{P}{2\pi a^2} \left(Z_1^{(1)} y^{(1)}(r) + Z_2^{(1)} y^{(2)}(r) + Z_3^{(1)} y^{(3)}(r) + Z_4^{(1)} y^{(4)}(r) \right);$$

$$c < r < d;$$

$$\sigma_{zz}^{(T)}(r, -h) = \frac{\beta A_{33} A_{44} (e\mu_5^2 - d^*)}{M_{13} B} \left(Z_1^{(2)} y^{(1)}(r) + Z_2^{(2)} y^{(2)}(r) + Z_3^{(2)} y^{(3)}(r) + \right.$$

$$+ Z_4^{(2)} y^{(4)}(r) + y^{(5)}(r) \Big), \quad c < r < d;$$

$$y^{(i)}(r) = \sum_{n=1}^N b_n^{(i)} \left[J_0\left(\frac{r}{c}\lambda_n\right) N_0(\lambda_n) - J_0(\lambda_n) N_0\left(\frac{r}{c}\lambda_n\right) \right] (i = 1, 2, 3, 4, 5).$$

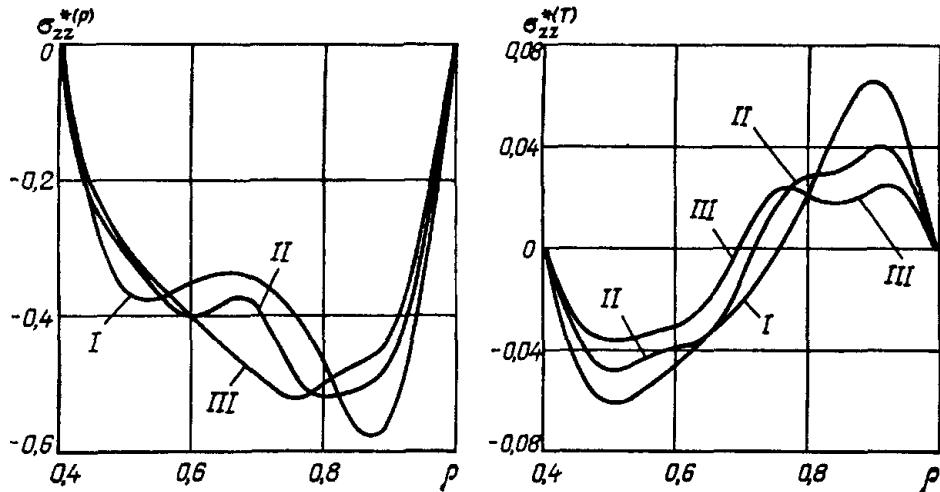


Рис. 2

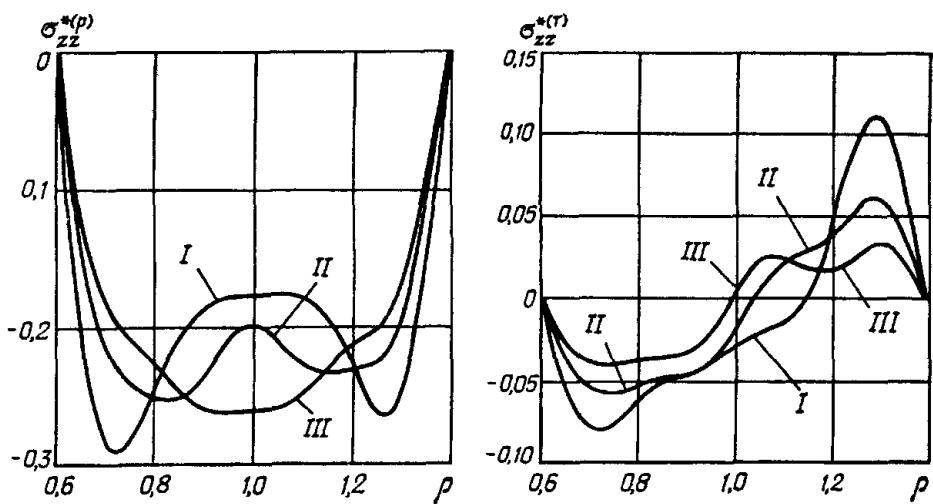


Рис. 3

4. Числовой пример. В качестве примера исследуем влияние геометрических параметров штампов на распределение силовой и температурной составляющих контактных напряжений. На рис. 2 и 3 показаны графики функций

$$\sigma_{zz}^{*(p)}(r, h) = \frac{2\pi a^2}{P} \sigma_{zz}^{(p)}(r, h), \quad \sigma_{zz}^{*(T)}(r, h) = \frac{1}{\beta T_0} \sigma_{zz}^{(T)}(r, h);$$

$$\sigma_{zz}^{*(p)}(r, -h) = \frac{2\pi a^2}{P} \sigma_{zz}^{(p)}(r, -h), \quad \sigma_{zz}^{*(T)}(r, -h) = \frac{1}{\beta T_0} \sigma_{zz}^{(T)}(r, -h).$$

Кривые I, II, III соответствуют следующим значениям параметров (при $a = 0,4$, $b = 1$):

I ($-r_a = 0,6$; $r_b = 0,8$); II ($-r_a = 0,65$; $r_b = 0,75$); III ($-r_a = 0,7$; $r_b = 0,7$),

а при $c = 0,6$; $d = 1,4$ имеем: – I ($-r_c = 0,8$; $r_d = 1,2$); II ($-r_c = 0,9$; $r_d = 1,1$); III ($-r_c = 1$; $r_d = 1$).

Числовой анализ выполнен для значений $\mu_1 = 1,388395$; $\mu_3 = 0,705194$.

Из приведенных результатов видно, что конфигурация штампов и анизотропия слоя существенно влияют на распределение контактных напряжений. Полученные формулы для вычисления контактных напряжений относительно просты и удобны для использования в инженерных расчетах на прочность.

Р Е З Ю М Е. Розроблено методику розв'язування контактних задач теорії пружності для випадку кільцевих штампів при їх взаємодії із трансверсально-ізотропним шаром. Побудовано розв'язок задачі про контактну взаємодію двох нагрітих кільцевих штампів з шаром. Отримано формулами для обчислення контактних напружень під штампами та проаналізовано вплив форми штампів на величину і характер їх розподілу.

S U M M A R Y. A technique of solving the contact problems of the theory of elasticity is elaborated for the case of annular stamps interacting with a transversally isotropic layer. The solution is constructed for the problem on contact interaction of two heated annular stamps with the layer. The formulas for calculation of contact stresses under stamps are obtained and an influence of the stamps shape on the value and the way of their distribution is analysed.

Key words: contact problem, theory of elasticity, transversally isotropic layer, two heated annular stamps, compression, thermoelastic state, stress distribution.

- Грилицкий Д.В., Габрусев В.Г. Об одной осесимметричной контактной задаче термоупругости для трансверсально-изотропного слоя // Прикл. механика. – 1976 – 12, № 5. – С. 24 – 28.
- Гузь А.І., Бабич С.Ю., Рудницький В.Б. Контактна взаємодія тіл з початковими напруженнями. – К.: Вища шк., 1995. – 305 с.
- Новацкий В. Вопросы термоупругости. – М.: Изд-во АН СССР, 1962. – 364 с.
- Снеддон И.Н. Преобразования Фурье. – М.: Изд-во иностр. лит., 1955. – 668 с.
- Шелестовський Б. Контактна взаємодія кругового штампа з шаром із залишковими деформаціями, що зумовлені зосередженим нагрівом // Вісн. Тернопіл. держ. техн. ун-ту. – 2002. – 7, № 4. – С. 13 – 20.
- Rudnitsky V., Gabrushev V., Shelestovsky B. Annular punch contact interaction with the preliminary stressed layer // Proc. of the 2nd World Congress on Computational Mechanics. – Stuttgart, 1990. – P. 801.
- Aleksandrov V.M. Asymptotic Methods Applied to Contact Problems // Int. Appl. Mech. – 2003. – 39, N 8. – P. 912 – 920.
- Argatov I.I. Interaction of Several Dies on an Elastic Half-Space // Int. Appl. Mech. – 2003. – 39, N 9. – P. 1054 – 1059.
- Bosakov S.V. Solving the Contact Problem for a Rectangular Die on a Elastic Foundation // Int. Appl. Mech. – 2003. – 39, N 10. – P. 1188 – 1192.
- Matnyak S.V. Contact Stress Distribution Under a Rigid Cylinder Rolling Over a Prestressed Strip // Int. Appl. Mech. – 2003. – 39, N 7. – P. 840 – 847.

Тернопол. гос. техн. ун-т;
Тернопол. гос. пед. ун-т
(Украина)

Поступила 01.10.2003