УДК. 539.3

Б. Шелестовський

Доцент, канд. фіз.-мат. наук

Г. Габрусєв

Аспірант

Тернопільський державний технічний університет імені Івана Пулюя, м. Тернопіль

КОНТАКТНА ЗАДАЧА ПРО ТИСК ДВОХ КІЛЬЦЕВИХ ШТАМПІВ НА ШАР, В ЯКОМУ НАЯВНЕ ПОЛЕ ЗАЛИШКОВИХ ДЕФОРМАЦІЙ

Ï îáóäîâàíî ìåòîäèêó âèçíà÷åííÿ êîíòàêòíèõ íàïðóæåíü ó øàð³, â ÿêèé âòèñêóþòüñÿ äâà ê³ëüöåâèõ øòàìïè, çà íàÿâíîñò³ ó íüîìó çàëèøêîâèõ äåôîðìàö³é, çóìîâëåíèõ çîñåðåäæåíèì íàãð³âàííÿì ïðè çâàðþâàíí³. Íàâåäåíî ÷èñëîâèé ïðèêëàä ³ ïîêàçàíî, ùî òîâùèíà øàðó òà íàÿâí³ñòü ïîëÿ çàëèøêîâèõ äåôîðìàö³é ³ñòîòíî âïëèâàþòü íà âåëè÷èíó ³ õàðàêòåð ðîçïîä³ëó êîíòàêòíèõ íàïðóæåíü.

кільцевий штамп, шар, контактне напруження, залишкова деформація, система інтегральних рівнянь

Контактні задачі пружності й термопружності є теоретичною основою розрахунків на міцність елементів конструкцій деталей машин та вузлів приладів. Для зварних конструкцій актуальними є дослідження впливу залишкових деформацій на величину і характер розподілу напружень при контактній взаємодії тіл [1, 2]. Для визначення залишкових деформацій та напружень в оболонках і пластинах розроблено метод, який ґрунтується на використанні розв'язків рівнянь механіки деформівних твердих тіл з власними деформаціями та експериментальної інформації, отриманої фізичними методами. Цей метод на основі розв'язків обернених задач дає змогу відтворити залишкові деформації і напруження в довільній точці елемента конструкції [3].

Постановка задачі. Розглянемо плоскопаралельний ізотропний шар скінченної товщини h. В шар силою P втискуються два жорстких, гладких, кільцевих штампи, які є тілами, утвореними від обертання фігури, яка обмежена двома вітками півпарабол, спряжених у своїх вершинах з відрізком прямої, перпендикулярним до осі обертання, навколо спільної осі, що збігається з лінією дії сили P, перпендикулярної до граничних площин шару. В кільцевій області контакту верхнього штампа у шарі

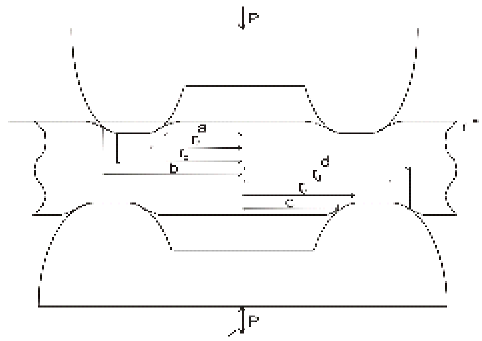

Рис. 1. Схема контактної взаємодії кільцевих штампів з шаром

відбулося зосереджене нагрівання в результаті зварювання, що зумовило поле залишкових деформацій. Потрібно визначити розподіл контактних напружень під штампами.

Для розв'язання задачі виберемо циліндричну систему координат (r,θ,z), так щоб координатна площина (O,r,θ) збігалася з верхньою граничною площиною шару, а вісь Oz була спрямована вертикально вниз і збігалася з лініями дії сил втискування. Тоді функції $w_1(r)$ та

$w_2(r)$, які описують вертикальні переміщення точок області контакту відповідно на верхній та нижній граничних площинах шару, матимуть вигляд:

$$w_1(r)=\begin{cases} w_1(a)+\dfrac{1}{2R_1}\left[(r_a-a)^2-(r_a-r)^2\right], & a\le r<r_a;\\ w_1(a)+\dfrac{1}{2R_1}(r_a-a)^2, & r_a\le r<r_1;\\ w_1(b)+\dfrac{1}{2R_2}(r_b-b)^2, & r_1\le r<r_b;\\ w_1(b)+\dfrac{1}{2R_2}\left[(r_b-b)^2-(r_b-r)^2\right], & r_b\le r\le b,\end{cases}$$

$$w_2(r)=\begin{cases} w_2(\tilde{n})-\dfrac{1}{2R_3}\left[(r_{\tilde{n}}-\tilde{n})^2-(r_{\tilde{n}}-r)^2\right], & \tilde{n}\le r<r_{\tilde{n}};\\ w_2(\tilde{n})-\dfrac{1}{2R_3}(r_{\tilde{n}}-\tilde{n})^2, & r_{\tilde{n}}\le r<r_2;\\ w_2(d)-\dfrac{1}{2R_4}(r_d-d)^2, & r_2\le r<r_d;\\ w_2(d)-\dfrac{1}{2R_4}\left[(r_d-d)^2-(r_d-r)^2\right], & r_d\le r\le d,\end{cases} \tag{1}$$

тут $r_1=\dfrac{r_a+r_b}{2}$, $r_2=\dfrac{r_c+r_d}{2}$, R_1 та R_2 — радіуси кривини півпарабол, обертанням яких утворено верхній, а R_3 та R_4 — нижній штампи.

Поле залишкових деформацій, на основі експериментальних даних [4], описується виразами:

$$\varepsilon_{rr}^0=-\varepsilon_0\left(1-\omega p^2r^2\right)exp\left(-p^2r^2\right)f(z),$$

$$\varepsilon_{\theta\theta}^0=-\varepsilon_0\left(1+\omega p^2r^2\right)exp\left(-p^2r^2\right)f(z),$$

$$\varepsilon_{zz}^0=-\left(\varepsilon_{rr}^0+\varepsilon_{\theta\theta}^0\right),\quad \varepsilon_{r\theta}^0=\varepsilon_{rz}^0=\varepsilon_{z\theta}^0,$$

$$f(z)=C_0+\sum_{n=1}^{N_1}C_n\cos\frac{\pi nz}{h}.$$

Граничні умови задачі матимуть вигляд:

$$\sigma_{rz}=0,\quad z=0,\quad 0\le r<\infty;$$

$$\sigma_{rz}=0,\quad z=h,\quad 0\le r<\infty;$$

$$u_z=w_1(r),\quad a\le r\le b,\quad z=0;$$

$$\sigma_{zz}=0,\quad z=0,\quad 0\le r\le a,\quad b\le r<\infty;$$

$$u_z=w_2(r),\quad \tilde{n}\le r\le d,\quad z=h;$$

$$\sigma_{zz}=0,\quad z=h,\quad 0\le r\le c,\quad d\le r<\infty. \tag{2}$$

Тут $\sigma_{i,j}=\bar{\sigma}_{i,j}+\bar{\bar{\sigma}}_{i,j}$, де $\bar{\sigma}_{i,j}$ — компоненти напруженого стану, що відповідають частинному розв'язку рівнянь рівноваги та полю залишкових деформацій:

$$\frac{\bar{\sigma}_{zz}}{G\varepsilon_0}=m_2\left\{\left[2\left(\nu-2-\nu\omega+\omega\nu p^2r^2\right)\right]exp\left(-p^2r^2\right)\cdot f(z)+\right.$$

$$+\frac{\pi^2}{p^2}\sum_{n=1}^{N_1}n^2C_n\cos\frac{\pi nz}{h}\int_0^\infty\frac{\alpha}{\alpha^2h^2+\pi^2n^2}\left[\nu\Phi_2(\alpha)+5-4\nu+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\omega\alpha^2}{4p^2}-\frac{\pi^2n^2}{\alpha^2h^2+\pi^2n^2}\Phi_2(\alpha)\right]\cdot exp\left(-\frac{\alpha^2}{4p^2}\right)\cdot J_0(\alpha r)d\alpha\right\};$$

$$\frac{\bar{\sigma}_{rz}}{G\varepsilon_0}=\frac{m_2h\pi}{p^2}\sum_{n=1}^{\infty}nC_n\sin\frac{\pi nz}{h}\int_0^\infty\frac{\alpha^2}{\alpha^2h^2+\pi^2n^2}\left[\nu-\nu\frac{\omega\alpha^2}{4p^2}-\right.$$

$$\left.\left.-2+\frac{\pi^2n^2}{\alpha^2h^2+\pi^2n^2}\Phi_2(\alpha)\right]\cdot exp\left(-\frac{\alpha^2}{4p^2}\right)\cdot J_1(\alpha r)d\alpha\right\};$$

$$\Phi_1(\alpha)=1+\frac{\omega\alpha^2}{4p^2},\quad \Phi_2(\alpha)=3+\frac{\omega\alpha^2}{4p^2},$$

$$m_1=\frac{1-2\nu}{1-\nu},\quad m_2=\frac{1}{1-\nu}.$$

Складові $\bar{\bar{\sigma}}_{i,j}$, що відповідають загальному розв'язку, за допомогою функції Лява

$$L=\int_0^\infty\alpha^{-2}\left\{A(\alpha)sh\alpha z+B(\alpha)ch\alpha z+\right.$$

$$\left.+\alpha z\left[C(\alpha)sh\alpha z+D(\alpha)ch\alpha z\right]\right\}J_0(r\alpha)d\alpha$$

подамо у вигляді:

$$\bar{\bar{\sigma}}_{zz}=\frac{2G}{1-2\nu}\int_0^\infty\alpha\left\{\left[(1-2\nu)C(\alpha)-B(\alpha)-\alpha zD(\alpha)\right]sh\alpha z+\right.$$

$$\left.+\left[(1-2\nu)D(\alpha)-A(\alpha)-\alpha zC(\alpha)\right]ch\alpha z\right\}J_0(\alpha r)d\alpha,$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_{rz}=\frac{2G}{1-2\nu}\int_0^\infty\alpha\left\{\left[2\nu C(\alpha)+B(\alpha)+\alpha zD(\alpha)\right]ch\alpha z+\right.$$

$$\left.+\left[2\nu D(\alpha)+A(\alpha)+\alpha zC(\alpha)\right]sh\alpha z\right\}J_1(\alpha r)d\alpha.$$

Вертикальні переміщення точок шару обчислюватимуться за формулою

$$u_z=\frac{1}{1-2\nu}\int_0^\infty\left\{\left[2(1-2\nu)C(\alpha)-B(\alpha)-\alpha zD(\alpha)\right]ch\alpha z+\right.$$

$$\left.+\left[2(1-2\nu)D(\alpha)-A(\alpha)-\alpha zC(\alpha)\right]sh\alpha z\right\}J_0(\alpha r)d\alpha.$$

Зведення задачі до системи інтегральних рівнянь. Вимагаючи виконання граничних умов задачі (2), прийдемо до системи двох лінійних алгебричних рівнянь:

$$2\nu C(\alpha)+B(\alpha)=0,$$

$$\left(2\nu C(\alpha)+B(\alpha)+\alpha hD(\alpha)\right)ch\alpha h+$$

$$+\left(2\nu D(\alpha)+A(\alpha)+\alpha hC(\alpha)\right)sh\alpha h=0, \qquad (3)$$

а також системи двох потрійних інтегральних рівнянь:

$$\frac{1}{1-2\nu}\int_0^\infty\left[2(1-2\nu)C(\alpha)-B(\alpha)\right]J_0(\alpha r)d\alpha=$$

$$=w_1(r),\ a\le r\le b,$$

$$\int_0^\infty\alpha\left\{\frac{2G}{1-2\nu}\left[(1-2\nu)D(\alpha)-A(\alpha)\right]+2G\varepsilon_0^*\chi_1(\alpha)\right\}\times$$

$$\times J_0(\alpha r)d\alpha=0,\ 0\le r\le a,\ r\ge b \qquad (4)$$

та

$$\frac{1}{1-2\nu}\int_0^\infty\left\{\left[2(1-2\nu)C(\alpha)-B(\alpha)-\alpha hD(\alpha)\right]ch\alpha h+\right.$$

$$\left.+\left[2(1-2\nu)D(\alpha)-A(\alpha)-\alpha hC(\alpha)\right]sh\alpha h\right\}J_0(\alpha r)d\alpha=$$

$$=w_2(r),\ c\le r\le d,$$

$$\int_0^\infty\alpha\left\{\frac{2G}{1-2\nu}\left[\left((1-2\nu)C(\alpha)-B(\alpha)-\alpha hD(\alpha)\right)sh\alpha h+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left((1-2\nu)D(\alpha)-A(\alpha)-\alpha hC(\alpha)\right)ch\alpha h\right]+2G\varepsilon_0^*\chi_2(\alpha)\right\}\times$$

$$\times J_0(\alpha r)d\alpha=0,\ 0\le r\le c,\ r\ge d. \qquad (5)$$

Знайшовши з (3) $B(\alpha)$ і $D(\alpha)$ через $A(\alpha)$ та $C(\alpha)$, (4) та (5) подамо у такому вигляді:

$$\int_0^\infty C(\alpha)J_0(\alpha r)d\alpha=\frac{m_1}{2}w(r),\ a\le r\le b,$$

$$\int_0^\infty\alpha\left\{\frac{2G}{1-2\nu}\left[\varphi_5(\alpha)C(\alpha)+\varphi_6(\alpha)A(\alpha)\right]+2G\varepsilon_0^*\chi_1(\alpha)\right\}\times$$

$$\times J_0(\alpha r)d\alpha=0,\ 0\le r\le a,\ r\ge b, \qquad (6)$$

та

$$\frac{1}{1-2\nu}\int_0^\infty\left[\varphi_3(\alpha)C(\alpha)+\varphi_4(\alpha)A(\alpha)\right]J_0(\alpha r)d\alpha=$$

$$=w_2(r),\ c\le r\le d,$$

$$\int_0^\infty\alpha\left[\frac{2G}{1-2\nu}\left(\varphi_1(\alpha)C(\alpha)+\varphi_2(\alpha)A(\alpha)\right)+2G\varepsilon_0^*\chi_2(\alpha)\right]\times$$

$$\times J_0(\alpha r)d\alpha=0,\ 0\le r\le c,\ r\ge c, \qquad (7)$$

де

$$\chi_1(\alpha)=\sum_{n=0}^{N_1}C_n f_1(\alpha)+\sum_{n=0}^{N_1}C_n n^2 f_2(\alpha),$$

$$\chi_2(\alpha)=\sum_{n=0}^{N_1}(-1)^n C_n f_1(\alpha)+\sum_{n=0}^{N_1}(-1)^n C_n n^2 f_2(\alpha),$$

$$\varphi_s(\alpha)=\frac{\Delta_s(\alpha)}{\Delta_0(\alpha)},\quad s=\overline{1,6},\quad f_1(\alpha)=\frac{\varepsilon_0^*}{2(1-\nu)}\left[\frac{\nu-2}{p^2}-\frac{\nu\omega\alpha^2}{4p^4}\right]e^{-\frac{\alpha^2}{4p^2}},$$

$$f_2(\alpha)=\frac{\varepsilon_0^*}{2(1-\nu)}\frac{\pi^2}{p^2}\left\{\frac{1}{\alpha^2h^2+\pi^2}\times\right.$$

$$\left.\times\left[\left(\nu-\frac{\pi^2}{\alpha^2h^2+\pi^2}\right)\left(3+\frac{\omega\alpha^2}{4p^2}\right)+5-4\nu+\frac{\omega\alpha^2}{4p^2}\right]\right\}e^{-\frac{\alpha^2}{4p^2}},$$

$$\Delta_1(\alpha)=2\nu\, sh^2\alpha h-\alpha^2h^2,\ \Delta_2(\alpha)=-\left(\alpha h+sh\alpha h\cdot ch\alpha h\right),$$

$$\Delta_3(\alpha)=2(1-\nu)\left(\alpha h+\nu\, sh2\alpha h\right),$$

$$\Delta_4(\alpha)=2(\nu-1)sh^2\alpha h,$$

$$\Delta_5(\alpha)=(2\nu-1)\alpha h\cdot sh\alpha h,$$

$$\Delta_6(\alpha)=-\left(sh\alpha h+\alpha h\cdot ch\alpha h\right),$$

$$\Delta_0(\alpha)=\alpha h ch\alpha h+2\nu\, sh\alpha h..$$

Розв'язання системи інтегральних рівнянь. Для побудови розв'язку інтегральних рівнянь (6) та (7) продовжимо їх перші співвідношення на весь піввідрізок $0\le r<\infty$:

$$\int_0^\infty\alpha\left\{\frac{2G}{1-2\nu}\left(\varphi_5(\alpha)C(\alpha)+\varphi_6(\alpha)A(\alpha)\right)+2G\varepsilon_0^*\chi_1(\alpha)\right\}\times$$

$$\times J_0(\alpha r)d\alpha=x(r)\left[U(r-a)-U(r-b)\right],\ 0\le r<\infty,$$

$$\int_0^\infty\alpha\left\{\frac{2G}{1-2\nu}\left(\varphi_1(\alpha)C(\alpha)+\varphi_2(\alpha)A(\alpha)\right)+2G\varepsilon_0^*\chi_1(\alpha)\right\}\times$$

$$\times J_0(\alpha r)d\alpha=y(r)\left[U(r-c)-U(r-d)\right],0\le r<\infty, \qquad (8)$$

де $U(x)=\begin{cases}1, & x\ge 0,\\ 0, & x<0\end{cases}$ — функція Хевісайда.

Тут $x(r)$ та $y(r)$ — невідомі функції, які мають цілком певний фізичний зміст, а саме — це функції розподілу контактних напружень під штампами відповідно на верхній та нижній граничних площинах шару. Їх доцільно вибрати у такому вигляді:

$$x(r)=\sum_{n=1}^{N}a_nL_1(\gamma_n,r)=\sigma_{zz}(r,0),\quad a\le r\le b,$$

$$y(r)=\sum_{n=1}^{N}b_nL_2(\lambda_n,r)=\sigma_{zz}(r,h),\quad c\le r\le d, \qquad (9)$$

де

$$L_1(\gamma_n,r)=J_0\left(\frac{r}{a}\gamma_n\right)N_0(\gamma_n)-J_0(\gamma_n)N_0\left(\frac{r}{a}\gamma_n\right),$$

$$L_2(\lambda_n, r) = J_0\left(\frac{r}{c}\lambda_n\right)N_0(\lambda_n) - J_0(\lambda_n)N_0\left(\frac{r}{c}\lambda_n\right),$$

λ_n та γ_n — додатні корені рівнянь

$$J_0\left(\frac{b}{a}x\right)N_0(x) - J_0(x)N_0\left(\frac{b}{a}x\right) = 0$$

та

$$J_0\left(\frac{d}{c}x\right)N_0(x) - J_0(x)N_0\left(\frac{d}{c}x\right) = 0$$

відповідно; a_n та b_n — коефіцієнти, які потрібно знайти.

Застосовуючи до співвідношень (8) формулу обернення інтегрального перетворення Ханкеля, отримаємо:

$$\frac{2G}{1-2\nu}\left[\varphi_5(\alpha)C(\alpha) + \varphi_6(\alpha)A(\alpha)\right] + 2G\varepsilon_0^*\chi_1(\alpha) =$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{\alpha^2 - \left(\frac{\gamma_n}{a}\right)^2}\left\{\frac{2}{\pi}J_0(a\alpha) - J_0(b\alpha)R\left(\frac{b}{a}, \gamma_n\right)\right\},$$

$$\frac{2G}{1-2\nu}\left[\varphi_1(\alpha)C(\alpha) + \varphi_2(\alpha)A(\alpha)\right] + 2G\varepsilon_0^*\chi_2(\alpha) =$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \frac{b_n}{\alpha^2 - \left(\frac{\lambda_n}{c}\right)^2}\left\{\frac{2}{\pi}J_0(c\alpha) - J_0(d\alpha)R\left(\frac{d}{c}, \lambda_n\right)\right\},$$

де $R(x, y) = x \cdot y\left[N_0(y)J_1(x \cdot y) - J_0(y)N_1(x \cdot y)\right]$.

Визначивши з попередньої системи $A(\alpha)$ та $C(\alpha)$ і підставивши знайдені вирази в перші рівності (6) та (7), з урахуванням (1), матимемо:

$$\sum_{n=1}^{N} a_n \int_0^\infty \frac{\Omega_1(\alpha)F_1(\alpha)}{\left(\alpha^2 - \left(\frac{\gamma_n}{a}\right)^2\right)}\begin{Bmatrix} J_0(r\alpha) - J_0(a\alpha) \\ J_0(r\alpha) - J_0(b\alpha)\end{Bmatrix}d\alpha -$$

$$-\sum_{n=1}^{N} b_n \int_0^\infty \frac{\Omega_2(\alpha)F_2(\alpha)}{\alpha^2 - \left(\frac{\lambda_n}{c}\right)^2}\begin{Bmatrix} J_0(r\alpha) - J_0(a\alpha) \\ J_0(r\alpha) - J_0(b\alpha)\end{Bmatrix}d\alpha =$$

$$= \frac{1}{2(1-\nu)}w_1^*(r) + \varepsilon_0^*\int_0^\infty\left[\chi_1(\alpha)\Omega_1(\alpha) - \chi_2(\alpha)\Omega_2(\alpha)\right]\times$$

$$\times\begin{Bmatrix} J_0(r\alpha) - J_0(a\alpha) \\ J_0(r\alpha) - J_0(b\alpha)\end{Bmatrix}d\alpha, \quad a \le r \le b; \qquad (10)$$

$$\sum_{n=1}^{N} a_n \int_0^\infty \frac{\Theta_1(\alpha)F_1(\alpha)}{\left(\alpha^2 - \left(\frac{\gamma_n}{a}\right)^2\right)}\begin{Bmatrix} J_0(r\alpha) - J_0(c\alpha) \\ J_0(r\alpha) - J_0(d\alpha)\end{Bmatrix}d\alpha +$$

$$+\sum_{n=1}^{N} b_n \int_0^\infty \frac{\Theta_2(\alpha)F_2(\alpha)}{\alpha^2 - \left(\frac{\lambda_n}{c}\right)^2}\begin{Bmatrix} J_0(r\alpha) - J_0(c\alpha) \\ J_0(r\alpha) - J_0(d\alpha)\end{Bmatrix}d\alpha =$$

$$= w_2^*(r) + \varepsilon_0^*\int_0^\infty\left[\chi_1(\alpha)\Theta_1(\alpha) + \chi_2(\alpha)\Theta_2(\alpha)\right]\times$$

$$\times\begin{Bmatrix} J_0(r\alpha) - J_0(c\alpha) \\ J_0(r\alpha) - J_0(d\alpha)\end{Bmatrix}d\alpha, \quad c \le r \le d, \qquad (11)$$

де

$$F_1(\alpha) = \frac{2}{\pi}J_0(a\alpha) - J_0(b\alpha)R\left(\frac{b}{a}, \gamma_n\right),$$

$$F_2(\alpha) = \frac{2}{\pi}J_0(c\alpha) - J_0(d\alpha)R\left(\frac{d}{c}, \lambda_n\right),$$

$$\Omega_1(\alpha) = \frac{1}{\Delta(\alpha)}\Delta_0(\alpha)\Delta_2(\alpha),$$

$$\Omega_2(\alpha) = \frac{1}{\Delta(\alpha)}\Delta_0(\alpha)\Delta_6(\alpha),$$

$$\Theta_1(\alpha) = \frac{1}{\Delta(\alpha)}\left[\Delta_2(\alpha)\Delta_3(\alpha) - \Delta_1(\alpha)\Delta_4(\alpha)\right],$$

$$\Theta_2(\alpha) = \frac{1}{\Delta(\alpha)}\left[\Delta_4(\alpha)\Delta_5(\alpha) - \Delta_3(\alpha)\Delta_6(\alpha)\right].$$

Отримання системи алгебричних рівнянь та визначення контактних напружень. Домноживши ліву та праву частини (10) на $r \cdot L_1(\gamma_s, r)$ і (11) на $r \cdot L_2(\lambda_s, r)$, $s = \overline{1, N}$, проінтегрувавши отримані співвідношення за r на проміжках $a \le r \le b$ та $c \le r \le d$ відповідно, перейдемо до системи $2N$ рівнянь з $2N$ невідомими a_n та b_n, $n = \overline{1, N}$. Якщо ввести позначення

$$a_n = a_n^{(1)}z_1 + a_n^{(2)}z_2 + a_n^{(3)}z_3 + a_n^{(4)}z_4 + a_n^{(5)}\varepsilon_0^*,$$

$$b_n = b_n^{(1)}z_1 + b_n^{(2)}z_2 + b_n^{(3)}z_3 + b_n^{(4)}z_4 + b_n^{(5)}\varepsilon_0^*, \qquad (12)$$

де $z_i = \frac{1}{2R_i}$, $i = \overline{1,4}$, то з використанням методу суперпозиції ця система приведе до п'яти систем відносно невідомих $a_n^{(i)}$ та $b_n^{(i)}$, $i = \overline{1,5}$:

$$\sum_{n=1}^{N} a_n^{(i)} \int_0^\infty \frac{\Omega_1(\alpha)F_1(\alpha)}{\alpha^2 - \left(\frac{\gamma_n}{a}\right)^2}I_s^{(1)}(\alpha)d\alpha -$$

$$-\sum_{n=1}^{N} b_n^{(i)} \int_0^\infty \frac{\Omega_2(\alpha)F_2(\alpha)}{\alpha^2 - \left(\frac{\lambda_n}{c}\right)^2}I_s^{(1)}(\alpha)d\alpha = A_s^{(i)}, \qquad (13)$$

$$\sum_{n=1}^{N} a_n^{(i)} \int_0^\infty \frac{\Theta_1(\alpha) F_1(\alpha)}{\alpha^2 - \left(\frac{\gamma_n}{a}\right)^2} I_s^{(2)}(\alpha)\, d\alpha +$$

$$+\sum_{n=1}^{N} b_n^{(i)} \int_0^\infty \frac{\Theta_2(\alpha) F_2(\alpha)}{\alpha^2 - \left(\frac{\lambda_n}{c}\right)^2} I_s^{(2)}(\alpha)\, d\alpha = B_s^{(i)}, \quad s = \overline{1, N}. \quad (14)$$

Тут

$$A_s^{(1)} = \frac{1}{2(1-\nu)} \left[\int_a^{r_a} r\left[(a-r_a)^2 - \left(r - r_a{}^2\right) \right] L_1(\gamma_s, r)\, dr + \right.$$

$$\left. + (a-r_a)^2 \int_{r_a}^{r_1} r \cdot L_1(\gamma_s, r)\, dr \right],$$

$$A_s^{(2)} = \frac{1}{2(1-\nu)} \left[(b-r_b)^2 \int_{r_1}^{r_b} r \cdot L_1(\gamma_s, r)\, dr + \right.$$

$$\left. + \int_{r_b}^{b} r\left[(b-r_b)^2 - \left(r - r_b{}^2\right) \right] L_1(\gamma_s, r)\, dr \right],$$

$$A_s^{(3)} = 0, \quad A_s^{(4)} = 0, \quad B_s^{(1)} = 0, \quad B_s^{(2)} = 0,$$

$$B_s^{(3)} = \int_c^{r_c} r\left[(c-r_c)^2 - \left(r - r_c{}^2\right) \right] L_2(\lambda_s, r)\, dr +$$

$$+ (c-r_c)^2 \int_{r_c}^{r_2} r \cdot L_2(\lambda_s, r)\, dr,$$

$$B_s^{(4)} = (d-r_d)^2 \int_{r_2}^{r_d} r \cdot L_2(\lambda_s, r)\, dr +$$

$$+ \int_{r_d}^{d} r\left[(d-r_d)^2 - \left(r - r_d{}^2\right) \right] L_2(\lambda_s, r)\, dr,$$

$$A_s^{(5)} = \int_0^\infty \left[\chi_1(\alpha)\Omega_1(\alpha) - \chi_2(\alpha)\Omega_2(\alpha) \right] I_s^{(1)}(\alpha)\, d\alpha,$$

$$B_s^{(5)} = \int_0^\infty \left[\chi_1(\alpha)\Theta_1(\alpha) + \chi_2(\alpha)\Theta_2(\alpha) \right] I_s^{(2)}(\alpha)\, d\alpha,$$

$$I_s^{(1)}(\alpha) = \left\{ \frac{1}{\alpha^2 - \left(\frac{\gamma_s}{a}\right)^2} + \left(\frac{a}{\gamma_s}\right)^2 \right\} \times$$

$$\times \left\{ \frac{2}{\pi} J_0(a\alpha) - J_0(b\alpha) R\left(\frac{b}{a}, \gamma_s\right) \right\} +$$

$$+ \left(\frac{a}{\gamma_s}\right)^2 \left[J_0(b\alpha) - J_0(a\alpha) \right] R\left(\frac{r_1}{a}, \gamma_s\right)$$

$$I_s^{(2)}(\alpha) = \left\{ \frac{1}{\alpha^2 - \left(\frac{\lambda_s}{c}\right)^2} + \left(\frac{c}{\lambda_s}\right)^2 \right\} \times$$

$$\times \left\{ \frac{2}{\pi} J_0(c\alpha) - J_0(d\alpha) R\left(\frac{d}{c}, \lambda_s\right) \right\} +$$

$$+ \left(\frac{c}{\lambda_s}\right)^2 \left[J_0(d\alpha) - J_0(c\alpha) \right] R\left(\frac{r_2}{c}, \lambda_s\right).$$

Розв’язавши систему (13) — (14), за співвідношеннями (12) визначимо a_n та b_n.

Величини z_i у співвідношеннях (12) знаходимо з умов рівноваги штампів та умов рівності вертикальних переміщень верхньої при $r = r_a$ та $r = r_b$ і нижньої при $r = r_c$ та $r = r_d$ площин шару:

$$2\pi \int_a^b r \sigma_{zz}(r, 0)\, dr = -P, \quad 2\pi \int_a^b r \sigma_{zz}(r, h)\, dr = -P,$$

$$w_1(r_a) = w_1(r_b), \quad w_2(r_ñ) = w_2(r_â).$$

У розгорнутому вигляді запишемо:

$$z_1 K_1 + z_2 K_2 + z_3 K_3 + z_4 K_4 = \frac{P}{2\pi a^2} - \varepsilon_0 K_5,$$

$$z_1 M_1 + z_2 M_2 + z_3 M_3 + z_4 M_4 = \frac{P}{2\pi c^2} - \varepsilon_0 M_5,$$

$$z_1 \left[\Phi_1 - \frac{(a-r_a)^2}{2(1-\nu)} \right] + z_2 \left[\Phi_2 + \frac{(b-r_b)^2}{2(1-\nu)} \right] + z_3 \Phi_3 + z_4 \Phi_4 =$$

$$= \varepsilon_0 \left[\mathring{A} - \Phi_5 \right], \quad (15)$$

$$z_1 \Psi_1 + z_2 \Psi_2 + z_3 \left[\Psi_3 + (c-r_c)^2 \right] + z_2 \left[\Psi_4 - (d-r_d)^2 \right] =$$

$$= \varepsilon_0 \left[\mathring{A}_2 - \Psi_5 \right],$$

де

$$K_i = \sum_{n=1}^{N} a_n^{(i)} \frac{1}{\gamma_n^2} \left[R\left(\frac{b}{a}, \gamma_n\right) - \frac{2}{\pi} \right],$$

$$M_i = \sum_{n=1}^{N} b_n^{(i)} \frac{1}{\lambda_n^2} \left[R\left(\frac{d}{c}, \lambda_n\right) - \frac{2}{\pi} \right],$$

$$\Phi_i = \sum_{n=1}^{N} a_n^{(i)} \int_0^\infty \frac{\Omega_1(\alpha) F_1(\alpha)}{\alpha^2 - \left(\frac{\gamma_n}{a}\right)^2} \left[J_0(b\alpha) - J_0(a\alpha) \right] d\alpha -$$

$$-\sum_{n=1}^{N} b_n^{(i)} \int_0^\infty \frac{\Omega_2(\alpha) F_2(\alpha)}{\alpha^2 - \left(\frac{\lambda_n}{c}\right)^2} \left[J_0(b\alpha) - J_0(a\alpha) \right] d\alpha,$$

$$\Psi_i = \sum_{n=1}^{N} a_n^{(i)} \int_0^\infty \frac{\Theta_1(\alpha) F_1(\alpha)}{\alpha^2 - \left(\frac{\gamma_n}{a}\right)^2} \left[J_0(d\alpha) - J_0(c\alpha) \right] d\alpha +$$

$$+\sum_{n=1}^{N} b_n^{(i)} \int_0^\infty \frac{\Theta_2(\alpha) F_2(\alpha)}{\alpha^2 - \left(\frac{\lambda_n}{c}\right)^2} \left[J_0(d\alpha) - J_0(c\alpha) \right] d\alpha,$$

$$\Gamma_1 = \int_0^\infty \left[\chi_1(\alpha)\Omega_1(\alpha) - \chi_2(\alpha)\Omega_2(\alpha) \right] \times$$

$$\times \left(J_0(b\alpha) - J_0(a\alpha) \right) d\alpha,$$

$$\Gamma_2 = \int_0^\infty \left[\chi_1(\alpha)\Theta_1(\alpha) + \chi_2(\alpha)\Theta_2(\alpha) \right] \times$$

$$\times \left(J_0(d\alpha) - J_0(c\alpha) \right) d\alpha.$$

Після введення позначень

$$z_i = \frac{P}{2\pi a^2} z_i^{(1)} + \varepsilon_0^* z_i^{(2)}, \; i = \overline{1,4} \qquad (16)$$

система (15) розпадається на дві:

$$z_1^{(1)} K_1 + z_2^{(1)} K_2 + z_3^{(1)} K_3 + z_4^{(1)} K_4 = 1,$$

$$z_1^{(1)} M_1 + z_2^{(1)} M_2 + z_3^{(1)} M_3 + z_4^{(1)} M_4 = \frac{a^2}{c^2},$$

$$z_1^{(1)} \left[\Phi_1 - \frac{(a - r_a)^2}{2(1-\nu)} \right] + z_2^{(1)} \left[\Phi_2 + \frac{(b - r_b)^2}{2(1-\nu)} \right] +$$

$$+ z_3^{(1)} \Phi_3 + z_4^{(1)} \Phi_4 = 0,$$

$$z_1^{(1)} \Psi_1 + z_2^{(1)} \Psi_2 + z_3^{(1)} \left[\Psi_3 + (c - r_c)^2 \right] +$$

$$+ z_4^{(1)} \left[\Psi_4 - (d - r_d)^2 \right] = 0; \qquad (17)$$

$$z_1^{(2)} K_1 + z_2^{(2)} K_2 + z_3^{(2)} K_3 + z_4^{(2)} K_4 = -K_5,$$

$$z_1^{(2)} M_1 + z_2^{(2)} M_2 + z_3^{(2)} M_3 + z_4^{(2)} M_4 = -M_5,$$

$$z_1^{(2)} \left[\Phi_1 - \frac{(a - r_a)^2}{2(1-n)} \right] + z_2^{(2)} \left[\Phi_2 + \frac{(b - r_b)^2}{2(1-n)} \right] +$$

$$+ z_3^{(2)} \Phi_3 + z_4^{(2)} \Phi_4 = \tilde{A}_1 - \Phi_5,$$

$$z_1^{(2)} \Psi_1 + z_2^{(2)} \Psi_2 + z_3^{(2)} \left[\Psi_3 + (c - r_c)^2 \right] +$$

$$+ z_4^{(2)} \left[\Psi_4 - (d - r_d)^2 \right] = \tilde{A}_2 - \Psi_5. \qquad (18)$$

Розв'язавши (17) та (18), з використанням (16), (12) та (9), отримаємо формули для вираження силової $\sigma_{zz}^{(P)}$ та складової $\sigma_{zz}^{(\varepsilon)}$, зумовленої наявністю залишкових деформацій, а, отже, і для $\sigma_{zz} = \sigma_{zz}^{(P)} + \sigma_{zz}^{(\varepsilon)}$, під верхнім

$$\sigma_{zz}^{(P)}(r,0) = -\frac{P}{2\pi a^2} \cdot \sum_{n=1}^{N} \left(z_1^{(1)} a_n^{(1)} + z_2^{(1)} a_n^{(2)} + \right.$$

$$\left. + z_3^{(1)} a_n^{(3)} + z_4^{(1)} a_n^{(4)} \right) L_1(\gamma_n, r),$$

$$\sigma_{zz}^{(\varepsilon)}(r,0) = \varepsilon_0^* \sum_{n=1}^{N} \left(z_1^{(2)} a_n^{(1)} + z_2^{(2)} a_n^{(2)} + \right.$$

$$\left. + z_3^{(2)} a_n^{(3)} + z_4^{(2)} a_n^{(4)} + a_n^{(5)} \right) L_1(\gamma_n, r)$$

та, відповідно, під нижнім штампом

$$\sigma_{zz}^{(P)}(r,h) = -\frac{P}{2\pi a^2} \cdot \sum_{n=1}^{N} \left(z_1^{(1)} b_n^{(1)} + z_2^{(1)} b_n^{(2)} + \right.$$

$$\left. + z_3^{(1)} b_n^{(3)} + z_4^{(1)} b_n^{(4)} \right) L_2(\lambda_n, r),$$

$$\sigma_{zz}^{(\varepsilon)}(r,h) = \varepsilon_0^* \sum_{n=1}^{N} \left(z_1^{(2)} b_n^{(1)} + z_2^{(2)} b_n^{(2)} + \right.$$

$$\left. + z_3^{(2)} b_n^{(3)} + z_4^{(2)} b_n^{(4)} + b_n^{(5)} \right) L_2(\lambda_n, r).$$

Числовий приклад. Розглянемо вплив товщини шару на розподіл силової складової контактних напружень та складової, зумовленої наявністю залишкових деформацій. На рис. 2 показано графіки розподілу складової $s_{zz}^{(P)}$ контактних напружень під нижнім штампом вздовж осі r для таких значень параметрів: $a = 0.4$, $r_a = r_b = 0.5$, $b = 0.6$, $c = 0.6$, $r_c = 0.7$, $r_d = 0.8$, $d = 0.9$, $c_0 = 1$, $c_1 = 0$, $S_1 = 1.6$, $\nu = 0.28$, $\omega = 2/3$.

На рисунку зображено три криві: крива 1 відповідає товщині шару $h = 1$, крива 2 — $h = 1.5$, а крива 3 — $h = 2$. Як видно з рисунка, зі збільшенням товщини шару

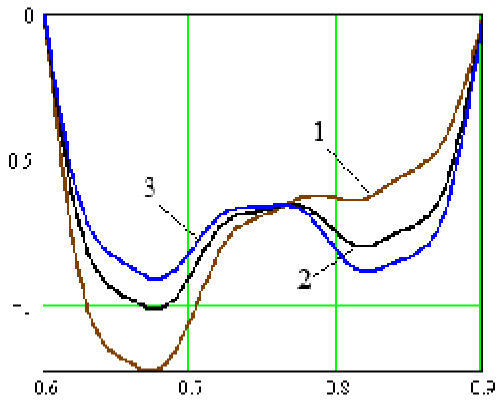

Рис. 2. Розподіл складової $s_{zz}^{(P)}$ контактних напружень

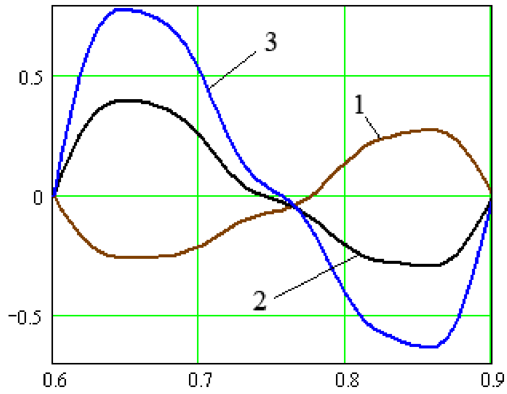

Рис. 3. Розподіл складової $s_{zz}^{(e)}$ контактних напружень

абсолютний максимум силової складової контактних напружень під нижнім шаром зменшується.

Рис. 3 демонструє залежність розподілу складової $s_{zz}^{(e)}$ контактних напружень вздовж осі r від товщини шару (для тих же значень параметрів). На його основі можна зробити висновок, що, залежно від товщини шару, складова контактних напружень під штампом, зумовлена наявністю залишкових деформацій, може повністю змінити свій характер.

Висновки. Залишкові напруження в шарі істотно впливають на контактні напруження. Тому врахування залишкових деформацій є надзвичайно важливим при проведенні інженерних розрахунків, оскільки збіг знака силової та складової, зумовленої наявністю залишкових деформацій, може значно збільшити абсолютне значення контактних напружень під штампом.

Література

1. *Шелестовський Б., Габрусєв Г.* Контактна взаємодія штампа з шаром із залишковими деформаціями, зумовленими кільцевим зварним швом // Машинознавство. — 2003. — №2(68). — С. 9—12.

2. *Шелестовський Б., Габрусєв Г.* Контактна задача про тиск кільцевого штампа на шар, що лежить на основі з вирізом із врахуванням залишкових деформацій // Механіка і фізика будівельних матеріалів та конструкцій. — 2005. — С. 223—233.

3. *Подстригач Я.С., Осадчук В.А., Марголин А.М.* Остаточные напряжения, длительная прочность и надежность стеклоконструкций. — К.: Наук. думка, 1991. — 296 с.

4. *Недосека А.Я.* Основы расчета сварных конструкций. — К.: Вища шк., 1998. — 263 с.

Отримана 15.08.07

B. Shelestovskiy, H. Harbusiev

Contact task on the pressure of two ring punches on the layer with residual stresses

Ternopil State Ivan Poluj Technical University, Ternopil

The method of finding contact stresses in the layer, in which two ring punches are pressed, when residual stresses are available caused by the concentrated heating while welding, has been developed. Numerical example is presented and it is shown, that the layer thickness and availability of the residual stress field sufficiently effect the value and the characteristic of the contact stresses distribution.