МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Тернопільський національний технічний університет
імені Івана Пулюя

Кафедра вищої математики

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

із фахової підготовки студентів інженерних спеціальностей в курсі вищої математики

(частина 2: інтегральне числення функцій однієї змінної, звичайні диференціальні рівняння)

Тернопіль – 2010 р.

Навчальний посібник із фахової підготовки студентів інженерних спеціальностей в курсі вищої математики (частина 2: інтегральне числення функцій однієї змінної, звичайні диференціальні рівняння) / уклад. Б. Г. Шелестовський, Л. В. Фурсевич, Г. В. Габрусєв. – Тернопіль: ТНПУ імені Івана Пулюя, 2010. – 117 с.

Укладачі: канд. фіз.-мат. наук, доцент Б. Г. Шелестовський,
канд. фіз.-мат. наук, доцент Л. В. Фурсевич,
канд. фіз.-мат. наук Г. В. Габрусєв.

Відповідальний за випуск: канд. фіз.-мат. наук, доцент Л. В. Фурсевич.

Рецензенти: докт. фіз.-мат. наук, професор М.П. Ленюк
канд. фіз.-мат. наук, доцент О.М. Самборська

Методичні вказівки розглянуті та затверджені на засіданні кафедри вищої математики
Протокол № 6 від 25 січня 2010 року.

Схвалено і рекомендовано до друку навчально-методичною Радою Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя
Протокол № 1 від 24 лютого 2010 року.

Посібник складено з урахуванням матеріалів літературних джерел, наведених у списку.

ВСТУП

Інтенсивний розвиток техніки істотно підвищив вимоги до математичної підготовки фахівців інженерних спеціальностей.

Мета даного навчального посібника – допомогти майбутнім інженерам краще засвоїти програмний теоретичний матеріал та навчитись застосовувати математичні методи до розв’язання технічних задач.

Навчальний посібник написаний у відповідності з програмою курсу інженерно-технічних спеціальностей і містить такі розділи:

- інтегральне числення функцій однієї змінної,
- звичайні диференціальні рівняння.

До кожного підрозділу наводиться в стислій формі необхідний для розв’язування вправ теоретичний матеріал, також включено значну кількість задач технічного характеру, що тісно пов’язані із загально-інженерними курсами. Розв’язування таких задач допоможе встановити тісний зв’язок курсу вищої математики із загально-технічними та спеціальними дисциплінами, підвищуватиме зацікавленість студентів у володінні математичним апаратом, розвиватиме інтуїцію та математичну культуру. Наприкінці кожного підрозділу пропонуються вправи для самостійної роботи, виконання яких сприятиме вдосконаленню професійної підготовки майбутніх інженерів.

5. НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

5.1. Первісна функція і невизначений інтеграл. Властивості невизначеного інтеграла

Займаючись диференціюванням функцій, ми ставили перед собою задачу: за даною функцією знайти її похідну. Тепер перейдемо до вивчення оберненої задачі: за заданою функцією $f(x)$ відшукати таку функцію $F(x)$, для якої $f(x)$ була б похідною. Розв’язок цієї оберненої задачі має велике значення для подальшого вивчення математичного аналізу. Почнемо з визначення первісної функції.

Означення. **Первісною** для функції $f(x)$ називається функція $F(x)$, похідна якої дорівнює даній функції:

$$F'(x)=f(x).$$

Щоб краще зрозуміти співвідношення між первісною і заданою функціями, розглянемо приклади.

Нехай $y=x^2$. Для якої функції x^2 є похідною? Очевидно, для $\frac{x^3}{3}$:

$$\left(\frac{x^3}{3}\right)'=x^2.$$

Тому, первісною від x^2 є функція $\frac{x^3}{3}$. Але не тільки вона. Дійсно, похідною від $\frac{x^3}{3}+5,\ \frac{x^3}{3}-100$ і взагалі від $\frac{x^3}{3}+C$, де C – будь-яка стала величина, буде також x^2. Отже, будь-яка функція $\frac{x^3}{3}+C$ є первісною від x^2.

Сформулюємо тепер основну теорему про первісні.

Теорема. Всяка неперервна функція має нескінченну кількість первісних, причому будь-які дві з них відрізняються одна від одної на сталу величину.

Доведено, що будь-яка неперервна функція $f(x)$ має первісну $F(x)$.

Означення. Відшукання первісних називається **інтегруванням**, а множина $F(x)+C$ всіх первісних даної функції $f(x)$ називається **невизначеним інтегралом** і записується у вигляді:

$$\int f(x)dx=F(x)+C,$$

де $f(x)$ – підінтегральна функція, $f(x)dx$ – підінтегральний вираз, x – змінна інтегрування.

Функція, що має первісну, називається **інтегровною**.

Графік первісної для функції $f(x)$ називається **інтегральною кривою** функції $y=f(x)$. Невизначений інтеграл геометрично зображається множиною всіх інтегральних кривих, одержаних при неперервному паралельному перенесенні однієї з них у напрямку осі Oy.

Основна таблиця інтегралів

1) $\int 0\cdot dx = C$;

2) $\int dx = x + C$;

3) $\int x^k dx = \dfrac{x^{k+1}}{k+1} + C,\ \ k \neq -1$;

4) $\int \dfrac{dx}{x} = ln\left| x \right| + C$;

5) $\int e^x dx = e^x + C$;

6) $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{ln\, a} + C$;

7) $\int cos\, x\, dx = sin\, x + C$;

8) $\int sin\, x\, dx = -cos\, x + C$;

9) $\int \dfrac{dx}{cos^2 x} = tgx + C$;

10) $\int \dfrac{dx}{sin^2 x} = -ctgx + C$;

11) $\int tgx\, dx = -ln\left| cos\, x \right| + C$;

12) $\int ctgx\, dx = ln\left| sin\, x \right| + C$;

13) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arcsin\, x + C = -arccos\, x + C$;

14) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = arcsin\dfrac{x}{a} + C = -arccos\dfrac{x}{a} + C$;

15) $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = arctgx + C = -arcctgx + C$;

16) $\int \dfrac{dx}{a^2+x^2} = \dfrac{1}{a} arctg\dfrac{x}{a} + C = -\dfrac{1}{a} arcctg\dfrac{x}{a} + C$;

17) $\int \dfrac{dx}{x^2-a^2} = \dfrac{1}{2a} ln\left| \dfrac{x-a}{x+a} \right| + C$;

18) $\int \dfrac{dx}{a^2-x^2} = \dfrac{1}{2a} ln\left| \dfrac{a+x}{a-x} \right| + C$;

19) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = ln\left| x + \sqrt{x^2 \pm a} \right| + C$;

20) $\int \dfrac{dx}{sin\, x} = ln\left| tg\dfrac{x}{2} \right| + C$;

21) $\int \dfrac{dx}{cos\, x} = ln\left| tg\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right) \right| + C$;

22) $\int chx\, dx = shx + C$;

23) $\int shx\, dx = chx + C$;

24) $\int thx\, dx = ln\left| chx \right| + C$;

25) $\int cthx\, dx = ln\left| shx \right| + C$;

26) $\int \dfrac{dx}{ch^2 x} = thx + C$;

27) $\int \dfrac{dx}{sh^2 x} = -cthx + C$.

Із означення невизначеного інтеграла випливає, що:

- похідна інтеграла дорівнює підінтегральній функції, а диференціал – підінтегральному виразу
$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x), \;\; d\int f(x)dx = f(x)dx;$$
- інтеграл від похідної або диференціала первісної функції дорівнює сумі самої первісної функції і довільної сталої
$$\int f'(x)dx = f(x) + C, \;\; \int df(x) = f(x) + C.$$

Сформулюємо теореми про найпростіші правила інтегрування:

Теорема 1. Інтеграл від суми скінченного числа функцій, що мають первісні, дорівнює сумі інтегралів від функцій, що додаються
$$\int [u(x) + v(x) + \ldots + w(x)]dx = \int u(x)dx + \int v(x)dx + \ldots + \int w(x)dx.$$

Теорема 2. Сталий множник підінтегральної функції можна виносити за знак інтеграла
$$\int k\, f(x)dx = k\int f(x)dx,$$
де k - константа.

Теорема 3 (інваріантність формул інтегрування). Всяка формула інтегрування зберігає свій вигляд, якщо замість незалежної змінної підставити будь-яку диференційовну функцію від неї, тобто якщо
$$\int f(x)dx = F(x) + C \text{, то і } \int f(u)du = F(u) + C,$$
де $u = \varphi(x)$ – будь-яка функція диференційовна по x.

Розглянемо, наприклад, інтеграл $\int 2x \cdot e^{x^2}\, dx$. Оскільки, $2x\,dx$ є диференціалом $d\left(x^2\right)$, то перепишемо інтеграл у такому вигляді:
$$\int 2x \cdot e^{x^2}\, dx = \int e^{x^2}\, d\left(x^2\right) = \int e^u du,$$
де $u = x^2$. Використовуючи основну таблицю інтегралів і теорему 3, одержимо:
$$\int 2x \cdot e^{x^2}\, dx = e^{x^2} + C.$$

Із даного прикладу видно, що потрібно так перетворити підінтегральний вираз, щоб він набув вигляду підінтегрального виразу відомого нам інтеграла, наприклад, одного із інтегралів основної таблиці.

Приклад. 5.1. Обчислити інтеграл $\int sin 5x\, dx$.

Розв'язання.

Помножимо і поділимо інтеграл на 5 та внесемо множник 5 під знак інтеграла:
$$\int sin 5x\, dx = \frac{1}{5}\int sin 5x \cdot 5\, dx = \frac{1}{5}\int sin 5x\, d(5x).$$
Позначивши $5x = u$, одержимо інтеграл із основної таблиці:
$$\int sin 5x\, dx = \frac{1}{5}\int sin\, u\, du = -\frac{1}{5}cos\, u + C = -\frac{1}{5}cos\, 5x + C.$$
Аналогічно, одержимо:
$$\int e^{-3x}dx = -\frac{1}{3}\int e^{-3x}d(-3x) = -\frac{1}{3}\int e^u du = -\frac{1}{3}e^u + C = -\frac{1}{3}e^{-3x} + C.$$

Приклад 5.2. Обчислити інтеграл $\int(2x-1)^{100}dx$.

Розв'язання.

Помноживши і поділивши на 2 та враховуючи, що $2dx = d(2x-1)$, одержимо:

$$\int(2x-1)^{100}dx = \frac{1}{2}\int u^{100}du = \frac{1}{2}\cdot\frac{u^{101}}{101} + C = \frac{1}{202}(2x-1)^{101} + C.$$

Легко побачити всі переваги такого інтегрування у порівнянні з інтегруванням многочлена, який одержимо при піднесенні бінома до сотого степеня за формулою Ньютона.

Аналогічними обчисленнями дістанемо таку таблицю $(a \neq 0)$:

- $\int(ax+b)^{\alpha}dx = \frac{1}{a}\cdot\frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ \alpha \neq -1.$
- $\int\frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}ln\left|\,ax+b\,\right| + C.$
- $\int e^{ax+b}dx = \frac{1}{a}e^{ax+b} + C.$
- $\int a^{kx+b}dx = \frac{1}{k}\cdot\frac{1}{ln\,a}a^{kx+b} + C.$
- $\int sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a}cos(ax+b) + C.$
- $\int cos(ax+b)dx = \frac{1}{a}sin(ax+b) + C.$
- $\int tg(ax+b)dx = -\frac{1}{a}ln\left|\,cos(ax+b)\right| + C.$
- $\int ctg(ax+b)dx = \frac{1}{a}ln\left|\,sin(ax+b)\right| + C.$
- $\int\frac{dx}{cos^2(ax+b)} = \frac{1}{a}tg(ax+b) + C.$
- $\int\frac{dx}{sin^2(ax+b)} = -\frac{1}{a}ctg(ax+b) + C.$
- $\int\frac{dx}{\sqrt{b^2-a^2x^2}} = \frac{1}{a}arcsin\frac{a}{b}x + C.$
- $\int\frac{dx}{b^2+a^2x^2} = \frac{1}{ab}arctg\frac{a}{b}x + C.$
- $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2x^2 \pm b^2}} = \frac{1}{a}ln\left|\,ax+\sqrt{a^2x^2 \pm b^2}\,\right| + C.$
- $\int\frac{dx}{a^2x^2-b^2} = \frac{1}{2ab}ln\left|\frac{ax-b}{ax+b}\right| + C.$

Приклад 5.3. Обчислити інтеграл $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$.

Розв'язання.

Зведемо інтеграл до вигляду:

$$\frac{1}{2}\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}dx = \frac{1}{2}\int \left(x^2+1\right)^{-\frac{1}{2}} d\left(x^2+1\right).$$

Позначивши $x^2+1=u$, одержимо:

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx = \frac{1}{2}\frac{\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \sqrt{x^2+1}+C.$$

Приклад 5.4. Обчислити інтеграл $\int \frac{dx}{3x-1}$.

Розв'язання.

$$\int \frac{dx}{3x-1} = \frac{1}{3}\int \frac{(3x-1)'}{3x-1}dx = \frac{1}{3}\int \frac{d(3x-1)}{3x-1} = \frac{1}{3}ln|\,3x-1\,|+C.$$

У загальному, якщо чисельник підінтегральної функції є похідною знаменника, то інтеграл дорівнює логарифму абсолютної величини знаменника:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \int \frac{df(x)}{f(x)} = \int \frac{du}{u} = ln|\,u\,|+C = ln|\,f(x)|+C.$$

Наприклад:

$$\int \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}ln\left(1+x^2\right)+C,$$

$$\int tgx\,dx = \int \frac{sin\,x}{cos\,x}dx = -ln|\,cos\,x\,|+C.$$

Приклад 5.5. Обчислити інтеграл $\int \frac{x}{1+x^4}dx$.

Розв'язання.

Оскільки $xdx = \frac{1}{2}d\left(x^2\right)$, то $\int \frac{x}{1+x^4}dx = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x^2\right)}{1+\left(x^2\right)^2} = \frac{1}{2}arctg\left(x^2\right)+C$.

5.2. Метод інтегрування за частинами

Метод інтегрування за частинами випливає з формули диференціювання добутку двох функцій. Нехай $u(x)$ і $v(x)$ - диференційовні функції по x. Маємо

$$d(uv) = udv + vdu.$$

Інтегруючи обидві частини останньої рівності, одержимо:

$$\int d(uv) = \int udv + \int vdu,$$

або

$$uv=\int udv+\int vdu, \quad \int udv=uv-\int vdu.$$

Ця формула називається **формулою інтегрування за частинами**. Інтегрування за частинами полягає в тому, що представивши підінтегральний вираз $f(x)dx$ у вигляді добутку двох множників u і dv (множник dv обов'язково містить dx), замінюємо його двома інтегруваннями: 1) відшукання v за виразом dv; 2) відшукання інтеграла від vdu. Може виявитися, що ці два інтегрування легко здійснити, тоді як заданий інтеграл безпосередньо обчислити важко.

Методом інтегрування за частинами знаходять інтеграли таких типів:

- $\int P_n(x)sin\,x\,dx,\ \int P_n(x)cos\,x\,dx,\ \int P_n(x)e^x\,dx,\ \int P_n(x)a^x\,dx$, де $P_n(x)$ - многочлен степеня n відносно x. Тут доцільно вибрати $u=P_n(x)$. Якщо $P_n(x)$ - многочлен n-го степеня, то формулу інтегрування за частинами використовують n разів.

Приклад 5.6.

$$\int xe^x dx=\begin{bmatrix} u=x, & dv=e^x dx, \\ du=dx, & v=e^x \end{bmatrix}=xe^x-\int e^x dx=xe^x-e^x+C.$$

Приклад 5.7.

$$\int x^2 sin\,x\,dx=\begin{bmatrix} u=x^2, & dv=sin\,x\,dx, \\ du=2x\,dx, & v=-cos\,x \end{bmatrix}=-x^2cos\,x+2\int x\,cos\,x\,dx=$$

$$=\begin{bmatrix} u=x, & dv=cos\,x\,dx, \\ du=dx, & v=sin\,x \end{bmatrix}=-x^2cos\,x+2x\,sin\,x-2\int sin\,x\,dx=$$

$$=-x^2cos\,x+2x\,sin\,x+2cos\,x+C.$$

Приклад 5.8.

$$\int(x+5)cos\,2x\,dx=\begin{bmatrix} u=x+5, & dv=cos\,2x\,dx, \\ du=dx, & v=\frac{1}{2}sin\,2x \end{bmatrix}=\frac{1}{2}(x+2)sin\,2x-$$

$$-\frac{1}{2}\int sin\,2x\,dx=\frac{1}{2}(x+2)sin\,2x+\frac{1}{4}cos\,2x+C.$$

- $\int P(x)ln\,x\,dx,\quad \int P(x)log_a\,x\,dx,\quad \int P(x)arcsin\,x\,dx,\quad \int P(x)arccos\,x\,dx,$ $\int P(x)arctgx\,dx,\ \int P(x)arcctgx\,dx$, де $P(x)$ - многочлен відносно x. У даному випадку за u вибираємо $ln\,x,\ log_a\,x,\ arcsin\,x,\ arccos\,x,\ arctgx,\ arcctgx$, а решту підінтегрального виразу – за dv.

Приклад 5.9.

$$\int x\cdot ln\,x\,dx=\begin{bmatrix} u=ln\,x, & du=\frac{dx}{x}, \\ dv=x\,dx, & v=\frac{x^2}{2} \end{bmatrix}=\frac{x^2}{2}ln\,x-\frac{1}{2}\int x\,dx=\frac{x^2}{2}ln\,x-\frac{x^2}{4}+C.$$

Приклад 5.10.

$$\int x\cdot arctgx\,dx=\begin{bmatrix} u=arctgx, & du=\dfrac{dx}{1+x^2} \\ dv=x\,dx, & v=\dfrac{x^2}{2}\end{bmatrix}=\frac{x^2}{2}arctgx-\frac{1}{2}\int\frac{x^2dx}{1+x^2}=$$

$$=\frac{x^2}{2}arctgx-\frac{1}{2}\int\frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx=\frac{x^2}{2}arctgx-\frac{1}{2}\left(\int dx-\int\frac{dx}{1+x^2}\right)=$$

$$=\frac{x^2}{2}arctgx-\frac{1}{2}(x-arctgx)+C=\frac{1}{2}\left(x^2+1\right)arctgx-\frac{x}{2}+C.$$

Якщо у наведених прикладах по іншому вибрати u і dv, то інтеграл ускладниться.

Повторне інтегрування за частинами іноді приводить до початкового інтеграла. В результаті одержуємо лінійне рівняння відносно заданого інтеграла. Розв’язуючи це рівняння, знаходимо вираження інтеграла через елементарні функції.

Приклад 5.11.

$$\int e^x\cos x\,dx=\begin{bmatrix} u=\cos x, & du=-\sin x\,dx, \\ dv=e^xdx, & v=e^x\end{bmatrix}=e^x\cos x+\int e^x\sin x\,dx,$$

$$\int e^x\sin x\,dx=\begin{bmatrix} u=\sin x, & du=\cos x\,dx, \\ dv=e^xdx, & v=e^x\end{bmatrix}=e^x\sin x-\int e^x\cos x\,dx,$$

$$\int e^x\cos x\,dx=e^x\cos x+e^x\sin x-\int e^x\cos x\,dx,$$

$$\int e^x\cos x\,dx=\frac{1}{2}e^x(\cos x+\sin x)+C.$$

5.3. Метод заміни змінної (метод підстановки)

Метод підстановки полягає в тому, що в інтегралі $\int f(x)dx$ змінну інтегрування x замінюють новою змінною t за допомогою співвідношення $x=\varphi(t)$, де $\varphi(t)$ - неперервна і диференційовна функція. Тоді

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Якщо даний інтеграл вдалося обчислити і він дорівнює $F(t)+C$, то вихідний інтеграл знаходиться поверненням до попередньої змінної x. Для цього потрібно із рівності $x=\varphi(t)$ виразити t через x, тобто знайти обернену функцію і підставити її замість t у вираз знайденого інтеграла. Найважче в даному методі – це вдалий вибір підстановки $x=\varphi(t)$.

Приклад 5.12.

$$\int\frac{dx}{1+\sqrt{x}}=\begin{bmatrix}x=t^2,\\ dx=d\left(t^2\right)=2t\,dt,\\ t=\sqrt{x}\end{bmatrix}=\int\frac{2t\,dt}{1+t}=2\int\frac{(1+t)-1}{1+t}dt=2\int\left(1-\frac{1}{1+t}\right)dt=$$

$$=2\left(\int dt-\int\frac{dt}{1+t}\right)=2\left(t-ln\left|1+t\right|\right)+C=2\left(\sqrt{x}-ln\left|1+\sqrt{x}\right|\right)+C.$$

Приклад 5.13.

$$\int\sqrt{1-x^2}\,dx=\begin{bmatrix}x=sin\,t,\\ dx=cos\,t\,dt,\\ t=arcsin\,x\end{bmatrix}=\int cos\,t\cdot cos\,t\,dt=\int cos^2t\,dt=\int\frac{1+cos\,2t}{2}dt=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\int dt+\frac{1}{2}\int cos\,2t\,d(2t)\right)=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}sin\,2t\right)+C.$$

Оскільки $sin\,2t=2\,sin\,t\,cos\,t=2x\sqrt{1-x^2}$, то одержимо:

$$\int\sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\left(arcsin\,x+x\sqrt{1-x^2}\right)+C.$$

Приклад 5.14.

$$\int\sqrt{x^2+1}\,dx=\begin{bmatrix}x=sht,\\ dx=cht\,dt\end{bmatrix}=\int ch^2t\,dt=\frac{1}{2}\int(1+ch2t)dt=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}sh2t\right)+C.$$

Оскільки $t=Arshx=ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$, а $sh2t=2shtcht=2x\sqrt{x^2+1}$, то

$$\int\sqrt{x^2+1}\,dx=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+1}+ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right)+C.$$

Аналогічно, за допомогою підстановки $x=cht$, одержимо:

$$\int\sqrt{x^2-1}\,dx=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-1}-ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\right)+C.$$

Дуже часто підінтегральний вираз $f(x)dx$ можна подати у вигляді

$$f(x)dx=g[u(x)]u'(x)dx.$$

У цьому випадку застосовуємо підстановку $t=u(x),\ dt=u'(x)dx$. Дістанемо

$$\int f(x)dx=\int g[u(x)]u'(x)dx=\int g(t)dt.$$

Приклад 5.15.

$$\int x^2\cdot\sqrt[3]{4-3x^3}\,dx=\begin{bmatrix}t=4-3x^3,\\ dt=-9x^2dx,\\ x^2dx=-\frac{1}{9}dt\end{bmatrix}=-\frac{1}{9}\int\sqrt[3]{t}\,dt=-\frac{1}{12}t^{\frac{4}{3}}+C=$$

$$=-\frac{1}{12}\left(4-3x^3\right)\cdot\sqrt[3]{4-3x^3}+C.$$

Приклад 5.16.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}} = \begin{bmatrix} t=\sqrt{e^x+1}, \quad t^2=e^x+1 \\ 2t\,dt=e^x dx, \quad dx=\dfrac{2t\,dt}{e^x}=\dfrac{2t\,dt}{t^2-1} \end{bmatrix} = \int \frac{2t\,dt}{\left(t^2-1\right)t} = 2\int \frac{dt}{t^2-1} =$$

$$= ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = ln\left|\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}\right| + C.$$

Приклад 5.17.

$$\int x^5 e^{x^3} dx = \int x^2 x^3 e^{x^3} dx = \begin{bmatrix} t=x^3, \quad dt=3x^2 dx, \\ \dfrac{1}{3}dt=x^2 dx \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\int t\cdot e^t dt =$$

$$= \begin{bmatrix} u=t, & du=dt, \\ dv=e^t dt, & v=e^t \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\left(te^t - \int e^t dt\right) = \frac{1}{3}\left(te^t - e^t\right) + C =$$

$$= \frac{1}{3}e^t(t-1) + C = \frac{1}{3}e^{x^3}\left(x^3-1\right) + C.$$

5.4. Інтеграли, що містять у знаменнику квадратний тричлен

Інтеграли типу $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$, $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ шляхом виділення повного квадрату в квадратному тричлені і відповідної підстановки зводяться до табличних інтегралів:

$$\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{u}{a} + C, \qquad \int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = arcsin\frac{u}{a} + C,$$

$$\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a} ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C, \qquad \int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a}} = ln\left|u+\sqrt{u^2 \pm a}\right| + C.$$

Приклад 5.18.

$$\int \frac{dx}{2x^2+8x+20} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+4x+10} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x^2+4x+4\right)+10-4} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x+2)^2+6} = \begin{bmatrix} x+2=u, \\ x=u-2, \ dx=du \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2+6} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{6}} arctg\frac{u}{\sqrt{6}} + C = \frac{1}{2\sqrt{6}} arctg\frac{x+2}{\sqrt{6}} + C.$$

Приклад 5.19.

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+1} = \int \frac{dx}{\left(x^2+4x+4\right)+1-4} = \int \frac{dx}{(x+2)^2-3} = \left[\begin{array}{c} x+2=u, \\ x=u-2, \\ dx=du \end{array}\right] =$$

$$= \int \frac{du}{u^2-3} = \frac{1}{2\sqrt{3}} ln\left|\frac{u-\sqrt{3}}{u+\sqrt{3}}\right| + C = \frac{1}{2\sqrt{3}} ln\left|\frac{x+2-\sqrt{3}}{x+2+\sqrt{3}}\right| + C\,.$$

Приклад 5.20.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+2x+1}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{3}{16}}} =$$

$$= \left[\begin{array}{l} x+\frac{1}{4}=u, \\ x=u-\frac{1}{4},\ dx=du \end{array}\right] = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u^2+\frac{3}{16}}} = \frac{1}{2} ln\left[u+\sqrt{u^2+\frac{3}{16}}\right] + C =$$

$$= \frac{1}{2} ln\left[x+\frac{1}{4}+\sqrt{\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{3}{16}}\right] + C = \frac{1}{2} ln\left[x+\frac{1}{4}+\sqrt{x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}}\right] + C\,.$$

Приклад 5.21.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3+4x-4x^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{-\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}} =$$

$$= \left[\begin{array}{l} x-\frac{1}{2}=u, \\ x=u+\frac{1}{2},\ dx=du \end{array}\right] = \frac{1}{2} arcsin u + C = \frac{1}{2} arcsin\left(x-\frac{1}{2}\right) + C\,.$$

Інтеграли типу $\int \frac{(Ax+B)dx}{ax^2+bx+c}$, $\int \frac{(Ax+B)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ зводяться кожний (шляхом виділення повного квадрату в квадратному тричлені і відповідної підстановки) до одного із чотирьох вказаних вище табличних інтегралів та

$$\int \frac{du}{u} = ln|u| + C, \text{ або } \int u^{-\frac{1}{2}} du = 2\sqrt{u} + C\,.$$

Приклад 5.22.

$$\int \frac{3x+1}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx = \int \frac{3x+1}{\sqrt{-\left(x^2-2x+1\right)+4}}dx = \int \frac{3x+1}{\sqrt{4-(x-1)^2}}dx = \left[\begin{array}{c} x-1=u, \\ x=u+1, \\ dx=du \end{array}\right] =$$

$$= \int \frac{3(u+1)+1}{\sqrt{4-u^2}}du = \int \frac{3u\,du}{\sqrt{4-u^2}} + \int \frac{4du}{\sqrt{4-u^2}} = -\frac{3}{2}\int \frac{d\left(4-u^2\right)}{\sqrt{4-u^2}} + 4\int \frac{du}{\sqrt{4-u^2}} =$$

$$=-\frac{3}{2}\int\left(4-u^2\right)^{-\frac{1}{2}}d\left(4-u^2\right)+4arcsin\frac{u}{2}=-\frac{3}{2}\cdot 2(4-u^2)^{\frac{1}{2}}+4arcsin\frac{u}{2}+C=$$

$$=-3\sqrt{4-u^2}+4arcsin\frac{u}{2}+C=-3\sqrt{3+2x-x^2}+4arcsin\frac{x-1}{2}+C.$$

Інтеграли типу $\int\frac{dx}{(mx+n)\sqrt{ax^2+bx+c}}$ зводяться до інтегралів типу $\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ за допомогою підстановки $\frac{1}{mx+n}=u,\ mx+n=\frac{1}{u}$.

5.5. Інтегрування раціональних функцій

Розглянемо окремий клас функцій, невизначені інтеграли від яких завжди беруться в скінченному вигляді (є елементарними функціями). До таких функцій належать раціональні функції. Клас раціональних функцій поділяється на цілі раціональні або многочлени і дробово-раціональні – відношення двох многочленів.

Нехай маємо раціональну функцію $P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n$, де $a_i\left(i=\overline{0,n}\right)$ - дійсні числа. Невизначений інтеграл від $P(x)$ існує і він є теж цілою раціональною функцією

$$\int P(x)dx=\int\left(a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n\right)dx=a_0\int x^n dx+a_1\int x^{n-1}dx+...+$$

$$+a_{n-1}\int x\,dx+a_n\int dx=\frac{a_0}{n+1}x^{n+1}+\frac{a_1}{n}x^n+...+\frac{a_{n-1}}{2}x^2+a_nx+C.$$

Одержали многочлен степеня $(n+1)$.

Розглянемо тепер дробово-раціональну функцію $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$, де $P(x)$ - многочлен степеня n, а $Q(x)$ - многочлен степеня m, який має вигляд $Q(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+...+b_{m-1}x+b_m$, де $b_i\left(i=\overline{0,n}\right)$ - дійсні числа.

Алгебраїчний дріб $\frac{P(x)}{Q(x)}$ називають правильним, якщо степінь чисельника менший за степінь знаменника $(n<m)$. Коли $n\geq m$, алгебраїчний дріб називають неправильним. Якщо дріб неправильний, то діленням многочлена $P(x)$ на многочлен $Q(x)$ із нього можна виділити цілу частину, а саме многочлен $W(x)=c_0x^k+c_1x^{k-1}+...+c_{k-1}x+c_k$. Тоді можна записати $\frac{P(x)}{Q(x)}=W(x)+\frac{P_1(x)}{Q(x)}$, де $P_1(x)$ - многочлен степеня меншого, ніж степінь многочлена $Q(x)$. Це означає, що алгебраїчний дріб $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$ є правильним. Інтегрування неправильного алгебраїчного дробу зводиться до інтегрування цілої раціональної функції та правильного дробу.

Задачу інтегрування правильного дробу можна звести до інтегрування функції, що є скінченною сумою простих дробів чотирьох типів:

$$1.\ \frac{A}{x-a}; \qquad 2.\ \frac{A}{(x-a)^{\alpha}},$$

де $A,\ a$ - дійсні числа; $\alpha \geq 2$ - ціле число.

$$3.\ \frac{Mx+N}{x^2+px+q}; \qquad 4.\ \frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^k},$$

де M, N, p, q - дійсні числа; $k \geq 2$ - ціле число; $p^2-4q<0$.

Вигляд цих дробів визначається коренями многочлена, що є знаменником дробу.

Розглянемо невизначений інтеграл від правильного алгебраїчного дробу

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx.$$

Тут можливі такі випадки.

Перший випадок. Корені многочлена $Q(x)$ дійсні і різні. Многочлен $Q(x)$ розкладається на прості множники виду $Q(x)=(x-a_1)(x-a_2)...(x-a_m)$. Заданий правильний алгебраїчний дріб можна зобразити у вигляді сум простих алгебраїчних дробів першого типу

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-a_1}+\frac{A_2}{x-a_2}+...+\frac{A_m}{x-a_m}.$$

Отже,

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx=\int\left(\frac{A_1}{x-a_1}+\frac{A_2}{x-a_2}+...+\frac{A_m}{x-a_m}\right)dx=\int\frac{A_1}{x-a_1}dx+\int\frac{A_2}{x-a_2}dx+...+$$

$$+\int\frac{A_m}{x-a_m}dx=A_1\,ln\left|x-a_1\right|+A_2\,ln\left|x-a_2\right|+...+A_m\,ln\left|x-a_m\right|+C.$$

Приклад 5.23. Обчислити інтеграл $\displaystyle\int\frac{6x^5-8x^4-25x^3+20x^2-76x-7}{3x^3-4x^2-17x+6}dx.$

Розв'язання.

Дріб $\displaystyle\frac{6x^5-8x^4-25x^3+20x^2-76x-7}{3x^3-4x^2-17x+6}$ є неправильним. Виділимо цілу частину:

$$\begin{array}{r|l} -\,6x^5-8x^4-25x^3+20x^2-76x-7 & 3x^3-4x^2-17x+6 \\ \cline{2-2} \underline{6x^5-8x^4-34x^3+12x^2} & 2x^2+3 \\ -\,9x^3+8x^2-76x-7 & \\ \underline{9x^3-12x^2-51x+18} & \\ 20x^2-25x-25 & \end{array}$$

Отже, заданий дріб набуде вигляду:

$$\frac{6x^5-8x^4-25x^3+20x^2-76x-7}{3x^3-4x^2-17x+6}=2x^2+3+\frac{20x^2-25x-25}{3x^3-4x^2-17x+6}.$$

Тоді

$$\int\frac{6x^5-8x^4-25x^3+20x^2-76x-7}{3x^3-4x^2-17x+6}dx=\int\left(2x^2+3+\frac{20x^2-25x-25}{3x^3-4x^2-17x+6}\right)dx=$$

$$=\int\left(2x^2+3\right)dx+\int\frac{20x^2-25x-25}{3x^3-4x^2-17x+6}dx=I.$$

Підінтегральний вираз інтегралу $\int\frac{20x^2-25x-25}{3x^3-4x^2-17x+6}dx$ є правильним алгебраїчним дробом. Розкладемо знаменник дробу на три прості множники $3x^3-4x^2-17x+6=(x+2)(x-3)(3x-1)$.

Тоді заданий дріб набуває вигляду:

$$\frac{20x^2-25x-25}{3x^3-4x^2-17x+6}=\frac{20x^2-25x-25}{(x+2)(x-3)(3x-1)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-3}+\frac{C}{3x-1}.$$

Для знаходження невизначених коефіцієнтів A, B, C зводимо дроби правої частини до спільного знаменника, ним є многочлен $(x+2)(x-3)(3x-1)$. Відкидаючи спільний знаменник в обох частинах, маємо

$$20x^2-25x-25=A(x-3)(3x-1)+B(x+2)(3x-1)+C(x+2)(x-3). \qquad (*)$$

Надаючи x довільних значень (стільки, скільки невідомих) дістанемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь, з якої і визначають шукані коефіцієнти. Очевидно, що x доцільно надавати значень, які є коренями многочлена у знаменнику, тоді кожного разу утворюється рівняння з одним невідомим. Підставивши в рівність (*) замість x послідовно числа –2, 3, $\frac{1}{3}$, матимемо

$x=-2, \quad 105=35A, \quad A=3;$

$x=3, \quad 80=40B, \quad B=2;$

$x=\frac{1}{3}, \quad -280=-56C, \quad C=5.$

Знаходимо інтеграл

$$\int\frac{20x^2-25x-25}{3x^3-4x^2-17x+6}dx=3\int\frac{dx}{x+2}+2\int\frac{dx}{x-3}+5\int\frac{dx}{3x-1}=$$

$$=3\,ln|\,x+2\,|+2\,ln|\,x-3\,|+\frac{5}{3}ln|\,3x-1\,|+C.$$

Отже, шуканий інтеграл дорівнює

$$I=\frac{2}{3}x^3+3x+3ln|\,x+2\,|+2ln|\,x-3\,|+\frac{5}{3}ln|\,3x-1\,|+C.$$

Другий випадок. Корені многочлена $Q(x)$ дійсні і при цьому деякі з них кратні. Тоді многочлен $Q(x)$ розбивається на прості множники виду $Q(x)=(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}\ldots(x-d)^{\delta}$. У цьому випадку дріб розкладається на прості дроби першого і другого типів:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha}+\frac{B_1}{x-b}+\frac{B_2}{(x-b)^2}+\ldots+\frac{B_\beta}{(x-b)^\beta}+\ldots+$$
$$+\frac{D_1}{x-d}+\frac{D_2}{(x-d)^2}+\ldots+\frac{D_\delta}{(x-d)^\delta}.$$

Приклад 5.24. Обчислити інтеграл $\int\frac{17x^2+10x-1}{x(x+1)^2}dx$.

Розв’язання.

Дріб $\frac{17x^2+10x-1}{x(x+1)^2}$ є правильним, причому знаменник розкладено на прості множники. Цей дріб через прості дроби записується так:

$$\frac{17x^2+10x-1}{x(x+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B_1}{x+1}+\frac{B_2}{(x+1)^2}.$$

Зводимо дроби правої частини до спільного знаменника

$$\frac{17x^2+10x-1}{x(x+1)^2}=\frac{A(x+1)^2+B_1x(x+1)+B_2x}{x(x+1)^2}.$$

Відкидаючи спільний знаменник в обох частинах, маємо

$$17x^2+10x-1=A(x+1)^2+B_1x(x+1)+B_2x.$$

Записавши многочлен, який стоїть у правій частині цієї рівності за спадаючими степенями x, одержимо:

$$17x^2+10x-1=(A+B_1)x^2+(2A+B_1+B_2)x+A.$$

Прирівнюючи тепер коефіцієнти при однакових степенях x, маємо таку систему трьох лінійних алгебраїчних рівнянь з трьома невідомими:

$$\begin{array}{c||l} x^2 & A+B_1=17, \\ x^1 & 2A+B_1+B_2=10, \\ x^0 & A=-1. \end{array}$$

Розв’язавши цю систему, одержимо: $A=-1, B_1=18, B_2=-6$. Тоді задана підінтегральна функція виразиться через прості дроби так:

$$\frac{17x^2+10x-1}{x(x+1)^2}=-\frac{1}{x}+\frac{18}{x+1}-\frac{6}{(x+1)^2}.$$

Описаний спосіб обчислення невідомих коефіцієнтів у розкладі дробу називають методом невизначених коефіцієнтів.

Отже,

$$\int\frac{17x^2+10x-1}{x(x+1)^2}dx=-\int\frac{dx}{x}+18\int\frac{dx}{x+1}-6\int\frac{dx}{(x+1)^2}=$$
$$=-ln|x|+18ln|x+1|+\frac{6}{x+1}+C.$$

Третій випадок. Серед коренів многочлена $Q(x)$ є прості комплексні корені:

$$Q(x)=\left(x^2+px+q\right)\left(x^2+lx+s\right)\ldots(x-a)^{\alpha}\ldots(x-d)^{\delta},\ p^2-4q<0,\ l^2-4s<0.$$

У цьому випадку дріб розкладається на прості дроби першого, другого і третього типів

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\frac{M_2x+N_2}{x^2+lx+s}+\ldots+\frac{D_{\delta}}{(x-d)^{\delta}}.$$

Приклад 5.25. Обчислити інтеграл $\int\frac{2x-3}{x^2\left(x^2+4x+6\right)}dx$.

Розв'язання.

Дискримінант квадратного тричлена $p^2-4q=16-24=-8<0$. Тоді заданий дріб через прості алгебраїчні дроби записується так:

$$\frac{2x-3}{x^2\left(x^2+4x+6\right)}=\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+\frac{Mx+N}{x^2+4x+6}.$$

Звідси дістанемо таку тотожність:

$$2x-3=A_1x\left(x^2+4x+6\right)+A_2\left(x^2+4x+6\right)+(Mx+N)x^2.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при x^3, x^2, x^1, x^0 (x^0- вільний член), матимемо таку систему рівнянь:

$$\begin{array}{c||l} x^3 & A_1+M=0, \\ x^2 & 4A_1+A_2+N=0, \\ x^1 & 6A_1+4A_2=2, \\ x^0 & 6A_2=-3. \end{array}$$

Звідси $A_1=\frac{2}{3};\ A_2=-\frac{1}{2};\ M=-\frac{2}{3};\ N=-\frac{13}{6}$. Отже,

$$\int\frac{2x-3}{x^2\left(x^2+4x+6\right)}dx=\frac{2}{3}\int\frac{dx}{x}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2}-\frac{1}{6}\int\frac{4x+13}{x^2+4x+6}dx=\frac{2}{3}ln|\,x\,|+\frac{1}{2x}-$$

$$-\frac{1}{6}\int\frac{4x+13}{x^2+4x+6}dx=\frac{2}{3}ln|\,x\,|+\frac{1}{2x}-\frac{1}{3}\int\frac{2x+4}{x^2+4x+6}dx-\frac{5}{6}\int\frac{dx}{(x+2)^2+2}=$$

$$=\frac{2}{3}ln|\,x\,|+\frac{1}{2x}-\frac{1}{3}ln\left(x^2+4x+6\right)-\frac{5}{6\sqrt{2}}arctg\frac{x+2}{\sqrt{2}}+C.$$

Четвертий випадок. Серед коренів многочлена $Q(x)$ є кратні комплексні корені:

$$Q(x)=\left(x^2+px+q\right)^{\mu}\left(x^2+lx+s\right)^{\nu}\ldots(x-a)^{\alpha}\ldots(x-d)^{\delta},\ p^2-4q<0,\ l^2-4s<0.$$

Тоді дріб розкладається на прості дроби всіх чотирьох типів.

Приклад 5.26. Обчислити інтеграл $\int \frac{x^2+x-1}{x\left(x^2+1\right)^2}dx$.

Розв'язання.

Дріб $\frac{x^2+x-1}{x\left(x^2+1\right)^2}$ є правильним, причому знаменник розкладено на прості множники. Цей дріб через прості дроби записується так:

$$\frac{x^2+x-1}{x\left(x^2+1\right)^2}=\frac{A}{x}+\frac{Mx+N}{x^2+1}+\frac{M_1x+N_1}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

Звівши дроби правої частини до спільного знаменника і відкинувши його, одержимо:

$$x^2+x-1=A\left(x^2+1\right)^2+(Mx+N)x\left(x^2+1\right)+(M_1x+N_1)x\ .$$

Записавши многочлен, який стоїть у правій частині цієї рівності за спадаючими степенями x, одержимо:

$$x^2+x-1=(A+M)x^4+Nx^3+(2A+M+M_1)x^2+(N+N_1)x+A\ .$$

Прирівнюючи тепер коефіцієнти при однакових степенях x, маємо таку систему п'ятьох лінійних алгебраїчних рівнянь з п'ятьма невідомими:

$$\begin{array}{l||l}
x^4 & A+M=0, \\
x^3 & N=0, \\
x^2 & 2A+M+M_1=1, \\
x^1 & N+N_1=1, \\
x^0 & A=-1.
\end{array}$$

Розв'язавши цю систему, одержимо: $A=-1, M=1, N=0, M_1=2, N_1=1$. Тоді задана підінтегральна функція виразиться через прості дроби так:

$$\frac{x^2+x-1}{x\left(x^2+1\right)^2}=-\frac{1}{x}+\frac{x}{x^2+1}+\frac{2x+1}{\left(x^2+1\right)^2},$$

а тому

$$\int\frac{x^2+x-1}{x\left(x^2+1\right)^2}dx=-\int\frac{dx}{x}+\int\frac{x\,dx}{x^2+1}+\int\frac{2x+1}{\left(x^2+1\right)^2}dx.$$

Перший і другий інтеграли в правій частині відомі: вони дорівнюють відповідно $-ln|x|$ і $\frac{1}{2}ln\left(x^2+1\right)$. Обчислимо третій інтеграл

$$\int\frac{2x+1}{\left(x^2+1\right)^2}dx=\int\frac{2x\,dx}{\left(x^2+1\right)^2}+\int\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2}=-\frac{1}{x^2+1}+\int\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

Розглянемо інтеграл $\int\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2}$. Застосуємо тут метод: до чисельника підінтегрального виразу додамо і віднімемо x^2 і розіб'ємо інтеграл на два:

$$\int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2} = \int \frac{x^2+1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}dx = \int \frac{dx}{x^2+1} - \int \frac{x^2dx}{\left(x^2+1\right)^2} =$$

$$= \left[\begin{array}{ll} u = x, & dv = \dfrac{x\,dx}{\left(x^2+1\right)^2}, \\ du = dx, & v = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int \dfrac{2x\,dx}{\left(x^2+1\right)^2} = -\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{x^2+1} \end{array}\right] = \int \frac{dx}{x^2+1} + \frac{x}{2\left(x^2+1\right)} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} =$$

$$= \frac{x}{2\left(x^2+1\right)} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{x}{2\left(x^2+1\right)} + \frac{1}{2}arctgx + C.$$

Отже, вихідний інтеграл дорівнює

$$\int \frac{x^2+x-1}{x\left(x^2+1\right)^2}dx = -ln|\,x\,| + \frac{1}{2}ln\left(x^2+1\right) - \frac{1}{x^2+1} + \frac{x}{2\left(x^2+1\right)} + \frac{1}{2}arctgx + C =$$

$$= \frac{x-2}{2\left(x^2+1\right)} + ln\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} + \frac{1}{2}arctgx + C.$$

Метод, указаний в даному прикладі для обчислення інтеграла $\int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2}$, застосуємо для відшукання інтеграла $I_k = \int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^k}$, де k - ціле число. Якщо записати, що $\frac{1}{\left(x^2+1\right)^k} = \frac{1}{\left(x^2+1\right)^{k-1}} - \frac{x^2}{\left(x^2+1\right)^k}$ і перетворити інтеграл від другого доданку за допомогою інтегрування за частинами, так як робили в прикладі, то одержимо рівність:

$$I_k = \frac{x}{2(k-1)\left(x^2+1\right)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2(k-1)}\cdot I_{k-1}.$$

Дана формула називається рекурентною. Застосувавши її $k-1$ раз ми зведемо інтеграл I_k до інтеграла $I_1 = \int \frac{dx}{x^2+1} = arctgx + C$ і інтегрування буде завершено. В загальному рекурентна формула має вигляд:

$$I_k = \int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^k} = \frac{1}{a^2}\cdot\left(\frac{x}{2(k-1)\left(x^2+1\right)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2(k-1)}\cdot I_{k-1}\right).$$

Інтеграл I_k можна знайти також за допомогою підстановки $x = tgt$.

5.6. Інтегрування найпростіших ірраціональних функцій

Розглянемо інтеграли типу

$$\int R\left(x, \sqrt[k]{x}, \sqrt[m]{x}, \ldots\right)dx, \qquad (*)$$

де підінтегральна функція раціональна відносно змінної інтегрування x і різних радикалів із x. Позначимо через n найменше спільне кратне всіх показників $k, m, \ldots$; тоді всі відношення $\frac{n}{k} = r_1, \frac{n}{m} = r_2$ - цілі числа.

Інтеграл (*) заміною змінної $x = u^n$, $dx = nu^{n-1}du$ зводиться до інтеграла від раціональної функції.

Дійсно, при вказаній заміні інтеграл (*) набуде вигляду:

$$\int R\left(u^n, u^{r_1}, u^{r_2}, \ldots\right)nu^{n-1}du,$$

тобто підінтегральний вираз є раціональною функцією від u.

Приклад 5.27.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} = \begin{bmatrix} x = u^6,\ \sqrt{x} = u^3, \\ \sqrt[3]{x} = u^2,\ dx = 6u^5du \end{bmatrix} = 6\int \frac{u^5}{u^3+u^2}du = 6\int \frac{u^3}{u+1}du =$$

$$= 6\int\left(u^2 - u + 1 - \frac{1}{u+1}\right)du = 6\left(\frac{u^3}{3} - \frac{u^2}{2} + u - ln\left|u+1\right|\right) + C =$$

$$= 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6ln\left|\sqrt[6]{x}+1\right| + C.$$

Майже нічого не зміниться, якщо всі підкореневі вирази є однаковою дробово-лінійною функцією $\frac{ax+b}{px+q}$, тобто інтеграл має вигляд

$$\int R\left(x, \sqrt[k]{\frac{ax+b}{px+q}}, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{px+q}}, \ldots\right)dx.$$

У цьому випадку інтеграл раціоналізується заміною

$$\frac{ax+b}{px+q} = u^n, \quad x = \frac{qu^n - b}{a - pu^n}, \quad dx = \frac{aq - bp}{\left(a - pu^n\right)^2}nu^{n-1}du.$$

Якщо $p = 0,\ q = 1$, тобто підкореневий вираз – лінійна функція, то всі перетворення значно спрощуються.

Приклад 5.28. Обчислити інтеграл $\int \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{dx}{x^2}$.

Розв'язання.

Щоб позбутись ірраціональності зробимо заміну:

$$\frac{1-x}{1+x} = u^3, \quad 1 - x = u^3 + u^3x, \quad 1 - u^3 = x\left(u^3+1\right), \quad x = \frac{1-u^3}{u^3+1},$$

$$dx = \frac{-3u^2\left(1+u^3\right) - 3u^2\left(1-u^3\right)}{\left(1+u^3\right)^2}du = \frac{-6u^2}{\left(1+u^3\right)^2}du.$$

$$\int \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}\cdot\frac{dx}{x^2}=\int u\cdot\frac{\left(-6u^2\right)\left(1+u^3\right)^2}{\left(1+u^3\right)^2\left(1-u^3\right)^2}du=2\int\frac{-3u^2\cdot u}{\left(1-u^3\right)^2}du=I\,.$$

До цього інтеграла, від дробово–раціональної функції, спочатку застосуємо інтегрування за частинами. Нехай $u_0=u,\ du_0=du$,

$$dv_0=\frac{-3u^2}{\left(1-u^3\right)^2}du,\qquad v_0=\int\frac{d\left(1-u^3\right)}{\left(1-u^3\right)^2}=-\frac{1}{1-u^3}\,.$$

Тоді $I=2\left(-\frac{u}{1-u^3}+\int\frac{du}{1-u^3}\right)=-\frac{2u}{1-u^3}+2\int\frac{du}{1-u^3}=-\frac{2u}{1-u^3}+I_1.$

Розкладаємо правильний дріб $\frac{2}{1-t^3}$ на елементарні дроби:

$$\frac{2}{1-u^3}=\frac{2}{(1-u)\left(1+u+u^2\right)}=\frac{A}{1-u}+\frac{Bu+C}{1+u+u^2}=\frac{A\left(1+u+u^2\right)+(Bu+C)(1-u)}{1-u^3},$$

$$2=A\left(1+u+u^2\right)+B\left(u-u^2\right)+C(1-u).$$

Прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях u, одержуємо:

$$A=\frac{2}{3},\quad B=\frac{2}{3},\quad C=\frac{4}{3}.\ \text{Тоді:}$$

$$I_1=\int\left(\frac{{}^2/_3}{1-u}+\frac{{}^2/_3\,u+{}^4/_3}{u^2+u+1}\right)du=\frac{2}{3}\int\frac{du}{1-u}+\frac{1}{3}\int\frac{2u+4}{u^2+u+1}du=$$

$$=-\frac{2}{3}ln\left|1-u\right|+\frac{1}{3}\int\frac{2u+1+3}{u^2+u+1}du=-\frac{2}{3}ln\left|1-u\right|+\frac{1}{3}\int\frac{d\left(u^2+u+1\right)}{u^2+u+1}+\int\frac{du}{\left(u+{}^1/_2\right)^2+{}^3/_4}=$$

$$=-\frac{2}{3}ln\left|1-u\right|+\frac{1}{3}ln\left|u^2+u+1\right|+\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{\left(u+{}^1/_2\right)\cdot 2}{\sqrt{3}}+C.$$

Отже,

$$\int\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}\cdot\frac{dx}{x^2}=\frac{2u}{u^3-1}-\frac{2}{3}ln\left|1-u\right|+\frac{1}{3}ln\left|u^2+u+1\right|+\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{2u+1}{\sqrt{3}}+C=$$

$$=\frac{2\cdot\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}}{\frac{1-x}{1+x}-1}-\frac{2}{3}ln\left|1-\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}\right|+\frac{1}{3}ln\left|\sqrt[3]{\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2}+\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}+1\right|+$$

$$+\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{1}{\sqrt{3}}\left(2\cdot\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}+1\right)+C\,.$$

Інтеграли типу $\int R(x,\sqrt{a^2\pm x^2})dx$, $\int R(x,\sqrt{x^2-a^2})dx$ можна звести до інтегралів від раціональних функцій за допомогою тригонометричних підстановок:

- Інтеграл $\int R(x,\sqrt{a^2-x^2})dx$ – підстановкою $x=a\sin t,\ dx=a\cos t\,dt,$ $\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}=a\sqrt{1-\sin^2 t}=a\cos t.$
- Інтеграл $\int R(x,\sqrt{x^2+a^2})dx$ – підстановкою $x=a\,tgt,\ \ dx=\dfrac{a\,dt}{\cos^2 t},$ $\sqrt{a^2+x^2}=\sqrt{a^2+a^2tg^2t}=a\sqrt{1+tg^2t}=\dfrac{a}{\cos t}.$
- Інтеграл $\int R(x,\sqrt{x^2-a^2})dx$ – підстановкою $x=\dfrac{a}{\cos t},\ \ dx=\dfrac{a\sin t\,dt}{\cos^2 t},$ $\sqrt{x^2-a^2}=\sqrt{\dfrac{a^2}{\cos^2 t}-a^2}=a\sqrt{\dfrac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}}=a\,tgt\ .$

Приклад 5.29. Знайти $\int\dfrac{\sqrt{4+x^2}}{x^4}dx$.

Розв'язання.

Зробимо заміну $x=2tgt,\ dx=\dfrac{2dt}{\cos^2 t}$, тоді

$$\int\frac{\sqrt{4+x^2}}{x^4}dx=\int\frac{\sqrt{4+4tg^2t}\cdot 2dt}{2^4tg^4t\cdot\cos^2 t}=\frac{1}{4}\int\frac{dt}{tg^4t\cdot\cos^3 t}=\frac{1}{4}\int\frac{\cos t}{\sin^4 t}dt=$$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{d(\sin t)}{\sin^4 t}=\frac{1}{4}\cdot\frac{\sin^{-3}t}{-3}+C=C-\frac{1}{12\sin^3 t}.$$

Щоб повернутись до початкової змінної x скористаємося підстановкою:

$$x=2tgt,\ tgt=\frac{x}{2},\ \sin t=\frac{tgt}{\sqrt{1+tg^2t}}=\frac{x}{2\sqrt{1+\frac{x^2}{4}}}=\frac{x}{\sqrt{4+x^2}}.$$

В результаті одержимо: $\int\dfrac{\sqrt{4+x^2}}{x^4}dx=C-\dfrac{1}{12}\cdot\dfrac{\sqrt{(4+x^2)^3}}{x^3}.$

5.7. Інтегрування диференціальних біномів

Диференціальним біномом називають вираз $x^m(a+bx^n)^p$, де $m,\ n,\ p$ – раціональні числа. Інтеграли від диференціальних біномів, тобто інтеграли типу $\int x^m(a+bx^n)^p\,dx$ беруться тільки в трьох випадках, а саме, коли:

- p – ціле число (додатне, від'ємне або нуль). У цьому випадку роблять заміну $x=t^s$, де s – найменше спільне кратне чисел m,n . Іноді можна обійтись без підстановки;

- ➢ $\frac{m+1}{n}$- ціле число (додатне, від’ємне або нуль). Підстановкою $t^k = a + bx^n$, де k – знаменник числа p у підінтегральному виразі, звільняємося від ірраціональності.
- ➢ $\frac{m+1}{n} + p$ - ціле число (додатне, від’ємне або нуль). У цьому випадку використовують підстановку $\frac{a+bx^n}{x^n} = t^k$, де k – знаменник числа p.

Приклад 5.30. Знайти $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{\sqrt{x}+1}}$.

Розв’язання.

Запишемо підінтегральну функцію у вигляді:

$x^{\frac{1}{2}}\left(1+x^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}}$. Тут $m = \frac{1}{2}, n = \frac{1}{2}, p = -\frac{1}{2}$. Тоді $\frac{m+1}{n} = \frac{1{,}5}{0{,}5} = 3$ – ціле число.

Отже, можна скористатись підстановкою:

$$1 + x^{\frac{1}{2}} = t^2,\ \ x = \left(t^2-1\right)^2,\ \ dx = 2\left(t^2-1\right)\cdot 2tdt,\ dx = 4t\cdot\left(t^2-1\right)dt.$$

Таким чином,

$$\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{\sqrt{x}+1}}dx = \int x^{\frac{1}{2}}\left(1+x^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}}dx = \int \left(t^2-1\right)\cdot\left(t^2\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot 4t\cdot\left(t^2-1\right)dt =$$

$$= 4\int\left(t^2-1\right)^2 dt \ = \ 4\int\left(t^4-2t^2+1\right)dt = \frac{4}{5}t^5 - \frac{8}{3}t^3 + 4t + C = \frac{4}{5}\left(1+x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{5}{2}} -$$

$$-\frac{8}{3}\left(1+x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{3}{2}} + 4\left(1+x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} + C = \frac{4}{5}\sqrt{\left(\sqrt{x}+1\right)^5} - \frac{8}{3}\sqrt{\left(\sqrt{x}+1\right)^3} + 4\sqrt{\sqrt{x}+1} + C.$$

Приклад 5.31. Знайти $\int \frac{dx}{x^4\cdot\sqrt{1+x^2}}$.

Розв’язання.

Запишемо підінтегральну функцію у вигляді диференціального біному $x^{-4}\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}$. Тут $m = -4, n = 2, p = -\frac{1}{2}$.

Цілим числом буде $\frac{m+1}{n} + p = \frac{-4+1}{2} - \frac{1}{2} = -2$. Отже, підінтегральний вираз можна звести до раціонального за допомогою підстановки $\frac{1+x^2}{x^2} = t^2$.

Звідси:

$$1+x^2=t^2x^2,\ \ x^2\left(t^2-1\right)=1,\ x^2=\frac{1}{t^2-1},\ x=\left(t^2-1\right)^{-\frac{1}{2}},\ dx=-\frac{1}{2}\left(t^2-1\right)^{-\frac{3}{2}}2tdt,$$

$$dx=-t(t^2-1)^{-\frac{3}{2}}dt,\ \ 1+x^2=\frac{t^2}{t^2-1}.$$

$$\int\frac{dx}{x^4\cdot\sqrt{1+x^2}}=\int x^{-4}\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}dx=\int\left(\left(t^2-1\right)^{-\frac{1}{2}}\right)^{-4}\cdot\left(\frac{t^2}{t^2-1}\right)^{-\frac{1}{2}}(-t)\cdot\left(t^2-1\right)^{-\frac{3}{2}}dt=$$

$$=-\int\left(t^2-1\right)^2t^{-1}\left(t^2-1\right)^{\frac{1}{2}}\cdot t\left(t^2-1\right)^{-\frac{3}{2}}dt=-\int\left(t^2-1\right)dt=-\frac{t^3}{3}+t+C.$$

Повертаючись до змінної x, одержимо: $\int\frac{dx}{x^4\cdot\sqrt{1+x^2}}=\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}-\frac{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}{3x^3}+C.$

5.8. Інтегрування тригонометричних функцій

Нехай маємо вираз, який залежить, причому раціонально, тільки від тригонометричних функцій. Так як всі тригонометричні функції раціонально виражаються через $sin\,x$ і $cos\,x$, то даний вираз можна вважати раціональною функцією від $sin\,x$ і $cos\,x$, тобто він має вигляд $R(sin\,x,cos\,x)$.

Інтеграли $\int R(sin\,x,cos\,x)dx$ зводяться до інтегралів від раціональних функцій за допомогою підстановки $tg\frac{x}{2}=u$.

Використовуючи відомі тригонометричні формули та вказану підстановку, одержимо:

$$sin\,x=sin\,2\frac{x}{2}=\frac{2sin\frac{x}{2}cos\frac{x}{2}}{sin^2\frac{x}{2}+cos^2\frac{x}{2}}=\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{2u}{1+u^2},$$

$$cos\,x=cos\,2\frac{x}{2}=\frac{cos^2\frac{x}{2}-sin^2\frac{x}{2}}{sin^2\frac{x}{2}+cos^2\frac{x}{2}}=\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{1-u^2}{1+u^2}.$$

З рівності $x=2arctgu$ маємо: $dx=\frac{2du}{1+u^2}$. Отже,

$$\int R(sin\,x,cos\,x)dx=\int R\left(\frac{2u}{1+u^2},\frac{1-u^2}{1+u^2}\right)\cdot\frac{2du}{1+u^2}.$$

Підінтегральна функція раціональна відносно u.

Приклад 5.32.

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \left[u = tg\frac{x}{2},\ dx = \frac{2du}{1+u^2},\ \sin x = \frac{2u}{1+u^2} \right] = \int \frac{1+u^2}{2u} \cdot \frac{2du}{1+u^2} =$$

$$= \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln\left| tg\frac{x}{2} \right| + C.$$

Приклад 5.33.

$$\int \frac{dx}{3+5\cos x} = \left[u = tg\frac{x}{2},\ dx = \frac{2du}{1+u^2},\ \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2} \right] = \int \frac{\frac{2du}{1+u^2}}{3+5\frac{1-u^2}{1+u^2}} =$$

$$= \int \frac{du}{4-u^2} = \frac{1}{4}\ln\left| \frac{2+u}{2-u} \right| + C = \frac{1}{4}\ln\left| \frac{2+tg\frac{x}{2}}{2-tg\frac{x}{2}} \right| + C.$$

За допомогою вказаного методу зручно обчислювати інтеграли типу

$$\int \frac{dx}{a\cos x + b\sin x + c}.$$

Метод інтегрування функцій $R(\sin x, \cos x)$ за допомогою підстановки $tg\frac{x}{2} = u$ не завжди є найкращим, оскільки в окремих випадках приводить до складних перетворень. Якщо $\sin x$ і $\cos x$ входять у вираз функції R тільки в парних степенях, то краще використовувати підстановку $u = tgx$. Тоді $\sin x = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}$, $\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}$, $dx = \frac{du}{1+u^2}$.

Приклад 5.34.

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x - 3\cos^2 x} = [u = tgx] = \int \frac{\frac{du}{1+u^2}}{\frac{u^2}{1+u^2} - \frac{3}{1+u^2}} = \int \frac{du}{u^2-3} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left| \frac{u-\sqrt{3}}{u+\sqrt{3}} \right| + C = \frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left| \frac{tgx-\sqrt{3}}{tgx+\sqrt{3}} \right| + C.$$

Підстановкою $u = tgx$ обчислюються також інтеграли типу $\int R(tgx)dx$.

Приклад 5.35. Обчислити інтеграл $\int \frac{dx}{1+tg2x}$.

Розв'язання.

$$\int \frac{dx}{1+2tgx} = \left[u = tgx,\ dx = \frac{du}{1+u^2} \right] = \int \frac{du}{(1+u^2)(1+2u)}.$$

Підінтегральна функція є правильним раціональним дробом, тому:

$$\frac{1}{\left(1+u^2\right)(1+2u)}=\frac{Au+B}{1+u^2}+\frac{C}{1+2u}=\frac{(Au+B)(1+2u)+C\left(1+u^2\right)}{\left(1+u^2\right)(1+2u)}.$$

$$A\left(u+2u^2\right)+B(1+2u)+C\left(1+u^2\right)=1.$$

Прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях u, одержуємо:

$$A=-\frac{2}{5},\ B=\frac{1}{5},\ C=\frac{4}{5}.$$

$$\int\frac{du}{\left(1+u^2\right)(1+2u)}=\int\frac{-\frac{2}{5}u+\frac{1}{5}}{1+u^2}du+\frac{4}{5}\int\frac{du}{1+2u}=-\frac{1}{5}\int\frac{2u\,du}{1+u^2}+\frac{1}{5}\int\frac{du}{1+u^2}+\frac{2}{5}\int\frac{2du}{1+2u}=$$

$$=-\frac{1}{5}\int\frac{d\left(1+u^2\right)}{1+u^2}+\frac{1}{5}arctgu+\frac{2}{5}\int\frac{d(1+2u)}{1+2u}=-\frac{1}{5}ln\left(1+u^2\right)+\frac{1}{5}arctgu+\frac{2}{5}ln|1+2u|+C$$

Отже,

$$\int\frac{dx}{1+2tgx}=-\frac{1}{5}ln\left(1+tg^2x\right)+\frac{1}{5}arctg(tgx)+\frac{2}{5}ln|1+2tgx|+C=$$

$$=\frac{1}{5}\left(x-ln\left(1+tg^2x\right)+2ln|1+2tgx|\right)+C=\frac{1}{5}\left(x+2ln|cos\,x+2sin\,x|\right)+C.$$

Інтеграли типу $\int tg^m x\,dx$, $\int ctg^m x\,dx$ зводяться до інтегралів від раціональних дробів підстановкою $u=tgx$ або $u=ctgx$. Також можна використовувати формули:

$$tg^2x+1=\frac{1}{cos^2x},\qquad ctg^2x+1=\frac{1}{sin^2x}.$$

Приклад 5.36.

$$\int tg^4xdx=\int tg^2x\cdot\left(\frac{1}{cos^2x}-1\right)dx=\int tg^2x\cdot d(tgx)-\int tg^2xdx=$$

$$=\frac{1}{3}tg^3x-\int\left(\frac{1}{cos^2x}-1\right)dx=\frac{1}{3}tg^3x-tg\,x+x+C.$$

Розглянемо інтеграли типу $\int sin^m x\cdot cos^n x\,dx$, де m і n - цілі числа.

При відшуканні таких інтегралів виділяють випадки:

- Якщо $m>0$ і непарне, то інтеграл зводиться до суми інтегралів від степеневих функцій підстановкою $cos\,x=u$; аналогічно, якщо $n>0$ і непарне, то застосовуємо підстановку $sin\,x=u$.

Приклад 5.37.

$$\int\frac{sin^5x}{cos^2x}dx=\int\frac{sin^4x}{cos^2x}\cdot sin\,xdx=\int\frac{\left(1-cos^2x\right)^2}{cos^2x}\cdot sin\,xdx=\begin{bmatrix}u=cos\,x,\\ du=-sin\,xdx\end{bmatrix}=$$

$$=-\int\frac{\left(1-u^2\right)^2}{u^2}du=-\int\frac{1-2u^2+u^4}{u^2}du=-\int\left(\frac{1}{u^2}-2+u^2\right)du=$$

$$=-\left(-\frac{1}{u}-2u+\frac{u^3}{3}\right)+C=\frac{1}{u}+2u-\frac{u^3}{3}+C=\frac{1}{cos\,x}+2cos\,x-\frac{cos^3x}{3}+C.$$

- ❖ Якщо обидва показники m і n додатні і парні, то виконують тригонометричні перетворення за допомогою формул:

$$cos^2x=\frac{1+cos\,2x}{2},\ sin^2x=\frac{1-cos\,2x}{2},\ sin\,x\,cos\,x=\frac{1}{2}sin\,2x.$$

Приклад 5.38.

$$\int sin^2x\cdot cos^4x\,dx=\int\left(\frac{1-cos\,2x}{2}\right)\cdot\left(\frac{1+cos\,2x}{2}\right)^2dx=\frac{1}{8}\int\left(1-cos^2 2x\right)\cdot\left(1+cos\,2x\right)dx=$$

$$=\frac{1}{8}\int sin^2 2x\cdot\left(1+cos\,2x\right)dx=\frac{1}{8}\int sin^2 2x\,dx+\frac{1}{8}\int sin^2 2x\cdot cos\,2x\,dx=$$

$$=\frac{1}{8}\int\frac{1-cos\,4x}{2}dx+\frac{1}{16}\int sin^2 2x\,d\left(sin\,2x\right)=\frac{1}{16}x-\frac{1}{64}sin\,4x+\frac{1}{48}sin^3 2x+C.$$

У даному випадку підстановка $u=tgx$ привела б до більш складніших обчислень.

- ❖ Якщо обидва показники m і n від’ємні і сума їх парна, то підстановка $u=tgx$ або $u=ctgx$ знову приводить інтеграл до суми інтегралів від степеневих функцій.

Приклад 5.39.

$$\int\frac{dx}{sin^3x\cdot cos\,x}=\left[u=tgx,\,dx=\frac{du}{1+u^2},\,sin\,x=\frac{u}{\sqrt{1+u^2}},\,cos\,x=\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\right]=$$

$$=\int\frac{\dfrac{du}{1+u^2}}{\dfrac{u^3}{\sqrt{\left(1+u^2\right)^3}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1+u^2}}}=\int\frac{1+u^2}{u^3}du=-\frac{1}{2u^2}+ln\left|u\right|+C=-\frac{1}{2tg^2x}+ln\left|tgx\right|+C.$$

До подібного інтеграла приводить штучний метод: одиницю в чисельнику представляємо як $\left(sin^2x+cos^2x\right)^k$, де $2k=\left|m+n\right|-2$.

Приклад 5.40.

$$\int\frac{dx}{sin^6x}=\int\frac{\left(sin^2x+cos^2x\right)^2}{sin^6x}dx=\int\frac{sin^4x+2sin^2x\cdot cos^2x+cos^4x}{sin^6x}dx=$$

$$=\int\frac{dx}{sin^2x}+2\int\frac{ctg^2x}{sin^2x}dx+\int\frac{ctg^4x}{sin^2x}dx=-ctgx-\frac{2}{3}ctg^3x-\frac{1}{5}ctg^5x+C.$$

- Якщо один із показників дорівнює нулю, а другий – від’ємне непарне число, то загальна підстановка $u = tg\frac{x}{2}$ приводить до інтегрування степеневих функцій.

Приклад 5.41.

$$\int \frac{dx}{sin^3 x} = \int \frac{\frac{2du}{1+u^2}}{\left(\frac{2u}{1+u^2}\right)^3} = -\frac{1}{8u^2} + \frac{1}{2}ln|u| + \frac{u^2}{8} + C = -\frac{1}{8tg^2\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}ln\left|tg\frac{x}{2}\right| +$$

$$+\frac{1}{8}tg^2\frac{x}{2} + C.$$

- Легко побачити, що при інших показниках m і n інтеграл зводиться до суми інтегралів розглянутих типів.

Приклад 5.42.

$$\int \frac{dx}{sin^2 x \cdot cos^3 x} = \int \frac{sin^2 x + cos^2 x}{sin^2 x \cdot cos^3 x}dx = \int \frac{dx}{cos^3 x} + \int \frac{sin^2 x + cos^2 x}{sin^2 x \cdot cos\, x}dx =$$

$$= \int \frac{dx}{cos^3 x} + \int \frac{dx}{cos\, x} + \int \frac{cos\, x}{sin^2 x}dx.$$

Різноманітність запропонованих методів приводить до певних проблем, але в кінцевому результаті отримуємо вираз який легко інтегрується.

Інтеграли типу $\int sin\, mx \cdot cos\, nx\, dx$, $\int sin\, mx \cdot sin\, nx\; dx$, $\int cos\, mx \cdot cos\, nx\, dx$ знаходимо, користуючись відомими формулами з тригонометрії:

$$sin\, mx \cdot cos\, nx = \frac{1}{2}(sin(m+n)x + sin(m-n)x),$$

$$sin\, mx \cdot sin\, nx = \frac{1}{2}(cos(m-n)x - cos(m+n)x),$$

$$cos\, mx \cdot cos\, nx = \frac{1}{2}(cos(m+n)x + cos(m-n)x).$$

Приклад 5.43.

$$\int sin3x \cdot cos5x\, dx = \frac{1}{2}\int (sin(3x+5x) + sin(3x-5x))dx = \frac{1}{2}\int (sin8x - sin2x)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int sin8x\, dx - \frac{1}{2}\int sin2x\, dx = \frac{1}{2}\left(-\frac{cos8x}{8} + \frac{cos2x}{2}\right) + C = \frac{1}{16}(4cos2x - cos8x) + C.$$

6. ВИЗНАЧЕНИЙ ТА НЕВЛАСНИЙ ІНТЕГРАЛИ

6.1. Визначений інтеграл та його обчислення

Визначений інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ – це границя інтегральної суми $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$, коли максимальна довжина $x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$ розбиття відрізка $[a, b]$ на n довільних частин прямує до нуля, ця границя не залежить ні від способу розбиття $[a, b]$, ні від вибору точок $\xi_i (i = 1,...n)$ на кожному з малих відрізків $[x_{i-1}, x_i]$ розбиття, тобто $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$, де $max\Delta x_i \to 0$.

Використовувати означення для обчислення визначеного інтеграла процес громіздкий, а то і неможливий. Для цього існує дуже важлива формула, яка встановлює зв'язок між визначеним і невизначеним інтегралами, а саме формула Ньютона-Лейбніца:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

де $F(x)$ - одна із первісних неперервної на $[a, b]$ функції $f(x)$.

Приклад 6.1.

$$\int\limits_2^9 \sqrt[3]{x-1}\,dx = \int\limits_2^9 (x-1)^{\frac{1}{3}} d(x-1) = \frac{3}{4}(x-1)^{\frac{4}{3}}\Bigg|_2^9 = \frac{3}{4}(8^{\frac{4}{3}} - 1) = \frac{45}{4} = 11{,}25.$$

Із формули Ньютона-Лейбніца видно, що визначений інтеграл можна обчислити, якщо буде знайдено первісну $F(x)$. Тому всі методи знаходження невизначеного інтеграла справедливі і для обчислення визначеного інтеграла. Розглянемо їх.

Метод інтегрування за частинами

Якщо функції $u(x), v(x)$ та їх похідні $u'(x)$, $v'(x)$ – неперервні на відрізку $[a, b]$, то має місце формула:

$$\int\limits_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b vdu.$$

Приклад 6.2.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x\,dx}{cos^2 x} = \begin{bmatrix} u = x, & du = dx; \\ dv = \dfrac{dx}{cos^2 x}, & v = tgx; \end{bmatrix} = xtgx \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} tgx\,dx = \frac{\pi}{4} + ln\left| cos\,x \right| \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} + ln\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Метод заміни змінної

Якщо $f(x)$ – неперервна на відрізку $[a, b]$, а функція $x = \varphi(t)$ і $\varphi'(t)$ неперервні на відрізку $[\alpha, \beta]$, при цьому $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$, то $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$. З формули видно, що користуючись методом заміни змінної x, зручніше знайти нові межі інтегрування вже для змінної t, ніж повертатись до змінної x.

Приклад 6.3. Обчислити $\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2 - 1}}$.

Розв’язання.

Зробимо заміну $x = \frac{1}{cos\,t}$, тоді $dx = \frac{sin\,t}{cos^2 t}dt,\ cos\,t = \frac{1}{x}$; при $x = \sqrt{2}$ $cos\,t = \frac{1}{\sqrt{2}}$ і $t = \frac{\pi}{4} = \alpha$, при $x = 2$ $cos\,t = \frac{1}{2}$ і $t = \frac{\pi}{3} = \beta$.

Отже,

$$\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2 - 1}} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{sin\,tdt}{cos^2 t \cdot \dfrac{1}{cos^3 t} \cdot \sqrt{\dfrac{1}{cos^2 t} - 1}} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} cos^2\,tdt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2}(1 + cos\,2t)\,dt =$$

$$= \left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}sin\,2t\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right) \approx 0{,}228.$$

6.2. Невласні інтеграли

При обчисленні визначеного інтеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ приймається, що $f(x)$– неперервна на відрізку $[a,b]$. Але досить часто виникає необхідність обчислювати інтеграли на нескінченному інтервалі, або ж інтеграли від необмежених на $[a,b]$ функцій.

Невласні інтеграли з нескінченними межами інтегрування

Для обчислення інтегралів з нескінченними межами інтегрування вважають, що $\int_a^\infty f(x)dx = \lim\limits_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$. Інтеграли, що визначаються цією рівністю, називаються інтегралами з нескінченними межами інтегрування. Якщо границя існує, то вважають, що інтеграл збігається; якщо ж не існує скінченої границі, то інтеграл розбігається.

Аналогічно визначається $\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$, а також

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^\infty f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)dx + \lim_{b\to\infty}\int_c^b f(x)dx.$$

Якщо існує первісна $F(x)$ для $f(x)$, то $\int_a^b f(x)dx$ обчислюють за формулою Ньютона-Лейбніца і знаходять границю.

Приклад 6.4. Обчислити або довести розбіжність невласного інтеграла

$$\int_1^\infty e^{-\frac{1}{x}}\frac{dx}{x^2}.$$

Розв’язання.

За означенням маємо, що

$$\int_1^\infty e^{-\frac{1}{x}}\frac{dx}{x^2} = \lim_{c\to\infty}\int_1^c e^{-\frac{1}{x}}d\left(-\frac{1}{x}\right) = \lim_{c\to\infty} e^{-\frac{1}{x}}\Big|_1^c = \lim_{c\to\infty} e^{-\frac{1}{c}} - e^{-1} = 1-\frac{1}{e} = \frac{e-1}{e}.$$

Отже, невласний інтеграл збігається.

Невласні інтеграли від необмежених функцій

Якщо функція $f(x)$ на відрізку $[a,b]$ має розрив у точці $x=c$ і неперервна при $a\le x<c$ і $c<x\le b$, то вважаємо, що

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\delta\to 0}\int_{c+\delta}^b f(x)dx,$$

де ε і δ – додатні величини. У цьому випадку $\int_a^b f(x)dx$ називають невласним інтегралом від необмеженої функції на $[a,b]$. Якщо існують обидві границі в правій частині рівності, то $\int\limits_a^b f(x)dx$ називають збіжним; якщо ж хоч одна з границь не є скінченим числом, то інтеграл називають розбіжним.

Приклад 6.5. Обчислити, або довести розбіжність невласного інтеграла

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{(x-1)^3}.$$

Розв’язання.

Підінтегральна функція має розрив при $x=1$ і є неперервною на інтервалі $[0,1)$. Тому

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{(x-1)^3} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_0^{1-\varepsilon}(x-1)^{-3}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{2(x-1)^2}\right)\Bigg|_0^{1-\varepsilon} = -\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon^2}+\frac{1}{2} = -\infty .$$

Інтеграл розбігається.

Приклад 6.6. Обчислити, або довести розбіжність невласного інтеграла

$$\int\limits_0^1 \frac{x^4dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Розв’язання.

Підінтегральна функція розривна при $x=1$. Зробимо заміну $x=sin\,t$, $dx=cos\,t\,dt$. Замінимо і межі інтегрування:

при $x=0$, $0=\sin t$, $t=0$; при $x\to 1$ маємо: $t\to\frac{\pi}{2}$.

Отже, $\int\limits_0^1 \frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_0^{\pi/2-\varepsilon}\frac{sin^4 t\cdot cos\,t}{\sqrt{1-sin^2 t}}dt = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_0^{\pi/2-\varepsilon} sin^4 t\,dt .$

Після заміни змінної підінтегральна функція існує на всій числовій осі, тому невласний інтеграл зводиться до визначеного інтеграла.

$$\int\limits_0^1 \frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int\limits_0^{\pi/2}\left(\sin^2 t\right)^2 dt = \int\limits_0^{\pi/2}\left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)^2 dt = \frac{1}{4}\int\limits_0^{\pi/2}\left(1-2\cos 2t+\frac{1+\cos 4t}{2}\right)dt =$$

$$=\frac{1}{4}\int\limits_0^{\pi/2}\left(\frac{3}{2}+2\cos 2t+\frac{1}{2}\cdot\cos 4t\right)dt = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}\int\limits_0^{\pi/2}dt+\int\limits_0^{\pi/2}\cos 2t\,d(2t)+\frac{1}{8}\int\limits_0^{\pi/2}\cos 4t\;d(4t)\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}\cdot t\,\Big|_0^{\pi/2}+\sin 2t\Big|_0^{\pi/2}+\frac{1}{8}\sin 4t\Big|_0^{\pi/2}\right)=\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3}{16}\pi.$$

Інтеграл збігається.

7. ЗАСТОСУВАННЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА

7.1. Площа плоскої фігури

Площа плоскої фігури, обмеженої кривою $y=f(x),\ f(x)\geq 0$, прямими $x=a,\ x=b$ і віссю OX (*рис.а*) обчислюється за формулою: $S=\int\limits_a^b f(x)dx$.

Якщо плоска фігура обмежена кривими $y=f_1(x), y=f_2(x), f_1(x)\leq f_2(x)$ на $[a,b]$, прямими $x=a, x=b$, то площа такої фігури (*рис.б*) обчислюється за формулою: $S=\int\limits_a^b [f_2(x)-f_1(x)]dx$.

Площа плоскої фігури, обмеженої кривою, заданою в полярних координатах $\rho=\rho(\varphi)$ і двома полярними радіусами $\varphi=\varphi_1$, $\varphi=\varphi_2$ $(\varphi_1<\varphi_2)$ (*рис.в*) обчислюється за формулою: $S=\frac{1}{2}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\rho^2 d\varphi$.

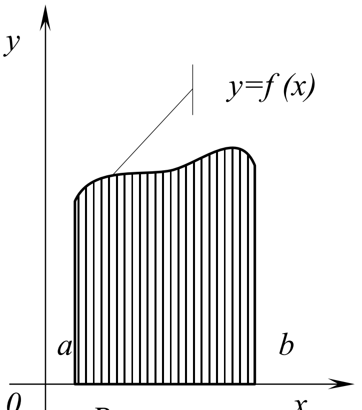


Рисунок а

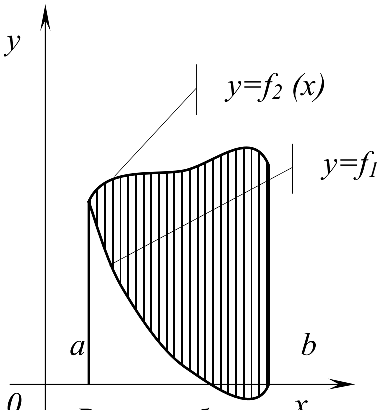


Рисунок б

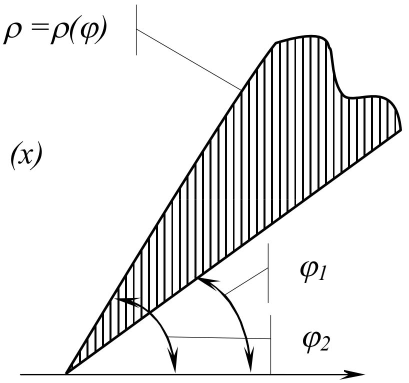


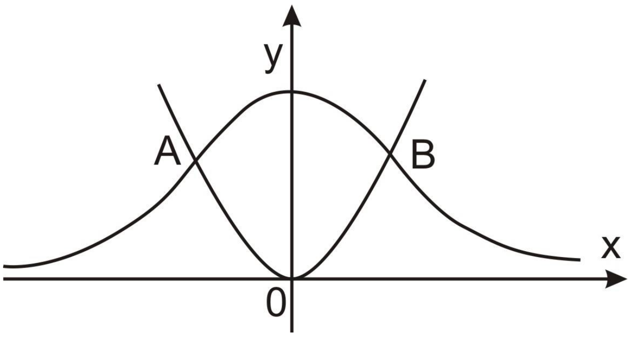
Рисунок в

Приклад 7.1. Обчислити площу фігури, обмеженої параболою $x^2=4ay, a>0$ і локоном Аньєзі $y=\frac{8a^3}{x^2+4a^2}, a>0.$

Розв'язання.

Для визначення меж інтегрування (абсциси $x_1=a,\ x_2=b$ точок A і B) розв'яжемо систему:

$$\begin{cases} y=\frac{x^2}{4a} \\ y=\frac{8a^3}{x^2+4a^2} \end{cases}, \quad \begin{cases} y=\frac{x^2}{4a} \\ \frac{x^2}{4a}=\frac{8a^3}{x^2+4a^2} \end{cases}.$$



З другого рівняння системи маємо $x^4+4a^2x^2-32a^4=0, x_{1,2}=\pm 2a$.

Площу фігури обчислюємо за формулою: $S=\int\limits_a^b\left[f_2(x)-f_1(x)\right]dx$.

$$S=\int\limits_{-2a}^{2a}\left(\frac{8a^3}{x^2+4a^2}-\frac{x^2}{4a}\right)dx=8a^3\frac{1}{2a}arctg\frac{x}{2a}\Bigg|_{-2a}^{2a}-\frac{x^3}{12a}\Bigg|_{-2a}^{2a}=$$

$$=4a^2\left(arctg1-arctg(-1)\right)-\left(\frac{8a^3}{12a}-\frac{(-2a)^3}{12a}\right)=$$

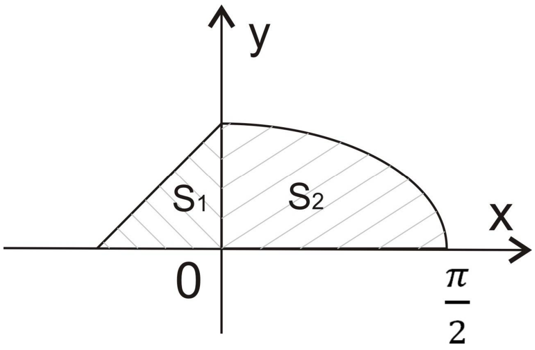
$$=4a^2 2arctg1-\frac{16}{12}a^2=8a^2\frac{\pi}{4}-\frac{4}{3}a^2=2a^2\left(\pi-\frac{2}{3}\right)\text{(кв.од.)}.$$

Зауваження. При обчисленні площі даної плоскої фігури можна було б врахувати симетрію фігури відносно осі OY і обчислити тільки половину площі

$S=\int\limits_0^{2a}\left(\frac{8a^3}{x^2+4a^2}-\frac{x^2}{4a}\right)dx$, а результат подвоїти.

Приклад 7.2. Обчислити площу фігури, обмежену лініями $y=x+1,\ y=\cos x$ і віссю OX.

Розв'язання.



Функція $y=f(x)=\begin{cases}x+1,\ якщо -1\le x\le 0,\\ \cos x,\ якщо\ 0\le x\le\frac{\pi}{2}\end{cases}$

неперервна на проміжку $\left[-1;\frac{\pi}{2}\right]$.

Площа криволінійної трапеції дорівнює $S=S_1+S_2$

$$S=\int\limits_{-1}^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx;\quad\int\limits_{-1}^{0}(x+1)dx+\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=\frac{(x+1)^2}{2}\Bigg|_{-1}^{0}+\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}+\sin\frac{\pi}{2}=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}.$$

Приклад 7.3. У якому відношенні парабола $y^2=2x$ ділить площу круга $x^2+y^2=8$?

Розв'язання.

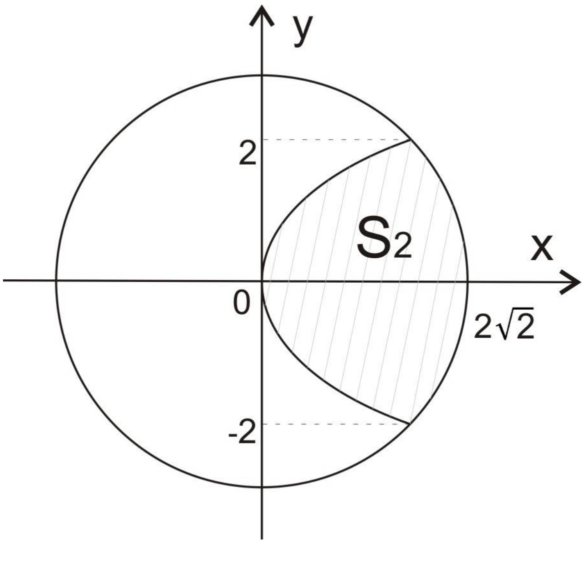
Знайдемо точки перетину ліній

$$\begin{cases}x^2+y^2=8\\ y^2=2x\end{cases}$$

$x^2+2x=8$

$x^2+2x-8=0$

$x_1=-4\quad x_2=2\quad x=2,\quad y^2=4,\quad y=\pm 2.$



За умовою це точки: (2; 2) (2;-2).

Позначимо площу круга через S_1, а площу, яка складається з параболічного і кругового сегментів – S_2. Очевидно, що $S_1 = \pi\left(2\sqrt{2}\right)^2 = 8\pi$; $S_2 = 2\int\limits_0^2 \left(x_1 - x_2\right)dy$, де x_1 визначаємо з рівняння кола: $x^2 = 8 - y^2$; $x = \pm\sqrt{8-y^2}$, оскільки фігура розташована в І-ій чверті, то $x_1 = \sqrt{8-y^2}$, x_2 визначаємо з рівняння параболи $x = \frac{y^2}{2}$, отже:

$$S_2 = 2\int\limits_0^2 \left(\sqrt{8-y^2} - \frac{y^2}{2}\right)dy = 2\int\limits_0^2 \sqrt{8-y^2}\,dy - \int\limits_0^2 y^2\,dy = 2\int\limits_0^2 \sqrt{8-y^2}\,dy - \frac{y^3}{3}\Bigg|_0^2.$$

Зробимо заміну:

$$y = 2\sqrt{2}\sin t$$

$$dy = 2\sqrt{2}\cos t\,dt$$

при цьому зміняться межі інтегрування. Якщо

$y = 0$, *то* $t = 0$

$$y = 2, \quad 2 = 2\sqrt{2}\sin t,\ \sin t = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad t = \frac{\pi}{4};$$

$$S_2 = -\frac{8}{3} + 2\int\limits_0^2 \sqrt{8-y^2}\,dy = -\frac{8}{3} + 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{8 - 8\sin^2 t}\ 2\sqrt{2}\cos t\,dt =$$

$$= -\frac{8}{3} + 2\sqrt{8}\cdot 2\sqrt{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t\,dt = -\frac{8}{3} + 16\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\cos 2t\,dt}{2} = -\frac{8}{3} + 8\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= -\frac{8}{3} + 8\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{8}{3} + 2\pi + 4 = \frac{6\pi+4}{3}.$$

Знайдемо $\frac{S_1 - S_2}{S_2} = \frac{8\pi - \frac{6\pi+4}{3}}{\frac{6\pi+4}{3}} = \frac{24\pi - 6\pi - 4}{6\pi+4} = \frac{18\pi - 4}{6\pi + 4} = \frac{9\pi - 2}{3\pi + 2}.$

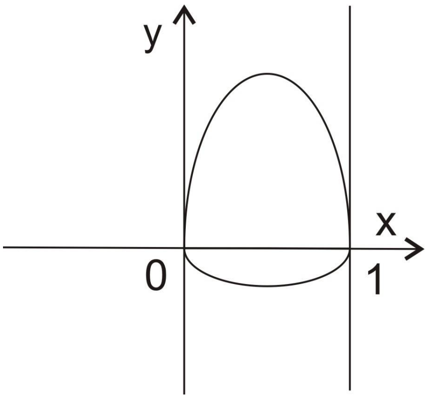
Приклад 7.4. Обчислити площу фігури, обмеженої двома гілками кривої $\left(y-x\right)^2 = x^3$ і прямою $x = 1$.

Розв'язання.

Слід відмітити, що y як неявна функція від x визначена лише для $x \geq 0$. Ліва частина рівняння завжди невід'ємна. Знайдемо рівняння двох гілок кривої

$$y - x = \pm\sqrt{x^3}\ ,\quad y = x \pm x\sqrt{x}\ ,$$

$$y_1 = x + x\sqrt{x}\ ,\quad y_2 = x - x\sqrt{x}\ .$$



Оскільки $x \geq 0$, то $x + x\sqrt{x} \geq x - x\sqrt{x}$, тому

$$S = \int_0^1 \left(y_1 - y_2\right)dx = \int_0^1 \left(\left(x + x\sqrt{x}\right) - \left(x - x\sqrt{x}\right)\right)dx = 2\int_0^1 x\sqrt{x}\,dx = 2\int_0^1 x^{\frac{3}{2}}\,dx = 2\left.\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right|_0^1 = \frac{4}{5}.$$

Приклад 7.5. При виготовленні зварних конструкцій застосовується, так званий метод попереднього навантаження. Він полягає в розтязі деталей перед зваркою для створення в них напружень розтягу, розподілених за законом $\sigma = \sigma(x)$, де $x -$координата точки, яка знаходиться на відстані $|x|$ від осі шва. Визначити зусилля навантажувального пристрою, якщо зусилля визначається за формулою $P = \delta S$, де $\delta -$товщина листа зварного з'єднання (м) $S -$площа епюри напружень $\sigma = \sigma(x)$ від зовнішнього навантаження $P,\left(\frac{н}{м}\right)$. Визначити площу епюри S, якщо відомий (задано) закон розподілу напружень розтягу в залежності від відстані її від осі шва, а товщина листа зварного з'єднання $\delta = 0{,}01$м.

$$\sigma(x) = \begin{cases} ln\dfrac{1-|x|}{1+|x|} + 2, & 0.2 \leq |x| \leq 0.762, \\ 1{,}58, & |x| < 0.2, \\ 0 & |x| > 0.762, \end{cases}$$

Розв'язання.

$S = S_1 + S_2$

$S_1 = 2 \cdot 0{,}2 \cdot 1{,}58 = 0{,}632$

$$S_2 = 2\int_{0,2}^{0,762}\left(ln\frac{1-x}{1+x} + 2\right)dx =$$

$$= 2\int_{0,2}^{0,762} ln\frac{1-x}{1+x}dx + 4\int_{0,2}^{0,762} dx = I_1 + I_2.$$

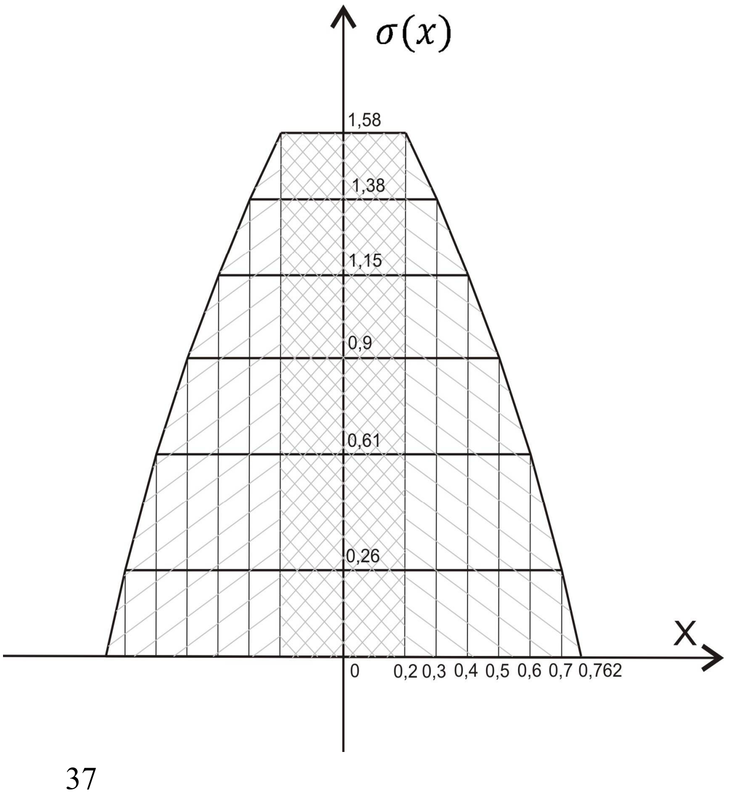
Перший інтеграл обчислюємо за частинами

$$u = ln\frac{1-x}{1+x}, \quad dv = dx;$$

$$du = \frac{1+x}{1-x} \cdot \frac{\left(-(1+x) - (1-x)\right)}{(1+x)^2}dx =$$

$$= \frac{-1-1}{1-x^2}dx = -\frac{2}{1-x^2}dx = \frac{2}{x^2-1}dx,$$

$v = x.$



$$I_1 = 2\left(x\,ln\frac{1-x}{1+x}\Bigg|_{0,2}^{0,762} - 2\int_{0,2}^{0,762}\frac{x}{x^2-1}dx \right) = 2\left(x\,ln\frac{1-x}{1+x}\Bigg|_{0,2}^{0,762} - \int_{0,2}^{0,762}\frac{d\left(x^2-1\right)}{x^2-1} \right) =$$

$$= 2\left(x\,ln\frac{1-x}{1+x} - ln\left|x^2-1\right| \right)\Bigg|_{0,2}^{0,762};$$

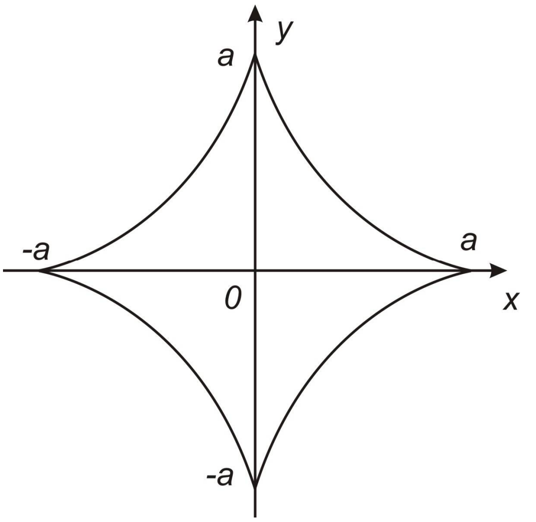
$S_2 = I_1 + I_2;$

$$S_2 = 2\left(x\,ln\frac{1-x}{1+x} - ln\left|x^2-1\right| \right)\Bigg|_{0,2}^{0,762} + 4x\Big|_{0,2}^{0,762} \approx 1,015662$$

$S = 0,6321,+1,015662 \approx 1,647662.$

Приклад 7.6. Знайти площу фігури, обмеженої астроїдою $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t.$

Розв'язання.



Фігура, обмежена астроїдою, має дві осі симетрії – вісь $OX\, i\, OY$. Тому обчислимо тільки четверту частину її площі (рис.). Межі інтегрування для змінної $x: x_1 = 0,\ x_2 = a.$

Підставимо, значення x_1 і x_2 у співвідношення $x = a\cos^3 t$ та знайдемо межі інтегрування для змінної t:

$0 = a\cos^3 t, \cos^3 t = 0,\ t = \dfrac{\pi}{2} = \alpha;$

$a = a\cos^3 t,$ маємо $t = 0 = \beta.$

$dx = x'\left(t\right)dt, \quad dx = 3a\cos^2 t\left(-\sin t\right)dt.$

Отже,

$$\frac{1}{4}S = \int_0^a ydx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} a\ \sin^3 t 3a\cos^2 t(-\sin t)dt = -3a^2\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^4 t\cos^2 t dt =$$

$$= \frac{3}{4}a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\sin^2 t\cos^2 t\sin^2 t dt = \frac{3}{4}a^2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2t\frac{1-\cos 2t}{2}dt =$$

$$= \frac{3}{8}a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2t dt - \frac{3}{8}a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2t\cos 2t dt = \frac{3}{8}a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 4t}{2}dt -$$

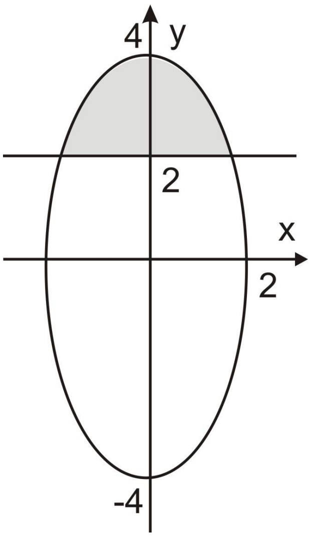
$$-\frac{3}{16}a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2t\, d\left(\sin 2t\right) = \frac{3}{16}a^2\left(t - \frac{1}{4}\sin 4t - \frac{1}{3}\sin^3 2t \right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{16}a^2\frac{\pi}{2} = \frac{3}{32}a^2\pi.$$

$S = \dfrac{3}{8}a^2\pi$ *(кв.од.).*

Приклад 7.7. Обчислити площу фігури обмеженої лініями

$x=2\cos t-1,\ y=4\sin t+2,\quad y\geq 4.$

Розв'язання.



Рівняння лінії запишемо у вигляді $\begin{cases} x+1=2\cos t \\ y-2=4\sin t \end{cases}$ і зробимо паралельне перенесення початку системи координат у точку $O_1(-1;2)$, тобто

$\begin{cases} x+1=x^{'} \\ y-2=y^{'} \end{cases}$, тоді $\begin{cases} x^{'}=2\cos t \\ y^{'}=4\sin t \end{cases}$ – параметричні рівняння еліпса.

Нерівність $y\geq 4$ для $y^{'}$ буде мати вигляд: $y=y^{'}+2, y\geq 4$ означає $y^{'}+2\geq 4,\ y^{'}\geq 2.$

Для обчислення площі скористаємося формулою $S=\int\limits_{c}^{d} xdy;\ S=\int\limits_{2}^{4} x^{'}dy^{'}$. Перейдемо до змінної $t: x^{'}=2\cos t,\ dy^{'}=4\cos t\ dt.$

Знайдемо нові межі інтегрування:

$$y^{'}=2,\ 2=4\sin t,\ \sin t=\tfrac{1}{2},\quad t=\tfrac{\pi}{6};$$

при

$$y^{'}=4,\ \ 4=4\sin t,\ \ \sin t=1,\ \ t=\tfrac{\pi}{2}.$$

Отже, $\frac{1}{2}S=\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} 2\cos t\cdot 4\cos t\ dt=\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} 8\cos^2 t\,dt=4\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2}(1+\cos 2t)dt=4\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_{\pi/6}^{\pi/2}=$

$$=4\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\left(\sin\pi-\sin\frac{\pi}{3}\right)\right)=\frac{4}{3}\pi+2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}.$$

$S=2\left(\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}\right)=\frac{8}{3}\pi-2\sqrt{3}$ (од. площі).

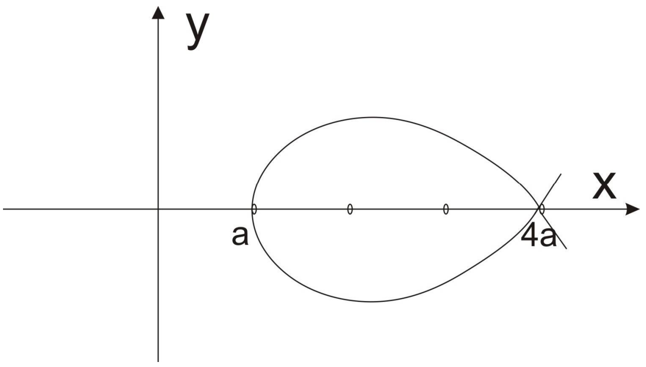
Приклад 7.8. Визначити площу пластичної зони біля вершини крихкої тріщини в зварному з'єднанні, якщо контур пластичної зони описується петлею лінії $\begin{cases} x=a\left(t^2+1\right), \\ y=\dfrac{a}{3}\left(t^3-3t\right), \quad a>0. \end{cases}$

(Пластичною зоною називається геометричне місце точок площини, які задовольняють заданим умовам пластичності). Знайти площу фігури, обмеженої цією петлею.

Розв'язання.

Знайдемо точки перетину даної кривої із осями координат. Абсциса $x\neq 0$ при довільних t, отже вісь OY крива не перетинає.

Ордината $y=0$, при $t=0$ та $t=\pm\sqrt{3}$ $\left(0=\frac{a}{3}\left(t^3-3t\right),\quad t^3-3t=0,\ \ t\left(t^2-3\right)=0,\right.$



$t=0,\quad t^2=3,\quad t=\pm\sqrt{3}\big)$, тому вісь OX крива перетинає в двох точках $(a;o)$ при $t=0$ i $(4a;0)$ при $t=\pm\sqrt{3}$, причому остання з них є точкою самоперетину кривої.

При $-\sqrt{3}\le t\le 0$ ордината $y\ge 0$; при $0\le t\le\sqrt{3}$ ордината $y\le 0$. Оскільки фігура, обмежена петлею, симетрична відносно осі OX, то площу цієї фігури знаходимо як подвоєну площу її верхньої половини

$$S=2\int_0^{4a}y\,dx=2\int_0^{-\sqrt{3}}y(t)x'(t)dt=2\int_0^{-\sqrt{3}}\frac{a}{3}\left(t^3-3t\right)\cdot 2at\,dt=$$

$$=\frac{4a^2}{3}\int_0^{-\sqrt{3}}\left(t^4-3t^2\right)dt=\frac{4a^2}{3}\left(\frac{t^5}{5}-\frac{3}{3}t^3\right)\Bigg|_0^{-\sqrt{3}}=\frac{4a^2}{3}\left(\frac{\left(-\sqrt{3}\right)^5}{5}-\left(-\sqrt{3}\right)^3\right)=$$

$$=\frac{4a^2}{3}\left(-\frac{9}{5}\sqrt{3}+3\sqrt{3}\right)=\frac{4a^2}{3}\cdot\frac{6\sqrt{3}}{5}=\frac{8}{5}\sqrt{3}\ a^2\approx 2{,}77a^2.$$

Приклад 7.9. Ділянка дороги в плані має форму петлі кривої $x=2t-t^2$, $y=2t^2-t^3$. Обчислити площу фігури, обмеженої цією кривою.

Розв'язання.

Крива має точку самоперетину в початку координат.

$$\begin{pmatrix} x=0\ \ \textit{при}\ t=0\ \ i\ \ t=2,\\ y=0\ \ \textit{при}\ t=0\ \ i\ \ t=2.\end{pmatrix}$$

Для обчислення площі петлі використаємо формулу:

$$S=\frac{1}{2}\int_0^T\left(x(t)y'(t)-y(t)x'(t)\right)dt,\ \text{де}\ x=x(t),\ y=y(t),\ 0\le t\le T.$$

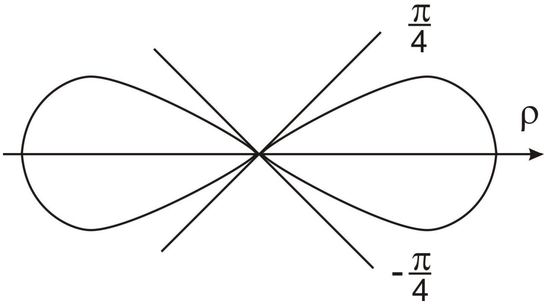
$$S=\frac{1}{2}\int_0^2\left(\left(2t-t^2\right)\left(4t-3t^2\right)-\left(2t^2-t^3\right)\left(2-2t\right)\right)dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^2\left(8t^2-4t^3-6t^3+3t^4-4t^2+2t^3+4t^3-2t^4\right)dt=\frac{1}{2}\int_0^2\left(t^4-4t^3+4t^2\right)dt=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{t^5}{5}-4\frac{t^4}{4}+4\frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_0^2=\frac{1}{2}\left(\frac{32}{5}-16+\frac{32}{3}\right)=\frac{8}{15}.$$

Приклад 7.10. Обчислити площу фігури, обмеженої кривою $\rho = 2\cos 2\varphi,\ \rho \ge 0.$

Розв'язання.



Фігура складається з двох рівновеликих частин (рис.). Обчислимо площу однієї з них, а одержаний результат подвоїмо.

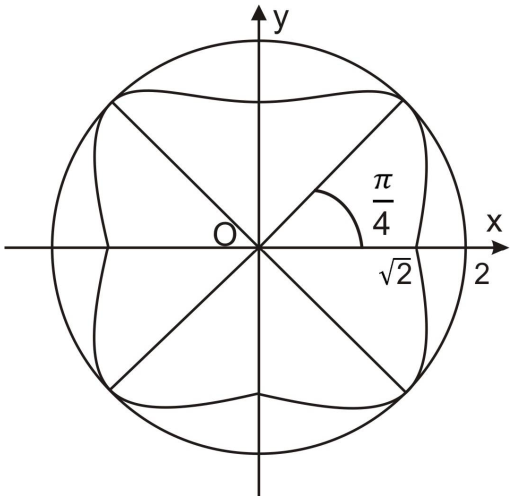
З побудови фігури маємо, що $\varphi_{1,2} = \mp\frac{\pi}{4}$, тоді

$$\frac{1}{2}S = \frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 4\cos^2 2\varphi\, d\varphi = 2\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}\left(1+\cos 4\varphi\right)d\varphi = \left(\varphi + \frac{1}{4}\sin 4\varphi\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\sin\pi =$$

$$= \left(-\frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}\sin\left(-\pi\right)\right) = 2\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2};\quad S = \pi \text{ (кв.од).}$$

Приклад 7.11. Визначити відносну зміну прохідного перерізу зварного трубопроводу, обумовлену утворенням залишкових деформацій внаслідок зварки, якщо здеформований переріз обмежений кривою $x^4 + y^4 = \frac{R^2}{2}\left(x^2 + y^2\right)$, де $R -$радіус здеформованого перерізу, $R = 2.$

Розв'язання.



Крива симетрична відносно осей координат та відносно бісектрис $y = x$ *і* $y = -x,$ отже, можна розглядати криву для $y < x,\ \ x \ge 0.$

Перейдемо до полярних координат $x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi.$ Рівняння кривої набуде вигляду:

$$\rho^4\left(\cos^4\varphi + \sin^4\varphi\right) = \frac{R^2}{2}\rho^2\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right)$$

$$\rho^4\left(\cos^4\varphi + \sin^4\varphi\right) = \frac{R^2}{2}\rho^2$$

$$\rho^2\left(\cos^4\varphi + \sin^4\varphi\right) = \frac{R^2}{2};\qquad R = 2.$$

Складемо таблицю значень:

φ	0	$4{,}5^\circ \approx 0{,}08$	$9^\circ \approx 0{,}16$	$14^\circ \approx 0{,}24$	$18^\circ \approx 0{,}31$	$22^\circ \approx 0{,}39$	$26^\circ \approx 0{,}45$	$30^\circ \approx 0{,}52$	$36^\circ \approx 0{,}62$	$41^\circ \approx 0{,}71$	$45^\circ \approx 0{,}78$
ρ	1,41	1,42	1,45	1,49	1,55	1,63	1,72	1,82	1,91	1,98	2,0

Побудуємо одержані точки і з'єднаємо їх плавною лінією, одержимо графік функції для $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}.$

Враховуючи симетрію кривої $x^4+y^4=\frac{R^2}{2}\left(x^2+y^2\right)$, $R=2$ одержимо її графік.

Знайдемо площу здеформованого перерізу трубопроводу за формулою:

$$S_1=\frac{1}{2}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\rho^2\,d\varphi;$$

$$S_1=8\cdot\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{R^2}{2\left(\cos^4\varphi+\sin^4\varphi\right)}d\varphi=2R^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\varphi}{\cos^4\varphi+\sin^4\varphi};$$

Виконаємо перетворення:

$$\cos^4\varphi+\sin^4\varphi=\left(\cos^2\varphi\right)^2+2\cos^2\varphi\sin^2\varphi+\left(\sin^2\varphi\right)^2-2\cos^2\varphi\sin^2\varphi=$$

$$1-\frac{2\cdot 2}{2}\cos^2\varphi\sin^2\varphi=1-\frac{1}{2}\sin^2 2\varphi=\frac{2-\sin^2 2\varphi}{2}.$$

$$S_1=2R^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{2}{2-\sin^2 2\varphi}d\varphi;$$

Для обчислення інтеграла зробимо заміну: $tg\,2\varphi=t,\ 2\varphi=arctg\,t,$

$\sin^2 2\varphi=\frac{t^2}{1+t^2},\varphi=\frac{1}{2}arctg\,t,\ d\varphi=\frac{1}{2}\cdot\frac{dt}{1+t^2},$ відповідно зміняться межі інтегрування при $\varphi=0,\ t=0;$ при $\varphi=\frac{\pi}{4},\ \ t=+\infty.$

$$S_1=2R^2\int\limits_0^{\infty}\frac{2dt}{2\left(1+t^2\right)\left(2-\frac{t^2}{1+t^2}\right)}=2R^2\int\limits_0^{\infty}\frac{dt}{2+2t^2-t^2}=2R^2\int\limits_0^{\infty}\frac{dt}{t^2+2}=$$

$$=2R^2\lim_{\beta\to\infty}\int\limits_0^{\beta}\frac{dt}{t^2+2}=2R^2\lim_{\beta\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{t}{\sqrt{2}}\right)\Bigg|_0^{\beta}=$$

$$=\frac{2R^2}{\sqrt{2}}\lim_{\beta\to\infty}\left(arctg\frac{\beta}{\sqrt{2}}-arctg\,0\right)=\frac{2R^2}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi R^2\,(кв.од.)$$

Відносна зміна прохідного перерізу зварного трубопроводу

$$\Delta\%=\left|\frac{S-S_1}{S}\right|\cdot 100\%=\left|\frac{\pi R^2-\frac{\sqrt{2}}{2}\pi R^2}{\pi R^2}\right|\cdot 100\%\approx 34\%.$$

7.2. Довжина дуги плоскої кривої

Якщо плоска крива задана рівнянням $y = f(x)$, де $f(x), f'(x)$ неперервні, то довжина дуги цієї кривої виражається інтегралом $l = \int\limits_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\, dx$, де a і b – абсциси кінців даної дуги.

У випадку параметричного задання кривої $x = x(t), y = y(t)$, де $x'(t)$ і $y'(t)$- неперервні на відрізку $[\alpha, \beta]$ довжина дуги кривої обчислюється за формулою: $l = \int\limits_a^b \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\, dt$, де α і β $(\alpha < \beta)$ – значення параметра t, які відповідають кінцям кривої $x = a, x = b$. Для кривої, заданої в полярних координатах рівнянням $\rho = \rho(\varphi)$, формула для обчислення довжини дуги плоскої кривої має вигляд: $l = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}\, d\varphi$, де φ_1 і φ_2- значення кута φ в кінцях дуги ($\varphi_1 < \varphi_2$).

Приклад 7.12. Знайти довжину дуги кривої $y^2 = x^3$ від $x = 0$ до $x = 1\ (y \geq 0)$.

Розв’язання.

Довжину дуги знаходимо за формулою: $l = \int\limits_a^b \sqrt{1 + \left(y^{'}\right)^2}\, dx$

З рівняння кривої: $y = \pm\sqrt{x^3}$. Оскільки за умовою $y \geq 0$, то $y = x^{\frac{3}{2}}$ $y^{'} = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$.

Довжина дуги дорівнює $l = \int\limits_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2}\, dx = \int\limits_0^1 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\, dx = \int\limits_0^1 \left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{\frac{1}{2}} dx =$

$$= \frac{4}{9}\left(\frac{1 + \frac{9}{4}x}{3/2}\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1 = \frac{8}{27}\sqrt{\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^3}\,\Bigg|_0^1 = \frac{8}{27}\left(\sqrt{\left(\frac{13}{4}\right)^3} - 1\right) = \frac{8}{27}\left(\frac{13}{8}\sqrt{13} - 1\right).$$

Приклад 7.13. Обчислити довжину дуги кривої $x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}\ln y,\ 1 \leq y \leq e.$

Розв’язання.

В якості змінної інтегрування візьмемо y; формула для обчислення довжини дуги матиме вигляд:

$l = \int\limits_c^d \sqrt{1 + x^{'}(y)}\, dy,$ де $c \leq y \leq d.$

У нашому випадку: $x^{'}=\frac{1}{4}2y-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{y}=\frac{1}{2}\left(y-\frac{1}{y}\right).$

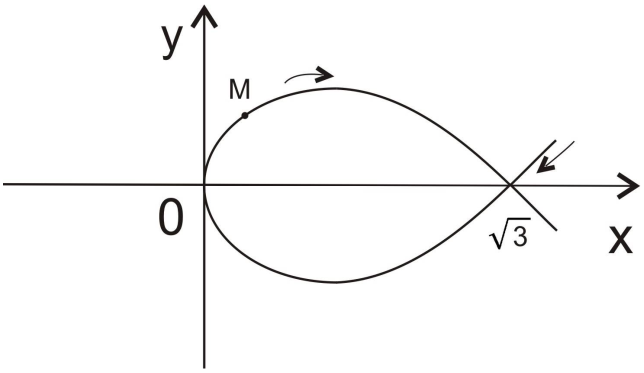
$$l=\int_{1}^{e}\sqrt{l+\frac{1}{4}\left(y-\frac{1}{y}\right)^{2}}\,dy=\int_{1}^{e}\sqrt{1+\frac{1}{4}y^{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4y^{2}}}\,dy=\int_{1}^{e}\sqrt{\frac{y^{2}}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4y^{2}}}\,dy=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{1}^{e}\sqrt{y^{2}+2+\frac{1}{y^{2}}}\,dy=\frac{1}{2}\int_{1}^{e}\sqrt{\left(y+\frac{1}{y}\right)^{2}}\,dy=\frac{1}{2}\int_{1}^{e}\left(y+\frac{1}{y}\right)dy=\frac{1}{2}\left(\frac{y^{2}}{2}+\ln|y|\right)\Bigg|_{1}^{e}=$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{e^{2}}{2}+1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{e^{2}}{2}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}\left(e^{2}+1\right).$$

Приклад 7.14. Обчислити довжину петлі кривої $x=\sqrt{3}\,t^{2}$, $y=t-t^{3}$.

Розв'язання.



Довжину петлі кривої будемо знаходити за формулою:

$$l=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\left(x_t^{'}\right)^{2}+\left(y_t^{'}\right)^{2}}\,dt.$$

Знайдемо межі інтегрування. Обидві функції $x(t)\,i\,y(t)$ визначені при всіх значеннях t. Оскільки функція $x=\sqrt{3}\,t^{2}\geq 0,$ то це означає, що крива лежить в правій на-півплощині, а те що при зміні знаку параметра t величина $x(t)$ не змінюється, а $y(t)$ змінює знак означає, що крива симетрична відносно осі OX. Крім того, функція $x(t)$ приймає одне і те ж значення не більше, чим два рази, звідки випливає, що точки самоперетину кривої лежать на осі OX, тобто при $y=0$.

На рисунку стрілками вказано той напрям, в якому біжуча точка $M(x,y)$ пробігає криву при зміні t від $-\infty$ до ∞.

Але $y=0$ при $t_1=0, t_2=-1,\ t_3=1,$ оскільки $x(t_2)=x(t_3)=\sqrt{3}$, то точка $\left(\sqrt{3};0\right)$ є єдиною точкою самоперетину кривої. Отже, ми повинні інтегрувати в межах від $t_2=-1$ до $t_3=1$.

Тепер знайдемо $x_t^{'}=2\sqrt{3}\,t,\ y_t^{'}=1-3t^{2}.$

Довжина петлі кривої дорівнює

$$l=\int_{-1}^{1}\sqrt{\left(2\sqrt{3}\,t\right)^{2}+\left(1-3t^{2}\right)^{2}}\,dt=\int_{-1}^{1}\sqrt{12t^{2}+1-6t^{2}+9t^{4}}\,dt=$$

$$=\int_{-1}^{1}\sqrt{1+6t^{2}+9t^{4}}\,dt=\int_{-1}^{1}\sqrt{\left(1+3t^{2}\right)^{2}}\,dt=$$

$$=\int_{-1}^{1}\left(1+3t^{2}\right)dt=\left(t+\frac{3t^{3}}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{1}=1+1-(-1-1)=2+2=4.$$

Приклад 7.15. Знайти довжину дуги кривої $x=\cos^5 t,\ y=\sin^5 t$ від $t_1=0$ до $t_2=\dfrac{\pi}{2}.$

Розв'язання.

Довжину дуги кривої знаходимо за формулою: $l=\int\limits_{t_1}^{t_2}\sqrt{\left(x_t^{'}\right)^2+\left(y_t^{'}\right)^2}\,dt.$

$x_t^{'}=5\cos^4 t\left(-\sin t\right),\ y_t^{'}=5\sin^4 t\cos t$

$$l=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\left(-5\cos^4 t\sin t\right)^2+\left(5\sin^4 t\cos t\right)^2}\ dt=5\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos t\sqrt{\cos^6 t+\sin^6 t}\,dt=$$

$$=\frac{5}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t\sqrt{\left(\cos^2 t\right)^3+\left(\sin^2 t\right)^3}\,dt=$$

$$=\frac{5}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t\sqrt{\left(\cos^2 t+\sin^2 t\right)\left(\cos^4 t-\cos^2 t\sin^2 t+\sin^4 t\ \right)}\,dt=$$

$$=\frac{5}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t\sqrt{\left(\cos^2 t+\sin^2 t\right)^2-3\cos^2 t\sin^2 t}\,dt=\frac{5}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t\sqrt{1-\frac{3}{4}\sin^2 2t}\ dt=$$

$$=\frac{5}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t\sqrt{1-\frac{3}{4}\left(1-\cos^2 2t\right)}\ dt=\frac{5}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cos^2 2t}\ dt=$$

$$=-\frac{5}{8}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+3\cos^2 2t}\ d\left(\cos 2t\right)=-\frac{5}{8\sqrt{3}}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\left(\sqrt{3}\cos 2t\right)^2}\ d\left(\sqrt{3}\cos 2t\right).$$

Для обчислення інтеграла використаємо формулу:

$$\int\sqrt{a^2+u^2}\ du=\frac{u}{2}\sqrt{a^2+u^2}+\frac{a^2}{2}\ln\left|u+\sqrt{a^2+u^2}\right|+C$$

$$l=-\frac{5}{8\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2t\sqrt{1+3\cos^2 2t}+\frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{3}\cos 2t+\ \sqrt{1+3\cos^2 2t}\right|\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=$$

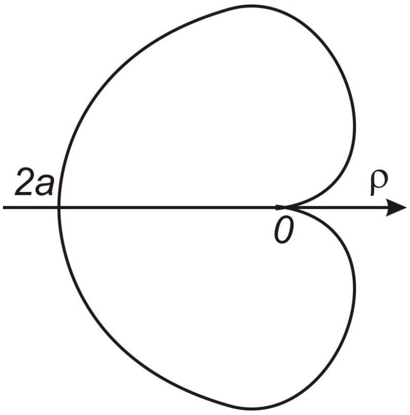
$$=-\frac{5}{8\sqrt{3}}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2+\frac{1}{2}\ln\left|-\sqrt{3}+2\right|-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2-\frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{3+2}\right|\right)=$$

$$=-\frac{5}{8\sqrt{3}}\left(-2\sqrt{3}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{-\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}+2}\right|\right)=-\frac{5}{8\sqrt{3}}\left(-2\sqrt{3}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}{\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)}\right|\right)=$$

$$=-\frac{5}{8\sqrt{3}}\left(-2\sqrt{3}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}{4-3}\right|\right)=\frac{5}{8\sqrt{3}}\left(2\sqrt{3}-\ln\left(2-\sqrt{3}\right)\right)=\frac{5}{8}\left(2-\frac{\ln\left(2-\sqrt{3}\right)}{\sqrt{3}}\right).$$

Приклад 7.16. Знайти довжину дуги кардіоїди $\rho = a(1-\cos\varphi)$.

Розв'язання.



Кардіоїда описується при зміні кута від 0 до 2π, її довжину знаходимо за формулою: $l=\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sqrt{\rho^2+\left(\rho^{'}\right)}d\varphi$, $\rho^{'}=a\left(0-\left(-\sin\varphi\right)\right)=a\sin\varphi.$

Тому

$$l=\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{a^2\left(1-\cos\varphi\right)^2+a^2\sin^2\varphi}\,d\varphi=a\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{2-2\cos\varphi}\,d\varphi=$$

$$=a\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{2\cdot 2\sin^2\frac{\varphi}{2}}\,d\varphi=2a\int\limits_0^{2\pi}\sin\frac{\varphi}{2}d\varphi=-4a\cos\frac{\varphi}{2}\Bigg|_0^{2\pi}=$$

$=-4a\left(\cos\pi-\cos 0\right)=8a.$ $l=8a$ (од. довжини).

Приклад 7.17. Знайти довжину дуги кривої $\rho=\sin^3\frac{\varphi}{3}$ від $\varphi_1=0$ до $\varphi_2=\frac{\pi}{2}.$

Розв'язання.

Довжину дуги кривої знаходимо за формулою: $l=\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sqrt{\rho^2+\left(\rho^{'}\right)^2}\,d\varphi.$

$$\rho^{'}=3\sin^2\frac{\varphi}{3}\cdot\cos\frac{\varphi}{3}\cdot\frac{1}{3}=\sin^2\frac{\varphi}{3}\cdot\cos\frac{\varphi}{3}.$$

$$l=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\left(\sin^3\frac{\varphi}{3}\right)^2+\left(\sin^2\frac{\varphi}{3}\cos\frac{\varphi}{3}\right)^2}\,d\varphi=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\sin^6\frac{\varphi}{3}+\sin^4\frac{\varphi}{3}\cos^2\frac{\varphi}{3}}\,d\varphi=$$

$$=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\frac{\varphi}{3}\sqrt{\sin^2\frac{\varphi}{3}+\cos^2\frac{\varphi}{3}}\,d\varphi=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\frac{\varphi}{3}d\varphi=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos\frac{2}{3}\varphi}{2}d\varphi=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\cos\frac{2}{3}\varphi\right)d\varphi=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\varphi-\frac{3}{2}\sin\frac{2}{3}\varphi\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3}{2}\sin\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{1}{8}\left(2\pi-3\sqrt{3}\right).$$

7.3. Об'єм тіла обертання

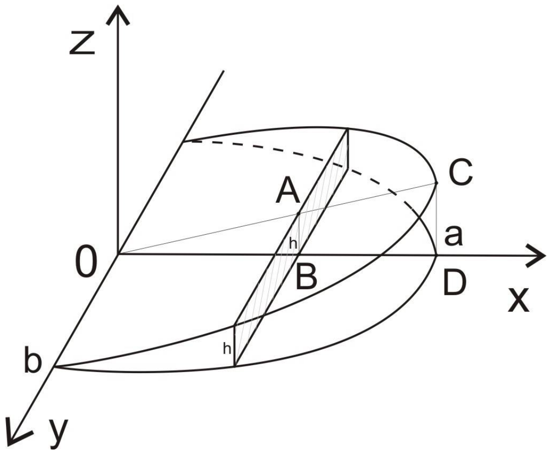
Нехай функція $y=f(x)$ неперервна і невід'ємна на відрізку $[a,b]$. Об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі OX плоскої фігури, обмеженої графіком функції $y=f(x)$, відрізками прямих $x=a$, $x=b$, $a<b$, $y=0$ виразиться інтегралом $V=\pi\int\limits_a^b\left(f(x)\right)^2dx$ або $V=\pi\int\limits_a^b y^2dx$.

Якщо ж плоска фігура, обмежена лініями $x=\varphi(y)$, $y=c$, $y=d$, $c<d$, $x=0$ обертається навколо осі *OY*, то об'єм одержаного тіла обертання обчислюється за формулою: $V=\pi\int\limits_{c}^{d}x^2dy$.

Приклад 7.18. Знайти об'єм циліндричного клина, основою якого є еліпс, а похила площина проходить через малу вісь еліпса.

Розв'язання.

Перетин клина площиною, перпендикулярною до осі OX, є прямокутник, площа якого рівна $S(x)=2yh$, знайдемо y із рівняння еліпса:



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1;\quad \frac{y^2}{b^2}=1-\frac{x^2}{a^2};$$

$$y^2=b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right);\quad y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}.$$

Розглянемо прямокутні трикутники ΔODC *і* ΔOBA: $\frac{CD}{OD}=\frac{AB}{OB}$, $\frac{H}{a}=\frac{h}{x}$, звідки $h=\frac{H}{a}x$, тоді

$$S(x)=2\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\cdot\frac{H}{a}x=\frac{2bH}{a^2}x\sqrt{a^2-x^2}.$$

Отже, об'єм клина

$$V=\int\limits_0^a S(x)dx=\frac{2bH}{a^2}\int\limits_0^a x\sqrt{a^2-x^2}\,dx=-\frac{bH}{a^2}\int\limits_0^a\left(a^2-x^2\right)^{\frac{1}{2}}d\left(a^2-x^2\right)=$$

$$=-\frac{bH}{a^2}\frac{\left(a^2-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{3/2}\Bigg|_0^a=-\frac{2bH}{3a^2}\left(0-a^3\right)=\frac{2bHa^3}{3a^2}=\frac{2}{3}abH.$$

Приклад 7.19. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі OX фігури, обмеженої лініями $y=\sqrt[3]{x}$ $i\; y=x(x\geq 0)$.

Розв'язання.

Лінії $y=\sqrt[3]{x}$ i $y=x$ перетинаються у точках $O(0;0)i\,A(1;1)$.

Об'єм V утвореного тіла обертання знаходимо як різницю об'ємів $V_2-V_1=V$, де V_1-об'єм тіла, утвореного обертанням трикутника OAB навколо осі OX, а V_2-об'єм тіла, що одержується при обертанні навколо осі OX криволінійної трапеції, обмеженої лініями $y=\sqrt[3]{x},\ x=1, y=0.$

$$V=\pi\int\limits_0^1\left(\sqrt[3]{x}\right)^2dx-\pi\int\limits_0^1x^2\,dx=\pi\left(\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}\Bigg|_0^1-\frac{1}{3}x^3\Bigg|_0^1\right)=\pi\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{15}\pi.$$

Отже, $V = \frac{4}{15}\pi$ (*куб. од.).*

Якщо, тіло розміщене в просторі $OXYZ$ між площинами $z = z_0$, $z = z_0 + H$ і кожний переріз цього тіла площиною, перпендикулярною до осі OZ, має площу $S(z)$, де $S(z)-$інтегрована на $[z_0, z_0 + H]$ функція, то об'єм V такого тіла можна обчислити за формулою $V = \int\limits_{z_0}^{z_0+H} S(z)dz.$ Аналогічні формули матимуть місце, якщо замість осі OZ взяти OX або OY.

Приклад 7.20. Обчислити об'єм тіла, обмеженого еліптичним параболоїдом $z = 4 - x^2 - \frac{y^2}{9}$ і площиною $z = 0$.

Розв'язання.

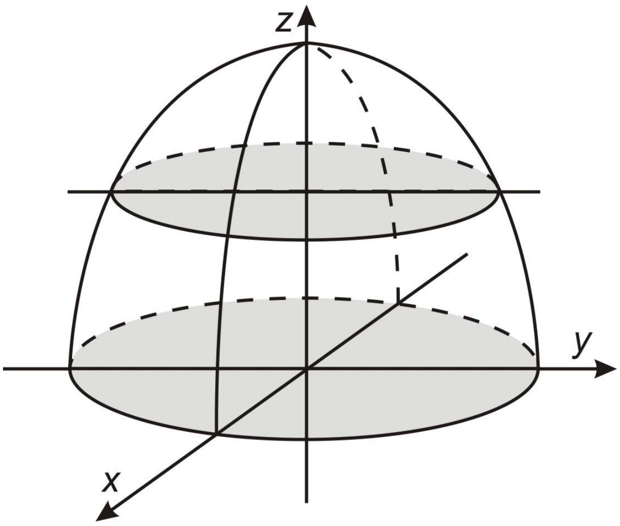
Кожний переріз тіла площиною, перпендикулярною до осі OZ, є еліпсом.

У перерізі довільною площиною $z = h,\ 0 < h < 4$ маємо еліпс

$h = 4 - x^2 - \frac{y^2}{9}$, або $\frac{x^2}{4-h} + \frac{y^2}{9(4-h)} = 1.$

Як відомо, площа еліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ обчислюється за формулою: $S_{ел} = \pi ab.$ Тому

$S(h) = \pi\sqrt{4-h}\sqrt{9(4-h)} = 3\pi(4-h).$



Отже, $V = \int\limits_0^4 3\pi(4-h)dh = 3\pi\left(4h - \frac{h^2}{2}\right)\Bigg|_0^4 = 3\pi(16-8) = 24\pi,\ V = 24\pi$ (*куб. од.).*

Приклад 7.21. Опорна колона має форму однопорожнинного гіперболоїда $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ відтятого площинами $z = -c\ і\ z = c$. Знайти об'єм колони.

Розв'язання.

В перетині колони площиною, перпендикулярною до осі OZ одержимо фігуру, обмежену еліпсом:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{z^2}{c^2};\quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{c^2 + z^2}{c^2};\quad \frac{x^2}{a^2\frac{(c^2+z^2)}{c^2}} + \frac{y^2}{b^2\frac{(c^2+z^2)}{c^2}} = 1;$$

$\frac{a}{c}\sqrt{c^2+z^2}$ та $\frac{b}{c}\sqrt{c^2+z^2}$ – півосі еліпса.

Скористаємося формулою: $S_{ел}=\pi ab,$ де a і b – півосі еліпса

$$S(z)=\pi\cdot\frac{a}{c}\sqrt{c^2+z^2}\cdot\frac{b}{c}\sqrt{c^2+z^2}=\frac{\pi ab}{c^2}\left(c^2+z^2\right)=\pi ab\left(1+\frac{z^2}{c^2}\right)$$

Об’єм колони знаходимо за формулою:

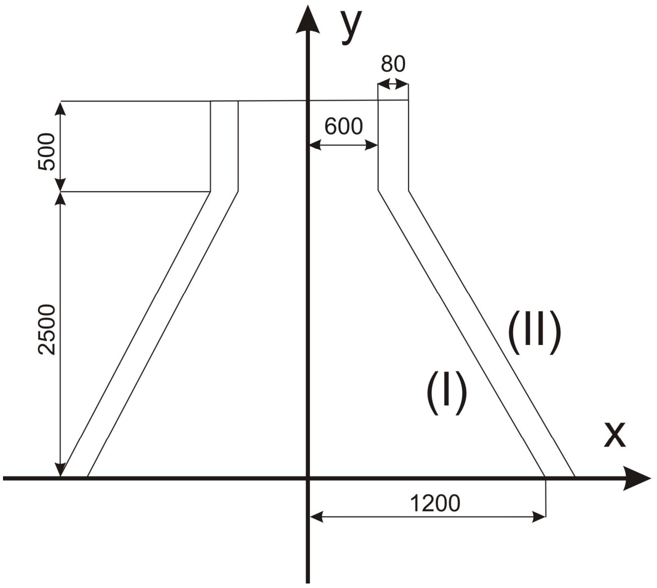
$$V=\int\limits_{-c}^{c}S(z)dz=2\int\limits_{0}^{c}S(z)dz=2\int\limits_{0}^{c}\pi ab\left(1+\frac{z^2}{c^2}\right)dz=2\pi ab\left(z+\frac{1}{c^2}\cdot\frac{z^3}{3}\right)\Bigg|_0^c=$$

$$=2\pi ab\left(c+\frac{c}{3}\right)=\frac{2\pi ab\cdot 4c}{3}=\frac{8}{3}\pi abc.$$

Приклад 7.22. Оглядовий колодязь, нижня частина якого має форму зрізаного конуса, а верхня частина (люк)- циліндричну форму, виготовлено із бетону, густина якого дорівнює $2,45\,{}^{т}\!/_{м^3}$. Знайти об’єм колодязя і масу затраченого на його виготовлення бетону.

Розміри в міліметрах вказані на рисунку.

Розв’язання.



Нижня частина колодязя являє собою тіло, одержане обертанням навколо осі OX фігури, обмеженої прямими:

$(I)\,y_1=1,2-0,24x,$

$(II)\,y_2=1,28-0,24x,$

$x_1=0,\ x_2=2,5$

(для зручності обчислень розміри взяті в метрах).

Об’єм цього тіла обчислюємо за формулою: $V=\pi\int\limits_{x_1}^{x_2}\left(y_2^2-y_1^2\right)dx$

$$V_1=\pi\int\limits_{0}^{2,5}\left(\left(1,28-0,24x\right)^2-\left(1,2-0,24x\right)^2\right)dx=$$

$$=\pi\int\limits_{0}^{2,5}\left(1,6384-0,6144x+0,0576x^2-1,44+0,576x-0,0576x^2\right)dx=$$

$$=\pi\int\limits_{0}^{2,5}\left(0,1984-0,0384x\right)dx=\pi\left(0,1984x-0,0384\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^{2,5}=$$

$$=\pi\left(0,1984\cdot 2,5-\frac{0,0384(2,5)^2}{2}\right)=\pi\left(0,496-0,12\right)\approx 1,18\left(м^3\right)$$

Об’єм верхньої частини (люка) обчислюємо як різницю об’ємів двох циліндрів із висотою 0,5м і радіусами основ відповідно 0,68 і 0,6.

$$V_2 = \pi\left(0,68\right)^2 \cdot 0,5 - \pi\left(0,6\right)^2 \cdot 0,5 = \pi\left(0,68^2 - 0,6^2\right) \cdot 0,5 \approx$$

$$\approx \pi\left(0,4624 - 0,36\right) \cdot 0,5 = \pi \cdot 0,0512 \approx 0,16(\text{м}^3).$$

Об’єм колодязя дорівнює $V = V_1 + V_2$, $V = 1,18 + 0,16 \approx 1,34\left(\text{м}^3\right)$.

Маса бетона, затраченого на будівництво колодязя дорівнює $m = V \cdot \rho = 1,34 \cdot 2,45 \approx 3,28\left(m\right)$.

7.4. Площа поверхні обертання

Якщо крива $y = f(x)$ задана на відрізку $[a,b]$ обертається навколо осі *OX*, то площу отриманої поверхні обертання можна обчислити за формулою:

$$P = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx, \quad \text{або} \quad P = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1 + (y')^2}\,dx.$$

У випадку, коли крива задана у параметричному вигляді $x = \varphi(t),\ y = \psi(t)$, де $\varphi(t), \psi(t)$ задані на відрізку $[\alpha, \beta]$, площа поверхні обертання знаходиться за формулою: $P = 2\pi \int_\alpha^\beta \psi(t)\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\,dt.$

Якщо крива задана рівнянням у полярній системі координат $\rho = \rho(\varphi)$ на відрізку $[\varphi_1, \varphi_2]$, то $P = 2\pi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho(\varphi) sin\,\varphi \sqrt{\rho^2(\varphi) + [\rho'(\varphi)]^2}\,d\varphi.$

Приклад 7.23. Знайти площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі *OX* кривої $y = \sqrt{1+x}$ і обмежену прямою $x = 1$.

Розв’язання.

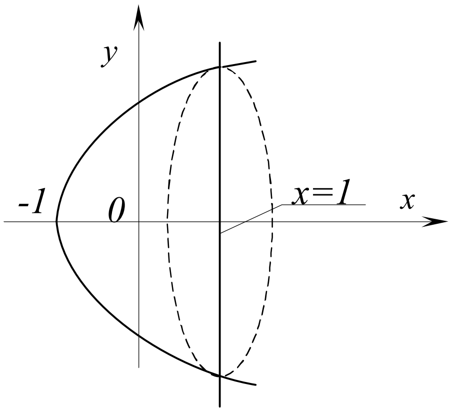
Скористаємося формулою: $P = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1 + (y')^2}\,dx$. Знайдемо $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}$.

Тоді відповідно отримаємо:

$$P = 2\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{1+x}\sqrt{1 + \frac{1}{4(1+x)}}\,dx =$$

$$= 2\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{1+x}\sqrt{\frac{4 + 4x + 1}{4(1+x)}}\,dx = 2\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{1+x}\sqrt{\frac{5 + 4x}{4(1+x)}}\,dx =$$

$$= \frac{\pi}{4} \int_{-1}^{1} \sqrt{4x+5}\,d\left(4x+5\right) = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{2}{3}\left(4x+5\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_{-1}^{1} =$$



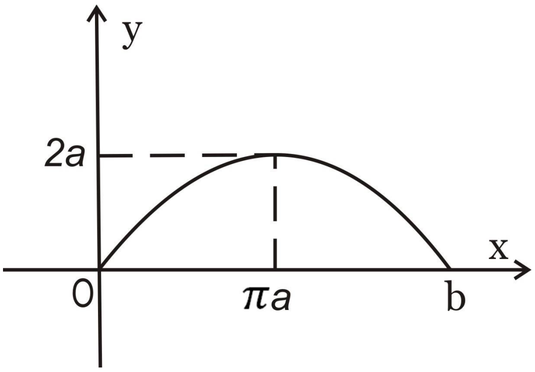
$$=\frac{\pi}{6}(27-1)=\frac{13\pi}{3}.\quad \text{Отже, } P=\frac{13\pi}{3}\ \text{(кв.од.)}$$

Приклад 7.24. Теплиця має в перерізі форму однієї арки циклоїди, рівняння якої $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$. Скільки потрібно плівки для затягнення передньої і задньої стінок теплиці, якщо її ширина $OB=10м$?

Розв'язання.

Одну арку циклоїди одержимо при зміні параметра t від 0 до 2π. Знайдемо площу однієї арки циклоїди за формулою:

$$S=\int_{\alpha}^{\beta} y(t)\ x'(t)dt,\ \text{де } \alpha\le t\le\beta\ .$$



$$S=\int_0^{2\pi} a(1-\cos t)a(1-\cos t)dt=$$

$$=a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2\,dt=a^2\int_0^{2\pi}\left(1-2\cos t+\cos^2 t\right)dt=$$

$$=a^2\left(\left(t-2\sin t\right)\Big|_0^{2\pi}+\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2t}{2}dt\right)=$$

$$=a^2\left(t-2\sin t+\frac{t}{2}+\frac{1}{4}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{2\pi}=a^2\left(2\pi-2\sin 2\pi+\frac{2\pi}{2}+\frac{1}{4}\sin 4\pi\right)=3\pi a^2.$$

Оскільки $OB=2\pi a;\ OB=10,\ 10=2\pi a,\ \ a=\frac{10}{2\pi},\ \ a=\frac{5}{\pi}.$

Отже, для передньої і задньої стінок теплиці потрібно $2\cdot 3\pi\left(\frac{5}{\pi}\right)^2=50\left(м^2\right)$ плівки.

Приклад 7.25. Поверхня резервуара має форму поверхні обертання арки циклоїди $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ навколо осі OX. Знайти площу цієї поверхні.

Розв'язання.

Площу резервуара знаходимо за формулою:

$$S=2\pi\int_0^{2\pi} y(t)\sqrt{\left(x_y'\right)^2+\left(y_t'\right)^2}\,dt,\quad \begin{matrix} x=a(t-\sin t), & x_t'=a(1-\cos t), \\ y=a(1-\cos t), & y_t'=a\sin t. \end{matrix}$$

$$S=2\pi\int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}\,dt=$$

$$=2\pi a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)\sqrt{1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t}\,dt=$$

$$=2\pi a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)\sqrt{2-2\cos t}\,dt=2\sqrt{2}\pi a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)\sqrt{1-\cos t}dt=$$

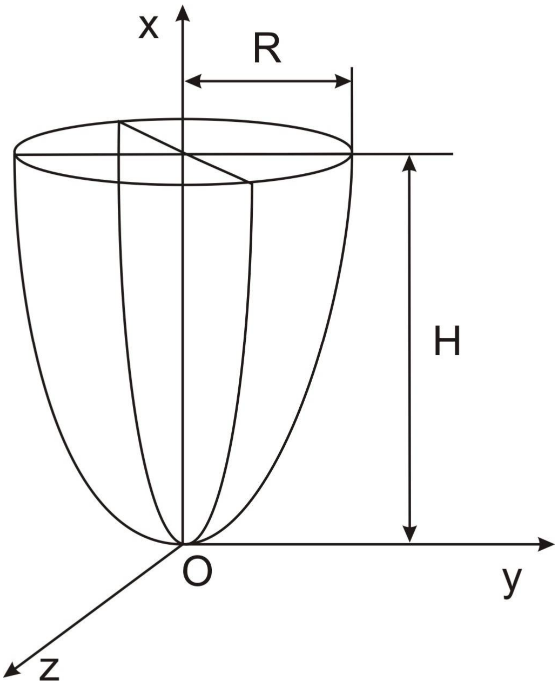
$$=2\sqrt{2}\,\pi a^2\int\limits_0^{2\pi}2\sin^2\frac{t}{2}\sqrt{2\sin^2\frac{t}{2}}\,dt=8\pi a^2\int\limits_0^{2\pi}\sin^3\frac{t}{2}dt=$$

$$=8\pi a^2\int\limits_0^{2\pi}\sin^2\frac{t}{2}\sin\frac{t}{2}dt=-8\pi a^2\cdot 2\int\limits_0^{2\pi}\left(1-\cos^2\frac{t}{2}\right)d\left(\cos\frac{t}{2}\right)=-16\pi a^2\left.\left(\cos\frac{t}{2}-\frac{\cos^3\frac{t}{2}}{3}\right)\right|_0^{2\pi}=$$

$$=-16\pi a^2\left(\cos\pi-\frac{\cos^3\pi}{3}-\cos 0+\frac{\cos 0}{3}\right)=-16\pi a^2\left(-1+\frac{1}{3}-1+\frac{1}{3}\right)=\frac{64}{3}\pi a^2.$$

Приклад 7.26. Резервуар має форму параболоїда обертання, висота якого дорівнює H, а радіус основи R. Знайти місткість резервуара та площу його поверхні.

Розв'язання.



Виберемо систему координат так, як показано на рисунку. Місткість резервуара дорівнює об'єму тіла, одержаного від обертання навколо осі OX фігури, обмеженої параболою $y^2=\frac{R^2}{H}x$ і прямими $x=H$, $y=0$, тобто

$$V=\pi\int\limits_0^H y^2\,dx=\frac{\pi R^2}{H}\int\limits_0^H xdx=$$

$$\left.\frac{\pi R^2}{H}\frac{x^2}{2}\right|_0^H=\frac{\pi R^2H^2}{2H}=\frac{1}{2}\pi R^2H.$$

Площу поверхні знаходимо за формулою:

$$S=2\pi\int\limits_0^H y\sqrt{1+\left(y'\right)^2}\,dx.$$

$$y=\frac{R}{\sqrt{H}}\sqrt{x};\ y'=\frac{R}{\sqrt{H}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{R}{2\sqrt{Hx}}.$$

$$S=2\pi\int\limits_0^H\frac{R\sqrt{x}}{\sqrt{H}}\sqrt{1+\left(\frac{R}{2\sqrt{Hx}}\right)^2}dx=\frac{2\pi}{\sqrt{H}}R\int\limits_0^H\frac{\sqrt{x}\sqrt{4Hx+R^2}}{2\sqrt{Hx}}dx=$$

$$=\frac{\pi R}{H}\int\limits_0^H\sqrt{4Hx+R^2}\,dx=\frac{\pi R}{H}\cdot\frac{1}{4H}\int\limits_0^H\left(4Hx+R^2\right)^{\frac{1}{2}}d\left(4Hx+R^2\right)=$$

$$=\left.\frac{\pi R}{4H^2}\frac{\left(4Hx+R^2\right)^{\frac{3}{2}}}{3/2}\right|_0^H=\frac{\pi R}{6H^2}\left(\sqrt{\left(4H^2+R^2\right)^3}-R^3\right).$$

7.5. Застосування визначеного інтеграла до задач механіки та фізики

Загальна схема застосування визначеного інтеграла.

Нехай треба знайти деяку механічну чи фізичну величину Q, яка має певне значення на заданому відрізку $[a,b]$.

Припускається, що Q є адитивною величиною, тобто, якщо відрізок $[a,b]$ ділиться на частини, то величина Q складається із суми значень Q, що відповідають цим частинам.

Із умови задачі знаходять "елемент" dQ величини Q, яка відповідає "елементарному проміжку" $[x,x+dx]$, у вигляді $dQ=q(x)dx$, після цього, інтегруючи на відрізку $[a,b]$, одержують величину $Q=\int\limits_a^b q(x)dx$.

1. Статичні моменти і центр ваги плоскої фігури

Розглянемо криволінійну трапецію $aABb$, обмежену зверху графіком функції $y=f(x)$, де $y\geq 0$ із сталою поверхневою густиною ρ. Треба визначити статичні моменти $M_x\, i\, M_y$ трапеції відносно координатних осей і центр ваги. Візьмемо елементарний відрізок $[x,\, x+dx]$осі OX. У криволінійній трапеції виділимо елементарну смужку, яку наближено можна вважати прямокутником. Маса смужки dm дорівнює добутку густини ρ на площу служки ydx, тобто $dm=\rho ydx$.

Припускаємо, що ця маса зосереджена в центрі смужки, тобто в точці $P\left(x,\dfrac{y}{2}\right)$. Тоді, "елемент" статичного момента трапеції відносно осі OX одержиться, як добуток маси dm на ординату точки P, тобто $dM_x=dm\cdot\dfrac{y}{2}=\dfrac{1}{2}\rho y^2\,dx$. Аналогічно $dM_y=dm\cdot x=\rho xydx$.

Інтегруючи ці "елементи" на відрізку $[a,b]$, одержимо:

$$M_x=\frac{1}{2}\rho\int\limits_a^b y^2\,dx(1),\qquad M_y=\rho\int\limits_a^b xydx(2).$$

Визначимо координати $\xi,\,\eta$ центра ваги фігури. Відомо, що маса фігури обчислюється за формулою $m=\rho\int\limits_a^b y\,dx$, враховуючи формули (1) і (2),

одержимо: $$\xi=\frac{M_y}{m}=\frac{\int\limits_a^b xydx}{\int\limits_a^b ydx},\qquad \eta=\frac{M_x}{m}=\frac{\frac{1}{2}\int\limits_a^b y^2dx}{\int\limits_a^b y\,dx}$$

2. Шлях, пройдений точкою

Нехай точка рухається по прямій із змінною швидкістю V, яка є функцією від часу $t, V = f(t)$. Треба визначити шлях, пройдений точкою від моменту часу t_1 до моменту t_2. Беремо елементарний проміжок часу $[t, t+dt]$. За цей час точка пройде шлях $dS = vdt = f(t)dt$. Це і є елемент шляху.

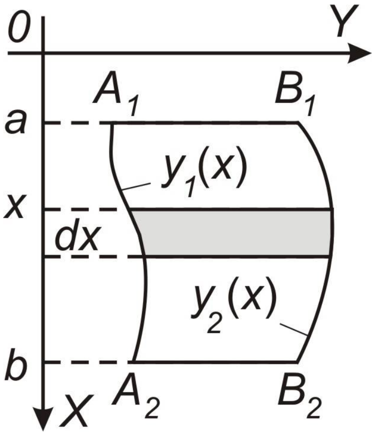
Інтегруючи на відрізку $[t_1 t_2]$, одержуємо величину шляху, пройденого точкою за час $[t_1, t_2]$.

$$S = \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt.$$

3. Робота сили

Нехай матеріальна точка рухається вздовж осі OX від точки $x = a$ до точки $x = b(a < b)$ під дією змінної сили $F = F(x)$, причому напрям сили співпадає з напрямом руху. Знайти роботу виконану силою на цьому переміщенні. Візьмемо елементарне переміщення $[x, x+dx]$.
Робота сили на цьому переміщенні $dA = F(x)dx$- це “елемент” роботи. Тепер проінтегруємо на відрізку $[a,b]$ і одержимо шукану роботу: $A = \int_a^b F(x)dx.$

4. Тиск рідини



Нехай в рідину вертикально занурено пластинку $A_1 B_1 B_2 A_2$ обмежену прямими $x = a, x = b$ і кривими $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$. Припускається, що система координат вибрана так, що вісь OY лежить на поверхні рідини. Треба визначити повний гідростатичний тиск P, що діє на кожну сторону пластинки. Візьмемо на проміжку $[a,b]$ елементарний відрізок $[x, x+dx]$.
Тиск рідини на цю смужку і буде “елементом” dP тиску на всю пластину $A_1 B_1 B_2 A_2$, для його обчислення використаємо закон Паскаля, за яким тиск рідини на площадку dS, розташовану на глибині x від поверхні, дорівнює вазі циліндричного стовпа рідини висотою x, основою якого є ця площадка $dP = \gamma dSx$, де $\gamma -$питома вага рідини, або враховуючи, що $dS = (y_2 - y_1)dx$, $dP = \gamma x(y_2 - y_1)dx$.

Інтегруючи на відрізку$[a,b]$, одержимо тиск рідини на всю фігуру:

$$P = \gamma \int_a^b x(y_2 - y_1)dx.$$

5. Кількість електрики

Нехай по провіднику йде струм змінної сили $I = I(t)$, де $I(t) \geq 0$. Визначити кількість електрики Q, яка протікає через поперечний переріз провідника за проміжок часу $[t_1, t_2]\,(t_2 > t_1)$. Відомо, що для сталого струму I
$Q = I(t_2 - t_1)$.

Для визначення Q у випадку змінного струму скористаємося загальною схемою, тобто виділимо елементарний відрізок часу $[t, t+dt]$ і підрахуємо відповідний "елемент" кількості електрики dQ

$$dQ = I(t)dt,$$

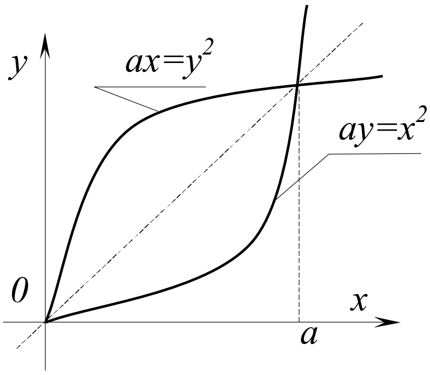
інтегруючи по t в межах від t_1 до t_2, одержимо:

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} I(t)dt \tag{1}$$

Зауваження. Якщо $I(t)$ на відрізку $[t_1, t_2]$ змінює знак (напрям струму змінюється упродовж даного часу), то інтеграл (1) дає різницю між кількістю електрики, яка пройшла через поперечний переріз провідника за час $(t_2 - t_1)$ в одну сторону, і кількістю електрики, яка пройшла за той же час протилежну сторону.

Приклад 7.27. Знайти координати центра маси плоскої фігури, обмеженої кривими $y^2 = ax \quad i \quad x^2 = ay(x \geq 0)$.

Розв'язання.



Координати центра маси (x_c, y_c) плоскої фігури, обмеженої кривими $y = f_1(x)$, і прямими $x = a$, $x = b$ обчислюються за формулами $x_c \cdot S = M_y$, $y_c \cdot S = M_x$, де $S-$ площа плоскої фігури, по якій рівномірно розподілена маса сталої густини ρ (якщо не оговорено його значення, то величину ρ переважно приймають за 1); $M_x, M_y -$статичні моменти плоскої фігури відносно осі OX, OY відповідно. Вони визначаються за формулами:

$$M_x = \frac{1}{2}\int_a^b \left[f_1^2(x) - f_2^2(x)\right]dx, \quad M_y = \int_a^b x \cdot \left[f_2(x) - f_1(x)\right]dx.$$

Якщо плоска фігура має вісь симетрії та рівномірну структуру по густині ρ, то центр маси знаходиться на цій осі.

Плоска фігура, обмежена вказаними кривими $y^2 = ax \; i \; x^2 = ay$ симетрична відносно бісектриси I-го координатного кута $(y = x)$, тому $x_c = y_c$.

Обчислимо статичний момент M_y і площу S, маючи на увазі, що

$$f_2(x)=\sqrt{ax},\ f_1(x)=\frac{x^2}{a}.$$

$$M_y=\int_0^a x\left(\sqrt{ax}-\frac{x^2}{a}\right)dx=\int_0^a\sqrt{a}\,x^{\frac{3}{2}}\,dx-\frac{1}{a}\int_0^a x^3\,dx=\sqrt{a}\,\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\Bigg|_0^a-\frac{1}{a}\cdot\frac{x^4}{4}\Bigg|_0^a=\frac{2}{5}a^3-\frac{1}{4}a^3=\frac{3}{20}a^3;$$

$$S=\int_0^a\left(\sqrt{ax}-\frac{x^2}{a}\right)dx=\sqrt{a}\,\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^a-\frac{x^3}{3a}\Bigg|_0^a=\frac{2}{3}a^2-\frac{1}{3}a^2=\frac{1}{3}a^2.$$

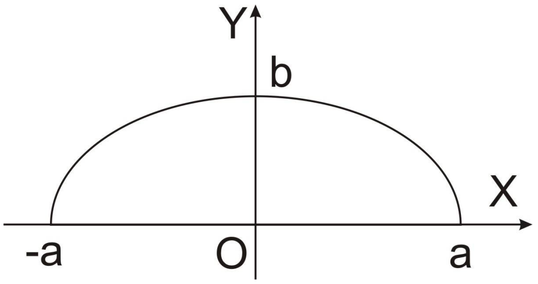
Тоді $x_c=y_c=\dfrac{M_y}{S}=\dfrac{3}{20}a^3:\dfrac{1}{3}a^2=\dfrac{9}{20}a.$

Таким чином, центр маси даної плоскої фігури знаходиться у точці $\left(\dfrac{9}{20}a;\dfrac{9}{20}a\right)$.

Приклад 7.28. Знайти статичний момент верхньої частини еліпса $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,$ відносно осі OX.

Розв'язання.

Статичний момент кривої відносно осі OX, знаходимо за формулою:



$$M_x=\int_a^b y\,dl$$

$$ydl=y\sqrt{1+\left(y^1\right)^2}\,dx=\sqrt{y^2+\left(yy^1\right)^2}\,dx,$$

оскільки $\dfrac{y^2}{b^2}=1-\dfrac{x^2}{a^2};$ то $y^2=b^2-\dfrac{b^2}{a^2}x^2$. Останню рівність продиференціюємо як функцію задану неявно: $2yy'=-\dfrac{2b^2}{a^2}x,\quad yy'=-\dfrac{b^2}{a^2}x,$ тоді

$$ydl=\sqrt{b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2+\left(-\frac{b^2}{a^2}x\right)^2}\,dx=\sqrt{b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2+\frac{b^4}{a^4}x^2}\,dx=\frac{b}{a}\sqrt{\frac{a^4-a^2x^2+b^2x^2}{a^2}}dx=$$

$$=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-\frac{\left(a^2-b^2\right)}{a^2}x^2}\,dx=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-\varepsilon^2x^2}\,dx,$$

де ε – ексцентриситет еліпса, $\varepsilon=\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}.$

Інтегруючи в межах від $-a$ до a, знаходимо

$$M_x=\frac{b}{a}\int_{-a}^a\sqrt{a^2-\varepsilon^2x^2}\,dx=\frac{2b}{a}\int_0^a\sqrt{a^2-\varepsilon^2x^2}\,dx=\frac{2b\varepsilon}{a}\int_0^a\sqrt{\left(\frac{a}{\varepsilon}\right)^2-x^2}\,dx.$$

Для обчислення даного інтеграла використаємо формулу:

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C$$

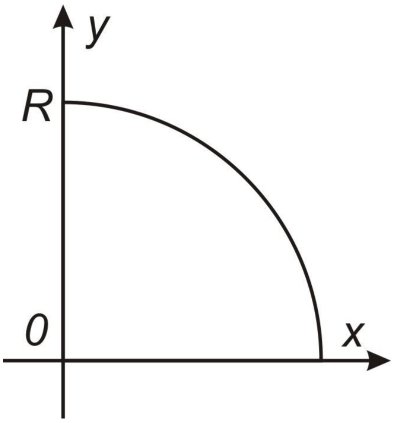
$$M_x=\frac{2b\varepsilon}{a}\left(\frac{x}{2}\sqrt{\left(\frac{a}{\varepsilon}\right)^2-x^2}+\frac{a^2}{2\varepsilon^2}\arcsin\frac{\varepsilon x}{a}\right)\Bigg|_0^a=\frac{2b\varepsilon}{a}\left(\frac{a}{2}\sqrt{\frac{a^2}{\varepsilon^2}-a^2}+\frac{a^2}{2\varepsilon^2}\arcsin\varepsilon\right)=$$

$$=ab\left(\sqrt{1-\varepsilon^2}+\frac{1}{\varepsilon}\arcsin\varepsilon\right).$$

У випадку кола, тобто при $a=b$, будемо мати $M_x=2a^2$, оскільки при цьому $\varepsilon=0$, а $\lim\limits_{\varepsilon\to0}\frac{\arcsin\varepsilon}{\varepsilon}=1$.

Приклад 7.29. Знайти центр маси кола $x^2+y^2=R^2$, розміщеного у І-й чверті декартової системи координат.

Розв'язання.



Запишемо рівняння кола в параметричній формі: $x=R\cos t, y=R\sin t\left(0\le t\le\frac{\pi}{2}\right)$.

Координати центра маси (x_c,y_c) дуги $x=x(t),\ y=y(t)$, де $\alpha\le t\le\beta$, обчислюється за формулами: $x_c=\frac{M_y}{l},\ y_c=\frac{M_x}{l}$. Статичні моменти дуги лінії $M_{x,}M_y$ за умови, що густина і маса рівномірно розподілені по довжині лінії $(\rho=1)$, обчислюється за формулами:

$$M_x=\int\limits_\alpha^\beta y(t)\sqrt{\left(x_t^{'}\right)^2+\left(y_t^{'}\right)^2}\,dt,\quad M_y=\int\limits_\alpha^\beta x(t)\sqrt{\left(x_t^{'}\right)^2+\left(y_t^{'}\right)^2}\,dt.$$

Довжину дуги визначимо за формулою: $l=\int\limits_a^b\sqrt{\left(x_t^{'}\right)^2+\left(y_t\right)^2}\,dt$, тобто

$$l=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(-R\sin t)^2+(R\cos t)^2}\,dt=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}R\,dt=\frac{\pi R}{2}.$$

$$M_x=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}R\sin t\sqrt{(-R\sin t)^2+(R\cos t)^2}\,dt=-R^2\cos t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=R^2,$$

$$M_y=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}R\cos t\sqrt{(-R\sin t)^2+(R\cos t)^2}\,dt=R^2\sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=R^2.$$

У результаті одержимо $x_c=R^2:\frac{\pi R}{2}=\frac{2R}{\pi},\quad y_c=R^2:\frac{\pi R}{2}=\frac{2R}{\pi}$. Центр маси дуги кола знаходиться в точці з координатами $\left(\frac{2R}{\pi};\frac{2R}{\pi}\right)$.

Приклад 7.30. Для побудови дерев'яних мостів використовують круглі дерев'яні бруси, обтесані на два канти. Визначити момент інерції подібного перерізу відносно горизонтальної середньої лінії.

Розв'язання.

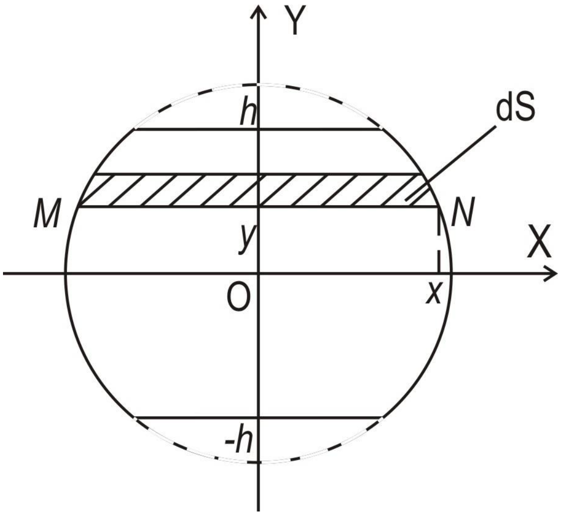
Розташуємо систему координат, як показано на рисунку. Тоді $dI_x = y^2 dS$, де $dS = MNdy = 2\sqrt{R^2 - y^2}\ dy$. Звідки $I_x = 2\int\limits_{-h}^{h} y^2\sqrt{R^2 - y^2}\ dy = 4\int\limits_{0}^{h} y^2\sqrt{R^2 - y^2}\ dy.$

Для обчислення даного інтеграла зробимо підставку: $y = R\sin t,\ dy = R\cos t\,dt,$ при цьому змінюються межі інтегрування.

Якщо $y = 0$, то $t_1 = 0$.

Якщо $y = h$, то

$$h = R\sin t,\ \ \sin t = \frac{h}{R},\ t_2 = \arcsin\frac{h}{R}.$$



$$I_x = 4\int\limits_{0}^{\arcsin\frac{h}{R}} R^2\sin^2 t\sqrt{R^2 - R^2\sin^2 t}\ R\cos t dt =$$

$$= 4R^4\int\limits_{0}^{\arcsin\frac{h}{R}} \sin^2 t\cos^2 t dt = R^4\int\limits_{0}^{\arcsin\frac{h}{R}} \sin^2 2t\,dt =$$

$$\frac{R^4}{2}\int\limits_{0}^{\arcsin\frac{h}{R}}(1 - \cos 4t)dt = \frac{R^4}{2}\left(t - \frac{1}{4}\sin 4t\right)\Bigg|_0^{\arcsin\frac{h}{R}} = \frac{R^4}{2}\left(\arcsin\frac{h}{R} - \frac{1}{4}\sin 4\left(\arcsin\frac{h}{R}\right)\right) =$$

$$\frac{R^4}{2}\left(\arcsin\frac{h}{R} - \frac{1}{4}2\sin 2\left(\arcsin\frac{h}{R}\right)\cos 2\left(\arcsin\frac{h}{R}\right)\right) =$$

$$= \frac{R^4}{2}\left(\arcsin\frac{h}{R} - \frac{1}{2}\cdot 2\sin\left(\arcsin\frac{h}{R}\right)\cos\left(\arcsin\frac{h}{R}\right)\cdot\left(\cos^2\left(\arcsin\frac{h}{R}\right) - \sin^2\left(arc\sin\frac{h}{R}\right)\right)\right) =$$

$$= \frac{R^4}{2}\left(\arcsin\frac{h}{R} - \frac{h}{R}\cdot\sqrt{1 - \frac{h^2}{R^2}}\left(1 - \frac{h^2}{R^2} - \frac{h^2}{R^2}\right)\right) =$$

$$= \frac{R^4}{2}\left(\arcsin\frac{h}{R} + \frac{h}{R}\left(\frac{2h^2 - R^2}{R^2}\ \frac{\sqrt{R^2 - h^2}}{R}\right)\right) = \frac{R^4}{2}arscin\frac{h}{R} + \frac{h}{2}\left(2h^2 - R^2\right)\sqrt{R^2 - h^2}.$$

Тут, використано формули:

$\sin 2x = 2\sin x\cos x,\ \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x,\ \sin(\arcsin x) = x,\ \cos(\arccos x) = x,$

а також $\arcsin x = \arccos\sqrt{1 - x^2}$.

Зокрема, при $h = R$, одержимо момент інерції круга відносно одного з діаметрів $I_x = \dfrac{\pi R^4}{4}$.

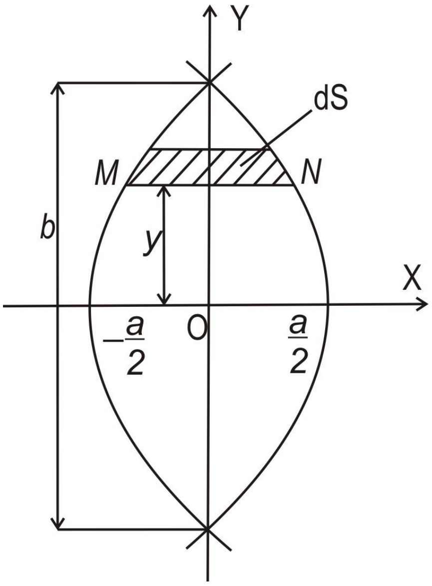
Приклад 7.31. Визначити момент інерції відносно осі OX, фігури обмеженої двома параболами із вказаними на рисунку розмірами (таку форму іноді надають перерізу стержнів в конструкціях блоків літаків, щоб вони добре розрізали повітря). Рівняння лівої параболи:

$y^2=\frac{b^2}{2a}\left(x+\frac{a}{2}\right)$, рівняння правої параболи: $y^2=\frac{b^2}{2a}\left(\frac{a}{2}-x\right)$.

Розв'язання.

Розмістимо систему координат так, як показано на рисунку.

Для виділеної смуги момент інерції дорівнює:



$dI_x=y^2dS=y^2\left|MN\right|dy$, де

$$\left|MN\right|=x_2-x_1=2\left(\frac{a}{2}-\frac{2ay^2}{b^2}\right)=a-\frac{4a}{b^2}y^2,$$

отже, $I_x=\int\limits_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}y^2\left(a-\frac{4a}{b^2}y^2\right)dy=$

$$=2\int\limits_0^{\frac{b}{2}}\left(ay^2-\frac{4a}{b^2}y^4\right)dy=2\left(a\frac{y^3}{3}-\frac{4a}{b^2}\frac{y^5}{5}\right)\Bigg|_0^{\frac{b}{2}}=$$

$$2a\left(\frac{b^3}{3\cdot 8}-\frac{4b^5}{5b^2\cdot 32}\right)=2a\left(\frac{b^3}{24}-\frac{b^3}{40}\right)=\frac{2a\cdot 2b^3}{120}=\frac{ab^3}{30}.$$

Приклад 7.32. Обчислити роботу, яку виконує підйомний кран при піднятті тіла масою m з поверхні Землі, радіус якої дорівнює R, на висоту H.

Розв'язання.

У даному випадку робота виконується під дією сили всесвітнього тяжіння $F=\kappa\frac{m\cdot M}{r^2}$, де M – маса Землі, r – відстань тіла маси m від центра Землі, κ – гравітаційна стала.

Оскільки на поверхні Землі при $(r=R)$ $F=mq$, то можна записати:

$mq=\kappa\frac{mM}{R^2}$, звідки знаходимо $\kappa M=qR^2$, а тому $F=mq\frac{R^2}{r^2}$.

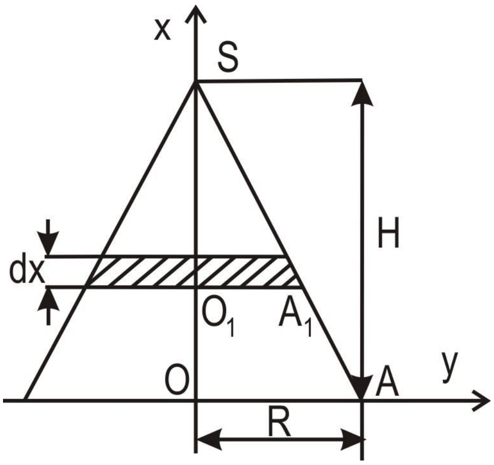
Обчислимо роботу

$$A=\int\limits_R^{R+H}F\,dr=\int\limits_R^{R+H}mqR^2\cdot\frac{1}{r^2}dr=mqR^2\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_R^{R+H}=mqR^2\left(\frac{1}{R+H}+\frac{1}{R}\right)=$$

$$mqR^2\left(\frac{-R+R+H}{R(R+H)}\right)=mqR\cdot\frac{H}{R+H}.$$

Приклад 7.33. Яку роботу треба виконати, щоб насипати купу піска конічної форми, радіус основи якої дорівнює $R(м)$, а висота $H(м)$?

Розв'язання.



Виберемо систему координат так, як показано на рисунку. Площинами, паралельними основі конуса, виділимо в конусі на висоті x елементарний шар товщиною dx. Запишемо наближений вираз для роботи, яку треба виконати, щоб заповнити виділений шар піском. Як відомо з фізики, ця робота визначається співвідношенням $dA = xdF = xqdm = xq\rho\, dV$, де $\rho -$густина піску.

Об'єм виділеного шару наближено дорівнює об'єму кругового циліндра з висотою dx і радіусом основи $y(x)$, тобто $dV \approx \pi y^2 dx$, при цьому $dA \approx \pi q\rho y^2 xdx$. З подібності трикутників AOS і A_1O_1S, маємо $\frac{y}{R} = \frac{H-x}{H}$, звідки $y = \frac{R}{H}(H-x)$. Підставимо знайдене значення y у співвідношенні для dA, одержимо:

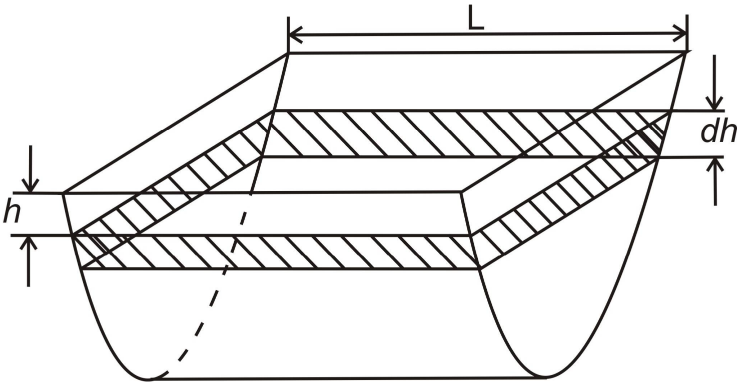
$$dA \approx \pi q\rho \frac{R^2}{H^2} x(H-x)^2 dx.$$

Інтегруючи в межах від 0 до H, знайдемо роботу:

$$A = \pi q\rho \frac{R^2}{H^2} \int_0^H x(H-x)^2 dx = \frac{1}{12}\pi q\rho R^2 H^2.$$

Приклад 7.34. Обчислити роботу, яку необхідно виконати, щоб викачати воду із ємності, яка має форму напівциліндра, довжина якого L, а радіус R.

Розв'язання.



Виділимо в ємкості на глибині h шар води товщиною dh. Довжина цього шару дорівнює L, ширина $2\sqrt{R^2-h^2}$, об'єм $dV = 2L\sqrt{R^2-h^2}\ dh$.

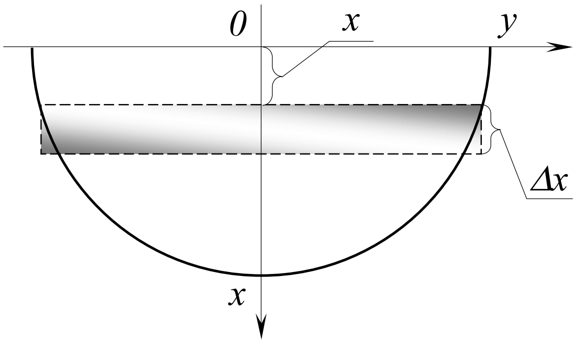
Елементарна робота, яку виконує сила тяжіння при переміщенні об'єму води dV на відстань h, $dA = 2\rho qhL\sqrt{R^2-h^2}\ dh$.

Інтегруючи в межах від 0 до R, одержимо:

$$A = 2\rho qL\int_0^R h\sqrt{R^2-h^2}\ dh = -\frac{2}{3}\rho qL\sqrt{\left(R^2-h^2\right)^3}\Bigg|_0^R = \frac{2}{3}\rho qLR^3.$$

Приклад 7.35. Обчислити роботу, яку необхідно витратити на викачування води із котла, який має форму півкулі з радіусом R.

Розв'язання.



Робота, необхідна для підняття тіла масою m на висоту h, рівна $m\cdot g\cdot h$, де $g-$прискорення вільного падіння тіла. Різні шари води знаходяться на різній глибині і, звичайно, робота по їх викачуванню буде різною. Підрахуємо роботу ΔA, необхідну для підняття шару води висотою Δx, який знаходиться на глибині x від вільної поверхні води.

Наближено будемо вважати шар води циліндричним тілом, радіус якого y, висота Δx, густина $\gamma = I$. Тоді $\Delta A \approx \Delta m\cdot g\cdot h = \pi\cdot y^2\cdot\gamma\cdot g\cdot x\cdot\Delta x$.

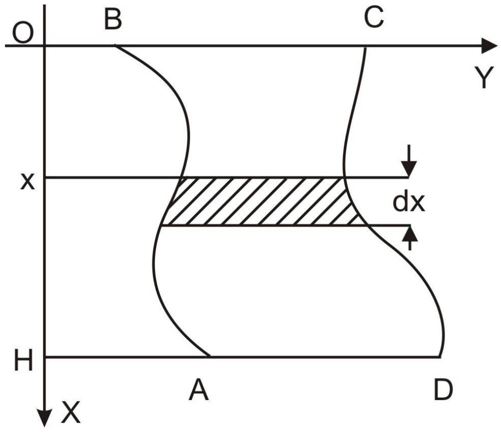
Радіус елементарного шару y знайдемо з рівняння кола, отриманого в перерізі $-y^2 = R^2 + x^2$. Тому $\Delta A \approx \pi\cdot\gamma\cdot g\cdot\left(R^2 - x^2\right)\cdot x\cdot\Delta x$. Вся робота A, яку необхідно виконати для відкачки води, буде дорівнювати:

$$A=\int_0^R \pi\cdot\gamma\cdot g\cdot\left(R^2x-x^3\right)dx=\pi\cdot\gamma\cdot g\left(\frac{R^2x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^R=\pi\cdot\gamma\cdot g\cdot\left(\frac{R^4}{2}-\frac{R^4}{4}\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\pi\cdot\gamma\cdot g\cdot R^4.$$

Приклад 7.36. Знайти силу тиску води на вертикальну греблю, яка має форму фігури $ABCD$, якщо глибина водосховища біля греблі дорівнює H.

Розв'язання.



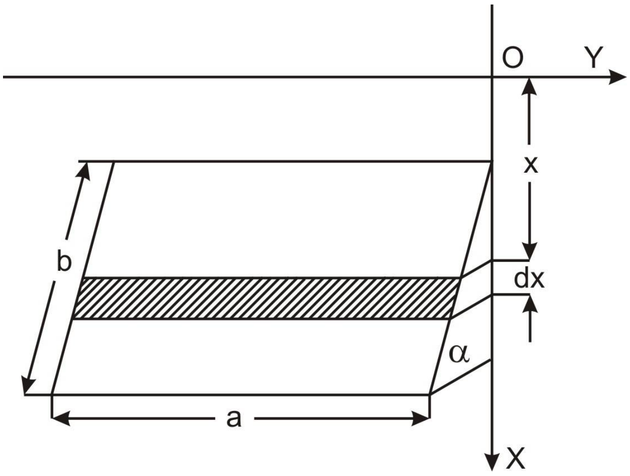
Виберемо систему координат так, щоб вісь OY лежала на поверхні води вздовж греблі, а вісь OX була направлена вертикально вниз. У вибраній системі лінії AB і CD визначаються рівняннями $y_1 = f_1\left(x\right)$ та $y_2 = f_2\left(x\right)$.

Виділимо горизонтальними прямими, проведеними на глибині x і $x+dx$, елементарну смугу, площа якої дорівнює $dS=\left(y_2-y_1\right)dx$. На цю смугу, за законом Паскаля, діє сила тиску води dp, яка дорівнює вазі циліндричного стовпа води висотою x, основою якого є ця смуга, тобто $dP=\rho q\,xdS=\rho qx\left(y_2-y_1\right)dx$.

Інтегруючи одержане співвідношення в межах від 0 до H, знайдемо силу тиску води на всю греблю: $P=\rho q\int_0^H x\left(y_2-y_1\right)dx$.

Приклад 7.37. Визначити силу тиску води на одну із сторін прямокутної пластини ширина якої b, а довжина $-a\left(a>b\right)$, нахиленої до поверхні води під кутом α, причому більша верхня сторона пластинки розташована горизонтально на глибині H.

Розв'язання.



Виділимо на глибині x елементарну смугу, паралельну основі a. Площа цієї смуги $dS=\dfrac{adx}{\sin\alpha}$. Величина сили тиску на смугу $dp=\dfrac{\rho qa}{\sin\alpha}xdx$. Інтегруючи в межах від h до $h+b\sin\alpha$, одержимо:

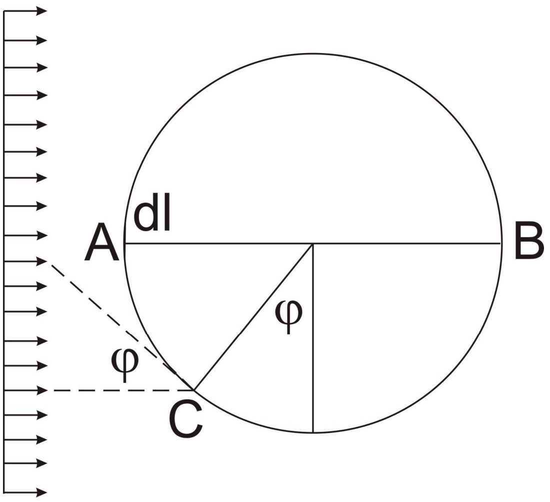
$$P=\frac{\rho qa}{\sin\alpha}\int\limits_{h}^{h+b\sin\alpha}xdx=\frac{\rho qa}{\sin\alpha}\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_{h}^{h+b\sin\alpha}=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\rho qa}{\sin\alpha}\left(\left(h+b\sin\alpha\right)^2-h^2\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\rho qa}{\sin\alpha}\left(h^2+2bh\sin\alpha+b^2\sin^2\alpha-h^2\right)=\frac{1}{2}\rho qab\left(2h+b\sin\alpha\right).$$

Приклад 7.38. Визначити силу тиску вітру на башту, яка має форму кругового циліндра, якщо її висота рівна $H\left(м\right)$, радіус основи $R\left(м\right)$ і тиск вітру на площадку в $1м^2$, розташовано перпендикулярно до напрямку вітру, дорівнює $\sigma\left(H\!\!\diagup\!_{м^2}\right)$.

Розв'язання.

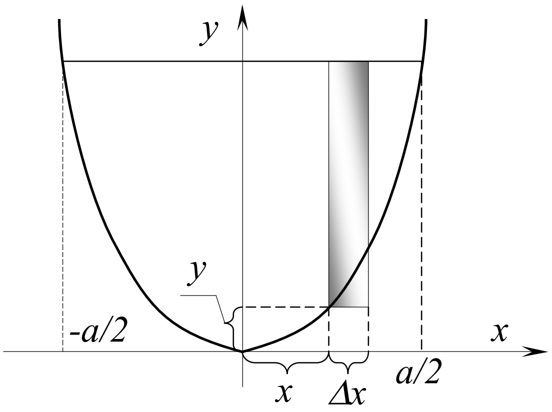


Зобразимо поперечний переріз башти у вигляді круга з радіусом R, діаметр AB якого паралельний напряму вітру. Вертикальна смуга башти, яка має в основі елемент дуги dl, який знаходиться в точці A, розташована перпендикулярно до напряму вітру, тому на неї діє нормальна сила тиску $dP_n=\sigma Hdl$.

На таку смугу з основою dl, розташовану в точці C під кутом φ до напряму вітру, діє нормальна сила тиску, яка дорівнює проекції сили dP_n на напрямок, перпендикулярний до смуги Hdl, тобто рівна $\sigma H\sin\varphi dl$. Цю нормальну силу тиску можна розкласти на дві складові: за напрямом вітру і перпендикулярно до нього.

Приклад 7.39. Знайти кінетичну енергію пластинки, яка має форму параболічного сегмента і обертається навколо осі параболи із постійною швидкістю ω. Основа сегмента a, висота h, товщина l, густина матеріалу γ.

Розв'язання.



Кінетична енергія тіла, яке обертається навколо деякої осі з кутовою швидкістю ω, визначається за формулою: $K = \frac{1}{2} I\omega^2$, де $I -$ момент інерції тіла відносно осі обертання.

На відстані x від осі обертання (у даному випадку вісь OY) виділимо смугу шириною Δx і приймемо її форму за прямокутну. Момент інерції ΔI цієї елементарної смужки буде дорівнюватиме $\Delta I \approx \Delta m \cdot x^2$, де $\Delta m -$ елементарна маса смужки шириною Δx, висотою $(h-y)$ і товщиною l. Тому: $\Delta m \approx (h-y) \cdot l \cdot \gamma \cdot \Delta x.$

Для визначення y складемо рівняння параболи, симетричної відносно осі $OY\left(x^2 = 2py\right)$, яка проходить через точку $\left(\frac{a}{2}; h\right)$, тобто $\frac{a^2}{4} = 2ph.$ Звідки одержимо: $2p = \frac{a^2}{4h} i\ x^2 = \frac{a^2}{4h} y$, або $y = \frac{4hx^2}{a^2}$, тоді

$$\Delta m = \left(h - \frac{4hx^2}{a^2}\right) \cdot l \cdot \gamma \cdot \Delta x = \frac{hl\gamma}{a^2}\left(a^2 - 4x^2\right) \cdot \Delta x.$$

Кінетичну енергію смужки визначимо як:

$$\Delta K \approx \frac{1}{2} \cdot \frac{\omega^2}{a^2} \cdot h \cdot \gamma \cdot l \cdot \left(a^2 - 4x^2\right) \cdot x^2 \cdot \Delta x,$$

а кінетичну енергію всього параболічного сегмента як:

$$K = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{1}{2} \cdot \frac{\omega^2}{a^2} h\gamma l \cdot \left(a^2 - 4x^2\right) x^2\, dx = \frac{1}{2a^2} \cdot \omega^2 h\gamma l \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left(a^2 x^2 - 4x^4\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2a^2} \cdot \omega^2 h\gamma l \cdot \left(\frac{a^2 x^3}{3} - \frac{4x^5}{5}\right)\Bigg|_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} = \frac{1}{2a^2} \cdot \omega^2 h\gamma l \cdot \left(\frac{2a^5}{24} - 2\frac{4a^5}{5 \cdot 32}\right) =$$

$$= \frac{1}{a^2} \cdot \omega^2 h\gamma l a^5 \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{40}\right) = \frac{1}{60} \cdot \omega^2 h\gamma l a^3; \quad K = \frac{1}{60} \cdot \omega^2 h\gamma l a^3.$$

Приклад 7.40. У тонкій вертикальній стінці призматичного резервуара, наповненого водою, зроблено прямокутний отвір, горизонтальні краї якого знаходяться на відстанях $h_0\, i\; h > h_0$ від рівня води, а ширина дорівнює *b*. Знайти розхід води через цей отвір, якщо рівень води в резервуарі підтримується на сталій висоті.

Розв'язання.

Розхід води Q через отвір в резервуарі дорівнює добутку площі w отвору на швидкість витоку v, тобто $Q = wv$.

За законом Торрічеллі, швидкість витоку води через отвір в резервуарі виражається формулою: $v = \sqrt{2qx}$, де x – відстань отвору від поверхні води.

Виділимо на прямокутнику, який зображає отвір, горизонтальну смугу шириною dx, віддалену від поверхні води на відстані x. Площа цієї смуги дорівнює в dx, швидкість витоку води через нього $\sqrt{2qx}$. Елементарний розхід води через виділену смугу $dQ = b\sqrt{2qx}\,dx$.

Інтегруючи в межах від h_0 до h, одержимо розхід води Q, тобто кількість води, яка витікає через отвір за 1с:

$$Q = b\sqrt{2q}\int_{h_0}^{h}\sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}b\sqrt{2q}\,x^{\frac{3}{2}}\Bigg|_{h_0}^{h} = \frac{2}{3}b\sqrt{2q}\left(h^{\frac{3}{2}} - h_0^{\frac{3}{2}}\right).$$

Експериментально встановлено, що фактичний розхід менший обчисленого за одержаною формулою. Це зменшення обумовлено наявністю внутрішнього тертя рідини і стиском струменю. Щоб врахувати вплив вказаних факторів вводимо деякий емпіричний коефіцієнт μ, і формулу для розходу записуємо у вигляді $Q = \frac{2}{3}\mu b\sqrt{2q}\left(h^{\frac{3}{2}} - h_0^{\frac{3}{2}}\right)$.

При $h_0 = 0$ одержимо формулу для обчислення розходу води через прямокутний водозлив: $Q = \frac{2}{3}\mu b\sqrt{2q}\,h^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\mu bh\sqrt{2qh}$. Емпіричний коефіцієнт μ для води приймаємо рівним 0,62.

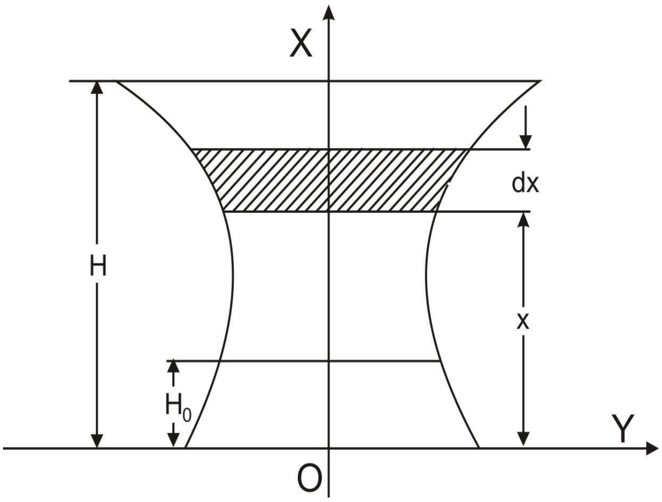
Приклад 7.41. Посудина, яка має форму деякої поверхні обертання з вертикальною віссю, наповнений водою до висоти H. У дні цієї посудини зроблено невеликий отвір, площа якого w. Визначити час, за який рівень води в посудині знизиться до H_0.

Розв'язання.

Виберемо в меридіальному перерізі посудини прямокутну систему координат. Приймемо вертикальну вісь посудини за вісь OX, а вісь OY розмістимо в площині основи. В цій системі твірна поверхні посудини буде визначена деяким рівнянням $y = f(x)$.

Приймемо, що приток води у посудину відсутній, а силами поверхневого натягу і різницею тиску повітря біля поверхні води і біля вихідного отвору знехтуємо.

В процесі витоку висота x рівня води у посудині залежить від часу t, тобто $x = x(t)$. В початковий момент часу $(t = 0)$ $x = H$. Площа поверхні рівня води у посудині є функцією від x і виражається співвідношенням: $S(x) = \pi y^2$.



Якщо рідина нев'язка, отвір, площа якого w, не має гострих країв і відношення $\frac{w}{S}$ мале, то швидкість v її витоку із посудини описується співвідношенням $V = \sqrt{2qx}$. Оскільки, в реальних умовах рідина має властивість в'язкості, яка викликає внутрішнє тертя і тертя біля стінок посудини, а також внаслідок звуження витікаючого струменя, дійсна швидкість витоку завжди виявляється меншою за теоретичну швидкість, тому приймемо $V = \mu\sqrt{2qh}$, де $\mu -$експериментально встановлений коефіцієнт витоку, який в залежності від вигляду отвору і густини рідини, приймає значення від 0,62 до 0,97.

Знаючи швидкість витоку v і площу отвору w, можна знайти об'єм рідини, яка витекла із посудини за час $dt : wv\,dt = w\mu\sqrt{2qx}\,dt$, крім цього, цей об'єм дорівнює - $S(x)dx$ (знак мінус береться тому, що $dx < 0$). Прирівнюючи ці вирази, одержимо: $w\mu\sqrt{2qx}\,dt = -S(x)dx$, звідки $dt = -\frac{1}{w\mu\sqrt{2q}} \cdot \frac{S(x)dx}{\sqrt{x}}$.

Інтегруючи обидві частини цієї рівності в межах від H до H_0, одержимо значення часу t, на протязі якого рівень води в посудині знизиться до H_0:

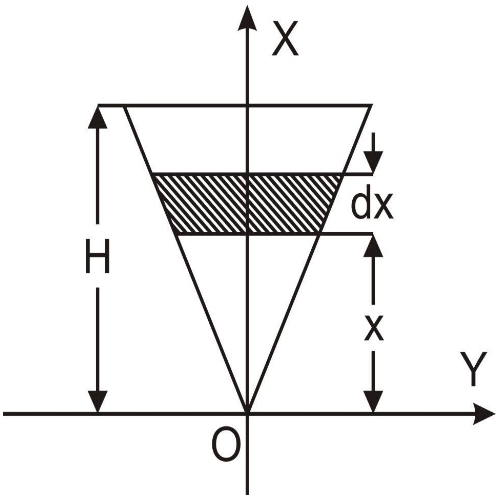
$$t = -\frac{1}{w\mu\sqrt{2q}} \int_{H}^{H_0} \frac{S(x)dx}{\sqrt{x}}.$$

Якщо зміна $S(x)$ незначна, то можна прийняти $S(x) = S = const$, при цьому для t одержимо вираз:

$$t = \frac{S}{w\mu\sqrt{2q}} \int_{H_0}^{H} x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{S}{w\mu\sqrt{2q}} \left. \frac{x^{\frac{1}{2}}}{1/2} \right|_{H_0}^{H} = \frac{2S}{w\mu\sqrt{2q}} \sqrt{x}\Big|_{H_0}^{H} = \frac{2S}{w\mu\sqrt{2q}}\left(\sqrt{H} - \sqrt{H_0}\right).$$

Приклад 7.42. Визначити видовження важливого стержня конічної форми, прикріпленого основою і спрямованого вершиною вниз, якщо радіус основи дорівнює R, висота конуса H а питома вага γ.

Розв'язання.



Стержень видовжується під дією сили власної ваги. За законом Гука відносне видовження ε стержня пропорційне напруженню сили σ у відповідному поперечному перерізі, тобто $\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$, де $E -$модуль Юнга.

Розглянемо поперечний переріз стержня, який розташований на відстані x від вершини $(0 < x < H)$ і являє собою круг, позначимо радіус цього круга через r. Вага кругового конуса радіус основи якого r, а висота x, дорівнює величині $\frac{\pi r^2 x\gamma}{3}$, напруження сили σ в цьому поперечному перерізі дорівнює: $\sigma = \frac{\pi r^2 x\gamma}{3} : \pi r^2 = \frac{x\gamma}{3}$.

Позначимо через Δdx видовження елемента стержня довжиною dx; воно дорівнює: $\Delta dx = \varepsilon dx = \frac{\gamma x}{3E} dx$.

Повне видовження обчислюємо за допомогою інтеграла:

$$\Delta H = \int_0^H \Delta dx = \Delta \int_0^H dx = \frac{\gamma}{3E} \int_0^H x dx = \frac{\gamma}{3E} \frac{x^2}{2} \bigg|_0^H = \frac{\gamma H^2}{6E}.$$

Приклад 7.43. Два тіла почали рухатися по одній прямій в одному напрямі в один і той же час. Одне тіло рухалось із швидкістю $V_1 = 15t^2 + 6t\left({}^{м}\!/\!{}_{c}\right)$, друге – із швидкістю $V_2 = 6t\left({}^{м}\!/\!{}_{c}\right)$. Через скільки секунд відстань між ними дорівнюватиме 320м?

Розв'язання.

За формулою $S = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$ знайдемо шлях S_1, пройдений першим тілом за t секунд після початку руху: $S_1 = \int_0^t \left(25t^2 + 6t\right)dt = \left(15\frac{t^3}{3} + 6\frac{t^2}{2}\right)\bigg|_0^t = 5t^3 + 3t^2.$

Аналогічно обчислюємо шлях S_2, пройдений другим тілом за той самий час: $S_2 = \int_0^t 6t\,dt = 6\frac{t^2}{2}\bigg|_0^t = 3t^2.$

Через t секунд відстань між тілами дорівнюватиме $S_1 - S_2 = 5t^3 + 3t^2 - 3t^2 = 5t^3$, тоді час, за який відстань між тілами становитиме 320м, визначимо із умови $5t^3 = 320$, тобто $t = 4c$.

Приклад 7.44. Електровоз через t годин після відправлення мав прискорення $a(t) = 3t^2 - 42t + 80\left({}^{км}\!/_{год^2}\right)$. Визначити швидкість і відстань, пройдену електровозом від станції через годину після відправлення.

Розв'язання.

Нехай функція $S(t)$ описує рух електровоза, а $V(t)$ – його швидкість. Тоді, користуючись механічним змістом похідної і означенням первісної, розглядатимемо $S(t)$ як одну із первісних для $V(t)$, а $V(t)$ – для $a(t)$ на деякому проміжку зміни часу t. Оскільки за умовою задачі шукані величини потрібно обчислити за час від $t_1 = 0$ до $t_2 = 1$, то одержимо:

$$V = \int_0^1 a(t)dt = \int_0^1 \left(3t^2 - 42t + 80\right)dt = \left(t^3 - 21t^2 + 80t\right)\Big|_0^1 = 60\left({}^{км}\!/_{год}\right).$$

$$S = \int_0^1 v(t)dt = \int_0^1 \left(t^3 - 21t^2 + 80t\right)dt = \left(\frac{t^4}{4} - 21\frac{t^3}{3} + 80\frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{4} - 7 + 40 = 33{,}25(км).$$

Завдання для самостійної роботи

Задача №1

Упродовж 7с величина струму в провіднику змінювалася за законом $I = \left(3t^2 + 2t\right)$ ампер. Яка кількість електрики пройшла через провідник за цей час?

Відповідь: 392кл.

Задача №2

Теплоємність заліза при температурах від 0 до $200^\circ C$ визначається за формулою $C = 0{,}000142t + 0{,}1053$. Яка кількість теплоти необхідна для нагрівання 10 кг заліза, яке має температуру $20^\circ C$ до $100^\circ C$. Обчислити роботу виконану при нагріванні.

Вказівка. Теплоємністю тіла називається величина $C = \frac{dQ}{dt}$, де dQ – кількість теплоти, яка необхідна, для того, щоб нагріти одиницю маси тіла від температури t до температури $t + dt$. Робота, яка виконується при нагріванні тіла, дорівнює кількості затраченої теплоти помноженій на механічний еквівалент теплоти, який дорівнює 4,1868Дж.

Відповідь: $Q \approx 38{,}06$ кДж; $A \approx 381{,}033$ кДж.

Задача №3

Однорідний стержень висить вертикально. Його довжина L, площа поперечного перерізу Q, маса m. Визначити розтяг стержня під дією сили ваги, якщо модуль пружності матеріалу стержня дорівнює E.

Відповідь: $\lambda = \frac{mqL}{2EQ}$.

Задача №4

Знайти масу стержня довжина якого $L = 100см$, якщо лінійна густина стержня на віддалі x $см$ від одного із його кінців буде дорівнювати $2 + 0{,}001x^2 \left(Г/см\right)$.

Відповідь: $m \approx 533{,}33г$.

Задача №5

Два тіла почали рухатися по прямій в один і той же момент із одної точки і в одному і тому ж напрямку. Одне тіло рухається зі швидкістю $V = \left(6t^2 + 4t\right)$, друге – зі швидкістю $V = 4t$. Через скільки секунд віддаль між ними буде дорівнювати 250м?

Відповідь: 5с.

Задача №6

Нескінченна балка лежить на пружній основі і прогинається під дією сили $\vec{P}$. В системі координат, вісь OX, яка співпадає з початковим положенням осі балки, а вісь OY проходить через точку прикладання сили і направлена вниз, права частина зігнутої осі балки визначається рівнянням $y = \frac{\alpha P}{2k}\exp\left(-\alpha x\right)\left(\cos\alpha x + \sin\alpha x\right),\ x > 0,$ де $\alpha,\ k -$деякі сталі. Обчислити потенціальну енергію пружної деформації за формулою $W = EI\int\limits_0^{+\infty}\left(y''\right)^2 dx,$ де $E -$модуль пружності, $I -$момент інерції поперечного перерізу.

Відповідь: $W = \frac{1}{4k^2}EIP^2\alpha^5$.

Задача №7

Під час усталеного ламінарного (шарового) витоку рідини через трубу круглого перерізу радіуса R швидкість течії дорівнює V в точці, яка знаходиться на віддалі r від осі труби, задається формулою: $V = \frac{p}{4\mu L}\left(R^2 - r^2\right)$, де $p -$різниця тисків рідини на кінцях труби, $\mu -$динамічний коефіцієнт в'язкості, $L -$довжина труби. Визначити розхід рідини Q через поперечний переріз труби.

Відповідь: $Q = \frac{\pi pR^4}{8\mu L}$.

Задача №8

Телеграфний дріт підвішено так, що його кінці прикріплені в точках A і B, які знаходяться на однаковій висоті на віддалі 50м. Обчислити довжину дроту, якщо він набуває форми ланцюгової лінії.

Відповідь: $l = 2a\,sh\frac{25}{a}.$

Задача №9

Знайти роботу, затрачену на викачування води з конічної посудини, з горизонтальною основою, яка розташована нижче вершини, якщо радіус основи дорівнює r, а висота h.

Відповідь: $A = \frac{1}{4}\pi\rho q r^2 h^2.$

Задача №10

Із циліндричної цистерни викачується рідина. Яку роботу треба на це затратити, якщо довжина цистерни дорівнює b, діаметр d.?

Відповідь: $A = \frac{1}{8}\pi\rho q b d^3.$

Задача №11

Підйомним краном за допомогою каната, закріпленого до вершини, із води піднімається вантаж конічної форми. Яку роботу затратить підйомний кран на повне піднімання вантажу із води, якщо вершина конуса знаходиться на поверхні води? Радіус основи конуса 1м, висота 3м, густина $2{,}5\ {}^{г}\!/_{см^3}$.

Вказівка: В цій задачі $P(y) = 14700\pi + \frac{9800}{27}\pi y^3\ H.$

Відповідь: $A = 51450\pi\ Дж.$

Задача №12

Чавунний прямий конус висотою 40см і радіусом основи 40см знаходиться на дні басейна, який до країв заповнений нафтовим маслом.

Знайти роботу, яку треба виконати при піднімання цього конуса із басейну, якщо густина чавуна $\rho_1 = 7{,}22\ {}^{г}\!/_{см^3}$, а густина нафтового масла дорівнює $\rho_2 = 0{,}89\ {}^{г}\!/_{см^3}$.

Вказівка: Тут $P(y)$ дорівнює вазі конуса без ваги підводної нафтової маси, яка витіснена частиною конуса тобто $P(y) = \frac{1}{3}\pi \cdot 40^3 \rho_2 q - \left(\frac{1}{3}\pi \cdot 40^3 - \frac{1}{3}\pi y^3\right)\rho_2 q$ дин.

Відповідь: $A = 547{,}8\pi$ Дж.

Задача №13

Циліндричний балон із діаметром 24см і довжиною 80см наповнений газом під тиском 2кПа. Яку роботу треба виконати при ізотермічному стиску газу до вдвічі меншого об'єму?
Відповідь: $A \approx 50,7$ Дж.

Задача №14

В рідину з густиною ρ занурено трикутну пластинку вершиною вверх. Знайти тиск рідини на пластинку, якщо основа трикутника дорівнює b, а висота $-h$. Вершина трикутника розташована на поверхні.

Відповідь: $P = \frac{1}{3}\rho q a h^2$.

Задача №15

Знайти тиск бензину, який знаходиться в циліндричному баці із висотою $h = 4м$ і радіусом $r = 2м \left(\rho = 900 {}^{кг}\!/\!{}_{м^3}\right)$, на стінки бака на кожному метрі глибини.

Відповідь: $P_1 = 17.64\pi\ кH$, $P_2 = 70.56\pi\ кH$, $P_3 = 158.76\pi\ кH$, $P_4 = 282.24\pi\ кH$.

Задача №16

В рідину, із густиною ρ занурена кругла пластинка діаметра α, яка дотикається поверхні рідини. Знайти тиск рідини на пластинку.

Відповідь: $P = \frac{1}{8}\rho q \pi d^3$.

Задача №17

Обчислити роботу, яку треба затратити, щоб викачати воду із ями, глибиною 6м, а основою 2м.
Відповідь: $A \approx 706$ кДж.

Задача №18

Обчислити роботу, яку необхідно затратити, щоб викачати воду із резервуара, який має напівсферичну форму із радіусом R.

Відповідь: $A = \frac{1}{4}\pi\rho q R^4$.

Задача №19

Котел має форму параболоїда обертання із радіусом основи R і глибиною H. Обчислити роботу, яку необхідно виконати, щоб викачати із нього воду.

Відповідь: $A = \frac{1}{6}\pi\rho q R^2 H^2$.

Задача №20

Вертикальна гребля має форму рівнобедреної трапеції. Обчислити силу тиску води на греблю, якщо відомо, що її верхня основа $a = 70м,$ нижня $b = 50м,$ висота $H = 20м.$

Відповідь: $P \approx 11{,}3 \cdot 10^4 \,кH.$

Задача №21

Вертикальна гребля має форму напівкруга, діаметр якого $d = 40м$ співпадає із рівнем води. Обчислити силу тиску води на греблю.

Відповідь: $P \approx 5{,}3 \cdot 10^4 \,кH.$

Задача №22

Вертикальна гребля має форму трикутника, основа якого співпадає із рівнем води і дорівнює $b,$ а висота трикутника $H.$ Знайти силу тиску води на греблю. Обчислити значення сили тиску при $b = 50м \; і \; H = 20м.$

Відповідь: $P = \frac{1}{6}\rho q b H \approx 10^4 \,кH.$

Задача №23

Вертикальна гребля має форму параболічного сегмента із висотою $H = 12м$ і верхнею основою із довжиною $L = 30м,$ яка співпадає із рівнем води. Знайти силу тиску води на греблю.

Відповідь: $P \approx 1{,}1 \cdot 10^4 \,кH.$

Задача №24

Визначити силу тиску води на стінку посудини прямокутної форми, якщо основа цієї стінки дорівнює $b,$ а висота $H.$

Відповідь: $P = \frac{1}{2}\rho q a H^2.$

Задача №25

Водопровідна труба має діаметр 6см. Один із її кінців з'єднаний із баком, в якому рівень води на 100см вищий за верхній край труби, а другий закритий заслінкою. Знайти силу тиску води на заслінку.

Відповідь: $P \approx 28{,}5H.$

Задача №26

Шлюзовий засув, який має форму половини еліпса, відокремлений віссю $2b,$ знаходиться у вертикальному положенні так, що ця вісь лежить на поверхні води. Довжина зануреної півосі еліпса дорівнює $a.$ Визначити силу тиску води на засув.

Відповідь: $P = \frac{2}{3}\rho q a^2 b.$

Задача№27

Циліндричний бак наповнений маслом. Обчислити силу тиску масла на бічну поверхню бака, якщо висота його дорівнює $H = 0,06м$, а радіус основи $R = 0,03м$. Густина масла $\rho = 900 \,{}^{кг}\!/\!{}_{м^3}$.

Відповідь: $P \approx 3H$.

Задача №28

Знайти координати центра ваги круглої пластини із радіусом R і з круговим вирізом радіуса r, якщо віддаль між центрами пластини і виріза дорівнює c.

Відповідь: Початок координат розмістили в центрі пластини, а вісь OX направили через центр виріза. $x_c = \dfrac{r^2 c}{r^2 - R^2}$; $y_c = 0$.

Задача №29

Знайти координату x центра ваги сталевого кругового сектора із радіусом R і центральним кутом 2α.

Відповідь: $x_c = \dfrac{2}{3} R \dfrac{\sin\alpha}{\alpha}$.

Задача №30

Приймаючи, що густина морської води на глибині h *км* дорівнює $\gamma = e^{0,004h} \left({}^{кг}\!/\!{}_{м^3} \right)$, визначити центр ваги вертикального стовпа морської води висотою 5км.

Відповідь: Початок координат розташували у центрі основи вертикального стовпа морської води, тоді $x = 0$ *і* $y = \dfrac{\int_0^{5000} h e^{0,004h}\, dh}{\int_0^{5000} e^{0,004h}\, dh} = 4,75км$.

Задача №31

Знайти координату x центра ваги сталевої дуги AB радіуса R із центральним кутом 2α.

Відповідь: $x_c = \dfrac{1}{L}\int_A^B x dl = \dfrac{2R^2}{L}\sin\alpha$, де L – довжина дуги AB;

Задача №32

Відро циліндричної форми, наповнено маслом, було нахилено так, щоб намітилася половина його дна. Обчислити, скільки при цьому вилилося масла, якщо радіус відра дорівнює 1дм, а висота 3 дм.

Відповідь: $3\pi - 2 \approx 7{,}42$ дм^3.

Задача №33

Уздовж твірної циліндра з діаметром основи 6 см, по його поверхні вирізано канал поперечним перерізом якого є рівносторонній трикутник із стороною 0,5 см. Обчислити об’єм зрізаного матеріалу.

Відповідь: $V = \frac{\pi}{32}\left(12\sqrt{3} - 1\right) \approx 1{,}905\ см^3.$

Задача №34

Циліндричний котел із діаметром 48 см, обхоплений сталевою стрічкою, переріз якої являє собою напівеліпс. Велика вісь еліпса дорівнює 6 см і розташована на поверхні котла вздовж твірної, мала вісь дорівнює $\sqrt{6}$ *см.* Обчислити об’єм сталевої стрічки.

Відповідь: $V = 6\pi\left(6\pi\sqrt{6} + 1\right) \approx 888{,}46 см^3.$

Задача №35

Контури горизонтального перерізу стовбурів багатьох дерев маютьприблизно форму, обмежену кривими $\left(\frac{x}{a}\right)^m + \left(\frac{y}{b}\right)^n = 1,$ де $m, n -$ або додатні парні цілі числа, або додатні дроби із парним чисельником і непарним знаменником.

1) Знайти формулу для обчислення площ перерізів, обмежених цими кривими.

2) Розв’язати задачу при $m = \frac{4}{3},\ \ n = 4.$ Обчислити інтеграл із точністю до 10^{-2}.

Відповідь: 1) Задане рівняння являє собою замкнену криву, симетричну відносно обох осей. Крива лежить всередині прямокутника, утвореного прямими $x = \pm a,\ \ y = \pm b.$ Якщо $m < 1,\ n < 1,$ то крива лежить всередині ромба, який одержується, якщо з’єднати прямими середини сторін цього прямокутника. Параметричні рівняння кривої $x = a\cos^{\frac{2}{m}} t,\quad y = b\sin^{\frac{2}{n}} t.$ Площа

$$S = \frac{8ab}{m}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{2}{n}+1} t \cdot \cos^{\frac{2}{m}-1} t\, dt.$$

2) $S = 3ab\int_1^0 \sqrt{x\left(1 - x^2\right)}\, dx.$ Інтеграл в елементарних функціях не береться.

Задача №36

Ватерлінія невеликого судна має форму кривої, рівняння якої $x = 2 + 2t - \cos\frac{\pi t}{10}$; $y = 2\sin\frac{\pi t}{10}$, причому t змінюється від 0 до 10. Визначити площу перерізу, обмеженого ватерлінією.

Відповідь: $P = 4\frac{1}{6}$ га.

Задача №37

Відстань S, яку пролітає літак, визначається інтегралом $\int_1^q \frac{k}{x}dx$, де коефіцієнт k дорівнює роботі мотора $(b\ кгм)$ на 1 кг палива, а $q -$відношення навантаження в даний момент до початкового навантаження. Визначити S, якщо $k = 4000$, $q = 0,6$.

Відповідь: 2043,2 м.

Задача №38

Напруга на клемах електричного ланцюга дорівнює $U = 120\,B$. У ланцюг рівномірно вводиться опір із швидкістю 0,1 Ом за секунду, крім того, в ланцюг ввімкнено постійний опір $R_0 = 10$ Ом. Скільки кулонів електрики пройде через ланцюг упродовж двох хвилин ?

Відповідь: $1200\ln 2,2 \approx 946\ к$.

Задача №39

Яку роботу необхідно затратити, щоб насипати купу піска конічної форми з радіусом основи 1,2 м і висотою 1 м, якщо щільність піску $\gamma = 2\ ^{г}\!/_{см^3}$ і береться він з поверхні Землі ?

Відповідь: 7387 Дж.

Задача №40

Обчислити роботу, необхідну для викачування води з ями, глибина якої 6 м, а сторона квадратного перерізу дорівнює 2 м.

Відповідь: 706104 Дж.

Задача №41

Пружина розтягується на 0,02 м під дією сили 50 Н. Яку роботу слід затратити, щоб розтягнути її на 0,1 м?

Відповідь: 12,5 Дж.

Задача №42

Протягом 5с сила струму в провіднику змінювалась за законом $I(t) = 6t^2 + 3(A)$. Яка кількість електрики пройшла через провідник за цей час ?

Відповідь: 265 Кл.

Задача №43

Обчислити загальний тиск води на дно і стінки акваріума, який має форму прямокутного паралелепіпеда, якщо сторони його основи дорівнюють 0,9 м і 0,6м, а висота 0,4 м. Акваріум повністю заповнений водою.

Відповідь: $P = 863{,}02\,H$.

Задача №44

Кінець труби, занурений у рідину з густиною γ, закритий заслінкою. Визначити тиск на заслінку, якщо радіус труби r, а глибина її занурення h.

Відповідь: $P = \gamma q \pi r^2 h.$

Задача №45

Обчислити масу прямолінійного стержня, якщо його лінійна густина дорівнює $\gamma = 2l + 3\left(\frac{кг}{м}\right),\ 0 \le l \le 10.$

Відповідь: 130 кг.

Задача №46

Ліфт рухається з швидкістю $v = 4t + 3\left(\frac{м}{с}\right)$. На яку висоту він підніметься через 3 с після включення ?

Відповідь: 27м.

Задача №47

Тіло кинуте з початковою швидкістю $V_0 = 0$, падає на Землю із швидкістю $100\frac{м}{с}$. З якої висоти скинуто тіло, якщо опором повітря знехтувано ?

Відповідь: $V = V_0 + qt,\ \ h = 0{,}51км.$

Задача №48

Визначити статичний момент і момент інерції трикутника, основа якого а і висота h, відносно його основи.

Відповідь: $M_a = \dfrac{ah^2}{6},\ \ I_a = \dfrac{ah^3}{12}.$

Задача №49

В циліндричний стакан з водою встановлено параболоїд обертання вершиною вниз. Основа і висота параболоїда співпадають із основою і висотою циліндра. Знайти об’єм води, яка залишилася в стакані, якщо радіус основи r, а висота h.

Відповідь: $V = \dfrac{1}{2}\pi r^2 h.$

8. ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

8.1. Загальні поняття

Звичайним диференціальним рівнянням називається рівняння виду

$$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0, \tag{1}$$

яке зв'язує незалежну змінну x, шукану функцію $y = y(x)$ і її похідні $y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n)}(x)$ (наявність хоч би однієї похідної обов'язкова).

У звичайному диференціальному рівнянні шукана функція $y = y(x)$ є функція однієї незалежної змінної, а якщо шукана функція – функція двох і більше незалежних змінних, то будемо мати диференціальне рівняння з частинними похідними, які розглядати не будемо.

Простим диференціальним рівнянням являється рівняння $y' = f(x)$ (2), де $f(x)$ – відома неперервна на деякому інтервалі (a, b) функція, а $y = y(x)$ – шукана функція, яка визначається з рівняння (2) неоднозначно.

Порядком диференціального рівняння називається найвищий порядок похідної (або диференціала), яка входить у рівняння.

Розв`язком диференціального рівняння називають функцію $y = \varphi(x)$, яка визначена на інтервалі (a, b), яка має похідні на цьому інтервалі до n-го порядку включно і така, що підстановка функції $y = \varphi(x)$ і її похідних диференціальне рівняння, перетворює дане рівняння в тотожність.

Наприклад, функція $y = sin\, x$ буде розв'язком диференціального рівняння $y'' + y = 0$ на інтервалі $(-\infty, +\infty)$.

Справді, $y' = cos\, x,\ y'' = -sin\, x$. Підставивши в дане рівняння y і y'', отримаємо $-sin\, x + sin\, x = 0$.

Графік розв'язку диференціального рівняння називається інтегральною кривою даного рівняння. Процес знаходження розвя'зку диференціального рівняння називається інтегруванням диференціального рівняння. Нехай маємо диференціальне рівняння 1-го порядку $f(x, y, y') = 0$. Якщо в даному рівнянні можна виразити y', то отримаємо рівняння

$$y' = f(x, y). \tag{3}$$

Диференціальне рівняння може мати безліч розв'язків. Щоб виділити даний розв'язок, потрібно задати початкову умову, яка заключається в тому, що при деякому значенні x_0 незалежної змінної x задано значення y_0 шуканої функції $y(x)$. Це позначається так:

$$y\big|_{x=x_0} = y_0 \quad \text{або} \quad y(x_0) = y_0. \tag{4}$$

Геометрично це означає, що треба знайти інтегральну криву, яка проходить через задану точку $M(x_0, y_0)$ площини XOY.

Задачу відшукання розв'язку рівняння (2) чи (3), який задовольняє умову (4), називають задачею Коші для рівняння (3).

Загальним розв’язком рівняння (2) чи (3) називається функція

$$y=\varphi(x,C), \tag{5}$$

яка залежить від однієї сталої і задовольняє диференціальне рівняння при конкретному значенні *C*. Частинним розв’язком диференціального рівняння (3) називають такий розв’язок, який одержується із загального (5) при деякому частинному значенні довільної сталої, яка визначається з умов (4).

8.2. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними

Диференціальне рівняння називається інтегрованим в квадратурах, якщо його загальний розв’язок (загальний інтеграл) може бути отриманий в результаті певних послідовних елементарних дій над відомими функціями й інтегрувань цих функцій.

Диференціальне рівняння виду

$$\varphi(y)dy=f(x)dx \tag{1}$$

називається рівняння з відокремленими змінними.

Диференціальне рівняння виду

$$\varphi_1(x)\psi_1(y)dx=\varphi_2(x)\psi_2(y)dy, \tag{2}$$

в якому коефіцієнти при диференціалах розпадаються на множники, які залежать тільки від *x* і тільки від *y*, називається диференціальним рівнянням із відокремлюючими змінними.

Шляхом ділення на добуток $\psi_1(y)\varphi_2(x)$ воно зводиться до рівняння з відокремленими змінними

$$\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}dx=\frac{\psi_2(y)}{\psi_1(y)}dy. \tag{3}$$

Загальний інтеграл цього рівняння має вигляд:

$$\int\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}dx-\int\frac{\psi_2(y)}{\psi_1(y)}dy=C. \tag{4}$$

Зауваження. Ділення на $\psi_1(y)\varphi_2(x)$ може привести до втрати частинних розв’язків, які перетворюють в нуль добуток $\psi_1(y)\varphi_2(x)$.

Наприклад, відокремлюючи змінні в рівнянні $xdy=ydx$, отримаємо $\frac{dy}{y}=\frac{dx}{x}$, а після інтегрування отримаємо $ln|y|=ln|x|+ln|C|$, звідки $y=Cx$ (тут *C* може приймати як додатні так і від’ємні значення, але $C\neq0$). При діленні на *y* втрачено розв’язок $y=0$, який може бути включений в загальний розв’язок $y=Cx$, якщо $C=0$.

Якщо приймати *x* і *y* рівноправними, то рівняння $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$ втрачає зміст при $x=0$. В даному випадку слід зауважити, що при $x\neq0$ розв’язок неможливий, хоч він існує при $x=0$.

У загальному випадку поряд із диференціальним рівнянням $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ можна розглядати рівняння $\frac{dx}{dy}=f_1(x,y)$, де $f_1(x,y)=\frac{1}{f(x,y)}$, використовуючи цей факт, де рівняння $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ не має змісту, а рівняння $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{f(x,y)}$ має зміст.

Диференціальне рівняння виду $\frac{dy}{dx}=ax+by+c$, де a,b,c – сталі, заміною $z=ax+by+c$ перетворюється в рівняння з відокремлюючими змінними.

Приклад 8.1. Знайти розв'язки диференціального рівняння $\frac{dy}{dx}=x(y-3)$.

Розв'язання.

При $y\neq 3$ задане рівняння допускає відокремлення змінних $\frac{dy}{y-3}=x\,dx$.

Звідси $\int\frac{dy}{y-3}=\int x\,dx+C$. Знайшовши інтеграли, маємо $ln|y\text{-}3|=\frac{x^2}{2}+ln|C|$.

Після потенціювання дістанемо $y=3+Ce^{\frac{x^2}{2}}$.

Це є загальний розв'язок диференціального рівняння. Функція $\varphi(y)=y-3$ при y=3 дорівнює нулю. Отже, y≡3 є також розв'язок диференціального рівняння. Проте, цей розв'язок можна одержати із загального розв'язку при C=0. Тому він є окремим розв'язком.

Приклад 8.2. Розв'язати диференціальне рівняння

$$x(y^2-1)dx+y(x^2-1)dy=0.$$

Розв'язання.

Помножимо обидві частини цього рівняння на функцію $\frac{1}{(x^2-1)(y^2-1)}$.

Дістанемо диференціальне рівняння з відокремленими змінними

$$\frac{xdx}{x^2\text{-}1}+\frac{ydy}{y^2\text{-}1}=0.$$

Загальний інтеграл має вигляд $\int\frac{xdx}{x^2\text{-}1}+\int\frac{ydy}{y^2\text{-}1}=C_1$.

Звідси $ln\left|x^2-1\right|+ln\left|y^2-1\right|=ln|C|$, $C=C_1^2$. Сталу інтегрування записали для зручності у вигляді $ln|C|$. Після потенціювання дістаємо остаточно загальний інтеграл $(x^2-1)(y^2-1)=C$.

Знайдемо корені рівнянь $x^2-1=0$ і $y^2-1=0$. Маємо $x=\pm1,\ y=\pm1$. Отже, прямі $x=\pm1,\ y=\pm1$ є інтегральними кривими заданого диференціального рівняння. Проте, ці розв'язки знаходяться із загального інтеграла при $C=0$.

Приклад 8.3. Знайти розв'язок рівняння $e^x dx-(1+e^x)ydy=0$, який задовольняє початкову умову $y(0)=1$.

Розв'язання.

Запишемо дане рівняння у вигляді $\frac{e^x dx}{1+e^x}=ydy$.

Знайдемо інтеграли $\int\frac{e^x dx}{1+e^x}=\int ydy+C$, $ln\left|1+e^x\right|=\frac{y^2}{2}+C$.

Звідси $ln2=\frac{1}{2}+C$, $C=ln2-\frac{1}{2}$, $ln\left|1+e^x\right|=\frac{y^2}{2}+ln2-\frac{1}{2}$, або $y^2=1+2ln\frac{1+e^x}{2}$.

Отже, шуканий розв'язок має вигляд: $y=\pm\sqrt{1+2ln\frac{1+e^x}{2}}$.

Приклад 8.4. Матеріальна точка рухається вздовж прямої із швидкістю, яка обернено пропорційна пройденому шляху S. У початковий момент руху точка знаходиться на відстані *5м* від початку відліку шляху і мала швидкість $V_0=20$ *м/с*. Знайти пройдений шлях і швидкість точки через *10 с.* після початку руху.

Розв'язання.

Нехай $S=S(t)$ є шлях, який точка пройшла від початку відліку за час t. Тоді $S(0)=5$. Згідно з умовою задачі маємо таке диференціальне рівняння

$\frac{dS}{dt}=\frac{k}{S}$, де *к* – коефіцієнт пропорційності.

Запишемо це рівняння у вигляді $S\,dS=k\,dt$. Тоді $\int SdS=\int kdt+C$ або $\frac{S^2}{2}=kt+C$. Звідси $S=\sqrt{2(kt+C)}$.

Скориставшись умовою $S(0)=5$, знаходимо сталу інтегрування $5=\sqrt{2C}$, $C=\frac{25}{2}$. Отже, $S=\sqrt{2kt+25}$.

Підставимо це значення у вихідне диференціальне рівняння

$$\frac{dS}{dt}=V=\frac{k}{\sqrt{2kt+25}}.$$

Звідки із умови $V(0)=V_0=20$ *м/с* знаходимо $к=100$.

Тоді $S=\sqrt{200t+25}$, $V=\frac{100}{\sqrt{25+200t}}$.

Отже, через *10с.* після початку руху швидкість точки була $V=\frac{100}{\sqrt{2025}}=\frac{20}{9}\frac{м}{с}$ і за цей час точка пройшла шлях $S=S(10)-S(0)=40$ *м.*

Приклад 8.5. Знайти таку криву, яка проходить (*0,–1*), щоб тангенс кута нахилу дотичної в будь-якій її точці був рівний ординаті цієї точки, збільшеній на *2* одиниці.

Розв'язання.

Виходячи з геометричного змісту похідної, отримаємо диференціальне рівняння сімейства кривих, яке задовольняє даній умові задачі: $\frac{dy}{dx} = y + 2$.

Відокремлюючи змінні і інтегруючи, дістанемо $ln\left| y + 2 \right| = x + C$.

Оскільки шукана крива повинна проходити через точку *M*(*0,–1*), тобто $y\big|_{x=0} = -1$, то *C=0.*

Рівняння кривої набуває вигляду: $ln(y + 2) = x$, $y + 2 = e^x$, $y = e^x - 2$.

8.3. Однорідні диференціальні рівняння. Диференціальні рівняння, які зводяться до однорідних

Диференціальне рівняння

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \qquad (1)$$

називається однорідним, якщо функція $f(x,y)$ задовольняє умову

$$f(x,y)=f(tx,ty), \qquad (2)$$

де t – будь-яке число, відмінне від нуля і таке, що точка (tx,ty) належить області існування функції $f(x,y)$.

Функція $f(x,y)$, яка задовольняє умову $f(x,y) = f(tx,ty)$, називається однорідною функцією нульового виміру. Тому диференціальне рівняння називають однорідним, якщо права частина його є однорідна функція нульового виміру.

Розглядають функції виміру *n*. Це функції, для яких справджується умова

$$f(tx,ty) = t^n f(x, y). \qquad (3)$$

При $n=0$ маємо функцію нульового виміру. Однорідні диференціальні рівняння зводяться до диференціальних рівнянь з відокремлюючими змінними підстановкою $y=ux$, де u – невідома функція x: $u=u(x)$. (4)

Припустимо, що функція $u(x)$ є розв'язком диференціального рівняння (1). Тоді тотожно виконується рівність $x\frac{du}{dx} + u = f(x,ux)$. (5)

Проте, за умовою (2) функцію $f(x,ux)$ можна записати так:

$$f(x, ux) = f(tx, tux).$$

Нехай $t = \frac{1}{x}, x \neq 0$, маємо: $f(x,ux) = f(1,u)$, тобто $f(1,u)$ – функція від однієї змінної u:

$$f(1,u) = \varphi(u).$$

Тоді диференціальне рівняння (5) набуває вигляду $x\frac{du}{dx}=\varphi(u)-u$, або у диференціальній формі $xdu=(\varphi(u)-u)dx$.

Це диференціальне рівняння допускає відокремлення змінних.

Справді, якщо $\varphi(u)-u\neq 0$, (6)

то $\frac{du}{\varphi(u)-u}=\frac{dx}{x}$. Звідси $\int\frac{du}{\varphi(u)-u}=ln|x|+C$.

Підставивши сюди значення $u=\frac{y}{x}$, одержимо загальний інтеграл диференціального рівняння (1).

Загальний розв’язок рівняння (1) ми одержали за умови (6).

Нехай умова (6) не виконується. Тоді матимемо такі два випадки:

- Умова (6) не виконується тотожно: $\varphi(u)-u\equiv 0$ або $\varphi(u)\equiv\ u=\frac{y}{x}$. Тоді диференціальне рівняння (1) набере вигляду: $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$. Загальний розв’язок рівняння є сім’я півпрямих $y=Cx,\ x\neq 0,$ до яких треба приєднати півпрямі $x=0$, $(y\neq 0)$.
- Умова (6) порушується при окремих значеннях, наприклад, при $u=u_0$. Тоді, крім знайденого загального інтеграла, диференціальне рівняння (1) має ще розв’язок $u=u_0$, або $y=u_0\,x$, тобто інтегральною кривою є пряма, що проходить через початок координат.

Приклад 8.6. Розв’язати диференціальне рівняння $y'=\frac{x+y}{x-y}$

Розв’язання.

Права частина заданого рівняння є однорідна функція нульового виміру

$$f(tx,ty)=\frac{tx+ty}{tx-ty}=\frac{x+y}{x-y}=f(x,y).$$

Отже, диференціальне рівняння є однорідне. Застосуємо підстановку $y=ux$. Маємо:

$$x\frac{du}{dx}+u=\frac{1+u}{1-u}\quad \text{або}\quad x\frac{du}{dx}=\frac{1+u^2}{1-u}.$$

Легко бачити, що умова (6) тут виконується для всіх $u\neq 1$. Проте, точки в яких $u=\frac{y}{x}=1$, $y=x$, не входять в область визначення диференціального рівняння.

Отже, відокремлюючи змінні в одержуваному рівнянні, одержимо таке диференціальне рівняння $\frac{1-u}{1+u^2}du=\frac{dx}{x}$.

Інтегруючи це рівняння, маємо: $\int\frac{1-u}{1+u^2}du=\int\frac{dx}{x}+C=ln|x|+C.$

Знаходимо інтеграл

$$\int\frac{1-u}{1+u^2}du=\int\frac{du}{1+u^2}-\int\frac{udu}{1+u^2}=arctg\,u-\frac{1}{2}ln(1+u^2)=arctg\frac{y}{x}-\frac{1}{2}ln\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right).$$

Одержимо загальний інтеграл заданого диференціального рівняння:

$$arctg\frac{y}{x}-\frac{1}{2}ln(1+\frac{y^2}{x^2})=ln|x|+C.$$

Приклад 8.7. Розв'язати диференціальне рівняння $x\frac{dy}{dx}=y\,ln\frac{y}{x}$.

Розв'язання.

Запишемо це рівняння у вигляді $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}ln\frac{y}{x}$. Одержали однорідне диференціальне рівняння. Зробивши підстановку $y=ux$, маємо $x\frac{du}{dx}+u=u\,ln\,u$, або $x\frac{du}{dx}=u(ln\,u-1)$.

Відокремлюючи змінні, одержуємо $\frac{du}{u(ln\,u-1)}=\frac{dx}{x}$.

Після інтегрування маємо: $ln|ln\,u-1|=ln|x|+ln|C|$. Звідси знаходимо такий загальний розв'язок: $y=xe^{Cx+1}$.

Відокремлюючи змінні, ми припустили, що $u(\ln u-1)\neq 0$.

Нехай $u(\ln u-1)=0$, тоді $u=0$, $u=e$.

Кореню $u=0$ відповідає значення $y=0$. Це значення належить області визначення рівняння.

Кореню $u=e$ відповідає розв'язок $y=ex$. Проте цей розв'язок міститься у загальному розв'язку $y=xe^{Cx+1}$, який можна дістати із загального розв'язку при $C=0$.

До однорідного диференціального рівняння зводиться диференціальне рівняння виду

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right), \tag{7}$$

в якому a, b, c, a_1, b_1, c_1 – дійсні числа, причому $\frac{a}{a_1}\neq\frac{b}{b_1}$, а $f(x,y)$ – довільна неперервна функція в розглядуваній області.

Введемо нові змінні ξ і η: $x=\xi+h$, $y=\eta+k$, де h, k – невідомі числа. Тоді, підставляючи в диференціальне рівняння (7) знайдені значення x, y, матимемо:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d\eta}{d\xi}.$$

Одержимо диференціальне рівняння $\frac{d\eta}{d\xi}=f\left(\frac{a\xi+b\eta+ah+bk+c}{a_1\xi+b_1\eta+a_1h+b_1k+c_1}\right)$.

Нехай у цьому рівнянні $\begin{cases} ah+bk+c=0 \\ a_1h+b_1k+c_1=0 \end{cases}$.

Ця система алгебраїчних рівнянь має єдиний розв'язок, тому дістаємо однорідне диференціальне рівняння $\frac{d\eta}{d\xi}=f\left(\frac{a\xi+b\eta}{a_1\xi+b_1\eta}\right)$, відносно змінних ξ і η.

Проінтегрувавши останнє рівняння методом викладеним вище, знайдено його загальний інтеграл $\Phi(\xi,\eta,C)=0.$

Підставивши сюди значення $\xi=x-h$, $\eta=y-k$, одержимо загальний інтеграл диференціального рівняння (7).

Приклад 8.8. Знайти загальний інтеграл диференціального рівняння $\frac{dy}{dx}=\frac{3y-7x+7}{3x-7y-3}$.

Розв'язання.

Тут $\frac{a}{a_1}=-\frac{7}{3};\frac{b}{b_1}=-\frac{3}{7}$. Отже, $\frac{a}{a_1}\neq\frac{b}{b_1}$. Робимо заміну $y=\eta+k$; $x=\xi+h$.

Тоді диференціальне рівняння набуде вигляду:

$$\frac{d\eta}{d\xi}=\frac{3\eta+3k-7\xi-7h+7}{3\xi+3h-7\eta-7k-3}.$$

Складаємо систему рівнянь $\begin{cases} -7h+3k+7=0 \\ 3k-7k-3=0 \end{cases}$. Звідки $h=1, k=0.$

Застосувавши підстановку $x=\xi+1, y=\eta$, одержимо:

$$\frac{d\eta}{d\xi}=\frac{3\eta-7\xi}{3\xi-7\eta}.$$

Нехай $\eta=u\xi$, тоді $\xi\frac{du}{d\xi}+u=\frac{3u-7}{3-7u}$ або $\xi\frac{du}{d\xi}=\frac{7(u^2-1)}{3-7u}$.

Відокремивши в цьому рівнянні змінні, дістанемо таке диференціальне рівняння: $\frac{3-7u}{7(u^2-1)}du=\frac{d\xi}{\xi}$.

Інтегруючи його обидві частини, маємо $\int\frac{3-7u}{7(u^2-1)}du=\int\frac{d\xi}{\xi}+ln|C|$, або $\frac{3}{14}ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|-\frac{1}{2}ln\left|u^2-1\right|=ln|\xi|+ln|C|$.

Після потенціювання одержимо загальний інтеграл: $\left(\frac{\eta-\xi}{\eta+\xi}\right)^{\frac{3}{7}}=C(\eta^2-\xi^2)$.

Підставивши сюди значення $\eta=y$, $\xi=x-1$, одержимо загальний інтеграл диференціального рівняння:

$$\left(\frac{y-x+1}{y+x-1}\right)^{\frac{3}{7}} = C(y^2-(x-1)^2).$$

Зауважимо, що коли умова $\frac{a}{a_1} \neq \frac{b}{b_1}$ не виконується, тобто $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \lambda$, то слід застосовувати підстановку $a_1 x+b_1 y=z$. У цьому випадку від рівняння (7) прийдемо до рівняння, яке допускає відокремлення змінних.

Справді, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{b_1}\frac{dz}{dx} - \frac{a_1}{b_1}$. Крім того, матимемо $a=a_1\lambda$; $b=b_1\lambda$.

Одержимо диференціальне рівняння $\frac{1}{b_1}\cdot\frac{dz}{dx} = \frac{a_1}{b_1} + f\left(\frac{\lambda z+C}{z+C_1}\right)$, яке допускає відокремлення змінних:

$$\frac{dz}{b_1\left(\frac{a_1}{b_1} + f\left(\frac{\lambda z+C}{z+C_1}\right)\right)} = dx.$$

Знайшовши загальний інтеграл

$$\int \frac{dz}{b_1\left(\frac{a_1}{b_1} + f\left(\frac{\lambda z+C}{z+C_1}\right)\right)} = x+C$$

і підставивши сюди z із формули $a_1x+b_1y=z$, одержимо загальний інтеграл рівняння.

Приклад 8.9. Знайти загальний інтеграл диференціального рівняння

$$(x+y+1)dx + (2x+2y-1)dy = 0.$$

Розв’язання.

Система алгебраїчних рівняннь $\begin{cases} x+y+1=0 \\ 2x+2y-1=0 \end{cases}$ несумісна, так як визначник системи $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$.

Застосуємо підстановку $x+y=z$, $dy=dz-dx$. Диференціальне рівняння набуде вигляду $(2-z)dx + (2z-1)dz = 0$.

Відокремивши змінні, одержимо: $\frac{2z-1}{z-1}dz = dx$.

Звідси маємо $x+C = 2z+3\ln|z-2|$.

Повертаючись до змінних x і y, одержимо загальний інтеграл даного рівняння: $x+2y+3\ln|x+y-2| = C$.

8.4. Лінійні диференціальні рівняння. Рівняння Бернуллі

Лінійним диференціальним рівнянням першого порядку відносно функції $y=y(x)$ називають диференціальне рівняння виду

$$A(x)\frac{dy}{dx}+B(x)y=C(x), \qquad (1)$$

де $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ – неперервні функції на деякому проміжку $[a,b]$, причому вважають, що для будь-якого $x \in [a,b]$ $A(x) \neq 0$. Таке припущення дає змогу записати лінійне рівняння у вигляді:

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x), \qquad (2)$$

$$\text{де} \quad p(x)=\frac{B(x)}{A(x)}, \qquad q(x)=\frac{C(x)}{A(x)}.$$

Розглянемо випадок, коли в диференціальному рівнянні (2) права частина $q(x) = 0$ на розглядуваному проміжку $[a,b]$. Диференціальне рівняння набуває вигляду

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=0. \qquad (3)$$

Це рівняння називається лінійним однорідним диференціальним рівнянням. Воно допускає відокремлення змінних. Справді, при $y\neq 0$ дане рівняння можна записати так:

$$\frac{dy}{y}=-p(x)dx.$$

Звідси знаходимо загальний розв’язок лінійного однорідного диференціального рівняння (3)

$$y=Ce^{-\int p(x)dx}, \text{ де } C \text{ – довільна стала.} \qquad (4)$$

Розв’язок диференціального рівняння (2) шукаємо у вигляді $y=Ce^{-\int p(x)dx}$, припустивши що C не стала, а невідома функція від x : $C = C(x)$.

Підставляючи функцію і її похідну в рівняння (2) матимемо:

$$\frac{dC}{dx}e^{-\int p(x)dx}-C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx}+C(x)e^{-\int p(x)dx}=q(x),$$

$$\text{або} \quad \frac{dC}{dx}=q(x)e^{\int p(x)dx}.$$

Тоді $C(x)$ знаходиться з даного диференціального рівняння квадратурою

$$C(x)=\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C_1, \text{ де } C_1 \text{ – довільна стала.}$$

Підставляючи дане значення $C(x)$ у формулу $y=Ce^{-\int p(x)dx}$, знаходимо загальний розв’язок рівняння (2) у вигляді

$$y=C_1e^{-\int p(x)dx}+e^{-\int p(x)dx}\int q(x)e^{\int p(x)dx}\,dx.$$

Аналізуючи загальний розв'язок, бачимо, що перший доданок є загальний розв'язок однорідного рівняння (3), а другий доданок є окремий розв'язок (він утворюється з цього розв'язку при $C_1=0$) неоднорідного рівняння (2).

Приклад 8.10. Розв'язати рівняння $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$.

Розв'язання.

Застосуємо метод варіації постійної. Розглянемо однорідне рівняння $y'+2xy = 0$, яке відповідає даному неоднорідному рівнянню. Це рівняння з відокремлюючими змінними $\dfrac{dy}{y} = -2xdx,$ розв'язок якого запишемо у вигляді $y = C(x)e^{-x^2}$, де $C(x)$ – невідома функція від x.

Знайдемо похідну від цієї функції $y' = C'(x)e^{-x^2} - 2C(x)xe^{-x^2}$.

Підставляючи похідну y' і функцію y в вихідне рівняння, одержимо

$$C'(x)e^{-x^2} - 2C(x)xe^{-x^2} + 2C(x)xe^{-x^2} = 2xe^{-x^2}$$

або $C'(x) = 2x;\quad \dfrac{dC(x)}{dx} = 2x;\quad C(x) = x^2 + C_1.$

Підставивши знайдене значення $C(x)$ у формулу $y = C(x)e^{-x^2}$, знайдемо загальний розв'язок заданого диференціального рівняння

$y = (x^2 + C_1)e^{-x^2}$, де C_1 – стала інтегрування.

Розглянемо ще один метод розв'язування лінійного неоднорідного рівняння (2). В основі цього методу лежить ідея знаходження розв'язку рівняння (2) у вигляді:

$y(x) = u(x)\, v(x)$, де $u(x)$ і $v(x)$ – дві невідомі функції. (5)

Знаходячи $y'(x) = u'(x)\, v(x) + u(x)\, v'(x)$ і підставляючи функцію $y(x)$ і похідну в рівняння (2) дістаємо таку рівність:

$$\frac{du}{dx}v + u\left(\frac{dv}{dx} + p(x)v\right) = q(x). \tag{6}$$

Виберемо $v(x)$ так, щоб $\dfrac{dv}{dx} + p(x)v = 0.$

Оскільки це рівняння лінійне однорідне, то $v(x) = e^{-\int p(x)dx}$ (вважаємо, що стала $C_1=1$). При такому значенні $v(x)$ рівняння (6) набирає вигляду $\dfrac{du}{dx} = q(x)e^{\int p(x)dx}$. Звідси $u(x) = \displaystyle\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C$.

Підставляючи значення $v(x)$ і $u(x)$ у формулу (5), дістаємо загальний розв'язок рівняння (2):

$$y(x) = Ce^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx}\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx,$$

тобто одержали ту саму формулу для загального розв'язку рівняння (2), що й методом варіації довільної сталої.

Приклад 8.11. Розв'язати рівняння $x\frac{dy}{dx}-2y=2x^4$.

Розв'язання.

Розв'язок рівняння знайдемо у вигляді добутку двох функцій $y=u(x)\cdot v(x)$. Тоді $x\frac{du}{dx}v+u\left(x\frac{dv}{dx}-2v\right)=2x^4$.

Виберемо функцію $v(x)$ так, щоб $x\frac{dv}{dx}-2v=0$.

Відокремивши в цьому рівнянні змінні, матимемо: $\frac{dv}{v}=\frac{2dx}{x}$.

В результаті інтегрування одержимо: $v(x)=x^2$.

Функцію $u(x)$ знаходимо з рівняння $x\frac{du}{dx}v+u\left(x\frac{dv}{dx}-2v\right)=2x^4$, підставивши значення $v(x)$. Тоді $\frac{du}{dx}=2x$, або $u=x^2+C$.

Отже, $y=\left(x^2+C\right)\cdot x^2$ є загальним розв'язком заданого рівняння.

Зауваження. Можливий випадок, коли диференціальне рівняння лінійне відносно x як функції від y. Таке рівняння записується у вигляді $\frac{dx}{dy}+r(y)x=\varphi(y)$.

Приклад 8.12. Розв'язати рівняння $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x\cos y+\sin 2y}$.

Розв'язання.

Дане рівняння являється лінійним, якщо розглядати x як функцію від y

$$\frac{dx}{dy}-x\cos y=\sin 2y.$$

Шукаємо загальний розв'язок даного рівняння у вигляді $x=u(y)\cdot v(y)$.

Маємо $\frac{dx}{dy}=v\frac{du}{dy}+u\frac{dv}{dy}$.

Підставляємо x і $\frac{dx}{dy}$ в рівняння $\frac{dx}{dy}-x\cos y=\sin 2y$ знайдемо

$$v\frac{du}{dy}+u\left(\frac{dv}{dy}-v\cos y\right)=\sin 2y.$$

Функцію $v(y)$ визначимо із умови $\frac{dv}{dy}-v\cos y=0$.

Частинний розв'язок цього рівняння буде мати вигляд: $v(y)=e^{\sin y}$.

З врахуванням останньої рівності рівняння $v\frac{du}{dy}+u\left(\frac{dv}{dy}-v\cos y\right)=\sin 2y$

перепишеться таким чином: $e^{sin\,y}\dfrac{du}{dy}=sin\,2y$.

Відокремлюючи змінні і інтегруючи, одержимо:

$$u=\int e^{-sin\,y}\,sin\,2ydy=-2e^{-sin\,y}(1+sin\,y)+C.$$

Маючи $v(y)$ і $u(y)$, знаходимо загальний розв'язок рівняння:

$$x=u(y)\cdot v(y)=Ce^{sin\,y}-2(sin\,y+1),$$ де C – довільна стала.

До рівнянь, що зводяться до лінійного диференціального рівняння, належить рівняння Бернуллі

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)y^n. \qquad (7)$$

У рівняння (7) функції $p(x)$, $q(x)$ неперервні на проміжку $[a,b]$, а n – деяке стале число.

Якщо $n=0$, то рівняння (7) є неоднорідне лінійне диференціальне рівняння. Якщо $n=1$, то рівняння допускає відокремлення змінних. Надалі припускатимемо, що $n\neq 0,1$ і $y\neq 0$. Помноживши обидві частини рівняння на y^{-n}, дістанемо таке диференціальне рівняння:

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}+p(x)y^{1-n}=q(x). \qquad (8)$$

Введемо нову функцію z, поклавши $z=y^{1-n}$. (9)

Звідси $\dfrac{dz}{dx}=(1-n)y^{-n}\dfrac{dy}{dx}$.

Помноживши обидві частини диференціального рівняння (8) на $(1\text{-}n)$, матимемо диференціальне рівняння відносно z:

$$\frac{dz}{dx}+(1-n)p(x)z=(1-n)q(x)$$

Визначивши з цього рівняння функцію z і підставивши її в (9), знайдемо шукану функцію y: $y=z^{\frac{1}{1-n}}$.

Приклад 8.13. Знайти розв'язок диференціального рівняння $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{y}{x}=y^4(1-x^2)$, який задовольняє початкову умову $y(1)=1$.

Розв'язання.

Задане диференціальне рівняння є рівнянням Бернуллі (тут $n = 4$). Поділивши обидві частини цього рівняння на y^{-4} і застосувавши підстановку $z=y^{-3}$, матимемо диференціальне рівняння:

$$\frac{dz}{dx}-\frac{3z}{x}=-3(1-x^2).$$

Знайдемо загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння

$$\frac{dz}{dx}-\frac{3z}{x}=0.$$

Відокремивши змінні, одержимо: $\frac{dz}{z}=3\frac{dx}{x}$.

Звідси $ln|z|=3ln|x|+ln|C|$ або $z=Cx^3$.

Розв'язок неоднорідного диференціального рівняння знайдемо методом варіації довільної сталої. Для цього в рівності $z=Cx^3$ вважатимемо C невідомою функцією, $C=C(x)$.

Тоді $\frac{dC}{dx}x^3+3Cx^2-3Cx^2=-3(1-x^2)$ або $\frac{dC}{dx}=\frac{3}{x}-\frac{3}{x^3}$.

Отже, $C(x)=\int\left(\frac{3}{x}-\frac{3}{x^3}\right)dx=3ln|x|+\frac{3}{2x^2}+C_1$, тобто загальний розв'язок диференціального рівняння $z=Cx^3+3x^2\,ln|x|+\frac{3}{2}x$.

Загальний розв'язок заданого диференціального рівняння, згідно з формулою $z=y^{-3}$, є функція

$$y=\frac{1}{\sqrt[3]{C\,x^3+3x^3\,ln|x|+\frac{3}{2}x}}.$$

Скористаємося початковою умовою. В останній рівності вважатимемо $x=1$ і $y=1$, тоді $C=-\frac{1}{2}$.

Отже, загальний розв'язок $y=\frac{1}{\sqrt[3]{-\frac{1}{2}x^3+3x^3\,ln|x|+\frac{3}{2}x}}$.

8.5. Випадки пониження порядку інтегрування диференціальних рівнянь

Інтегрування диференціальних рівнянь n-го порядку (в скінченому вигляді) вдається провести тільки в деяких частинних випадках:

- Рівняння виду $y^{(n)}=f(x)$, де функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$, інтегрується в квадратурах $y^{(n)}=f(x)$, $\frac{d}{dx}\left(y^{(n-1)}\right)=f(x)$ або $d(y^{(n-1)})=f(x)dx$.

  Тоді $y^{(n-1)}=\int f(x)dx+C_1=f_1(x)+C_1$, де C_1 – стала інтегрування.

  Аналогічно знаходимо $y^{(n-2)}=\int(f_1(x)+C_1)dx=f_2(x)+C_1(x)+C_2$.

$$y=f_n(x)+\frac{C_1}{(n-1)!}x^{n-1}+\frac{C_2}{(n-2)!}x^{n-2}+...+C_{n-1}x+C_n,$$

де $f_n(x)=\int\underbrace{\cdots\cdots}_{n-раз}\int f(x)dx^n$. Так як $\frac{C_1}{(n-1)!}$, $\frac{C_2}{(n-2)!}$,... є сталими величинами, то загальний розв'язок може бути записаний так:

$$y=f_n(x)+C_1x^{n-1}+C_2x^{n-2}+....+C_{n-1}x+C_n\,.$$

- ❖ Нехай маємо диференціальне рівняння $F(x,y^{(k)},y^{(k+1)},\ldots,y^{(n)})=0$, яке не містить шуканої функції $y(x)$ та її перших ($к$-1) похідних, $1\le k\le n$. Введемо нову невідому функцію $z=y^{(k)}$. Дане диференціальне рівняння n-го порядку переходить у диференціальне рівняння ($n-k$)-го порядку: $F\left(x,\,z,\,z',\,z'',...,\,z^{(n-k)}\right)=0$. Таким чином, порядок рівняння понижується на k одиниць. Його загальний розв'язок $z=\varphi(x,C_1,C_2,...,C_{n-k})$, де $C_1,C_2,...,C_{n-k}$– довільні сталі. Підставляючи в останню рівність значення $z=y^{(k)}$, одержимо диференціальне рівняння $y^{(k)}=\varphi\left(x,C_1,C_2,...,C_{n-k}\right)$, яке інтегрується в квадратурах, його загальний розв'язок має вигляд:

$$y=\underbrace{\int\int...\int}_{к-раз}\varphi\left(x,C_1,C_2,...,C_{n-k}\right)dx^{n-k}+\frac{C_{(n-k+1)}}{k-1}x^{k-1}+...+C_{n-k}\;x+C_n\,.$$

- ❖ Нехай маємо диференціальне рівняння $F(y,y',y'',...,y^{(n)})=0$, яке не містить незалежної змінної. Рівняння такого виду допускає пониження порядку на одиницю. Справді, введемо підстановку $y'=p(y)$. Тоді

$$y''=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx}=\frac{dp}{dy}P,\qquad y'''=p\left(p\frac{d^2p}{dy^2}+\left(\frac{dp}{dy}\right)^2\right)\;...$$

Таким чином, від диференціального рівняння n-го порядку перейдемо до диференціального рівняння $\Phi(y,p,p',...,p^{(n-1)})=0$ (n-1) порядку.

Приклад 8.14. Проінтегрувати рівняння $y''=x+e^x$.

Розв’язання.

Інтегруючи, будемо мати:

$$\frac{d}{dx}y'=x+e^x\,,\;y'=\int(x+e^x)dx=\frac{x^2}{2}+e^x+C_1\,,$$

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{x^2}{2}+e^x+C_1\,.$$

Тоді $dy=\left(\frac{x^2}{2}+e^x+C_1\right)dx$.

Звідси $y=\frac{x^3}{6}+e^x+C_1x+C_2$.

Приклад 8.15. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$2xy''=y'.$$

Розв'язання.

Застосуємо підстановку: $z=y'$. Тоді рівняння набирає вигляду $2xz'=z$.

Відокремивши змінні, одержимо: $\frac{dz}{z}=\frac{1}{2}\frac{dx}{x}$. Звідси знаходимо $ln|z|=\frac{1}{2}ln|x|+ln|C_1|$, $z=C_1\sqrt{x}$, де C_1 – стала інтегрування.

Підставивши в останню рівність значення $z=y'$, матимемо диференціальне рівняння першого порядку: $y'=C_1\sqrt{x}$.

Загальний розв'язок цього, а отже, і заданого рівняння є

$$y=\int C_1\sqrt{x}dx+C_2=\frac{2}{3}C_1x^{\frac{3}{2}}+C_2.$$

Приклад 8.16. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$2yy''-y^2=1.$$

Розв'язання.

Застосуємо підстановку: $y'=p$.

Тоді задане рівняння запишемо так: $2yp\frac{dp}{dy}=1+p^2$.

Це рівняння першого порядку і воно допускає відокремлення змінних

$$\frac{2pdp}{1+p^2}=\frac{dy}{y}.$$

Звідси $ln\left(1+p^2\right)=ln|y|+ln|C_1|$, або $1+p^2=C_1y$.

Підставивши сюди значення p, матимемо: $\frac{dy}{dx}=\sqrt{C_1y-1}$.

Проінтегрувавши обидві частини, знайдемо:

$\frac{2}{C_1}\sqrt{C_1y-1}=x+C_2$. або $y=\frac{1}{C_1}+\frac{C_1}{4}(x+C_2)^2$, де C_1 і C_2 – сталі інтегрування.

9. ЛІНІЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ n-ГО ПОРЯДКУ

Лінійним диференціальним рівнянням *n*-го порядку називається рівняння, яке є лінійним відносно невідомої функції та всіх її похідних і яке записується у вигляді:

$$a_0(x)y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+...+a_n(x)y=f(x). \qquad (1)$$

Якщо $f(x)=0$, то рівняння називається лінійним однорідним.

При $a_0(x)\neq 0$ на деякому інтервалі, то розділивши всі члени даного рівняння на $a_0(x)$, отримаємо однорідне рівняння

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+...+a_n(x)y=0. \qquad (2)$$

Якщо $a_1(x)$, $a_2(x)$,..., $a_n(x)$ – *const*, то будемо мати диференціальне рівняння *n*-го порядку з постійними коефіцієнтами.

Сукупність будь-яких *n* лінійно незалежних розв’язків лінійного однорідного диференціального рівняння *n*-го порядку:

$$L[y]=y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+a_2(x)y^{(n-2)}+...+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=0$$

складає його фундаментальну систему розв’язків.

Так як інтегрування неоднорідного диференціального рівняння зводиться до інтегрування відповідного однорідного рівняння, то розглянемо спочатку питання про побудову загального розв’язку однорідного рівняння $L[y]=0$.

Лінійна комбінація з довільними сталими коефіцієнтами $\sum_{i=1}^{n}C_i y_i(x)$ розв'язків $y_1(x)$, $y_2(x)$,..., $y_n(x)$ лінійного однорідного диференціального рівняння $L[y]=0$ буде теж фундаментальною системою розв’язку того ж рівняння.

9.1. Однорідні лінійні диференціальні рівняння другого порядку з сталими коефіцієнтами

Нехай лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку з сталими коефіцієнтами *p* і *q* має вигляд:

$$y''+py'+qy=0. \qquad (1)$$

Будемо шукати розв’язок рівняння (1) методом Ейлера, тобто у формі:

$$y=e^{\lambda x}, \qquad (2)$$

де λ - деяке невизначене стале число.

Знайшовши похідні $y'=\lambda e^{\lambda x}$, $y''=\lambda^2 e^{\lambda x}$ і підставивши їх разом з функцією у ліву частину диференціального рівняння $L[y]=y''+py'+qy=0$, матимемо $L\left[e^{\lambda x}\right]=e^{\lambda x}\left(\lambda^2+p\lambda+q\right)\equiv 0$.

Звідси випливає, що функція $y = e^{\lambda x}$ є розв'язком диференціального рівняння (1) тоді і тільки тоді, коли

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0. \tag{3}$$

Многочлен $P(\lambda)$ називають характеристичним многочленом диференціального рівняння, а рівняння (3) - характеристичним рівнянням даного диференціального рівняння.

Числа λ_1, λ_2 називають характеристичними числами.

Розв'язуючи характеристичне рівняння (3), матимемо:

$$\lambda_{1,2} = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\,. \tag{4}$$

Тут можуть бути такі випадки:

- Корені λ_1, λ_2 - дійсні і різні, тоді загальний розв'язок буде мати вигляд:

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}. \tag{5}$$

- Якщо $\frac{p^2}{4} - q = 0$, то характеристичне рівняння (3) має єдиний двократний корінь $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{p}{2}$. Загальний розв'язок рівняння (1) запишеться так:

$$y(x) = e^{-\frac{p}{2}x}\left(C_1 + C_2 x\right).$$

- Якщо $\frac{p^2}{4} - q < 0$, то корені будуть комплексні $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$. Загальний розв'язок рівняння (1) буде таким:

  $y = e^{\alpha x}\left(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x\right)$, де C_1, C_2 - сталі величини.

- Якщо в характеристичному рівнянні (3) маємо, що $p = Ф$, а $q = \beta^2$, то корені $\lambda_{1,2} = \pm i\beta$ будуть уявними ($\alpha = 0$) і для відповідного диференціального рівняння $y'' + \beta^2 y = 0$ одержимо його загальний розв'язок у такому вигляді:

$$y = C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x\,.$$

Схему загального розв'язку однорідного рівняння $y'' + py' + qy = 0$ (p і q – сталі) в залежності від коренів характеристичного рівняння подамо у вигляді таблиці 1.

Таблиця 1

Знаходження виду розв'язку диференціальних рівнянь 2-ого порядку згідно коренів характеристичного рівняння

№ п/п	Характер коренів характеристичного рівняння	Вид загального розв'язку
1	Корені λ_1 і λ_2 дійсні і різні	$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$
2	Корені рівні $\lambda_1 = \lambda_2$	$y(x) = \left(C_1 + C_2 x\right) e^{\lambda_1 x}$
3	Корені комплексні $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$	$y = e^{\alpha x}\left(C_1 \cos\beta\, x + C_2 \sin\beta\, x\right)$
4	Корені комплексні $\lambda_{1,2} = \pm i\beta$	$y(x) = C_1 \cos\beta\, x + C_2 \sin\beta\, x$

Приклад 9.1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' - 4y' + 3y = 0.$$

Розв'язання.

Складаємо характеристичне рівняння $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$, його коренями є числа $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$ - корені дійсні і різні.

Загальний розв'язок рівняння має вигляд: $y(x) = C_1 e^{3x} + C_2 e^{x}$.

Приклад 9.2. Розв'язати рівняння $y'' - 2y' + y = 0$.

Розв'язання.

Характеристичне рівняння для даного рівняння буде мати вигляд $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$, коренями цього рівняння будуть числа $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{p}{2} = 1$, (корені кратні). Отже, загальний розв'язок $y(x) = e^{x}\left(C_1 + C_2 x\right)$.

Приклад 9.3. Знайти розв'язок рівняння $y'' - 4y' + 29y = 0$, який задовольняє початкові умови $y(0) = 1$, $y'(0) = 7$.

Розв'язання.

Складемо характеристичне рівняння $\lambda^2 - 4\lambda + 29 = 0$, його коренями є числа $\lambda_1 = 2 + 5i$, $\lambda_2 = 2 - 5i$. Тоді загальний розв'язок заданого диференціального рівняння має вигляд:

$$y = e^{2x}\left(C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x\right).$$

$$y'(x) = 2e^{2x}\left(C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x\right) + e^{2x}\left(-5C_1 \sin 5x + 5C_2 \cos 5x\right).$$

Скориставшись початковими умовами, одержимо: $\begin{cases} C_1 = 1, \\ 2C_1 + 5C_2 = 7, \end{cases}$

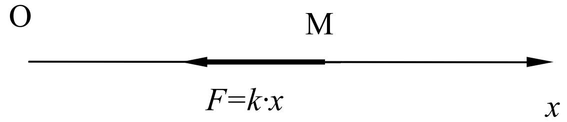
звідки $C_1 = C_2 = 1$.

Шуканий розв'язок $y = e^{2x}\left(\cos 5x + \sin 5x\right)$.

Приклад 9.4. Матеріальна точка маси m притягується до нерухомого центру O з силою, пропорційною віддаленню x точки від притягуючого центра (пружна сила). Знайти закон руху цієї точки.

Розв'язання.

Згідно закону Ньютона маємо: $m\dfrac{d^2x}{dt^2}=-kx$, де k – коефіцієнт пропорційності. Знак мінус (−) поставлений тому, що напрям діючої сили обернений знаку зміщення x.



Звідси $\ddot{x}+\omega^2x=0$, де $\omega^2=\dfrac{k}{m}, \dfrac{d^2x}{dt^2}=\ddot{x}$. Складемо характеристичне рівняння $\lambda^2+\omega^2=0$, корені якого $\lambda_{1,2}=\pm\omega\, i$.

Загальний розв'язок даного рівняння буде таким:

$$x(t)=C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t.$$

Якщо покласти $C_1=A\sin\varphi, C_2=A\cos\varphi,$ де A і φ - деякі постійні, тоді розв'язок запишеться так:

$$x=A\sin(\omega\, t+\varphi),$$

тобто матеріальна точка здійснює періодичні гармонійні коливання біля точки O з амплітудою A і початковою фазою φ.

9.2. Неоднорідні лінійні диференціальні рівняння другого порядку

Розглянемо неоднорідні лінійні диференціальні рівняння із сталими коефіцієнтами

$$y''+py'+qy=f(x), \tag{1}$$

де $f(x)$- функція, неперервна на деякому проміжку. Структура загального розв'язку рівняння (1) визначається формулою:

$$y=C_1\overline{y_1}(x)+C_2\overline{y_2}(x)+\tilde{y}(x), \tag{2}$$

де $\tilde{y}(x)$ - частковий розв'язок неоднорідного рівняння. Отже, щоб знайти загальний розв'язок рівняння (1), треба знайти загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння і додати до нього один розв'язок $\tilde{y}=\tilde{y}(x)$.

Для правих частин спеціального виду частковий розв'язок знаходиться методом підбору.

Загальний вид правої частини $f(x)$ рівняння (1), при якому можливий підбір, може бути таким:

$$f(x)=e^{\alpha x}\left(P_n(x)\cos\beta\, x+Q_m(x)\sin\beta\, x\right), \tag{3}$$

де $P_n(x)$, $Q_m(x)$- многочлени степені n і m відповідно. У даному випадку частковий розв'язок $\tilde{y}(x)$ рівняння (1) шукаємо у вигляді

$$\tilde{y}(x)=x^Se^{\alpha x}\left(\tilde{P}_k(x)\cos\beta\, x+\tilde{Q}_k(x)\sin\beta\, x\right), \tag{4}$$

де k=max(m,n), $\widetilde{P}_k(x)$ і $\widetilde{Q}_k(x)$ - многочлени від x k-ої степені загального виду з невизначеними коефіцієнтами, а s - кратність кореня $\lambda=\alpha+i\beta$ характеристичного рівняння (якщо $\alpha\pm i\beta$ не є коренем характеристичного рівняння, то $s=0$).

Таблиця 2

Підбір часткового розв’язку за відомою правою частиною диференціального рівняння

№ п/п	Права частина диференціального рівняння	Корені характеристичного рівняння	Вид частинного розв’язку
1	$P_m(x)$	1. Число 0 не є коренем характеристичного рівняння	$\widetilde{P}_m(x)$
		Число 0 - корінь характеристичного рівняння кратності S	$x^s\widetilde{P}_m(x)$
2	$P_m(x)e^{\alpha x}$ (α - дійсне число)	1.Число α не є коренем характеристичного рівняння	$\widetilde{P}_m(x)e^{\alpha x}$
		2. Число α - корінь характеристичного рівняння кратності S	$x^s\widetilde{P}_m(x)e^{\alpha x}$
3	$P_n(x)cos\beta x+$ $+Q_m(x)sin\beta x$	1.Числа $\pm i\beta$ не є коренями характеристичного рівняння	$\widetilde{P}_k(x)cos\,\beta\,x+\widetilde{Q}_k(x)sin\,\beta\,x$
		2. Числа $\pm i\beta$ - корені характеристичного рівняння кратності S	$x^s\left(\widetilde{P}_k(x)cos\beta x+\widetilde{Q}_k(x)sin\beta x\right)$
4	$e^{\alpha x}\left[P_n(x)cos\,\beta\,x+\right.$ $\left.+Q_m(x)sin\,\beta\,x\right]$	1.Числа $\alpha\pm i\beta$ не є коренями характеристичного рівняння	$\left(\widetilde{P}_k(x)cos\,\beta\,x+\widetilde{Q}_k(x)sin\,\beta\,x\right)e^{\alpha x}$
		2. Числа $\alpha\pm i\beta$ - корені характеристичного рівняння кратності S	$x^s\left(\widetilde{P}_k(x)\cos\beta\,x+\widetilde{Q}_k(x)\sin\beta\,x\right)e^{\alpha x}$

Якщо права частина $f(x)$ є сумою $f(x)=\sum_{i=1}^{m} C_i f_i(x),$ де $f_i(x)$ мають вид (3), то частковий розв’язок $\tilde{y}(x)$ рівняння (1) на основі принципу суперпозиції знаходиться у формі $f(x)=\sum_{i=1}^{m} \tilde{C}_i \tilde{y}_i(x).$

Зауваження. Якщо корінь $\alpha \pm i\beta$ у характеристичному рівнянні входить з кратністю s, то дана права частина може бути використана при розв’язку диференціальних рівнянь *n*-го порядку.

Приклад 9.4. Знайти загальний розв’язок рівняння $y'' - 5y' + 6y = e^x$.

Розв’язання.

Знайдемо загальний розв’язок однорідного рівняння $\bar{y}'' - 5\bar{y}' + 6\bar{y} = 0$.

Характеристичне рівняння $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$ має корені $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$. Значить, загальний розв’язок однорідного рівняння буде $\bar{y} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$.

Оскільки $\alpha^* = 1$ не є коренем характеристичного рівняння, то частковий розв’язок $\tilde{y}(x)$ будемо шукати у вигляді $\tilde{y}(x) = Ae^x$, де A - невизначений коефіцієнт. Диференціюючи, будемо мати:

$$\tilde{y}'(x) = Ae^x, \quad \tilde{y}''(x) = Ae^x.$$

Підставляючи $\tilde{y}(x), \tilde{y}'(x)$ і $\tilde{y}''(x)$ в неоднорідне рівняння, одержимо:

$$Ae^x - 5Ae^x + 6Ae^x = e^x, \quad 2A = 1, \quad \text{звідки } A = \frac{1}{2}.$$

Отже, частковий розв’язок рівняння: $\tilde{y}(x) = \frac{1}{2}e^x$.

Загальний розв’язок даного диференціального рівняння буде мати вигляд:

$$y(x) = \bar{y}(x) + \tilde{y}(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + \frac{1}{2}e^x.$$

Приклад 9.5. Знайти загальний розв’язок рівняння

$$y'' - 2y' + y = e^x(2x+1).$$

Розв’язання.

Відповідне однорідне рівняння буде $\bar{y}'' - 2\bar{y}' + \bar{y} = 0.$

Розв’язуючи характеристичне рівняння $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0,$ знаходимо, що корені будуть кратні $\lambda_1 = \lambda_2 = 1,$ тоді загальний розв’язок однорідного рівняння запишеться так:

$$\bar{y} = (C_1 + C_2 x)e^x.$$

Так як число $\lambda = 1$ являється коренем характеристичного рівняння кратності 2, то частковий розв’язок $\tilde{y}(x)$ будемо шукати у вигляді

$$\tilde{y}(x) = x^2 e^x (A_1 x + A_2).$$

Підставляючи $\tilde{y}(x)$, $\tilde{y}'(x)$ і $\tilde{y}''(x)$ у неоднорідне рівняння, одержимо тотожність:

$$e^x\left[x^2\left(A_1x+A_2\right)\ +4x\left(A_1x+A_2\right)\ +2\left(A_1x+A_2\right)\ +2A_1x^2+4A_1x\right]\ -$$
$$-e^x\left[2x^2\left(A_1x+A_2\right)\ +4x\left(A_1x+A_2\right)\ +2A_1x^2+e^xx^2\left(A_1x+A_2\right)\right]\ =e^x\left(2x+1\right)$$

Прирівнюючи коефіцієнти при x^3, x^2, x^1 і x^0, одержимо: $A_1=\frac{1}{3},\ A_2=\frac{1}{2}$.

Частковий розв'язок $\tilde{y}(x)=\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{3}\right)x^2e^x$, а загальний розв'язок даного рівняння буде: $y=e^x\left[\left(C_1+C_2x\right)+\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{3}\right)x^2\right]$.

Приклад 9.6. Знайти розв'язок неоднорідного рівняння
$$y''-4y'+4y=cos\,x.$$

Розв'язання.

Характеристичне рівняння $\lambda^2-4\lambda+4=0$ має кратний корінь $\lambda_{1,2}=2$ отже, загальний розв'язок однорідного рівняння $\bar{y}=e^{2x}\left(C_1+C_2x\right)$.

Частковий розв'язок будемо шукати у формі $\tilde{y}(x)=A\,cos\,x+B\,sin\,x$, де A і B - невизначені коефіцієнти.

Диференціюючи, отримаємо:
$$\tilde{y}'(x)=-A\,sin\,x+B\,cos\,x,\quad \tilde{y}''(x)=-A\,cos\,x-B\,sin\,x.$$

Підставляючи $\tilde{y}(x), \tilde{y}'(x)$ і $\tilde{y}''(x)$ у неоднорідне рівняння, будемо мати:
$$-A\,cos\,x-B\,cos\,x+4A\,sin\,x-4B\,cos\,x+4A\,cos\,x+4B\,sin\,x=cos\,x.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при $cos\,x$ і $sin\,x$, одержимо систему
$$\begin{cases}3A-4B=1,\\ 4A+3B=0,\end{cases}$$
з якої знаходимо $A=\frac{3}{25},\ B=-\frac{4}{25}$.

Частковий розв'язок $\tilde{y}(x)=\frac{3}{25}cos\,x-\frac{4}{25}sin\,x$.

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння буде:
$$y(x)=e^{2x}\left(C_1+C_2x\right)+\frac{1}{25}\left(3cos\,x-4\,sin\,x\right).$$

Приклад 9.7. Знайти загальний розв'язок рівняння $y''+y=cos\,x+sin\,x$.

Розв'язання.

Характеристичне рівняння $\lambda^2+1=0$ має корені $\lambda=\pm i$. Тому розв'язок однорідного диференціального рівняння буде мати вигляд:
$$\bar{y}(x)=C_1\,cos\,x+C_2\,sin\,x.$$

Оскільки $\alpha\pm\beta i=\pm i$ є коренями характеристичного рівняння, то частковий розв'язок знаходимо у вигляді: $\tilde{y}(x)=\left(A\,cos\,x+B\,sin\,x\right)x$.

Підставивши $\tilde{y}''(x),\ \tilde{y}(x)$ у задане рівняння, матимемо:
$$2A\,sin\,x+2B\,cos\,x=cos\,x+sin\,x.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при $sin\,x$ і $cos\,x$, одержимо систему рівнянь

$$\begin{cases} 2A=-1, \\ 2B=1, \end{cases} \quad \text{звідки } A=-\frac{1}{2}, B=\frac{1}{2}.$$

Отже, частковим розв’язком є функція $\tilde{y}(x)=\frac{1}{2}(-x\cos x+x\sin x)$. Загальний розв’язок заданого рівняння запишеться у вигляді:

$$y(x)=C_1\cos x+C_2\sin x-\frac{1}{2}(x\cos x-x\sin x).$$

Приклад 9.8. Знайти загальний і частковий розв’язок рівняння

$$y''-2y'+3y=e^x(\cos 2x+\sin 2x),$$

який задовольняє при цьому початкові умови $y(0)=0,\ y'(0)=1$.

Розв’язання.

Характеристичне рівняння $\lambda^2-2\lambda+3=0$ має корені

$$\lambda_{1,2}=1\pm 2i\ (\alpha=1, \beta=2).$$

Загальний розв’язок однорідного рівняння

$$\bar{y}=e^x(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x).$$

Так як числа $\alpha=1, \beta=2$ являються коренями характеристичного рівняння, то частковий розв’язок $\tilde{y}(x)$ знаходимо у вигляді

$$\tilde{y}=e^x x(A\cos 2x+B\cos 2x).$$

Обчислимо похідні $\tilde{y}'(x)$ і $\tilde{y}''(x)$:

$$\tilde{y}'(x)=e^x[(A\cos 2x+B\sin 2x)(x+1)+2x(B\cos 2x-A\sin 2x)],$$

$$\tilde{y}''(x)=e^x[(A\cos 2x+B\sin 2x)(2-3x)+(B\cos 2x-A\sin 2x)(x+1)4].$$

Підставляючи $\tilde{y}(x), \tilde{y}'(x)$ і $\tilde{y}''(x)$ у неоднорідне рівняння, одержимо рівняння

$$4(B\cos 2x-A\sin 2x)=\cos 2x+\sin 2x,$$

звідки $A=-\frac{1}{4}, B=\frac{1}{4}$.

Загальний розв’язок $y(x)=\bar{y}(x)+\tilde{y}(x)$ буде

$$y(x)=e^x\left[(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)-\frac{x}{4}(\cos 2x-\sin 2x)\right].$$

Сталі інтегрування знайдемо, виходячи з початкових умов: $C_1=0$.

$$y'(x)=e^x\,[(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)-\frac{x}{4}(\cos 2x-\sin 2x)+$$

$$+2(C_2\cos 2x-C_1\sin 2x)-\frac{1}{4}(\cos 2x-\sin 2x)+\frac{x}{2}(\sin 2x+\cos 2x)],\quad C_2=\frac{5}{8}.$$

Отже, маємо загальний розв’язок неоднорідного рівняння

$$y(x)=e^x\left(\frac{5}{8}\sin 2x-\frac{x}{4}(\cos 2x-\sin 2x)\right).$$

9.3. Інтегрування лінійного неоднорідного рівняння методом варіації постійних

Розглянемо неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами

$$y'' + py + qy = f(x). \qquad (1)$$

Якщо $f(x)$ не належить до вказаних вище спеціальних функцій, то методом добору знаходити частковий розв'язок не можна. Для інтегрування неоднорідного рівняння (1) застосуємо метод варіації сталих. Будемо шукати розв'язок неоднорідного рівняння у вигляді

$$y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x), \qquad (2)$$

де $C_1(x),\ C_2(x)$ - нові невідомі функції від *x*. Для їх знаходження необхідні два рівняння, які містять дані функції. Функції $C_2(x),\ C_1(x)$ повинні задовольняти ту умову, яку одержимо, якщо у вихідне рівняння замість *y(x)* підставимо вираз $C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x),$ то рівність не порушиться.

Накладемо на функції $C_2(x),\ C_1(x)$ додаткові умови.

Продиференціюємо (2): $y' = C_1(x)y_1' + C_2(x)y_2' + C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2$, де $C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0$; $y'' = C_1y_1'' + C_2y_2'' + C_1'y_1' + C_2'y_2'$.

Підставляючи вирази для y, y', y'' в неоднорідне рівняння, одержимо

$$C_1(x)[y_1'' + py_1' + qy_1] + C_2(x)[y_2'' + py_2' + qy_2] + C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x).$$

Вирази у квадратних дужках тотожно рівні нулю, оскільки $y_1(x)$ і $y_2(x)$ є розв'язками однорідного рівняння, отже

$$C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x). \qquad (3)$$

$y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$ буде розв'язком неоднорідного рівняння (1), якщо функції $C_1(x)$ і $C_2(x)$ задовольнятимуть систему рівнянь

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0, \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x). \end{cases}$$

Розв'язуємо цю систему, як лінійну алгебраїчну систему відносно $C_1'(x),\ C_2'(x)$:

$$C_1'(x) = \varphi_1(x), C_2'(x) = \varphi_2(x),$$

(тут $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ - відомі функції) та інтегруємо:

$$C_1(x) = \int \varphi_1(x)dx + C_1, C_2(x) = \int \varphi_2(x)dx + C_2,$$

де C_1, C_2 - сталі інтегрування. Підставляючи ці вирази для $C_1(x), C_2(x)$ у (2), знайдемо загальний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння (1):

$$y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + y_1(x)\int \varphi_1(x)dx + y_2(x)\int \varphi_2(x)dx,$$

де C_1, C_2 - довільні сталі.

Приклад 9.9. Знайти розв'язок рівняння $y'' + y = tgx$.

Розв'язання.

Складаємо характеристичне рівняння $\lambda^2 + 1 = 0,$ корені якого будуть $\lambda_{1,2} = \pm i,$ а тому загальний розв'язок однорідного рівняння

$$\bar{y}(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Частинний розв'язок розглядуваного рівняння за методом добору знаходити не можна, оскільки tg$x$ не належить до вказаного вище класу спеціальних функцій. Розв'язок рівняння будемо шукати методом варіації сталих:

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x),$$

де функції $C_1(x)$ і $C_2(x)$ потрібно знайти із системи рівнянь

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0, \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = tgx, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x = 0, \\ -C_1'(x)\sin x + C_2'(x)\cos x = tgx. \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему, одержуємо $C_1'(x) = -\dfrac{\sin^2 x}{\cos x};\ C_2'(x) = \sin x,$

звідки $\quad C_1(x) = \sin x - \ln tg\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right) + C_1^*, \quad C_2(x) = -\cos x + C_2^*.$

Загальний розв'язок запишемо у вигляді:

$$y = C_1^* \cos x + C_2^* \sin x - \cos x \cdot \ln tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right).$$

Інтегрування лінійного неоднорідного диференціального рівняння n-го порядку ($n \geq 1$) виконуємо аналогічно.

9.4. Лінійні диференціальні рівняння вищих порядків з сталими коефіцієнтами

У попередніх параграфах розглянуто методи знаходження загального і часткового розв'язків лінійних диференціальних рівнянь другого порядку із сталими коефіцієнтами. Ці методи можна застосувати також і до лінійних диференціальних рівнянь вищих порядків із сталими коефіцієнтами. Не розглядаючи детально теорію, з'ясуємо застосування цих методів на прикладах рівнянь такого типу.

Отже, нехай маємо диференціальне рівняння n-го порядку

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x), \tag{1}$$

де $a_i \ (i = 1, \overline{n})$ - сталі дійсні числа, а $f(x)$ - неперервна функція.

Якщо функція $f(x) \equiv 0$, то рівняння

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \tag{2}$$

називають лінійним однорідним диференціальним рівнянням n-го порядку.

Як і для однорідного диференціального рівняння другого порядку, шукатимемо розв'язок рівняння (2) методом Ейлера, а саме, у вигляді

$y = e^{\lambda x}$ де, λ – невідоме дійсне чи комплексне число, (3)

$$e^{\lambda x}\left(\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n\right) = 0. \quad (4)$$

Звідси випливає, що функція $y = e^{\lambda x}$ є розв'язком рівняння (2) тоді і тільки тоді, коли λ є коренем алгебраїчного рівняння

$$L\left[e^{\lambda x}\right] = e^{\lambda x}\varphi(\lambda) = 0, \quad (5)$$

що приводить до характеристичного рівняння

$$\varphi(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0. \quad (6)$$

- ❖ Знаходимо корені $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ характеристичного рівняння.

- ❖ За характером коренів виписуємо часткові лінійно незалежні розв'язки рівняння (2), керуючись тим, що:

  - ✓ кожному дійсному однократному кореню λ характеристичного рівняння (6) відповідає частковий розв'язок $e^{\lambda x}$ рівняння (2);
  - ✓ кожній парі однократних комплексно-спряжених коренів $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ і $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ відповідають два лінійно незалежні часткові розв'язки $e^{\lambda x} \cos\beta\, x$ і $e^{\lambda x} \sin\beta\, x$ рівняння (2);
  - ✓ кожному дійсному кореню λ кратності s відповідає s лінійно незалежних часткових розв'язки $e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, x^2e^{\lambda x}, \ldots, x^{s-1}e^{\lambda x}$;
  - ✓ кожній парі однократних комплексно-спряжених коренів $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ кратності s відповідає $2s$ часткових розв'язки рівняння (2)
  $$e^{\alpha x} \cos\beta\, x, xe^{\alpha x} \cos\beta\, x, x^2e^{\alpha x} \cos\beta\, x, \ldots, x^{s-1}e^{\alpha x} \cos\beta\, x,$$
  $$e^{\alpha x} \sin\beta\, x, xe^{\alpha x} \sin\beta\, x, x^2e^{\alpha x} \sin\beta\, x, \ldots, x^{s-1}e^{\alpha x} \sin\beta\, x;$$
  - ✓ кількість побудованих таким чином часткових розв'язків рівняння (2) рівна порядку n цього рівняння.

Маючи n лінійно незалежних часткових розв'язків $y_1, y_2, \ldots, y_n$ рівняння (2), які утворюють фундаментальну систему, одержимо загальний розв'язок цього рівняння

$y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \ldots + C_ny_n(x)$, де $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_n$ - довільні постійні.

Приклад 9.10. Знайти загальний розв'язок рівняння $y''' - y'' - 3y' = 0$.

Розв'язання.

Складаємо характеристичне рівняння: $\lambda^3 - 2\lambda^2 - 3\lambda = 0$. Його корені $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = -1,\ \lambda_3 = 3$, оскільки вони дійсні і різні, то загальний розв'язок має вигляд:

$$y = C_1 + C_2e^{-x} + C_3e^{3x}.$$

Приклад 9.11. Знайти загальний розв'язок рівняння $y''' + 4y'' + 13y' = 0$.

Розв'язання.

Характеристичне рівняння $\lambda^3 + 4\lambda^2 + 13\lambda = 0$ має такі корені:

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -2 - 3i, \lambda_3 = -2 + 3i.$$

Загальний розв'язок буде мати вигляд

$$y = C_1 + C_2 e^{-2x} \cos 3x + C_3 e^{-2x} \sin 3x.$$

Приклад 9.12. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y^V - 2y^{IV} + 2y''' - 4y'' + y' - 2y = 0.$$

Розв'язання.

Складаємо характеристичне рівняння $\lambda^5 - 2\lambda^4 + 2\lambda^3 - 4\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ або $(\lambda - 2)(\lambda^2 + 1)^2 = 0$, його корені будуть такими:

$\lambda_1 = 2$ - однократний і $\lambda_{2-5} = \pm i$ - пара двократних уявних коренів.

Загальний розв'язок буде мати вигляд:

$$y = C_1 e^{2x} + (C_2 + C_3 x)\cos x + (C_4 + C_5 x)\sin x.$$

Приклад 9.13. Розв'язати рівняння $y^{IV} + 4y''' + 8y'' + 8y' + 4y = 0$.

Розв'язання.

Записуємо характеристичне рівняння $\lambda^4 + 4\lambda^3 + 8\lambda^2 + 8\lambda + 4 = 0$, або $(\lambda^2 + 2\lambda + 2)^2 = 0$, яке має двократні комплексні корені

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -1 - i; \lambda_3 = \lambda_4 \ -1 + i$$

Загальний розв'язок буде мати вигляд:

$$y = C_1 e^{-x} \cos x + C_2 e^{-x} \sin x + C_3 x e^{-x} \cos x + C_4 x e^{-x} \sin x,$$

або $y = e^{-x}(C_1 + C_3 x)\cos x + e^{-x}(C_2 + C_4 x)\sin x$.

9.5. Неоднорідні рівняння

Загальний розв'язок шукаємо у вигляді $y(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i \bar{y}_i + \tilde{y}(x)$.

Приклад 9.14. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y''' - y'' + y' - y = x^2 + x.$$

Розв'язання.

Характеристичне рівняння $\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 = 0$ має різні корені $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -i, \lambda_3 = i$, тому загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння буде $\bar{y}(x) = C_1 e^x + C_2 \cos x + C_3 \sin x$.

Оскільки число *0* не являється коренем характеристичного рівняння, то частинний розв'язок даного рівняння шукаємо у вигляді

$$\tilde{y}(x)=A_1x^2+A_2x+A_3,$$

де A_1, A_2, A_3 – невідомі коефіцієнти, які треба визначити.

Підставляючи вираз для $\tilde{y}(x)$ в диференціальне рівняння, отримаємо:

$$A_1x^2+(2A_1-A_2)x+(A_2-2A_1-A_3)=x^2+x.$$

Прирівнявши в цій тотожності коефіцієнти при однакових степенях x одержимо систему рівнянь $\begin{cases} A_1=1, \\ 2A_1-A_2=1, \\ -2A_1+A_2-A_3=0. \end{cases}$

Розв'язавши систему знаходимо, що $A_1=-1, A_2=-3, A_3=-1$. Отже, частинний розв'язок буде $\tilde{y}(x)=-x^2-3x-1$.

Тоді загальний розв'язок $y(x)$ даного рівняння матиме вигляд:

$$y(x)=\bar{y}(x)+\tilde{y}(x)=C_1e^x+C_2\cos x+C_3\sin x-x^2-3x-1.$$

Приклад 9.15. Знайти частковий і загальний розв'язок рівняння

$$y'''-y''=12x^2+6x.$$

Розв'язання.

Характеристичне рівняння $\lambda^3-\lambda^2=0$ має корені $\lambda_1=\lambda_2=0, \lambda_3=1$, тому загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння буде:

$$\bar{y}(x)=C_1+C_2x+C_3e^x.$$

Оскільки число 0 є двократним коренем характеристичного рівняння, то частковий розв'язок знаходимо у вигляді:

$$\tilde{y}(x)=x^2\left(A_1x^2+A_2x+A_3\right)=A_1x^4+A_2x^3+A_3x^2.$$

Знайдемо похідні:

$$\tilde{y}'(x)=4A_1x^3+3A_2x^2+2A_3x,$$
$$\tilde{y}''(x)=12A_1x^2+6A_2x+2A_3,$$
$$\tilde{y}'''(x)=24A_1x+6A_2.$$

Підставляючи $\tilde{y}'''(x)$і $\tilde{y}''(x)$ у рівняння, матимемо тотожність:

$$-12A_1x^2+(24A_1-6A_2)x+(6A_2-2A_3)=12x^2+6x,$$

звідси

$$\begin{cases} 12A_1=12 \\ 24A_1-6A_2=6. \\ 6A_2-2A_3=0 \end{cases}$$

Ця система має розв'язки: $A_1=-1, A_2=-5, A_3=-15$.

Отже, частковий розв'язок: $\tilde{y}(x)=-x^4-15x^3-15x^2$.

Загальний розв'язок даного рівняння запишеться у вигляді

$$y(x)=C_1+C_2x+C_3e^x-x^4-5x^3-15x^2.$$

Приклад 9.16. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' - 6y' + 9y = 25\, e^{x}\, sin\, x\, .$$

Розв'язання.

Характеристичне рівняння $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$ має корені $\lambda_1 = \lambda_2 = 3.$

Загальний розв'язок $\bar{y}(x)$ однорідного рівняння буде:

$$\bar{y}(x) = (C_1 + C_2 x)e^{3x}\, .$$

Частковий розв'язок шукатимемо у вигляді

$$\tilde{y}(x) = e^{x}\left(A\, cos\, x + B\, sin\, x\right).$$

Підставляючи $\tilde{y}''(x), \tilde{y}'(x)$ і $\tilde{y}(x)$ у дане рівняння і скоротивши на e^{x}, матимемо тотожність $(3A - 4B)cos\, x + (4A + 3B)sin\, x = 25\, sin\, x\, .$

Прирівнюючи коефіцієнти при $sin\, x$ і $cos\, x$, дістаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} 3A - 4B = 0, \\ 4A + 3B = 25, \end{cases} \text{ звідки } \; A = 4, B = 3\, .$$

Частковий розв'язок $\tilde{y}(x) = e^{x}\left(4\, cos\, x + 3\, sin\, x\right).$

Отже, загальним розв'язком неоднорідного рівняння є функція

$$y(x) = (C_1 + C_2 x)e^{3x} + e^{x}\left(4\, cos\, x + 3\, sin\, x\right).$$

10. СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Лінійною системою з сталими коефіцієнтами називається система виду:

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + f_i(t) \ \left(i = \overline{1,n}\right), \tag{1}$$

де: a_{ij} - задані числа, а $f_i(t)$ - задані функції.

Лінійна система називається однорідною, якщо всі $f_i(t) \equiv 0$.

Розв'язком системи (1) на інтервалі (*a, b*) називається сукупність функцій

$$x_1 = \varphi_1(t), x_2 = \varphi_2(t), ..., x_n = \varphi_n(t), \tag{2}$$

визначених і неперервно-диференційованих на інтервалі (*a, b*), якщо функції (2) перетворюють рівняння системи (1) у тотожність, які є справедливі для всіх значень *t* із (*a, b*).

Задача знаходження розв'язку $x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), ..., x_n = x_n(t),$ який задовольняє початковим умовам $x_1(t_0) = x_{10}, x_2(t_0) = x_{20}, ..., x_n(t_0) = x_{n0}$ називається задачею Коші.

Ми розглянемо один із найбільш поширених методів розв'язку систем лінійних диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами.

Зведення системи до одного рівняння n-го порядку

Проілюструємо цей метод на прикладі системи двох рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax + dy + f(t), & (\text{а}) \\ \dfrac{dy}{dt} = cx + ey + \varphi(t). & (\text{б}) \end{cases} \tag{3}$$

Тут *a*, *b*, *c*, *e* - сталі коефіцієнти, $f(t), \varphi(t)$ - задані функції, а $x(t)$ і $y(t)$ – шукані функції.

Із рівняння (а) знаходимо:

$$y = \frac{1}{b}\left(\frac{dx}{dt} - ax - f(t)\right). \tag{4}$$

Підставляючи в рівняння (б) замість y праву частину рівняння (4), а замість $\frac{dy}{dt}$ похідну від правої частини (4), отримаємо рівняння другого порядку відносно $x(t)$: $A\frac{d^2x}{dt^2} + B\frac{dx}{dt} + Cx + P(t) = 0$, де *A, B, C* - сталі.

Звідси знаходимо $x = x(t, C_1, C_2)$ і підставивши знайдене значення *x*, а також $\frac{dx}{dt}$ в (4), знайдемо *y*.

Приклад 10.1. Проінтегрувати систему рівнянь $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + 1, & (\text{в}) \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 1. & (\text{г}) \end{cases}$

Розв'язання.

Із (в) знаходимо $y = \dfrac{dx}{dt} - 1$ (д). Підставляючи (д) в (г), одержимо лінійне диференціальне рівняння із сталими коефіцієнтами другого порядку

$$\frac{d^2x}{dt^2} - x - 1 = 0. \qquad (\text{е})$$

Загальний розв'язок рівняння (е) матиме вигляд:

$$x(t) = C_1e^t + C_2e^{-t} - 1. \qquad (\text{ж})$$

Підставляючи похідну $\dfrac{dx}{dt} = C_1e^t - C_2e^{-t}$ в (д) матимемо:

$$y = C_1e^t - C_2e^{-t} - 1.$$

Загальний розв'язок системи буде таким: $\begin{cases} x = C_1e^t + C_2e^{-t} - 1, \\ y = C_1e^t - C_2e^{-t} - 1. \end{cases}$

Приклад 10.2. Проінтегрувати систему:

$$\frac{dx}{dt} = y + z,\ \frac{dy}{dt} = x + z,\ \frac{dz}{dt} = x + y.$$

Розв'язання.

Продиференціюємо перше рівняння системи по t і користуючись другим і третім рівнянням , одержимо:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dy}{dt} + \frac{dz}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = 2x + \frac{dx}{dt};\ \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} - 2x = 0.$$

Загальний розв'язок даного диференціального рівняння:

$$x = C_1e^{-t} + C_2e^{2t}.$$

Віднявши від першого рівняння системи друге рівняння матимемо:

$$\frac{dy}{dt} + y = \frac{dx}{dt} + x.$$

З даної рівності випливає рівняння $\dfrac{dy}{dt} + y = 3C_2e^{2t}$, загальний розв'язок якого $y = C_3e^{-t} + C_2e^{2t}$. З першого рівняння системи знаходимо $z = \dfrac{dx}{dt} - y$, або

$$z = -C_1e^{-t} + C_2e^{2t} - C_3e^{-t} - C_2e^{2t} = -(C_1 + C_2)e^{-t} + C_2e^{2t}.$$

Розв'язки $\begin{cases} x = C_1e^{-t} + C_2e^{2t}, \\ y = C_3e^{-t} + C_2e^{2t}, \\ z = -(C_1 + C_2)e^{-t} + C_2e^{2t} \end{cases}$ утворюють загальний розв'язок системи.

11. ЗАСТОСУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ

Приклад 11.1. Швидкість охолодження тіла у повітрі пропорційна різниці між температурою тіла і температурою повітря. Температура повітря дорівнює 60°. Відомо, що на протязі 20 хвилин тіло охололо від 100° до 60°. Визначити закон зміни температури тіла в залежності від часу.

Розв'язання.

Позначимо час через t, а температуру через T, тоді швидкість охолодження тіла, інакше, швидкість зміни його температури, буде рівна $\dfrac{dT}{dt}$.

Отже $\dfrac{dT}{dt}=k\left(T-20\right)$,

де $k-$коефіцієнт пропорційності. Відокремлюючи змінні, одержимо

$$\frac{dT}{T-20}=k\,dt,\quad \int\frac{dT}{T-20}=k\int dt,$$

$$ln\left|T-20\right|=kt+lnC,\quad T-20=C\cdot e^{kt},\quad T=20+C\cdot e^{kt}.$$

Для визначення сталих k і C скористуємось умовами задачі:

$T\left(0\right)=100^\circ,\quad T\left(20\right)=60^\circ.$

$$\begin{cases}100=20+C\\60=20+C\cdot e^{20k}\Rightarrow C=80,\end{cases}\qquad \text{Звідси } e^{20k}=\frac{1}{2},\ e^{k}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{20}}.$$

$$T=20+80\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}}.$$

Приклад 11.2. У резервуар, який містить 10 кг солі на 100л суміші, кожну хвилину поступає 30л води і витікає 20л суміші. Визначити, яка кількість солі залишиться у резервуарі через t хв, вважаючи, що суміш перемішується миттєво.

Розв'язання.

Нехай $x-$кількість солі в резервуарі у момент часу t і $x+dx-$кількість солі в момент часу $t+dt$. Очевидно, що $dx<0$ при $dt>0$. Об'єм суміші в резервуарі в момент часу t, дорівнює: $V=100+30\cdot t-20t=100+10t$, тому концентрація солі (тобто кількість солі, що міститься в одиниці об'єму суміші) в момент часу t буде рівна $\dfrac{x}{100+10t}$.

Зміну кількості солі – dx за проміжок dt ми одержимо, якщо об'єм суміші, яка витікає за цей проміжок, 20 dt помножимо на концентрацію солі.

$$-dx=\frac{x}{100+10t}\cdot 20dt,\ dx=-\frac{2x}{10+t}\cdot dt.$$

З умови задачі $x\big|_{t=0}=10.$

Відокремлюючи змінні та проінтегрувавши, маємо:

$$\frac{dx}{x}=-\frac{2}{10+t}dt,\ \int\frac{dx}{x}=-2\int\frac{dt}{10+t},$$

$$ln|x|=-2ln|10+t|+ln\,C,$$

$$x=\frac{C}{(10+t)^2}.$$

З початкової умови: $10=\frac{C}{100},\ C=1000.$ Отже, $x=\frac{1000}{(10+t)^2}.$

Приклад 11.3. Швидкість розпаду радію в кожний момент пропорційна наявній його масі. Визначити, який процент маси m_0 розпадеться через 200 років, якщо відомо, що період напіврозпаду радію дорівнює 1590 років.

Розв'язання.

Нехай $m(t)-$кількість радію в момент часу $t.$

Тоді $\frac{dm}{dt}=-km,\ \frac{dm}{m}=-k\,dt,\ ln|m|=-kt+lnC,\quad m=C\cdot e^{-kt}.$

Сталу C знайдемо з початкової умови

$$m(0)=m_0,\ m_0=C\cdot e^{-k\cdot 0},\ C=m_0,\ m=m_0\,e^{-kt}.$$

$$m(1590)=\frac{m_0}{2},\qquad \frac{m_0}{2}=m_0\ e^{-k\cdot 1590},\ -k\cdot 1590=-\ell n2,\quad k=0,00044.$$

$$m(t)=m_0\ e^{-0,00044t}.$$

Кількість радію, що залишиться через 200 років:

$m(200)=m_0\cdot e^{-0,00044\cdot 200}=m_0e^{-0,088}=0,915m_0.$

Отже, через 200 років розпадеться лише 8,5% радію.

Приклад 11.4. Трубопровід теплової магістралі (діаметр 20 см) захищений ізоляцією товщиною 10 см; величина коефіцієнта теплопровідності $k=0,00017$. Температура труби 160°; температура зовнішнього покриття 30°. Знайти розподіл температури всередині ізоляції, а також кількість тепла, що віддається 1 погонним метром труби.

Розв'язання.

Якщо тіло знаходиться в стаціонарному тепловому стані і температура T в кожній точці є функцією тільки однієї координати x, то згідно закону теплопровідності Фур'є, кількість тепла, що віддається за секунду:

$Q=-kF(x)\cdot\frac{dT}{dx}=const,$ де $F(x)-$площа перерізу на віддалі $x,\ k-$коефіцієнт теплопровідності. Тут $F(x)=2\pi x\cdot l,\quad l-$довжина труби в см. Після відокремлення змінних диференціальне рівняння задачі набуде вигляду:

$$dT = -\frac{Q}{kF(x)}\ dx = -\frac{Q}{k\cdot 2\pi l}\ \frac{dx}{x}.$$

Інтегруючи обидві частини цієї рівності, знаходимо:

$$\text{а)} \int_{160}^{30} dT = -\frac{Q}{0,00017\cdot 2\pi l}\int_{10}^{20}\frac{dx}{x},\ \text{б)} \int_{160}^{T} dT = -\frac{Q}{0,00017\cdot 2\pi l}\int_{10}^{x}\frac{dx}{x},$$

$$30-160 = -\frac{Q}{0,00017\cdot 2\pi l} ln\, x\Big|_{10}^{20} = -\frac{Q}{0,00017\cdot 2\pi l} ln 2,$$

$$T-160 = -\frac{Q}{0,00017\cdot 2\pi l} ln\, x\Big|_{10}^{x} = -\frac{Q}{0,00017\cdot 2\pi l} ln\ 0,1x.$$

Розділивши почленно останнє рівняння на попереднє, одержимо:

$$\frac{T-160}{-130} = \frac{ln 0,1x}{ln 2};\quad T = 591,8 - 431,8\, lg x.$$

При $l = 100$ см маємо: $Q = \dfrac{200\pi\cdot 130\cdot 0,00017}{0,69315}$

Кількість тепла, яка віддається на протязі доби, дорівнює:

$24\cdot 60\cdot 60\cdot Q = 1\ \ 730\ \ 600$ кал.

Приклад 11.5. Ізольованому провіднику надано заряд Q_0. Внаслідок недосконалості ізоляції провідник поступово втрачає свій заряд. Швидкість втрати заряда в даний момент пропорційна наявному заряду провідника. Який заряд залишиться на провіднику через час t, якщо за першу хвилину втрачено 0,1 Q_0 заряду ?

Розв'язання.

Нехай $Q = Q(t) -$ заряд провідника в момент часу t. Швидкість втрати заряду в цей момент дорівнює $-\dfrac{dQ}{dt}$. За умовою задачі $-\dfrac{dQ}{dt} = kQ$, де $k -$ коефіцієнт пропорційності. Відокремлюючи змінні та інтегруючи, одержимо

$$Q = C\cdot e^{-kt}$$

З початкової умови $Q(0) = Q_0$ визначаємо C: $Q_0 = Ce^{-k\cdot 0}$, $C = Q_0$, $Q = Q_0\cdot e^{-kt}$.

Згідно додаткової умови:

$Q(1) = 0,9Q_0$, $0,9Q_0 = Q_0\cdot e^{-kt}$, $e^{-k} = 0,9$, $Q = Q_0\cdot(0,9)^t$.

Приклад 11.6. Циліндричну котушку виготовлено з мідного дроту. При проходженні електричного струму через котушку виділяється теплота. Вивести формулу для температури $T = T(t)$ усталеного режиму як функції часу t.

Розв'язання.

Нехай T_0 – температура середовища, C – питома теплоємність міді; ρ – густина міді; V – об'єм; S – площа поверхні котушки; q – кількість тепла, яка виділяється за одиницю часу; k – коефіцієнт теплопровідності.

Тепло, яке виділяється в котушці при проходженні через неї електричного струму, витрачається на підвищення температури ΔT та втрачається внаслідок теплообміну з навколишнім середовищем за законом Ньютона. Звідси, за час Δt:

$$q\cdot\Delta t = C\cdot V\cdot\rho\cdot\Delta T + kS\left(T-T_0\right)\cdot\Delta t$$

Розділивши на Δt і перейшовши до границі при $\Delta t\to 0$, одержимо диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними

$$\frac{dT}{dt} = -\alpha\left(T-T_0\right)+\beta,\quad \alpha=\frac{ks}{C\cdot V\cdot\rho},\quad \beta=\frac{q}{C\cdot V\cdot\rho}.$$

Відокремимо змінні та проінтегруємо

$$\frac{dT}{\beta-\alpha\left(T-T_0\right)}=dt,\quad -\frac{1}{\alpha}ln\left|\beta-\alpha\left(T-T_0\right)\right|=t+C.$$

Початкова умова : $T(0)=T_0$

$$C=-\frac{1}{\alpha}ln\,\beta,\quad ln\left|\beta-\alpha\left(T-T_0\right)\right|=-\alpha t+ln\,\beta,$$

$$T=T_0+\frac{\beta}{\alpha}\left(1-e^{-\alpha t}\right),\ \frac{\beta}{\alpha}=\frac{q}{ks}.$$

Приклад 11.7. Поглинання світлового потоку тонким шаром води пропорційне товщині шару й потоку, який падає на його поверхню. При проходженні крізь шар завтовшки 1 *м* поглинається $\frac{1}{2}$ початкового світлового потоку. Визначити, яка частина світлового потоку дійде до глибини 3 *м*.

Розв'язання.

Позначимо через $Q(x)$ світловий потік на глибині x від поверхні шару. При проходженні крізь шар води товщиною dx поглинається світловий потік $dQ=-k\cdot Q\cdot dx$, де k – коефіцієнт пропорційності.

Звідси $\frac{dQ}{Q}=-k\,dx,\ \ell n\left|Q\right|=-kx+\ell n\,C,\ Q=C\cdot e^{-kx}$

Нехай початковий світловий потік дорівнює Q_0, тобто $Q(0)=Q_0,\ \ Q(1)=\frac{1}{2}Q_0.$

Отже $Q=Q_0\cdot e^{-kx},\ \frac{1}{2}Q_0=Q_0\ e^{-k},\quad e^{-k}=\frac{1}{2}\quad і\quad Q(x)=Q_0\left(\frac{1}{2}\right)^x.$

До глибини 3м дійде світловий потік $Q(3)=Q_0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{Q_0}{8}.$

Приклад 11.8. Швидкість збільшення площі молодого листка вікторії-регії, який має форму круга, пропорційна радіусу листка й кількості сонячного світла, що падає на нього. Кількість сонячного світла пропорційна площі листка й косинусу кута між напрямом променів і вертикаллю до листка. Визначити залежність між площею S листки та часом t, якщо о 6 *год* ця площа дорівнювала 900 *см*^{2}, а о 18 *год* того самого дня – 1600 *см*^{2}. Вважати, що кут між напрямом сонячного променя й вертикаллю о 6 *год* і о18 *год* становить 90°, а опівдні – 0°.

Розв'язання.

Нехай $S = S(t)-$площа листка в момент часу t. За початковий момент часу візьмемо 6 годину, тоді $S(0)=900см^2$, *а* $S(12)=1600см^2$. Швидкість збільшення площі листка $S' = kr\cdot Q$, де $k-$коефіцієнт пропорційності; $r-$радіус листка; $Q-$кількість сонячного світла. Згідно умови $Q = k_1 S\cdot\cos\alpha(t)$, де k_1-коефіцієнт пропорційності; $\alpha-$кут між напрямом променя й вертикаллю до листка:

$$\alpha = at+b,\ \alpha(0) = -\frac{\pi}{2},\ \ \alpha(6)=0,\ \ \ \alpha(12)=\frac{\pi}{2},$$

Звідси $a=\frac{\pi}{12},\ \ b=-\frac{\pi}{2},\ \ \ \alpha=\frac{\pi}{12}(t-6).$

Отже $Q = k_1 S\cos\frac{\pi}{12}(t-6),\ \ \ r=\sqrt{\frac{s}{\pi}};\ \ \frac{dS}{dt}=\frac{k\cdot k_1}{\sqrt{\pi}}\ \ \ S^{3/2}\cos\frac{\pi}{12}(t-6).$

Відокремимо змінні та проінтегруємо $-\frac{1}{\sqrt{S}}=\frac{6k\cdot k_1}{\pi\sqrt{\pi}}\ \sin\frac{\pi}{12}(t-6)+C.$

З умов $S(0)=900,\ \ \ \ S(12)=1600,\ C=-\frac{7}{240},\ \ \ \ \ k\cdot k_1=\frac{\pi\sqrt{\pi}}{1440}.$

Підставивши ці значення в останню рівність то розв'язавши її відносно S, матимемо: $S=\frac{57600}{\left[7-\sin\frac{\pi}{12}(t-6)\right]^2}.$

Приклад 11.9. Точка, маса якої дорівнює m, рухається прямолінійно; на неї діє сила, пропорційна часу (коефіцієнт пропорційності дорівнює k_1), який пройшов з моменту, коли швидкість була рівна нулю. Крім того, на точку діє сила опору середовища, яка пропорційна швидкості (коефіцієнт пропорційності дорівнює k). Знайти залежність швидкості від часу.

Розв'язання.

Згідно другого закону динаміки $m\frac{dv}{dt}=k_1t-kv,\ \ \ \ v(0)=0$. Одержали лінійне диференціальне рівняння $m\frac{dv}{dt}+kv=k_1t.$ Розв'язок шукаємо у вигляді

$$v=u(t)\cdot\varphi(t), \qquad m(u'\cdot\varphi+u\cdot\varphi')+k\cdot u\cdot\varphi=k_1t,$$

$$mu'\cdot\varphi+u[m\varphi'+k\varphi]=k_1t, \quad m\varphi'+k\varphi=0, \quad m\frac{d\varphi}{dt}=-k\varphi.$$

Відокремлюємо змінні та інтегруємо

$$m\frac{d\varphi}{\varphi}=-k\,dt, \quad m\int\frac{d\varphi}{\varphi}=-k\int dt, \; m\,ln|\varphi|=-kt, \quad \varphi=e^{-\frac{k}{m}t}.$$

$$m\cdot e^{-\frac{k}{m}t}\cdot u'=k_1t, \quad u'=\frac{k_1}{m}e^{\frac{k}{m}t}\cdot t$$

$u=\frac{k_1}{m}\int t\cdot e^{\frac{k}{m}t}dt=\frac{k_1}{k}\left(t-\frac{m}{k}\right)e^{\frac{k}{m}t}+C$. Отже $v=\frac{k_1}{k}\left(t-\frac{m}{k}\right)+C\,e^{-\frac{k}{m}t}$

Задовольняємо початкову умову:

$$O=-\frac{k_1m}{k^2}+C, \qquad C=\frac{k_1m}{k^2}, \; v=\frac{k_1m}{k^2}\left(e^{-\frac{k}{m}t}-1\right)+\frac{k_1}{k}t.$$

Приклад 11.10. Знайти струм в котушці в момент часу t, якщо її опір R, коефіцієнт індуктивності L, початковий струм $I_0=0$, електрорушійна сила змінюється за законом $E=E_0\sin wt$.

Розв'язання.

За законом Кірхгофа:

$L\frac{dI}{dt}+RI=E=E_0\cdot\sin wt$ – лінійне диференціальне рівняння 1-го порядку.

$$I=u(t)\cdot v(t), \quad L(u'v+uv')+R\cdot u\cdot v=E_0\sin wt, Lu'v+u[L\cdot v'+Rv]=E_0\sin wt,$$

$$LV'+R\cdot V=0, \quad L\frac{dv}{dt}=-RV, \quad L\frac{dv}{v}=-Rdt, L\int\frac{dv}{v}=-R\int dt, \quad ln|v|=-\frac{R}{L}t.$$

$$V=e^{-\frac{R}{L}t}, \qquad L\cdot u'\,e^{-\frac{R}{L}t}=E_0\;\sin wt, u'=\frac{E_0}{L}e^{\frac{R}{L}t}\sin wt; \; u=\frac{E_0}{L}\int e^{\frac{R}{L}t}\cdot\sin wt\,dt.$$

$$u=\frac{E_0}{L}\;\frac{1}{\frac{R^2}{L^2}+w^2}\;e^{\frac{R}{L}t}\left(\frac{R}{L}\sin wt-w\cos wt\right)+C,$$

$$I=C\cdot e^{-\frac{R}{L}t}+\frac{E_0}{R^2+L^2w^2}(R\;\sin wt-Lw\cos wt).$$

Задовольняємо початкову умову $I(0)=0$

$$O=C-\frac{LwE_0}{R^2+L^2w^2}, \quad C=\frac{LwE_0}{R^2+L^2w^2},$$

$$I=\frac{E_0}{R^2+L^2w^2}\left[Lwe^{-\frac{R}{L}t}+R\sin wt-Lw\cos wt\right].$$

Приклад 11.11. Якщо в якомусь процесі одна речовина перетворюється в іншу, причому швидкість утворення продукту пропорційна наявній кількості перетворюваної речовини, то таке явище називають процесом (або реакцією) першого порядку.

Нехай речовина, початкова кількість якої m_0, перетворюється в іншу речовину, а з утвореного продукту негайно починає одержуватись другий продукт. Обидва процеси проходять як процеси першого порядку з коефіцієнтами пропорційності k_1 та k_2.

Яка кількість другого продукту утвориться через t одиниць часу після початку процесу ?

Розв'язання.

Нехай $x-$кількість першого продукту, що утворився через t одиниць часу, $y-$кількість другого продукту. Тоді $\frac{dx}{dt}=k_1(m_0-x)$, $\frac{dy}{dt}=k_2(x-y)$.

Перше рівняння є рівнянням з відокремлюваними змінними:

$$\frac{dx}{m_0-x}=k_1\,dt,\quad \int\frac{dx}{m_0-x}=k_1\int dt,\, ln(m_0-x)=-k_1t+ln\,C_1 \quad x=m_0-C_1e^{-k_1t}.$$

$$x(0)=0,\quad c_1=m_0,\quad x=m_0\left(1-e^{k_1t}\right).$$

Підставляємо цю функцію у друге диференціальне рівняння:

$$\frac{dy}{dt}=k_2\left[m_0\left(1-e^{-k_1t}\right)-y\right],\ \frac{dy}{dt}+k_2\,y=k_2\,m_0\left(1-e^{-k_1t}\right).$$

Одержали лінійне рівняння.

$$y=u(t)\cdot v(t),\quad u'v+u\cdot v'+k_2\cdot u\cdot v=k_2m_0\left(1-e^{-k_1t}\right),\, v'+k_2v=0,\quad \int\frac{dv}{v}=-k_2\int dt,$$

$$ln|v|=-k_2t,\quad v=e^{-k_2t}.$$

$$u'=k_2m_0\left(e^{k_2t}-e^{(k_2-k_1)t}\right),\ u=k_2m_0\left(\frac{1}{k_2}e^{k_2t}-\frac{1}{k_2-k_1}e^{(k_2-k_1)t}\right)+C_2.$$

$$y=k_2m_0\,.$$

З умови $y(0)=0,\left(\frac{1}{k_2}-\frac{1}{k_2-k_1}e^{-k_1t}\right)+C_2\,e^{-k_2t}.$

Визначаємо $C_2=\frac{k_1m_0}{k_2-k_1},\ y=m_0+\frac{m_0}{k_1-k_2}\left(k_2\,e^{-k_1t}-k_1\,e^{-k_2\,t}\right).$

Приклад 11.12 Віддаль між рейками залізничної колії $c=1{,}6\,м.$ Найбільше навантаження від електровозу на кожну рейку складає $p=9т.$ Поперечний брус залізничного мосту лежить на двох фермах, розташованих на віддалі l одна від іншої. Момент інерції площі перерізу бруса $I=45\,000\,см^4$, модуль пружності $E=10^5\,{}^{кг}\!\big/_{см^2}$. Знайти віддаль l між фермами з умови, щоб допустимий прогин поперечного бруса в середині був рівний 0,2 см.

Розв'язання.

Визначимо рівняння пружної лінії балки і обчислимо прогин в її середині. Радіус кривини R пружної лінії для балок будь-якого перерізу знаходиться з формули $R = \frac{EI}{M}$, де M – згинний момент для даного перерізу, який дорівнює алгебраїчній сумі моментів відносно нейтральної осі всіх зовнішніх сил, прикладених до бруса з однієї сторони перерізу.

Оскільки згини балок дуже малі, то у формулі $R = \frac{\left(1+\left(y'\right)^2\right)^{3/2}}{y''}$ можна знехтувати величиною $\left(y'\right)^2$. Звідси $\frac{1}{y''} = \frac{EI}{M}$, $y'' = \frac{M}{EI}$.

Поперечний брус це балка на двох опорах A і B, яка навантажена двома зосередженими силами P, прикладеними в точках D і E. Реакції опор $N = p$. Для будь-якого перерізу F на ділянці DE згинний момент $M = p\left(l-a-x\right) - P\left(l-x\right)$; $M = -pa$; $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{pa}{EI}$.

Проінтегрувавши, маємо $y = -\frac{pa}{EI}\left(\frac{x^2}{2} + C_1x + C_2\right)$.

З початкових умов $x = 0, y = 0$ та $x = l,\ y = 0$: $C_1 = -\frac{l}{2}$, $C_2 = 0$.

$$y = \frac{p}{2}\frac{a\cdot x}{E\cdot I}\left(l-x\right).$$

При $x = \frac{l}{2}$ одержимо прогин середини поперечного бруса: $h = \frac{p\cdot al^2}{8EI}$

Так як $l = 2a + c, то\ h = \frac{p}{8EI}a\left(2a+c\right)^2$, $4a^3 + 4ca^2 + c^2a - \frac{8EIh}{p} = 0$.

Підставляючи числові дані та розв'язавши алгебраїчне рівняння, одержимо $a = 20 см.$

Шукана віддаль між фермами $l = 2a + C = 2 м.$

Приклад 11.13. Ланцюг довжиною $l = 4$ сповзає з гладкого горизонтального столу. В початковий момент руху зі столу звисав кінець ланцюга довжиною $a = 0{,}5 см.$ Нехтуючи тертям, знайти час сповзання всього ланцюга зі столу.

Розв'язання.

У будь-який момент часу t на ланцюг діє сила F, яка дорівнює вазі ланцюга, що звісився на даний момент зі столу. Позначимо вагу всього ланцюга p, тоді:

$\frac{F}{p} = \frac{x}{l}$, тобто $F = \frac{P}{l}x = \frac{mg}{l}x$, де m – маса ланцюга.

Згідно 2-го закону динаміки:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{mg}{l}x, \quad \frac{d^2x}{dt^2}-\frac{g}{l}x=0.$$

Підставляючи числові значення і взявши наближено $g=10\frac{м}{сек^2}$, одержимо лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку $\frac{d^2x}{dt^2}-2,5x=0$.

Характеристичне рівняння: $k^2-2,5=0, \ k_1=\sqrt{2,5}, \ k_2=-\sqrt{2,5}.$

Загальний розв'язок рівняння має вигляд: $x=C_1\,e^{\sqrt{2,5}\,t}+C_2\,e^{-\sqrt{2,5}\,t}$.

Сталі C_1 *і* C_2 визначимо із початкових умов:

$$t=0, \quad x=a=0.5м, \quad V=\frac{dx}{dt}=0, \quad C_1=C_2=\frac{a}{2}=0,25.$$

Запишемо частинний розв'язок рівняння:

$$x=0,25\left(e^{\sqrt{2,5}\,t}+e^{-\sqrt{2,5}\,t}\right).$$

Розв'яжемо це рівняння відносно t; позначимо $e^{\sqrt{2,5}\,t}=y$. Тоді $y^2-4xy+1=0$.

$$y_{1,2}=2x\pm\sqrt{4x^2-1}.$$

В цьому виразі знак мінус відкидається, так як при $t>0$ $e^{\sqrt{2,5}\,t}>e^{-\sqrt{2,5}\,t}$.

$$e^{\sqrt{2,5}\,t}=2x+\sqrt{4x^2-1}, \quad t=\sqrt{2,5}\;\ell n\left(2x+\sqrt{4x^2-1}\right).$$

При $x=l=4м$ одержуємо шуканий час: $t=\sqrt{2,5}\,\ell n\left(8+\sqrt{63}\right)\cong 1,75сек.$

Завдання для самостійної роботи

Задача №1

Тіло, маса якого m падає з висоти 250*м* під дією сили тяжіння, та зустрічає протидію сили тертя повітря. Припускаючи, що сила тертя пропорційна швидкості (коефіцієнт пропорційності k) встановити:

1) через скільки секунд після початку падіння тіло досягне землі?
2) закон руху $h=f\left(t\right)$.

Відповідь: 1) $t=\frac{m}{k}\ln\frac{q}{g-\frac{k}{m}v}$; 2) $h=\frac{mq}{k}t-\frac{m^2q}{k^2}\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right)$.

Задача №2

Літак починає пікірувати без початкової швидкості. Сила опору повітря пропорційна квадрату швидкості. Знайти залежність між вертикальною швидкістю в даний момент, пройденим шляхом y і максимальною швидкістю пікірування.

Відповідь: $V=V_{\max}\sqrt{1-e^{\frac{2qy}{V_{\max}^2}}}$.

Задача №3

Куля проходить через дошку товщиною 7,5*см*, яка сповільнює її рух і надає їй стале від'ємне прискорення. Швидкість кулі в момент, коли вона досягає дошки, складає 300*м/сек*, а у момент, коли вона вилітає з дошки – 150 *м/сек*. Скільки часу куля рухалась крізь дошку?

Відповідь: $t = \frac{1}{3000}$ *сек.*

Задача №4

Кисень проходить через трубку в пляшку, ємність якої один літр, а суміш кисню з повітрям витікає через другу трубку. Процес йде настільки повільно, що в кожний момент можна вважати газ у пляшці однорідним. Обчислити, скільки процентів кисню буде містити пляшка після того, як через неї пройде 10*л* газу (приймається, що повітря містить 21% кисню за об'ємом)?

Відповідь: $p = 99,9964\%$.

Задача №5

Волога, яка міститься у свіжовипеченому хлібі, випаровується в оточуюче середовище зі швидкістю, пропорційною кількості вологи у хлібі, а також різниці вологи оточуючого і насиченого повітря. Деяка кількість свіжовипеченого хліба, яка містить 3*кг* вологи, покладена в приміщення з кубатурою 100 $м^3$, початкова вологість повітря якого становила 25%. Насичене повітря при тій же температурі містить 0,12*кг* вологи на 1 $м^3$. Якщо упродовж першої доби хліб втратив половину своєї вологості, то скільки вологи залишилось в ньому через дві доби?

Відповідь: диференціальне рівняння задачі $\frac{ds}{dt} = ks(s+b)$; 0, 82 *кг*.

Задача №6

Циліндричний резервуар із вертикальною вісєю має 6м висоти і 4*м* у діаметрі. За який час спирт, який заповнює цей резервуар, витече з нього через круглий отвір у дні з радіусом 1/12*м*?

Відповідь: $t = 17,7$ *хв*.

Задача №7

Знайти добову втрату тепла (в калоріях) паропроводом, який транспортує пару з температурою $100^\circ C$. Довжина паропровода 20*м*, діаметр 30*см*. Паропровід захищений шаром бетону товщиною 10*см*. Температура зовнішньої поверхні бетону $35^\circ C$. Знайти також температуру всередині бетонного шару (прийняти коефіцієнт пропорційності $k = 225 \cdot 10^{-5}$ *кал/см граф сек*).

Вказівка: кількість тепла (у *км/сек*), яке виділяє джерело, площа якого A $см^2$ обчислюється за формулою $q = -kA\frac{du}{dx}$, де x – радіус циліндричного джерела тепла; u – температура за Цельсієм; k – коефіцієнт пропорційності. Величина $\frac{du}{dx}$ – температурний градієнт.

Відповідь: $3{,}11 \cdot 10^8$ кал/добу; $63{,}4^\circ C$.

Задача №8

Швидкість росту культури мікроорганізмів пропорційна їх кількості і кількості поживних речовин (коефіцієнт пропорційності дорівнює k). Швидкість зменшення поживних речовин пропорційна наявній кількості мікроорганізмів і часу (коефіцієнт пропорційності дорівнює k_1). На початку досліду в посудині було A_0 г мікроорганізмів і B_0 г поживних речовин. Знайти залежність кількості A мікроорганізмів і кількості B поживних речовин від часу.

Відповідь: $A = \frac{k\alpha^2}{2k_1}\left[1 - \left(\frac{1-\beta e^{\alpha kt}}{1+\beta e^{\alpha kt}}\right)\right]$, $B = \alpha \cdot \frac{1-\beta e^{\alpha kt}}{1+\beta e^{\alpha kt}}$,

де $\alpha = \sqrt{B_0^2 + \frac{2k_1}{k}A_0}$, $\beta = \frac{\alpha + B_0}{\alpha - B_0}$.

Задача №9

Моторний човен вагою 300 *кГ* рухається прямолінійно із початковою швидкістю 16*м/сек*. Опір води пропорційний швидкості човна і дорівнює 10*кГ* при швидкості 1*м/сек*. Яку відстань пройде човен, перш ніж його швидкість стане рівною 8*м/сек* та за який час він пройде цю відстань?

Відповідь: $S = 25$ м; $t = 2{,}1$ *сек.*

Задача №10

Ланцюг перекинуто через гладкий цвях так, що з одного боку звисає його частина довжиною 8*м*, а з другого боку частина довжиною 10*м*. При сковзанні прискорення пропорційне різниці довжин частин ланцюга, які звисають з обох сторін. За який час зсковзне ланцюг?

Відповідь: $t = \frac{3}{\sqrt{q}}\ln\left(9 + \sqrt{80}\right) \approx 2{,}76$ *сек.*

Задача №11

На консольний брус, довжина якого l, із закріпленим кінцем O діє рівномірно розподілене навантаження q кг на погонну одиницю довжини та зосереджена сила P, прикладена до кінця бруса A. Скласти рівняння пружної лінії та визначити прогин бруса у точці A. Жорсткість бруса EJ.

Відповідь: 1) $y = \frac{P}{2EJ}\left(lx^2 - \frac{x^3}{3}\right) + \frac{ql}{2EJ}\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{t^3}{12}\right)$;

2) прогин кінця бруса $h_A = \frac{t^3}{3EJ}\left(P + \frac{3ql}{8}\right)$.

Задача №12

Знайти форму дзеркала, яке відбиває всі промені, що виходять із однієї точки паралельно даному напрямку.

Відповідь: $x^2 = C^2 - 2Cy$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах с решениями. В 2 ч. Ч. 1: Учебное пособие для вузов. – М.: ОНИКС 21 век, 2002. – 304 с.
2. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах с решениями. В 2 ч. Ч. 2: Учебное пособие для вузов. – М.: ОНИКС 21 век, 2006. – 416 с.
3. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. Київ, АСК – 2001.
4. Дубовик В.П., Юрик І.І. та інші. Вища математика: Збірник задач: Навч. Посібник. – К.: Вища шк., 1999. – 480 с.
5. Кулініч Г.Л. та інші. Вища математика. Основні означення, приклади і задачі (навчальний посібник). – К.: Либідь, 1994 (книга перша).
6. Овчинников П.П. та інші. Вища математика: Підручник. У 2 ч. Ч. 1: Лінійна і векторна алгебра. Аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне і інтегральне числення. – К.: Техніка, 2003. – 600 с.
7. Овчинников П.П. та інші. Вища математика: Підручник. У 2 ч. Ч. 2: Диференціальні рівняння. Операційне числення. Ряди та їх застосування. Стійкість за Ляпуновим. Рівняння математичної фізики. Оптимізація і керування. Теорія ймовірностей. Числові методи. – К.: Техніка, 2000. – 792 с.
8. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления: Учеб. для втузов. В 2-х т. Т.1: - М.: Интеграл-Пресс, 2001. – 416 с.
9. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления: Учеб. для втузов. В 2-х т. Т.2:- М.: Интеграл-Пресс, 2004. – 544 с.
10. Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк М.О.Диференціальні рівняння в задачах: Навч. посібник – К.: Либідь, 2003. – 504 с.
11. Соколенко О.І., Новик Г.А. Вища математика в прикладах і задачах. – К.: Либідь, 2001.

ЗМІСТ